Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Стрелкова, Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 1, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:35:43

УДК 514.113.5+514.774.8

Н. П. Стрелкова

Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров

Замкнутые локально минимальные сети являются в некотором смысле обобщением замкнутых геодезических. Известна полная классификация замкнутых локально минимальных сетей на правильных (и вообще любых равногранных) тетраэдрах. В настоящей статье приводятся некоторые необходимые и некоторые достаточные условия того, что на данном неравногранном тетраэдре существует хотя бы одна замкнутая локально минимальная сеть.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: минимальная сеть, неравногранный тетраэдр.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена исследованию замкнутых вложенных локально минимальных сетей на поверхностях неравногранных тетраэдров. Такие сети мы будем для краткости называть просто *минимальными сетями*.

Неформально говоря, минимальная сеть – это вложенный в какое-нибудь метрическое пространство граф, длину которого нельзя уменьшить никакой малой непрерывной деформацией. На выпуклом многограннике и без упоминания малых деформаций легко определить минимальную сеть – это вложенная (несамопересекающаяся) сеть, все ребра которой являются геодезическими и в каждой вершине которой сходятся ровно три ребра под равными (по $2\pi/3$) углами.

Возникает вопрос: как такие сети устроены на многогранниках, в частности, на тетраэдрах, на каких тетраэдрах таких сетей нет, на каких есть?

Минимальные сети на правильных (и вообще на любых равногранных) тетраэдрах хорошо изучены. Точнее, ситуация следующая. В работе [1] была получена классификация минимальных сетей на плоских двумерных торах. Классификация минимальных сетей на равногранных тетраэдрах была получена в работе [2] как следствие существования разветвленного накрытия равногранного тетраэдра плоским тором. Оказывается, что на равногранных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП-2.1.1.3704) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.11.5213, № 14.740.11.0794).

тетраэдрах минимальных сетей много. В указанной работе всевозможные минимальные сети, встречающиеся на равногранных тетраэдрах, классифицируются целочисленными матрицами 2×2 специального вида. Объясняется, как определить по конкретному равногранному тетраэдру, какие из описанных минимальных сетей реализуются на нем. Из этих результатов следует, в частности, что на всяком равногранном тетраэдре существует бесконечно много существенно различных минимальных сетей. Случай неравногранных тетраэдров в работе [2] не рассматривался.

Известны некоторые результаты, касающиеся несамопересекающихся замкнутых геодезических на неравногранных тетраэдрах. Эти результаты стоит упомянуть, потому что наши минимальные сети являются в некотором смысле обобщением несамопересекающихся замкнутых геодезических. В работе [3] доказано, что всякая замкнутая геодезическая на произвольном тетраэдре в некотором (топологическом) смысле реализуется на правильном тетраэдре. Там же доказано, что среди всех тетраэдров только равногранные имеют бесконечно много существенно различных несамопересекающихся замкнутых геодезических, получены некоторые необходимые условия существования хотя бы одной замкнутой геодезической на тетраэдре. Никакого критерия существования вложенной замкнутой геодезической на неравногранном тетраэдре автору не известно. В настоящей работе замкнутые геодезические рассматриваться не будут.

О минимальных сетях на кубе и других многогранниках известно гораздо меньше, чем о минимальных сетях на равногранных тетраэдрах. Построены бесконечные серии минимальных сетей на поверхностях, ограничивающих платоновы тела (см. [4]), но исследование минимальных сетей на этих многогранниках сопряжено с целым рядом дополнительных трудностей, отсутствующих в случае равногранных тетраэдров. А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным была предложена задача исследования минимальных сетей на произвольных, не равногранных, тетраэдрах.

Возникает вопрос: на каких неравногранных тетраэдрах существует хотя бы одна минимальная сеть, а на каких не существует ни одной? Полностью ответить на этот вопрос пока не удастся, т.е. так же, как и в случае с замкнутыми геодезическими, не удастся найти ни одного критерия существования минимальной сети на тетраэдре. Найдены только некоторые необходимые и некоторые достаточные условия. Именно эти условия и будут обсуждаться в настоящей работе.

В частности, будет показано, что множество тетраэдров, обладающих минимальной сетью, устроено в некотором смысле не так просто, как можно было бы ожидать. Чтобы понять, о чем пойдет речь, рассмотрим замкнутую несамопересекающуюся геодезическую на многограннике. Она разбивает поверхность многогранника на две части с одинаковыми гауссовыми кривизнами (гауссова кривизна части – это сумма гауссовых кривизн вершин, содержащихся в этой части). Это сразу следует из теоремы Гаусса–Бонне, которую мы приведем ниже. Таким образом, чтобы на многограннике существовала

замкнутая несамопересекающаяся геодезическая, необходимо, чтобы существовал способ разбить вершины на две части с одинаковыми суммами гауссовых кривизн. Это необходимое условие существования замкнутой несамопересекающейся геодезической. Однако, как показано в работе [3], это условие не является достаточным.

В случае минимальных сетей на тетраэдрах мы сформулируем и докажем аналогичное необходимое условие на гауссовы кривизны вершин. *Полным углом* при вершине многогранника будем называть сумму плоских углов его граней при этой вершине. Оказывается, что у всякого обладающего минимальной сетью неравностороннего тетраэдра найдется пара вершин, полные углы при каждой из которых делятся на $\pi/3$ и в сумме дают меньше чем 2π . Легко проверить, что таким условиям удовлетворяют всего шесть пар полных углов:

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

(см. теорему 2). Никакого более сильного необходимого условия существования минимальной сети на тетраэдре из теоремы Гаусса–Бонне извлечь нельзя. Однако мы покажем, что это необходимое условие не является достаточным. Точнее, наличие у тетраэдра пары вершин с полными углами $(\pi/3, 4\pi/3)$ не гарантирует существования минимальной сети на этом тетраэдре (теорема 5), хотя на некоторых тетраэдрах с такой парой полных углов минимальная сеть существует (теорема 4). С другой стороны, наличие у тетраэдра любой из пяти оставшихся пар полных углов из необходимого условия влечет существование минимальной сети на этом тетраэдре (теорема 3).

Автор пользуется случаем поблагодарить А. О. Иванова и А. А. Тужилина за постановку этой задачи, оказавшейся крайне интересной, и постоянное внимание к работе.

§ 2. Предварительные результаты

Сетью топологии G в метрическом пространстве X будем называть геометрическую реализацию связного графа G в пространстве X , т.е. пару отображений f_v и f_e со следующими свойствами. Отображение f_v отображает множество V вершин графа G в пространство X , отображение f_e отображает множество E ребер графа G в пространство кривых в X , причем так, что для любых двух вершин $v_1, v_2 \in V$, соединенных ребром (которое мы обозначим через v_1v_2), кривая $f_e(v_1v_2)$ соединяет точки $f_v(v_1)$ и $f_v(v_2)$.

Будем предполагать, что любые две точки пространства X могут быть соединены спрямляемой кривой.

Под кривой здесь всюду понимается непрерывный образ отрезка, рассматриваемый как множество точек, т.е. параметризация не фиксирована.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Будем использовать термин “кривая”, когда речь идет о множестве точек, а в случаях, когда нам будет важно само отображение отрезка в X , будем называть это отображение *путем*. Под термином “сеть” мы будем

иногда понимать не сами отображения, а их образ – подмножество точек в X , тем более что в нашем случае сетей эти два понимания эквивалентны.

Вершинами и *ребрами сети* будем называть соответственно точки и кривые, являющиеся образами вершин и ребер графа при отображениях f_v и f_e . Мы всегда будем предполагать, что ребра сети реализованы как спрямляемые кривые.

Длиной сети будем называть сумму длин ее ребер.

Связной будем называть сеть, реализующую связный граф.

Зафиксируем какое-нибудь конечное множество точек в X , это множество точек будем называть *граничным множеством* или *границей*. Связную сеть, содержащую среди своих вершин все точки из граничного множества, будем называть *кратчайшей сетью с данной границей*, если она имеет меньшую длину, чем любая другая связная сеть, содержащая среди своих вершин все точки из граничного множества.

Пространство X у нас чаще всего будет плоскостью или поверхностью выпуклого многогранника с внутренней метрикой. Напомним, что во внутренней метрике расстояние между двумя точками равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти две точки (и лежащих в пространстве, внутренняя метрика которого рассматривается).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Везде ниже под термином “многогранник” будем понимать выпуклый многогранник, хотя многие утверждения имеют смысл и в случае невыпуклого многогранника.

Геодезической будем называть локально кратчайший путь, а кратчайший путь, соединяющий две точки пространства X , будем называть *кратчайшей геодезической* (или просто *кратчайшей*). Если не оговорено противное, все геодезические будем считать несамопересекающимися. Термин *X - Y -геодезическая* будет всюду означать “геодезическая с концами X и Y ”.

Замкнутой вложенной локально минимальной сетью на поверхности многогранника будем называть геометрическую реализацию графа на поверхности многогранника, если:

- 1) соответствие f_v между вершинами графа и вершинами сети взаимно однозначно, различные ребра сети могут пересекаться только по своим концам;
- 2) ребра сети являются геодезическими на поверхности многогранника;
- 3) степень каждой вершины сети равна трем и ребра, сходящиеся в вершине, образуют три угла по $2\pi/3$.

Вообще говоря, локально минимальные сети можно определять в произвольном X как сети с границей, локально являющиеся кратчайшими сетями. Данное только что определение замкнутых вложенных локально минимальных сетей соответствует случаю, когда граничное множество пусто.

Мы будем часто для краткости называть замкнутые вложенные локально минимальные сети просто *минимальными сетями*.

Через $\circ A$ будем обозначать полный угол многогранника при вершине A , т.е. сумму плоских углов его граней при этой вершине. *Гауссовой кривизной*

вершины A будем называть величину $2\pi - \circ A$. Иногда будем говорить, что все остальные точки многогранника имеют нулевую кривизну.

Тетраэдр будем называть *равногранным*, если все его грани равны между собой. Существует много условий, эквивалентных равногранности тетраэдра. Нам понадобится следующий несложный факт.

ЛЕММА 1 (см. [5; задача 2.32]). *Все полные углы тетраэдра равны π тогда и только тогда, когда он равногранный.*

Геодезической ломаной (или просто *ломаной*) на многограннике будем называть путь, который можно разбить на конечное число путей, каждый из которых является геодезической. Минимальное количество путей в таком разбиении будем называть *числом звеньев* геодезической ломаной. (Иногда мы будем рассматривать геодезическую ломаную как множество точек, т.е. вместо отображения рассматривать его образ. Но часто нам будет важно именно отображение, поэтому мы и определяем ломаную как путь.)

Геодезическим многоугольником (или просто *многоугольником*) будем называть непустое открытое односвязное подмножество поверхности многогранника, границу которого можно представить как замкнутую геодезическую ломаную. (Точнее, множество граничных точек совпадает с образом некоторой замкнутой геодезической ломаной.) Если границу нельзя представить как замкнутую геодезическую ломаную меньше чем с n звеньями, а с n звеньями – можно, то многоугольник будем называть *n -угольником*.

ПРИМЕР. Поверхность тетраэдра с выброшенным ребром – это двуугольник по нашему определению.

Нам понадобится утверждение о сумме углов многоугольника на поверхности многогранника – аналог теоремы Гаусса–Бонне для многогранников, который мы тоже для краткости будем называть *теоремой Гаусса–Бонне*.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Гаусса–Бонне; см. [6]). *Пусть на поверхности сферического многогранника дан n -угольник с углами α_i . Пусть этот n -угольник содержит вершины многогранника с гауссовыми кривизнами K_j . Тогда*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n-2) + \sum_j K_j.$$

Так же, как в книге [6], *разверткой* будем называть совокупность конечного числа простых (вложенных без самопересечений в плоскость) плоских многоугольников с указанным правилом отождествления их сторон. Отождествить две стороны – значит указать взаимно однозначное, сохраняющее расстояние соответствие между точками этих двух сторон и отождествить соответствующие точки. Некоторые стороны многоугольников могут ни с чем не отождествляться: их точки составляют *границу развертки*. Мы будем всегда предполагать, что никакая сторона не отождествляется более чем с одной другой стороной и что развертка линейно связна.

Понятие кривизны точки развертки полностью аналогично данному выше определению гауссовой кривизны вершины многогранника.

Мы будем рассматривать внутреннюю метрику развертки (пути, соединяющие две точки, могут переходить с многоугольника на многоугольник через отождествленные стороны). На развертках можно определить геодезические ломаные и многоугольники точно так же, как на многогранниках.

Ясно, что всякий многогранник можно рассматривать как развертку, т.е. всякий многогранник изометричен некоторой развертке в смысле внутренних метрик. В книге [6] показано, что и всякий геодезический многоугольник M на многограннике изометричен некоторой развертке. Подчеркнем, что при этом никакие стороны многоугольников развертки, соответствующие ограничивающей многоугольник M ломаной, не отождествляются между собой даже в случае, если ломаная на многограннике имела кратные точки (как в приведенном выше примере). Определенный выше геодезический многоугольник на многограннике – открытое подмножество многогранника в смысле внутренней метрики и, конечно, не является компактом. Однако соответствующую ему развертку можно считать состоящей из замкнутых многоугольников, и мы будем так делать.

Нам пригодится следующее утверждение.

ЛЕММА 2 (см. [6]). *В любой развертке, не имеющей точек отрицательной кривизны, каждые две точки можно соединить кратчайшей, т.е. кривой, длина которой равна внутреннему расстоянию (на развертке) между этими точками. Эта кратчайшая является геодезической ломаной. Причем преломляться кратчайшая может только в вершинах границы развертки, углы в которых больше π .*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любые две точки выпуклого многогранника можно соединить кратчайшей.*

Будем называть *ячейкой сети* связное открытое подмножество поверхности тетраэдра, не содержащее точек сети, но такое, что его граница целиком состоит из точек сети. Ясно, что всякая ячейка минимальной сети является геодезическим многоугольником в смысле нашего определения, и из определения минимальной сети вытекает, что все углы этого многоугольника равны $2\pi/3$.

Рассмотрим соответствующую этому многоугольнику развертку. По лемме 2 любые две точки этой развертки можно соединить кратчайшей, которая будет ломаной на развертке. Но поскольку все углы нашего многоугольника меньше π , эта ломаная не может нигде преломляться и обязательно будет геодезической на развертке. Более того, легко показать, что если концы геодезической лежат внутри развертки, то и сама геодезическая не имеет с границей развертки общих точек. Следовательно, соответствующая ей кривая на тетраэдре будет геодезической, лежащей внутри ячейки. Таким образом, доказана

ЛЕММА 3. *Любые две точки внутри ячейки минимальной сети на тетраэдре можно соединить геодезической, лежащей внутри этой ячейки.*

Пусть на многограннике дан геодезический многоугольник, не содержащий вершин многогранника. Нам пригодится утверждение о его разворачивании на плоскость.

ЛЕММА 4 (см. [6]). *Геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, можно развернуть на плоскость с той, однако, возможной особенностью, что он будет перекрываться сам с собой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В книге [6] доказано, что всякий геодезический треугольник изометричен в смысле внутренних метрик некоторому треугольнику на плоскости. Затем там же доказано, что всякий геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, можно разбить диагоналями на несколько треугольников. Для каждого из этих треугольников рассматривается изометричный ему плоский треугольник и они располагаются на плоскости так, чтобы соответствующие диагоналям стороны совпадали (при этом может случиться, что некоторые треугольники перекрываются). Объединение получившихся треугольников на плоскости и будет многоугольником, о котором идет речь в лемме. Таким образом, последнюю лемму можно понимать следующим образом: *геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, изометричен развертке, состоящей из конечного числа треугольников, которые можно расположить на плоскости так, что всякая пара их отождествленных сторон просто совпадает – представляет собой один и тот же отрезок на плоскости; при этом может получиться, что различные треугольники перекрываются.*

§ 3. Минимальные сети на неравногранных тетраэдрах

ТЕОРЕМА 2. *Если на поверхности неравногранного тетраэдра существует минимальная сеть, то набор полных углов тетраэдра имеет один из шести видов:*

- (1-1) $\{\pi/3, \pi/3, \alpha, \beta\}$;
- (1-2) $\{\pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta\}$;
- (1-3) $\{\pi/3, \pi, \alpha, \beta\}$;
- (1-4) $\{\pi/3, 4\pi/3, \alpha, \beta\}$;
- (2-2) $\{2\pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta\}$;
- (2-3) $\{2\pi/3, \pi, \alpha, \beta\}$.

Записанное в круглых скобках сочетание цифр будем называть *типом* соответствующего тетраэдра. Один и тот же тетраэдр может принадлежать нескольким типам.

Из теоремы Гаусса–Бонне в нашем случае непосредственно вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Если ячейка минимальной сети не содержит внутри себя вершин тетраэдра, то эта ячейка – шестиугольник.*

Если ячейка, представляющая собой n -угольник, содержит одну вершину тетраэдра, то полный угол при этой вершине равен $n\pi/3$.

Если ячейка, представляющая собой n -угольник, содержит две вершины тетраэдра, то сумма полных углов при этих вершинах равна $2\pi + \pi n/3$.

Три или четыре вершины тетраэдра ячейка минимальной сети содержать не может.

Доказательство леммы сразу получается из теоремы Гаусса–Бонне с учетом $\alpha_i = 2\pi/3$ и $K_j = 2\pi - \circ A_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используем лемму 5. Пусть на тетраэдре $ABCD$ существует минимальная сеть. Тогда каждая вершина тетраэдра должна лежать внутри какой-то ячейки сети. В соответствии с леммой 5 ячейки сети могут содержать не более двух вершин тетраэдра. Рассмотрим два случая.

1) Пусть нашлась n -угольная ячейка, содержащая две вершины тетраэдра (пусть это вершины A и B). Тогда сумма полных углов при этих вершинах равна

$$\circ A + \circ B = 2\pi + \frac{\pi n}{3},$$

т.е. больше чем 2π . Поскольку сумма всех полных углов тетраэдра равна 4π , то сумма полных углов при вершинах C и D меньше 2π . Это означает, что вершины C и D не могут содержаться в общей ячейке сети, т.е. каждая из вершин C и D содержится в отдельной ячейке, и по лемме 5 полные углы при каждой из них делятся на $\pi/3$. Простой перебор дает приведенный в теореме список.

2) Если же в минимальной сети нет ячеек, содержащих две вершины тетраэдра, то каждая вершина тетраэдра содержится в отдельной ячейке сети. И по лемме 5 полный угол при каждой из вершин тетраэдра делится на $\pi/3$. Если сумма полных углов при любых двух вершинах тетраэдра равна 2π , то очевидно, что полный угол при каждой из его вершин равен π , и тогда это равногранный тетраэдр (лемма 1). Иначе существуют две вершины, сумма полных углов при которых меньше 2π , и мы фактически получаем набор полных углов из варианта 1). Доказательство теоремы окончено.

Итак, отметим, что топологически минимальные сети на тетраэдрах бывают двух видов. Некоторые из них содержат ровно четыре шестигульные ячейки, каждая из которых обходит ровно одну вершину тетраэдра. Такие сети мы будем называть *1-1-1-1-сетями*. Например, именно такие сети реализуются на правильном тетраэдре. Остальные минимальные сети содержат ровно три шестигульные ячейки, т.е. какие-то две вершины лежат в общей ячейке, а две другие – в отдельных ячейках. Такие сети будем называть *2-1-1-сетями*.

Ясно (см. лемму 5), что 1-1-1-1-сети могут существовать только на тетраэдре, полные углы при всех вершинах которого делятся на $\pi/3$. Таким образом, тетраэдры, на которых могут существовать 1-1-1-1-сети, образуют в некотором смысле множество меры нуль по сравнению с множеством тетраэдров, на которых могут существовать 2-1-1-сети; это естественно было бы предположить в силу необходимого условия из теоремы 2 и это будет следовать из теоремы 3, которую мы докажем ниже. Более того, из теоремы 3 вытекает, что

если на тетраэдре существует 1-1-1-сеть, то на этом тетраэдре существует 2-1-1-сеть. (Дело в том, что если полные углы при всех вершинах тетраэдра делятся на $\pi/3$, то тетраэдр обязательно принадлежит хотя бы одному из типов, для которых в теореме 3 доказано существование 2-1-1-сети.)

Теперь мы переходим к теоремам, касающимся существования минимальных сетей на тетраэдрах введенных выше типов.

ТЕОРЕМА 3. *На любом тетраэдре любого из перечисленных в теореме 2 типов, кроме типа (1-4), существует минимальная сеть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого типа тетраэдров, кроме (1-4), построим свой граф. Граф, соответствующий типу, может быть реализован на любом тетраэдре этого типа как минимальная сеть. Для описания этой реализации удобно использовать специальные развертки тетраэдра, которые мы будем называть *симметричными развертками*.

Рис. 1. Симметричная развертка относительно ребра AB

Объясним, как устроена симметричная развертка относительно ребра AB тетраэдра $ABCD$ (рис. 1). Найдем на поверхности трехгранного угла A луч, который при разрезе по ребру AB и последующей развертке трехгранного угла будет биссектрисой получившегося плоского угла. Такой луч будем называть *биссектрисой угла A относительно ребра AB* . Биссектриса угла A относительно AB лежит на грани ACD – это следует из неравенства треугольника для трехгранного угла. Пусть биссектриса угла A относительно AB пересекает CD в точке M , а биссектриса угла B относительно BA пересекает CD в точке N .

Рис. 2. Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-1)

Рис. 3. Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-2)

Рис. 4. Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-3)

Рис. 5. Минимальная сеть на тетраэдре типа (2-2)

Сделаем три разреза поверхности тетраэдра: вдоль ребра CD , вдоль отрезка AM и вдоль отрезка BN . Теперь развернем тетраэдр на плоскость. Получится плоский вложенный многоугольник, причем диагональ AB у него внутренняя и лежит на биссектрисах его углов A и B . Ясно, что такая развертка существует для любого тетраэдра.

Рис. 6. Минимальная сеть на тетраэдре типа (2-3)

Для построения примеров рассмотрим симметричные развертки тетраэдров относительно ребра, соединяющего те две вершины тетраэдра, полные углы которых по определению типа делятся на $\pi/3$. На рис. 2–6 для каждого типа тетраэдров изображен граф реализуемой сети, вид сети на тетраэдре и ее построение на соответствующей симметричной развертке. Доказательство того, что построение указанных сетей на симметричных развертках можно провести для всех тетраэдров данного типа, очень простое, мы его приводить не будем. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Существуют тетраэдры типа (1-4), не принадлежащие другим типам, на которых есть минимальная сеть.*

Рис. 7. Тетраэдр типа (1-4): пример с минимальной сетью

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в тетраэдре $ABCD$ полные углы при вершинах B и A равны $\pi/3$ и $4\pi/3$ соответственно и выполняется следующее условие: ребро AB составляет с ребрами AC и AD углы, большие $\pi/6$. Тогда на этом тетраэдре существует сеть со структурой, изображенной на рис. 7. Там же на симметричной развертке показано, как эта сеть реализуется на тетраэдре. И одновременно на рис. 7 видно, что тетраэдры типа (1-4), обладающие указанным условием, существуют. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Существуют тетраэдры типа (1-4), на которых нет минимальной сети.*

§ 4. Доказательство теоремы 5

4.1. Мы докажем отсутствие сетей на всяком тетраэдре $ABCD$, обладающем свойствами:

- 1) $\angle A = 4\pi/3$, $\angle B = \pi/3$, $4\pi/3 < \angle D < 5\pi/3$, $2\pi/3 < \angle C < \pi$;
- 2) $|AC|/|CD| < \varepsilon = 1/24$ и $|BD|/|CD| < \varepsilon$, где $|AC|$, $|BD|$ и $|CD|$ – длины соответствующих ребер.

ЛЕММА 6. *Существует тетраэдр, обладающий свойствами 1) и 2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим реберную развертку такого тетраэдра (рис. 8).

Рис. 8. Тетраэдр типа (1-4): пример без минимальных сетей. Схема построения

Рассмотрим правильный треугольник BD_1D_2 со стороной b . Проведем биссектрису угла D_1BD_2 – луч BY . Будем считать этот луч *горизонтальным*. Будем считать, что точка D_1 лежит *ниже* этого луча BY и точка Y находится *правее* точки B . Далее термины “ниже” и “правее” будем понимать в этом смысле. Зададим некоторое расстояние $d > b/\varepsilon$. Точку C_1 выберем так, что $D_1C_1 = d$ и при этом C_1 лежит ниже BY , но выше D_1 .

Теперь выберем точку C_2 так, чтобы выполнялось

$$\angle BD_1C_1 < \angle BD_2C_2 < \frac{5\pi}{3} - \angle BD_1C_1, \quad D_2C_2 = d.$$

Иначе говоря, точка C_2 – это любая точка дуги окружности радиуса d с центром в D_2 , ограниченная лучом D_2Z , сонаправленным с лучом D_1C_1 , и лучом, симметричным лучу D_1C_1 относительно прямой BY .

Построим равнобедренный треугольник с основанием C_1C_2 , углом $\pi/6$ при основании и вершиной A , лежащей в той же полуплоскости относительно C_1C_2 ,

что и точка D_1 . Ясно, что C_2 находится выше BY и, более того, C_2 находится дальше от BY , чем C_1 , поэтому середина отрезка C_1C_2 лежит выше BY . Кроме того, точка C_2 лежит правее точки C_1 , т.е. проекция отрезка D_2C_2 на BY длиннее проекции D_1C_1 , поэтому точка A лежит выше середины отрезка C_1C_2 и, как следствие, выше BY .

Несложно проверить, что

$$\frac{5\pi}{6} > \angle D_1C_1C_2 > \angle C_1C_2D_2 > \angle D_2D_1C_1 > \frac{\pi}{3}.$$

Из этих неравенств, в частности, следует, что точка A находится внутри пятиугольника $C_1D_1BD_2C_2$.

Проводим отрезки AB , D_2A , BC_1 . Образовавшиеся треугольники – грани нашего будущего тетраэдра, в котором будут склеены стороны BD_1 и BD_2 , D_1C_1 и D_2C_2 , C_1A и C_2A . Для того чтобы показать, что эта развертка изометрична некоторому вложенному в трехмерное пространство тетраэдру, достаточно проверить неравенство треугольника для углов при вершине B . Проверяем: $\angle D_2BA + \angle ABC_1 > \angle C_1BD_1$ и $\angle C_1BD_1 + \angle D_1BA > \angle ABD_2$ в силу выбора точек A и C_1 выше и ниже биссектрисы угла B , а $\angle ABC_1 < \pi/6$ при всяком $d > b$, поэтому $\angle ABC_1 < \angle ABD_2 + \angle D_1BC_1$.

Проверяем свойство 1). Первые три соотношения в нем выполняются просто по нашему построению, и из них следуют неравенства для $\circ C$ (так как сумма полных углов любого тетраэдра равна 4π). Проверяем свойство 2): $|BD|/|CD| = b/d < \varepsilon$ по построению, а

$$|AC| = AC_1 < C_1C_2 < C_1Z = D_1D_2 = |BD| < \varepsilon \cdot |CD|,$$

поэтому $|AC|/|CD| < \varepsilon$. Таким образом, лемма доказана.

4.2. Идея доказательства теоремы 5. Пусть на некотором тетраэдре со свойствами 1) и 2) существует минимальная сеть. Будем изучать эту сеть и придем к противоречию, которое покажет, что наше предположение неверно.

Поскольку полные углы при вершинах C и D не кратны $\pi/3$, то никакая ячейка минимальной сети не может содержать только одну из этих вершин, значит, существует ячейка минимальной сети, содержащая внутри себя обе вершины C и D .

Поскольку у нас малы отношения $|AC|/|CD|$ и $|BD|/|CD|$, развертка нашего тетраэдра, подобная изображенной на рис. 8, будет очень “узкой” и “длинной”. Если бы было известно, что минимальная сеть на тетраэдре не пересекает ребро CD , то получалось бы, что на очень “вытянутой” реберной развертке, подобной изображенной на рис. 8, имеется минимальная сеть, не пересекающая “длинные” ребра C_1D_1 и C_2D_2 . Можно показать, и мы это сделаем позже, что при “достаточно сильной вытянутости” на такой развертке не может быть минимальной сети.

Но дополнительная трудность заключается в том, что, вообще говоря, ни из каких соображений не следует, что минимальная сеть не пересекает ребро CD

нашего тетраэдра. Мы знаем только, что внутри соответствующей ячейки минимальной сети содержится какая-то C - D -геодезическая (лемма 3), и эта геодезическая совсем не обязательно является ребром. Можно показать, что при наших условиях на тетраэдре обязательно есть хотя бы одна C - D -геодезическая, отличная от ребра CD , и таких геодезических может быть в зависимости от выбора тетраэдра сколь угодно много. Таким образом, вообще говоря, может оказаться, что на реберной развертке, подобной изображенной на рис. 8, имеется минимальная сеть, во многих местах пересекающая “длинные” стороны C_1D_1 и C_2D_2 . В таком случае в отличие от ситуации, когда сеть не пересекает “длинные” стороны, не удастся просто объяснить, почему минимальной сети не может быть.

Поэтому в общем случае мы сделаем нереберную развертку, которая будет напоминать реберную развертку из леммы 6, так, чтобы роль “длинных” сторон играла та C - D -геодезическая, с которой минимальная сеть не пересекается. Мы покажем, что при наших предположениях всякая такая развертка будет “достаточно вытянутой”, и потому на всякой такой развертке не сможет находиться минимальная сеть.

Через T будем обозначать поверхность тетраэдра.

4.3. Для доказательства теоремы 5 нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 7. Пусть дана C - D -геодезическая γ . Тогда можно найти на γ две точки X и Y , отличные от точек C и D , и провести две геодезические A - X и B - Y так, что $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$ – геодезический многоугольник, не содержащий вершин тетраэдра. Причем для любого $\delta > 0$ это можно сделать так, чтобы выполнялось $|A-X| < |AC| + \delta$ и $|B-Y| < |BD| + \delta$, где $|A-X|$, $|B-Y|$ – длины геодезических, $|AC|$, $|BD|$ – длины ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на ребре AC точку геодезической γ , ближайшую к вершине A , и назовем ее X . Этой точкой может оказаться и сама вершина C . На ребре BD рассмотрим точку геодезической γ , ближайшую к вершине B , и назовем ее Y . Участки AX и BY ребер AC и BD будут искомыми геодезическими. Ясно, что геодезические AX и BY не пересекаются между собой и не имеют с γ общих точек, кроме своих концов X и Y . Поэтому ясно, что $T \setminus (\gamma \cup AX \cup BY)$ – геодезический многоугольник, не содержащий внутри себя вершин тетраэдра.

Приведенные в формулировке теоремы неравенства выполняются для любого $\delta > 0$, поскольку выбранные нами геодезические AX и BY – это части соответствующих ребер. Правда, построенная нами точка X вполне может совпадать с C . В таком случае возьмем в качестве X точку на геодезической γ , близкую к C , и рассмотрим A - X -кратчайшую γ . Аналогично поступим в случае $Y = D$. При выборе новых точек достаточно близко к концам геодезической $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$ по-прежнему будет гомеоморфно диску и неравенства на длины $|A-X|$ и $|B-Y|$ останутся верными. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Выбором $\delta > 0$ можно добиться, чтобы для длин $|A-X|$ и $|B-Y|$ выполнялись те же оценки, что и для $|AC|$ и $|BD|$ в свойстве 2) нашего тетраэдра, а именно $|A-X| < \varepsilon|CD|$ и $|B-Y| < \varepsilon|CD|$.

Итак, в соответствии с леммами 3 и 7 проведем в ячейке, содержащей вершины C и D тетраэдра, C - D -геодезическую γ , геодезические A - X и B - Y (выбираем δ , описанное в следствии 2). Сделаем изометрию геодезического многоугольника $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$ на плоский, не обязательно вложенный многоугольник M (лемма 4).

Рис. 9. Развертка

Рассмотрим границу многоугольника M . Вершины A и B разбивают ее на две части. Возможны два случая: либо вершины C и D лежат в разных частях, либо они обе лежат в одной части границы. В первом случае получаем $M = AX_1CY_1BY_2DX_2$, во втором – $M = AX_1Y_1BY_2DCX_2$ (рис. 9). Отметим простые свойства и введем новые обозначения: $AX_1 = AX_2 = |A-X| =: a$, $BY_1 = BY_2 = |B-Y| =: b$, $\angle U = \circ U$ для $U = A, B, C, D$, $|\gamma| =: d$, и в первом случае $CX_1 + X_2D = DY_2 + Y_1C = d$, а во втором случае $CD = d = DY_2 + Y_1X_1 + X_2C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Введенные только что длины b и d – это параметры новой развертки тетраэдра, соответствующей некоторой минимальной сети. Они совсем не обязательно совпадают с параметрами b и d , которые мы вводили, когда строили развертку в лемме 6.

ЛЕММА 8 (свойство вытянутости). Построенный нами многоугольник M обладает свойствами

$$a < \varepsilon d, \quad b < \varepsilon d, \quad AB > \left(\frac{1}{4} - 2\varepsilon\right)d,$$

где AB – длина отрезка AB на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два неравенства непосредственно следуют из нашего построения. Достаточно заметить, что кратчайшая C - D -геодезическая – это ребро CD . Поэтому $|A-X| < \varepsilon|CD| \leq \varepsilon|\gamma| = \varepsilon d$ и точно так же $|B-Y| < \varepsilon d$.

Теперь оценим снизу расстояние (на плоскости) между вершинами A и B многоугольника. Ясно, что в любом случае $AB \geq X_1Y_1 - a - b > X_1Y_1 - 2\varepsilon d$ и $AB \geq X_2Y_2 - 2\varepsilon d$. Достаточно показать, что либо X_1Y_1 , либо X_2Y_2 больше чем $d/4$. Сделаем это.

Рассмотрим первый случай, изображенный на рис. 9 сверху.

Если $X_1C \geq d/2$, рассмотрим $\triangle X_1CY_1$. В этом треугольнике $2\pi/3 < \angle C < \pi$, поэтому сторона X_1Y_1 наибольшая и, значит,

$$X_1Y_1 > \frac{d}{2} > \frac{d}{4}.$$

Если же $X_1C < d/2$, то $X_2D > d/2$ и мы рассмотрим $\triangle X_2DY_2$. Для его угла D верно $\pi/3 < \angle D < 2\pi/3$. Тогда

$$X_2Y_2 \geq X_2D \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{d}{4}.$$

Теперь рассмотрим второй случай, изображенный на рис. 9 внизу. Точно так же, как выше, из $\triangle Y_2DC$ получаем оценку $Y_2C > DC \cdot \sqrt{3}/2 > d/4$. Кроме того, ясно, что $DC > DY_2$, и потому в $\triangle Y_2DC$ верно $\angle DCY_2 < \pi/3$. Далее,

$$\pi + \frac{\pi}{3} > \angle DCX_2 + \angle DCY_2 = \angle Y_2CX_2 > \angle DCX_2 > \frac{2\pi}{3}.$$

Поэтому в $\triangle Y_2CX_2$ угол C больше $2\pi/3$ и сторона Y_2X_2 наибольшая. Итак, $X_2Y_2 > Y_2C > d/4$, что и требовалось.

Рассмотрим на многоугольнике M образ нашей минимальной сети. Локальная структура этой сети внутри M будет такой же, как у всех замкнутых локально минимальных сетей на плоскости: ребра будут отрезками, в каждой вершине будет сходиться по три ребра под равными углами. Кроме того, наша сеть будет иметь общие точки только со сторонами AX_1 , AX_2 , BY_1 , BY_2 многоугольника M в силу выбора C - D -геодезической γ на тетраэдре. На сторонах AX_1 и AX_2 , BY_1 и BY_2 и в их окрестности сеть устроена таким образом, что при склейке соответствующих сторон наблюдается та же локальная структура плоской замкнутой локально минимальной сети.

ЛЕММА 9. Каждый узел сети расположен либо в круге с центром A радиуса $2a$, либо в круге с центром B радиуса $2b$.

Эти круги не пересекаются.

В каждом из кругов есть хотя бы один узел сети; существует хотя бы одно ребро, соединяющее узлы из разных кругов, и все такие ребра параллельны друг другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть сетевой геодезической минимальной сети на плоскости путь, состоящий из ребер сети только двух фиксированных направлений.

Рассмотрим произвольный узел U нашей сети, находящийся внутри многоугольника M . Через этот узел U проходят три сетевые геодезические, т.е. из этого узла выходят шесть лучей сетевых геодезических. Выберем три несоседних луча, назовем их x , y и z (рис. 10). Каждый из этих лучей сетевых геодезических должен оканчиваться на границе многоугольника, точнее, на сторонах AX_1 , AX_2 , BY_1 , BY_2 . Значит, либо найдутся два луча, оканчивающихся на паре сторон AX_1 , AX_2 , либо найдутся два луча, оканчивающихся на паре сторон BY_1 , BY_2 . Пусть эти два луча x и y , а X , Y – точки, в которых они выходят на границу многоугольника. Тогда $\angle XUY > \pi/3$; это следует из геометрии сети (см. рис. 10). Множество точек, где может располагаться U , с учетом этой оценки изображено на рис. 10. Легко показать, что выполняется хотя бы одно из неравенств $AU < 2a$, $BU < 2b$.

Поскольку у нас выполняется свойство вытянутости (лемма 8), то ясно, что для достаточно маленьких ε два круга, в которых расположены все узлы сети, не пересекаются (см. рис. 10). (Легко проверить, что выбранное выше $\varepsilon = 1/24$ достаточно маленькое.)

Рис. 10. Каждый узел сети “близок” либо к вершине A , либо к B

Очевидно, что сеть не может располагаться целиком в одном из кругов (ведь у исходной минимальной сети на тетраэдре была ячейка, содержащая ровно две вершины C и D), и в силу связности существует ребро, пересекающееся с обоими кругами. Вообще говоря, отсюда еще не следует наличие узлов сети в обоих кругах: ребро могло бы проходить через оба круга, хотя его концы лежат в одном и том же круге, и именно так было в примерах минимальных сетей на тетраэдрах типа (1-3) и (2-3) (см. рис. 4 и 6). Однако в этих примерах ребро-геодезическая, обогнув вершину с полным углом π , “поворачивалось” на угол π и, таким образом, часть ребра от окрестности одной вершины тетраэдра к окрестности второй вершины и часть того же ребра от второй вершины к первой оказывались параллельны друг другу. Ясно, что это возможно только при обходе вершины с полным углом π . Сейчас мы докажем, что в нашем случае любые два отрезка сети с концами в разных кругах должны быть парал-

лельны. Из этого будет, в частности, следовать, что никакое ребро с концами в одном круге не может пересекаться со вторым кругом. Под отрезком сети здесь понимается отрезок на плоскости, являющийся ребром или частью ребра.

Рассмотрим два отрезка сети, каждый из которых соединяет точки из разных кругов, и пусть продолжения этих отрезков пересекаются в некоторой точке P (сами отрезки, конечно, пересекаться не могут). Рассмотрим угол с вершиной P , стороны которого содержат наши отрезки. Тогда этот угол не меньше чем $\pi/3$ и, с другой стороны, легко показать, что его стороны пересекают в некоторых точках P_1, P_2 либо пару сторон AX_1, AX_2 , либо пару сторон BY_1, BY_2 . Тогда по доказанному выше точка P и, следовательно, весь треугольник PP_1P_2 лежат в соответствующем круге, что противоречит тому, что выбранные отрезки соединяли точки из разных кругов.

Итак, в силу вытянутости развертки все отрезки сети, идущие из одного круга в другой, параллельны друг другу, а из-за того, что полные углы вершин A и B не равны π , никакое ребро с концами в одном круге не может пересекать другой круг. Значит, в каждом круге есть хотя бы один узел сети.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В примере минимальной сети на тетраэдре рассматриваемого сейчас типа (1-4) (см. рис. 7) тетраэдр не обладал свойством вытянутости и потому, говоря неформально, отрезки сети, соединяющие точки окрестностей разных вершин, могли быть не параллельны, что и позволило построить минимальную сеть.

Теперь докажем, что на таком многоугольнике не может располагаться образ минимальной сети.

Рассмотрим часть сети, попавшую в окрестность вершины A . Покажем, что уже эта часть существовать не может при наших условиях. Точнее, при условиях, что $\angle A = 4\pi/3$, что все ребра сети, выходящие из окрестности, идут в одном направлении, и при условиях согласованности при склейке.

Рис. 11. Невозможность построить сеть в окрестности вершины A

Рассмотрим узел U из окрестности точки A (лемма 9). Пусть ребро z выходит из него в направлении ребер, соединяющих окрестности. Рассмотрим

сетевую геодезическую, не содержащую ребер этого направления и проходящую через U (рис. 11).

Эта сетевая геодезическая должна в двух каких-то точках выходить на стороны AX_1 , AX_2 (может быть, на одну, может быть, на обе), ведь она не содержит ребер направления z и потому не может “уйти” из окрестности вершины A и пересекать стороны BY_1 , BY_2 . Тогда эта сетевая геодезическая и стороны AX_1 , AX_2 ограничивают некоторый многоугольник. Углы этого многоугольника в точках выхода сетевой геодезической на границу будут острыми (это следует из того, что угол при вершине U равен $2\pi/3$). Рассмотрим дальнюю от A точку выхода сетевой геодезической на границу, назовем ее точкой X .

Проведем через точку A лучи As и At , сонаправленные с ребрами нашей сетевой геодезической, если идти по ней из U в X (речь идет о сонаправленности лучей на плоскости). При этом один из лучей, пусть At , обязательно будет выходить из A во внешность многоугольника, а другой, As , будет выходить из A во внутренность многоугольника. Рассмотрим луч At' , дополнительный к лучу As . Заметим, что At' обязательно будет выходить из A во внутренность многоугольника. Из свойств нашего многоугольника следует, что лучи As и At' пересекут стороны, соответствующие геодезической γ . Для удобства перекроим наш многоугольник, разрезав его по лучу At' и склеив по сторонам AX_1 , AX_2 . Теперь стороны многоугольника, выходящие из A , будут лежать на лучах At и At' . Ясно, что луч нашей сетевой геодезической в точке X находится в секторе с раствором $\pi/3$, ограниченном лучами As и At и ограниченном кусками сторон, соответствующих γ . При этом ребра сетевой геодезической сонаправлены лучам сектора, поэтому луч сетевой геодезической не может выйти за пределы сектора через эти лучи, а на последний участок границы сектора он не может выйти, так как сеть не имела общих точек с γ . Но и заиклиться этот луч, очевидно, не может, так же, как и всякая сетевая геодезическая на плоскости. Получаем противоречие, ведь у нашей сети по определению конечное число вершин и сеть замкнута: сетевая геодезическая не может кончиться в какой-то внутренней точке многоугольника. Значит, на таком многоугольнике не может располагаться образ минимальной сети.

Таким образом, теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Последнее рассуждение существенно опирается на тот факт, что величина полного угла $\circ A = 4\pi/3$. В случае полных углов $\pi/3$ и $2\pi/3$ построение сети с узлом в окрестности вершины и с тем же условием выхода из окрестности ребер только одного направления возможно (см. рис. 2–6), а в случае полного угла π , как уже отмечалось выше, возможно построение минимальной сети без узлов в окрестности вершины с этим полным углом.

Список литературы

- [1] А. О. Иванов, И. В. Птицына, А. А. Тужилин, “Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах”, *Матем. сб.*, **183**:12 (1992), 3–44; англ. пер.: А. О. Ivanov, I. V. Ptitsyna, A. A. Tuzhilin, “Classification of closed minimal

- networks on flat two-dimensional tori”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 391–425.
- [2] И. В. Птицына, “Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах”, *Матем. сб.*, **185**:5 (1994), 119–138; англ. пер.: I. V. Ptitsyna, “Classification of closed minimal networks on tetrahedra”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 101–116.
- [3] В. Ю. Протасов, “Замкнутые геодезические на поверхности симплекса”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 103–120; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Closed geodesics on the surface of a simplex”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 243–260.
- [4] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003.
- [5] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, М., 1989.
- [6] А. Д. Александров, *Избранные труды*, т. 2: *Выпуклые многогранники*, Наука, Новосибирск, 2007.

Н. П. Стрелкова (N. P. Strelkova)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: n.strelk@gmail.com

Поступила в редакцию

07.12.2009