Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Регулярные нули
квадратичных отображений и их приложение, *Матем.
сб.*, 2011, том 202, номер 6, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:15:07

УДК 515.164.15+517.275

А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин

Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение

Получены достаточные условия существования регулярных нулей у квадратичных отображений. Указано на их приложения к некоторым задачам анализа, связанным с теоремой об обратной функции в окрестности аномальной точки.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: квадратичные отображения, регулярные нули, теорема об обратной функции.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы линейное пространство X и симметричное билинейное отображение $Q: X \times X \rightarrow Y$, где $Y = \mathbb{R}^k$. Определим квадратичное отображение $Q: X \rightarrow Y$ по формуле $Q(x) := Q[x, x]$, $x \in X$, где $Q[x_1, x_2]$ обозначает действие билинейного отображения Q на элементы x_1, x_2 . Билинейное отображение и порожденное им квадратичное отображение будем обозначать одним и тем же символом Q , так как это не приводит к недоразумениям.

Рассмотрим множество N нетривиальных нулей Q ,

$$N = \{x \in X, x \neq 0 : Q(x) = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор $x \in N$ называется *регулярным нулем квадратичного отображения* Q , если $Q[x, X] = Y$.

Понятие регулярного нуля имеет простой геометрический смысл. А именно, пусть $X = \mathbb{R}^n$, а квадратичная форма Q_i обозначает i -ю координату квадратичного отображения Q . Тогда то, что x_0 является регулярным нулем квадратичного отображения Q , означает, что точка x_0 принадлежит пересечению квадрик $\{x \in X : Q_i(x) = 0\}$, $i = \overline{1, k}$, причем нормали к этим квадратикам в точке x_0 линейно независимы.

Регулярные нули квадратичных отображений играют существенную роль в необходимых условиях экстремума для аномальных экстремальных задач (см. [1; гл. 1]).

К условию существования у квадратичного отображения регулярного нуля сводится теорема об обратной функции в аномальной точке. А именно, пусть

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00619) и в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант № 16.740.11.0426).

для простоты X – банахово пространство и задано отображение $F: X \rightarrow Y$, которое дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x_0 \in X$. Спрашивается, при каких условиях на F уравнение $F(x) = y$ имеет решение $\phi(y)$ для всех y , достаточно близких к точке $y_0 = F(x_0)$? Если точка x_0 нормальна, т.е. $\text{im } F'(x_0) = Y$, то в силу классической теоремы об обратной функции в некоторой окрестности y_0 существует такое решение $\phi(y)$ рассматриваемого уравнения, что функция ϕ непрерывна и $\|\phi(y) - x_0\| \leq \text{const}|y - y_0|$. (Здесь и ниже через const обозначены некоторые положительные константы).

Пусть теперь точка x_0 аномальна, т.е. $\text{im } F'(x_0) \neq Y$. Тогда классическая теорема об обратной функции неверна, однако имеет место следующая теорема. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования Y на ортогональное дополнение к подпространству $\text{Im } F'(x_0)$. На подпространстве $Z = \ker F'(x_0)$ определим квадратичное отображение $Q: Z \rightarrow (\text{im } F'(x_0))^\perp$ по формуле $Q(x) = PF''(x_0)[x, x]$, $x \in Z$.

ТЕОРЕМА 1 (об обратной функции). *Предположим, что у квадратичного отображения Q существует регулярный нуль. Тогда существуют окрестность O точки y_0 и определенная на O непрерывная функция ϕ такие, что для всех $y \in O$ выполняется*

$$F(\phi(y)) = y, \quad \|\phi(y) - x_0\| \leq \text{const}(|y - y_0| + |P(y - y_0)|^{1/2}).$$

Отметим, что если точка x_0 нормальна, то $(\text{im } F'(x_0))^\perp = \{0\}$ и, значит, условие теоремы 1 выполняется автоматически, так как в этом случае любой вектор $x \in Z$ является для Q регулярным нулем и, следовательно, теорема 1 превращается в классическую теорему об обратной функции (см. [2]). Существование решения $\phi(y)$ рассматриваемого уравнения для $y \in O$ с указанной оценкой было доказано в [3], а возможность выбора функции ϕ непрерывной была обоснована в [4].

Основная цель настоящей работы – получить достаточные условия существования у заданного квадратичного отображения регулярного нуля.

Отметим глубокие работы А. А. Аграчева [5], [6] по теории квадратичных отображений, некоторыми идеями из которых мы пользуемся в этой работе.

§ 2. Основной результат

Введем необходимые обозначения. Далее пространство $Y = \mathbb{R}^k$ будем отождествлять со своим сопряженным пространством. Для произвольного вектора $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in Y$ положим

$$\lambda Q = \sum_{j=1}^k \lambda^j Q_j,$$

где Q_j обозначает j -ю координату отображения Q . Через $\text{ind } q$ обозначим индекс квадратичной формы q (это максимальная из размерностей подпространств, на которых форма q отрицательно определена). Если размерность

пространства X конечна, то индекс квадратичной формы равен количеству отрицательных собственных значений (с учетом их кратности) матрицы этой квадратичной формы. Для целого числа r через Λ_r обозначим множество таких векторов $\lambda \in Y$, $\lambda \neq 0$, что $\text{ind } \lambda Q \leq r$.

Рассмотрим следующее условие:

А) $\exists h \in X: \langle \lambda, \bar{y} \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}$, где $\bar{y} = Q[h, h]$.

Если $\Lambda_{k-1} = \emptyset$, то условие А) считаем выполненным.

Заметим, что если выполняется условие А), то необходимо $\dim X > k$. Для этого покажем, что в предположении условия А) если $\dim X \leq k$, то $\Lambda_{k-1} = Y \setminus \{0\}$. Действительно, если $\dim X < k$, то искомое утверждение очевидно. Пусть теперь $\dim X = k$. Возьмем $\lambda \neq 0$. Тогда квадратичная форма λQ не является отрицательно определенной, так как в противном случае имели бы $(-\lambda)Q > 0$, из чего следует, что $(-\lambda) \in \Lambda_{k-1}$, $\langle (-\lambda), Q[h, h] \rangle > 0$, что противоречит условию А). Следовательно, если $\text{ind } \lambda Q < k$, то $\lambda \in \Lambda_{k-1}$. Таким образом, $\Lambda_{k-1} = Y \setminus \{0\}$, что, как легко видеть, противоречит условию А). Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть квадратичное отображение Q удовлетворяет условию А). Тогда у него существует регулярный нуль.

Доказательство этой теоремы приведено ниже и оно основано на ряде вспомогательных утверждений, которым посвящен следующий параграф. Приведем некоторые комментарии.

Впервые условие А) было введено в работе [7], в которой было доказано (см. лемму 2), что если условие А) выполняется, то квадратичное отображение Q сюръективно (т.е. $Q(X) = Y$).

При $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. При $k = 2$ оно относительно несложно доказывается (см. [8]). Усилить утверждение теоремы 2 при $k \geq 2$, заменив в условии А) множество Λ_{k-1} меньшим множеством Λ_{k-2} , нельзя. Это показывает пример квадратичного отображения $Q(x) = (x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)$, действующего из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, которое не имеет нетривиальных нулей.

Впервые достаточные условия существования у квадратичного отображения регулярного нуля, заключающиеся в том, что $\Lambda_{k-1} = \emptyset$, были получены в [9]. Затем в [10] было доказано, что если $\Lambda_{k-1} = \emptyset$, то множество регулярных нулей всюду плотно в множестве N . Наконец, в [7] был доказан ослабленный вариант теоремы 2, а именно: если существует $h \in X$ такое, что $\langle \lambda, \bar{y} \rangle < 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_k$, где $\bar{y} = Q[h, h]$, и конус $\text{conv } \Lambda_r$ (conv – выпуклая оболочка) при $r = \frac{1}{2}k(k+3)$ является острым, т.е. не содержит прямых, то у Q существует регулярный нуль. Отметим, что если $X = \mathbb{R}^n$ и $n \gg k$ (например, $n > 2(k-2)$ и $(n-k-1)(n-k) > 2(k-1)$), то последнее предположение является условием общего положения, так как в этом случае множество квадратичных отображений Q , для которых конус $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ является острым, всюду плотно в пространстве всех квадратичных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ (см. [1; § 1.9]).

Условие А) является достаточным условием существования регулярного нуля. Однако если конус $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ является острым, то А) становится и необходимым условием существования регулярного нуля. Действительно, в этом

случае внутренность полярного к Λ_{k-1} конуса непуста, и если у Q есть регулярный нуль, то Q сюръективно, т.е. $Q(X) = Y$, откуда уже вытекает А).

На простом примере продемонстрируем применение теоремы 2. В этом примере $\Lambda_{k-1} \neq \emptyset$, но условие А) при этом выполняется. Поэтому квадратичное отображение имеет регулярный нуль.

ПРИМЕР 1. Определим квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ по формуле

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ x_2x_3 + x_4^2 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что $\Lambda_1 \neq \emptyset$ и $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}_+^2$, т.е. $\lambda^1 \geq 0$, $\lambda^2 \geq 0$ для любого $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) \in \Lambda_1$. Поэтому конус Λ_1 является острым и, значит, условие А) выполняется, поскольку отображение Q сюръективно. Следовательно, по теореме 2 отображение Q имеет регулярный нуль (например, $x = (0, -1, 1, 1)$).

Вернемся к теореме 2. Как отмечалось выше, если $\Lambda_{k-1} = \emptyset$, то множество регулярных нулей Q непусто и всюду плотно в множестве N (всех нетривиальных нулей Q). Однако если $\Lambda_{k-1} \neq \emptyset$, но тем не менее выполнено условие А), то теорема 2 гарантирует лишь, что множество регулярных нулей непусто. В то же время возникает естественный вопрос: если выполнено условие А), то будет ли множество регулярных нулей Q всюду плотно в N ?

Пример квадратичного отображения, приведенного в примере 2 из [7], дает на этот вопрос отрицательный ответ. Для квадратичного отображения Q выполнено даже более сильное условие, чем А), а именно,

$$\exists h \in X : \quad \langle \lambda, Q[h, h] \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_k. \quad (2.1)$$

В то же время множество регулярных нулей Q не является всюду плотным в N .

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 11$, $k = 2$. Рассмотрим отображение

$$Q(x) = \begin{bmatrix} -x_2^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 \\ x_1x_2 + |u_1|^2 - |u_2|^2 \end{bmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)$, $u_1 = (x_3, x_4, x_5)$, $u_2 = (x_6, x_7, x_8)$, $u_3 = (x_9, x_{10}, x_{11})$.

Покажем, что для $h = (0, 1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{11}$ выполнено условие (2.1). Для этого сначала установим, что $\lambda^1 > 0$ для любого $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) \in \Lambda_2$. Действительно, $\lambda^1 \neq 0$, так как $\text{ind } Q_2 = \text{ind}(-Q_2) = 4$. А если $\lambda^1 < 0$, то $\text{ind } \lambda Q \geq 3$, поскольку вторая квадратичная форма не зависит от u_3 . Таким образом, $\lambda^1 > 0$ и, следовательно, имеет место (2.1), поскольку $Q[h, h] = (-1, 0)$.

Покажем, что $l = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{11}$ является изолированной точкой множества $N \cap S$, где S – единичная сфера в $\mathbb{R}^{11}$. Предположим противное. Тогда существует $l_i = (1, x_{2,i}, u_{1,i}, u_{2,i}, u_{3,i}) \in N$, $l_i \rightarrow l$. Так как $Q[l_i, l_i] = 0$, то $x_{2,i}^2 = |u_{1,i}|^2 + |u_{2,i}|^2 + |u_{3,i}|^2$, $-x_{2,i} = |u_{1,i}|^2 - |u_{2,i}|^2$, из чего следует, что

$$(|u_{1,i}|^2 + |u_{2,i}|^2)^2 \geq (|u_{1,i}|^2 - |u_{2,i}|^2)^2 = |u_{1,i}|^2 + |u_{2,i}|^2 + |u_{3,i}|^2.$$

Так как при больших i модули векторов $|u_{1,i}|, |u_{2,i}|$ достаточно малы, то в силу последнего неравенства имеем $u_{1,i} = u_{2,i} = u_{3,i} = 0$, из чего следует, что $l_i = l$

при всех больших i . Таким образом, l является изолированной точкой множества $N \cap S$ и, значит, не является регулярным нулем отображения Q . Поэтому вектор l не принадлежит замыканию множества регулярных нулей Q .

§ 3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе будем предполагать, что $X = \mathbb{R}^n$. Введем нужные обозначения. Для произвольного x через Qx обозначим линейный оператор, действующий из X в Y по формуле $(Qx)\xi = Q[x, \xi]$.

Возьмем произвольный нетривиальный нуль $z \in N$. Для него через $P(z)$ обозначим оператор ортогонального проектирования Y на подпространство $(\text{im } Qz)^\perp$. Квадратичное отображение $H(z): \ker Qz \rightarrow (\text{im } Qz)^\perp$, определенное по формуле $H(z) := P(z)Q$, будем называть *гессианом отображения Q в точке z* . Через $\Lambda_r(z)$ обозначим множество векторов $\lambda \in (\text{im } Qz)^\perp$, $\lambda \neq 0$, для каждого из которых существует подпространство $\Pi = \Pi(\lambda) \subseteq \ker Qz$, коразмерность которого в X не превышает числа r , такое, что $\lambda Q[\xi, \xi] \geq 0$, $\xi \in \Pi$.

ЛЕММА 1. Пусть $x_0 \in N$ и в некоторой окрестности точки x_0 все нули отображения Q нерегулярны. Тогда и все нули гессиана $H(x_0)$ нерегулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in N$. Рассмотрим гессиан

$$H(x_0): \ker Qx_0 \rightarrow (\text{im } Qx_0)^\perp.$$

Покажем, что все нули $H(x_0)$ нерегулярны. Предположим противное, т.е. пусть у $H(x_0)$ существует регулярный нуль p :

$$p \in \ker Qx_0, \quad H(x_0)[p, p] = 0, \quad H(x_0)[p, \ker Qx_0] = (\text{im } Qx_0)^\perp.$$

Тогда

$$\text{im}(Qx_0 + H(x_0)p) = \text{im}(Qx_0 + P(x_0)Qp) = Y. \quad (3.1)$$

Поэтому по теореме о касательном конусе (см. [1]) вектор p является касательным к множеству N в точке x_0 . Следовательно, существует последовательность точек $x_i = x_0 + \alpha_i p_i$ такая, что $x_i \in N$, $\alpha_i > 0$ и $\alpha_i \rightarrow 0$, $p_i \rightarrow p$ при $i \rightarrow \infty$.

Положим

$$A_i = Qx_0 + \alpha_i P^\perp(x_0)Qp_i + P(x_0)Qp_i,$$

где $P^\perp(x_0)$ означает оператор ортогонального проектирования пространства Y на его подпространство $\text{im } Qx_0$.

Заметим, что так как $\alpha_i \rightarrow 0$, $p_i \rightarrow p$, то

$$A_i \rightarrow Qx_0 + P(x_0)Qp$$

и, значит, в силу (3.1) $\text{im } A_i = Y$ при больших i . С другой стороны, легко видеть, что сюръективность оператора A_i эквивалентна сюръективности оператора

$$Qx_0 + \alpha_i P^\perp(x_0)Qp_i + \alpha P(x_0)Qp_i$$

при любом $\alpha > 0$ и, в частности, при $\alpha = \alpha_i$. Поэтому оператор

$$B_i = Qx_0 + \alpha_i P^\perp(x_0)Qp_i + \alpha_i P(x_0)Qp_i$$

сюръективен при больших i . Однако $B_i = Qx_i$, а это противоречит тому, что нули x_i нерегулярные. Лемма доказана.

Для заданного $y \in Y$ положим $M(y) = \{x \in X : Q[x, x] = y\}$.

ЛЕММА 2 (основная лемма). *Предположим, что*

$$\Lambda_{k-1}(z) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}(z): |\lambda|=1} \lambda Q[\xi, \xi] \geq 0, \quad \xi \in \ker Qz, \quad z \in N. \quad (3.2)$$

Пусть $y \in Y$ и выполнено условие

$$\langle \lambda, y \rangle < 0, \quad \lambda \in \Lambda_{k-1}(z), \quad z \in N. \quad (3.3)$$

Тогда множество $M(y)$ ограничено.

Доказательство леммы 2 мы приведем в §6, а сейчас перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Сначала покажем, что для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда пространство X конечномерно. Действительно, в силу условия А) конус $\text{conv } \Lambda_{k-1}$, где conv обозначает выпуклую оболочку множества, является острым (т.е. не содержит одномерных подпространств). Поэтому в силу рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 1 из [7], существует такое конечномерное подпространство $\tilde{X} \subset X$, что если для квадратичного отображения $\tilde{Q}$, являющегося сужением Q на $\tilde{X}$, построить конус $\tilde{\Lambda}_{k-1} = \{\lambda \in Y : \lambda \neq 0, \text{ind}(\lambda \tilde{Q}) \leq k-1\}$, то конус $\text{conv } \tilde{\Lambda}_{k-1}$ будет острым. Поэтому конус, являющийся нормальным к $\tilde{\Lambda}_{k-1}$, имеет внутреннюю точку $\tilde{y}$. Но, как отмечалось выше, в силу условия А) отображение Q является сюръективным. Поэтому существует $\tilde{h} \in X$ такое, что $Q(\tilde{h}) = \tilde{y}$. Положим $\overline{X} = \tilde{X} + \text{span}\{\tilde{h}\}$. Тогда, очевидно, для квадратичного отображения $\overline{Q}$, являющегося сужением Q на $\overline{X}$, выполняется условие А). Таким образом, в силу вышесказанного далее будем считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы 2 проведем индукцией по k . При $k = 1$ теорема очевидна, так как отсутствие регулярных нулей у квадратичной формы влечет ее нестрогую знакоопределенность. Докажем утверждение теоремы для произвольного k , предполагая, что при размерностях пространства Y меньших, чем k , теорема уже доказана.

Предположим, что все нули Q нерегулярны и получим противоречие с условием А). Обозначим через N_0 множество нулей $z \in N$ таких, что $Qz = 0$. Легко видеть, что N_0 является линейным подпространством в X . Сначала предположим, что $N_0 = \{0\}$.

Рассмотрим произвольный нуль $z \in N$ и гессиан

$$H = H(z): \ker Qz \rightarrow (\operatorname{im} Qz)^\perp.$$

В силу леммы 1 все нули квадратичного отображения H нерегулярны. Очевидно, что $\dim(\operatorname{im} Qz)^\perp < k$, так как $Qz \neq 0$. Поэтому из предположения индукции легко вытекает условие (3.2).

Очевидно, по определению $\Lambda_{k-1}(z) \subseteq \Lambda_{k-1}$. Поэтому из условия А) вытекает (3.3). Значит, выполнены все условия леммы 2, в силу которой множество $M(\bar{y})$ ограничено. Используем это ниже.

Рассмотрим задачу

$$-|x|^2 \rightarrow \min, \quad Q[x, x] = \bar{y}, \quad x \in X. \quad (4.1)$$

В этой задаче решение существует, так как множество допустимых значений $M(\bar{y})$ компактно и непусто, поскольку $\bar{y} \in Q(X)$ в силу условия А). Обозначим через $\bar{x}$ какое-нибудь решение этой задачи.

Применим к задаче (4.1) в точке $\bar{x}$ необходимые условия экстремума из [1]. По теореме 4.1 из [1] в силу замечания из [11] существуют число $\lambda^0 \geq 0$, вектор $\lambda \in Y$, одновременно не равные нулю, и подпространство $\Pi \subseteq \{\bar{x}\}^\perp \cap \ker Q\bar{x}$, $\operatorname{codim} \Pi \leq k$, такие, что

$$-\lambda^0 \bar{x} + \lambda Q\bar{x} = 0, \quad (4.2)$$

$$\lambda Q[\xi, \xi] \geq \lambda^0 |\xi|^2, \quad \xi \in \Pi. \quad (4.3)$$

Из (4.2) вытекает, что, во-первых, $\lambda \neq 0$ (так как $\bar{x} \neq 0$); во-вторых, $\lambda Q[\bar{x}, \bar{x}] \geq 0$; в-третьих, $\lambda Q[\bar{x}, \xi] = 0$, $\xi \in \Pi$, и $\bar{x} \notin \Pi$ (так как $\bar{y} \neq 0$). Из этих трех условий и (4.3) вытекает, что форма λQ неотрицательна на подпространстве $\bar{\Pi} = \Pi + \operatorname{span}\{\bar{x}\}$, причем $\operatorname{codim} \bar{\Pi} \leq k-1$. Таким образом, индекс квадратичной формы λQ не превышает $k-1$. Кроме того, так как $\bar{y} = Q[\bar{x}, \bar{x}]$, то $\langle \lambda, \bar{y} \rangle \geq 0$, что противоречит условию А). Полученное противоречие доказывает, что если $N_0 = \{0\}$, то у Q существует регулярный нуль.

Случай $N_0 \neq \{0\}$ сводится к рассмотренному случаю. А именно, очевидно, $Q[x + \xi, x + \xi] = Q[x, x]$, $x \in X$, $\xi \in N_0$. Поэтому в проведенных выше рассуждениях следует перейти от пространства X к подпространству $N_0^\perp$. Теорема доказана.

§ 5. Предварительные сведения

В этом параграфе мы приведем некоторые вспомогательные сведения из вещественной алгебраической геометрии (см. [12]), которые нам понадобятся для доказательства леммы 2. Всюду далее будем предполагать, что $X = \mathbb{R}^n$.

Как обычно, через $T_S(x)$ обозначим касательный конус к множеству S в точке x , т.е. $l \in T_S(x)$, если существуют последовательности чисел $\alpha_i > 0$ и векторов $a_i \in X$, $\alpha_i \rightarrow 0$, $a_i \rightarrow 0$, такие, что $x + \alpha_i l + \alpha_i a_i \in S$ для любого i . Замыкание множества S обозначим через $\operatorname{cl} S$. Если L – линейный оператор, то через L^* обозначим его сопряженный оператор.

Напомним, что подмножество S множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *линейно связной компонентой* множества M , если оно само линейно связно и не существует линейно связного множества $\tilde{S} \neq S$ такого, что $S \subset \tilde{S} \subseteq M$.

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *полуалгебраическим*, если оно может быть представлено в виде конечного числа объединений или пересечений множеств вида $Z_1 = \{x : p(x) = 0\}$ или $Z_2 = \{x : p(x) < 0\}$, где $p(x)$ – полиномы (с вещественными коэффициентами) от n переменных $x_1, \dots, x_n$. Известно, что любое множество, записанное в виде формулы, содержащей конечное число операций объединения, пересечения, дополнения над множествами вида Z_1 и Z_2 , а также кванторы существования и единственности по переменным $x_1, \dots, x_n$, будет полуалгебраическим. Очевидно, полуалгебраическое множество может не быть замкнутым и не быть открытым, однако замыкание и внутренность полуалгебраического множества всегда является полуалгебраическим множеством. Поэтому и граница полуалгебраического множества является полуалгебраическим множеством. Для полуалгебраического множества линейная и топологическая связности эквивалентны (см. теорему 2.4.5 и предложение 2.5.13 в [12]). Кроме того, в силу указанной теоремы любое полуалгебраическое множество A представимо в виде конечного объединения связных компонент A_i , являющихся полуалгебраическими множествами. Если при этом множество A замкнуто, то и все множества A_i также замкнуты (это следствие теоремы 2.4.5 и леммы об отборе кривых – теорема 2.5.5 из [12]).

Для полуалгебраического множества A отображение $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *полуалгебраическим*, если его график $\Gamma = \{(x, y) \in A \times f(A) : y = f(x)\}$ является полуалгебраическим множеством в $\mathbb{R}^{n+k}$. *Функция Нэша* – это аналитическое полуалгебраическое отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, определенное на открытом полуалгебраическом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть заданы открытые полуалгебраические множества $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *диффеоморфизмом Нэша*, если существует обратное отображение $f^{-1}: B \rightarrow A$ и f, f^{-1} являются функциями Нэша. Соответственно *подмногообразием Нэша размерности d* называется полуалгебраическое множество M такое, что для каждой точки $x \in M$ найдутся полуалгебраическая окрестность O_x точки x , полуалгебраическая окрестность нуля $O \subseteq \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм Нэша $\varphi: O_x \rightarrow O$, для которых $\varphi(M \cap O_x) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap O$. При этом одноточечное множество по определению является подмногообразием Нэша размерности нуль.

Далее под подмногообразием всюду будем понимать подмногообразие Нэша.

Имеет место следующее утверждение (предложение 2.9.10 из [12]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ – полуалгебраическое множество. Тогда A представимо в виде объединения конечного числа связных и попарно непересекающихся подмногообразий.

Максимальная из размерностей этих подмногообразий называется *размерностью A* (обозначается $\dim A$). Определение размерности инвариантно относительно разбиения на подмногообразия (см. § 2.8 из [12]). Если полуалгебраическое множество A является C^∞ многообразием размерности d , то $\dim A = d$

(предложение 2.8.14 из [12]). Имеет место следующее утверждение (предложение 2.8.13 из [12]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – полуалгебраическое множество. Тогда $\dim(\text{cl } A \setminus A) < \dim A$.

Из предложения 2, в частности, вытекает, что $\dim \text{cl } A = \dim A$. Далее, если A, B – полуалгебраические множества и $A \subseteq B$, то $\dim A \leq \dim B$ в силу предложения 1 и определения размерности полуалгебраического множества.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть полуалгебраическое множество A представимо в виде $A = \coprod_{i=1}^m N_i$, где N_i – попарно непересекающиеся подмногообразия. Тогда

$$\exists j, \exists \bar{x} \in N_j : \quad \bar{x} \notin \text{cl} \left(\coprod_{i \neq j} N_i \right). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем из N_i подмногообразие максимальной размерности. Пусть, например, это будет N_1 . Тогда $\dim A = \dim N_1$. Предположим, что для всех $x \in N_1$ условие (5.1) нарушается. Тогда если $N_1 \subseteq \text{cl}(\coprod_{i>1} N_i)$, то $N_1 \subseteq \text{cl}(\coprod_{i>1} N_i) \setminus (\coprod_{i>1} N_i)$, откуда следует, что $\dim N_1 < \dim(\coprod_{i>1} N_i) \leq \dim A$. Полученное противоречие доказывает (5.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть задано квадратичное отображение $\tilde{Q}: X \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$. Рассмотрим множество $\tilde{M} = \{x \in X : \tilde{Q}[x, x] = 0\}$. Пусть $O \subseteq X$ – произвольное открытое полуалгебраическое множество. Обозначим $\tilde{M}_O = \tilde{M} \cap O$, $R = \{x \in \tilde{M}_O : \text{rank } \tilde{Q}x = k-1\}$ – подмножество регулярных нулей из $\tilde{M}_O$.

Тогда существуют попарно непересекающиеся связные подмногообразия $N_i \subseteq \tilde{M}_O$, $i = 1, \dots, t$, и число $r \in \{0, 1, \dots, t\}$ такие, что

$$\tilde{M}_O = \text{cl} \left(\coprod_{i=1}^m N_i \right) \cap O, \quad N_i \subseteq R, \quad i \leq r, \quad N_i \subseteq \tilde{M}_O \setminus \text{cl } R, \quad i > r, \quad (5.2)$$

и выполняются следующие условия:

- а) $N_i \cap \text{cl } N_j = \emptyset$, $i \leq r$, $j > r$;
- б) $\dim(\text{cl } N_i \cap \text{cl } N_j) < \min\{\dim N_i, \dim N_j\}$, $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество R является полуалгебраическим множеством и одновременно C^∞ -дифференцируемым многообразием коразмерности $k-1$. В силу предложения 1 множество R представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся связных подмногообразий $\tilde{N}_i$, $\dim \tilde{N}_i \leq \dim R = n - (k-1)$. Выберем из них те, которые имеют коразмерность $k-1$, и обозначим их через $N_1, \dots, N_r \subseteq R$. Покажем, что

$$\text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^r N_i \right) = \text{cl } R. \quad (5.3)$$

Предположим противное. В этом случае существует $\bar{x}' \in \text{cl } R$ такой, что $\bar{x}' \notin \text{cl}(\bigcup_{i=1}^r N_i)$. Поэтому существует $\bar{x} \in R$ такой, что $\bar{x} \notin \text{cl}(\bigcup_{i=1}^r N_i)$. Тогда существует открытый шар $O_{\bar{x}}$ с центром в точке $\bar{x}$ такой, что $O_{\bar{x}} \cap \text{cl } N_i = \emptyset$,

$i = 1, \dots, r$. Множество $O_{\bar{x}} \cap R$ является C^∞ -многообразием размерности $\dim R$. С другой стороны, оно содержится в конечном объединении подмногообразий, размерность каждого из которых меньше, чем $\dim R$, и, значит, $\dim(O_{\bar{x}} \cap R) < \dim R$. Полученное противоречие доказывает (5.3).

Рассмотрим множество $Z_1 = \widetilde{M}_O \setminus \text{cl } R$. Так как множество нерегулярных нулей $\widetilde{Q}$ замкнуто, а Z_1 содержится в нем, то $N_i \cap \text{cl } Z_1 = \emptyset$, $\text{cl } N_i \cap Z_1 = \emptyset$, $i = 1, \dots, r$. Множество Z_1 является полуалгебраическим. Значит, оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся связных подмногообразий. Выберем из них все подмногообразия максимальной размерности d_1 и обозначим их через $N_{r+1}, \dots, N_{r_1}$. Рассмотрим множество $Z_2 = Z_1 \setminus \text{cl}(\bigcup_{i=r+1}^{r_1} N_i)$. Из конечного числа связных подмногообразий, составляющих Z_2 , снова выберем все подмногообразия максимальной размерности d_2 и обозначим их через $N_{r_1+1}, \dots, N_{r_2}$. Очевидно, что $d_2 < d_1$. Продолжая этот процесс, построим множества $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots \supset Z_l = \emptyset$, пока не получим на некотором шаге пустое множество. (Процесс завершится за конечное число шагов, так как по построению $\dim Z_i < \dim Z_{i-1}$ для всех i).

В результате получим следующее разбиение множества $\widetilde{M}_O$. Множество $\widetilde{M}_O$ представимо в виде замыкания дизъюнктного объединения конечного числа связных подмногообразий $N_1, \dots, N_r, N_{r+1}, \dots, N_m$, лежащих в $\widetilde{M}_O$. Легко проверить, что по построению и в силу (5.3) выполняются условие (5.2) и свойство а).

Докажем свойство б). Возьмем два подмногообразия N_i, N_j , $i \neq j$, и рассмотрим всевозможные случаи.

Пусть $i \leq r < j$. Множество $S = \text{cl } N_i \cap \text{cl } N_j$ является полуалгебраическим и $S \subseteq \text{cl } N_i$. Но $S \cap N_i = \emptyset$, так как в силу свойства а) выполнено $S \cap N_i \subseteq \text{cl } N_j \cap N_i = \emptyset$. Следовательно, $S \subseteq \text{cl } N_i \setminus N_i$ и, значит, в силу предложения 2 выполнено $\dim S < \dim N_i$. Докажем, что $\dim S < \dim N_j$. Действительно, в силу (5.2) имеем

$$\text{cl } N_i \subseteq \text{cl } R \implies \text{cl } N_i \cap N_j = \emptyset \implies N_j \cap S = \emptyset \implies S \subseteq \text{cl } N_j \setminus N_j,$$

откуда в силу предложения 2 получаем, что $\dim S < \dim N_j$.

Пусть $i, j > r$, $\dim N_i < \dim N_j$. Тогда так как по построению $N_i \cap \text{cl } N_j = \emptyset$, то, как и выше, получаем, что $\dim S < \dim N_i$.

Остается рассмотреть случай, когда $\dim N_i = \dim N_j$ и либо $i, j > r$, либо $i, j \leq r$. Так как $N_i \cap N_j = \emptyset$, то легко видеть, что

$$\text{cl } N_i \cap \text{cl } N_j \subseteq (\text{cl } N_i \setminus N_i) \cup (\text{cl } N_j \setminus N_j).$$

Теперь из предложения 2 вытекает, что

$$\dim S < \max\{\dim N_i, \dim N_j\} = \dim N_i = \dim N_j.$$

Предложение доказано.

Приведенное выше разбиение множества $\widetilde{M}_O$ на многообразия N_i называется *стратификацией множества $\widetilde{M}_O$* , а множества N_i называются *стратами*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть заданы подмногообразия $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ такие, что $\dim N < \dim M$, $N \subseteq \text{cl } M$. Тогда существует точка $x \in N$ такая, что множество $T_N(x)$ является собственным подмножеством множества $T_M(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что вложение $T_N(x) \subseteq T_M(x)$ для любого $x \in N$ очевидно, так как касательные конусы к множеству и к его замыканию совпадают. Если $\dim N = 0$, то N является объединением конечного числа точек. Тогда утверждение предложения вытекает из того, что $T_M(x) \neq \{0\}$ для любого $x \in \text{cl } M$ (последнее верно, так как $\dim M > 0$). Поэтому ниже будем считать, что $\dim N > 0$.

Итак, надо доказать, что существует $x \in N$ такое, что $T_N(x) \neq T_M(x)$. Сделаем это. При этом ясно, что подмногообразие M можно считать ограниченным.

Если $M \cap N \neq \emptyset$, то искомое утверждение очевидно. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in M \cap N$. Тогда $T_N(x) \neq T_M(x)$, так как $T_N(x)$ и $T_M(x)$ – это подпространства в $\mathbb{R}^n$, причем $\dim T_N(x) = \dim N < \dim M = \dim T_M(x)$.

Пусть теперь $N \subseteq \text{cl } M \setminus M$. (Рассуждения, приведенные выше, не подходят для точек $x \in \text{cl } M$, так как для них касательный конус $T_M(x)$, вообще говоря, уже не является подпространством размерности $\dim M$.) Множество $\text{cl } M$ является полуалгебраическим компактом. Поэтому в силу теоремы 9.2.1 и замечания к ней (см. [12; с. 217–220]) существуют конечный симплициальный комплекс $K = (\sigma_i)_{i=1, \dots, p}$ и полуалгебраический гомеоморфизм $\varphi: |K| \rightarrow \text{cl } M$, где $|K| = \bigcup_{i=1}^p \sigma_i$ – реализация комплекса, такие, что образ $\varphi(\sigma_i^0)$, $i = 1, \dots, p$, является подмногообразием, а сужение $\varphi: \sigma_i^0 \rightarrow \varphi(\sigma_i^0)$ – диффеоморфизмом. Здесь σ_i^0 – внутренность симплекса σ_i .

Используя предложение 2 и то, что множество $\varphi(\sigma_i^0)$ является подмногообразием размерности $\dim \sigma_i^0$, легко вывести, что $\varphi^{-1}(N) \cap \sigma_i^0 = \emptyset$ для любого i такого, что $\dim \sigma_i^0 = \dim M$. Отсюда вытекает, что существуют точка $w \in N$ и ее окрестность O , для которых множество $\varphi^{-1}(N \cap O)$ лежит во внутренней части некоторого симплекса σ_j , размерность которого меньше, чем $\dim M$. Значит, σ_j является гранью некоторого симплекса, размерность которого равна $\dim M$.

Пусть $\dim \sigma_j > \dim N$. Тогда для подмногообразия $M_j := \varphi(\sigma_j^0)$ имеем $T_{M_j}(w) \subseteq T_M(w)$ и $T_{M_j}(w)$ – подпространство размерности большей, чем $\dim N$, так как сужение φ на σ_j^0 является диффеоморфизмом. Поэтому $T_N(w) \neq T_M(w)$ и точка w является искомой.

Рассмотрим второй случай: $\dim \sigma_j = \dim N$. Пусть σ_t – некоторый симплекс из K размерности $\dim \sigma_j + 1$, гранью которого является симплекс σ_j . В силу проведенного построения относительно точки w , не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что множество $\text{cl } M$ гомеоморфно некоторому симплексу σ размерности d , причем $\varphi^{-1}(M) = \sigma^0$, а прообраз подмногообразия N – это внутренность некоторой грани размерности $d - 1$.

Возьмем произвольную точку $x \in N$ и рассмотрим подпространство $T_N(x)^\perp$. Покажем, что в сколь угодно малой окрестности точки x найдутся точки из множества $M \cap T_N(x)^\perp$. Предположим противное, т.е. пусть пересечение множества $M \cap T_N(x)^\perp$ с некоторой окрестностью точки x пусто. Тогда, выбирая

открытый шар B достаточно малого радиуса с центром в точке $\varphi^{-1}(x)$, добьемся того, чтобы

$$\varphi(\sigma^0 \cap B) \cap T_N(x)^\perp = \emptyset. \quad (5.4)$$

Докажем тогда, что гомотопическая группа π_p , $p = \dim N - 1$, подмногообразия $\varphi(\sigma^0 \cap B)$ нетривиальна. Тем самым мы придем к противоречию, так как, с одной стороны, любая гомотопическая группа выпуклого множества $\sigma^0 \cap B$ тривиальна, а с другой стороны, отображение φ является гомеоморфизмом и, значит, оно должно сохранять количество элементов гомотопической группы.

Рассмотрим единичную сферу S в пространстве $T_N(x)$. Размерность этой сферы равна p . В силу того, что множества $T_N(x)$ и N локально диффеоморфны в окрестности точки x , существует гомеоморфный образ $S_\varepsilon \subset N$ сферы S такой, что $h(S_\varepsilon, x + \varepsilon S) = o(\varepsilon)$, где h – хаусдорфово расстояние между множествами. Так как $N \subseteq \text{cl } M$ и φ является гомеоморфизмом, то, очевидно, найдется гомеоморфный образ $\tilde{S}_\varepsilon \subseteq M$ сферы S такой, что

$$h(\tilde{S}_\varepsilon, S_\varepsilon) \leq h(S_\varepsilon, x + \varepsilon S) = o(\varepsilon).$$

В силу (5.4) сферу $x + \varepsilon S$ невозможно непрерывной деформацией стянуть в точку так, чтобы она не пересеклась с подпространством $T_N(x)^\perp$. Поэтому, а также в силу условия $h(\tilde{S}_\varepsilon, x + \varepsilon S) = o(\varepsilon)$ при всех малых ε это же будет верно и для деформированной сферы $\tilde{S}_\varepsilon$. Но это означает, что гомотопическая группа π_p подмногообразия $\varphi(\sigma^0 \cap B)$ нетривиальна.

Полученное противоречие доказывает, что найдутся как угодно близкие к x точки множества $M \cap T_N(x)^\perp$. Но тогда, очевидно, $T_M(x) \neq T_N(x)$, что и требовалось установить. Предложение доказано.

Утверждение предложения 4, вообще говоря, неверно для произвольной точки $x \in N$. Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР 3. Пусть M – открытое множество в $\mathbb{R}^2$ (оно имеет форму серьги), которое задается с помощью двух окружностей (одна из которых вписана в другую) следующим образом:

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 + 1)^2 > 1, x_1^2 + (x_2 + 2)^2 < 4\}.$$

Пусть $N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 + 2)^2 = 4, x_2 > 0\}$. Множества M и N показаны на рис. 1. Очевидно, что для подмногообразий M , N выполнены условия предложения 4. Однако $T_M(x) = T_N(x)$ при $x = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть задано замкнутое полуалгебраическое множество A и точка $x_0 \in A$. Тогда множество $A \setminus \{x_0\}$ представимо в виде конечного объединения связных полуалгебраических компонент A_i так, что все множества $A_i \cup \{x_0\}$ замкнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $A \setminus \{x_0\}$. По теореме 2.4.5 из [12] оно представимо в виде конечного объединения связных полуалгебраических компонент A_i . Докажем, что все множества $A_i \cup \{x_0\}$ замкнуты. Предположим противное. Пусть, например, $A_1 \cup \{x_0\}$ незамкнуто. Тогда существует

Рис. 1. Подмногообразия M и N

последовательность $\{x_i\}$ такая, что $x_i \in A_1$ для любого i , $x_i \rightarrow \bar{x} \notin A_1$, $\bar{x} \neq x_0$. Но так как множество A замкнуто, то $\bar{x} \in A_j$ для некоторого j . Кроме того, $\bar{x} \in \text{cl } A_1$. Поэтому по лемме об отборе кривых (см. теорему 2.5.5 из [12]) существует непрерывная кривая $\varphi(t)$, $t \in [0, 1]$, такая, что $\varphi(0) = \bar{x}$ и $\varphi((0, 1]) \subset A_1$. Последнее противоречит тому, что A_j является связной компонентой. Предложение доказано.

Заметим, что представление из предложения 5 единственно (с точностью до перенумерации компонент).

§ 6. Доказательство леммы 2

Сразу же отметим, что из условия $\Lambda_{k-1}(z) \neq \emptyset$, $z \in N$, вытекает, что все нули квадратичного отображения Q нерегулярны.

Не ограничивая общности, будем считать, что $y = (0, \dots, 0, -1)$. Пусть $Q = (\tilde{Q}, q_k)$, где $\tilde{Q}(x)$ – квадратичное отображение, образованное первыми $(k-1)$ координатами квадратичного отображения Q , а квадратичная форма $q_k(x)$ – это его последняя координата. Положим

$$\tilde{M} = \{x \in X : \tilde{Q}(x) = 0\}.$$

Приведем вспомогательные утверждения, которые понадобятся при доказательстве леммы 2. Зафиксируем произвольный нуль $z \in N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно утверждать, что

$$y \notin \text{im } Qz. \quad (6.1)$$

Действительно, предположим противное: $y \in \text{im } Qz$. Тогда $P(z)y = 0$. В силу (3.2) существует $\lambda \in \Lambda_{k-1}(z)$. Имеем $\langle \lambda, y \rangle = \langle P(z)\lambda, y \rangle = \langle \lambda, P(z)y \rangle = 0$, что противоречит (3.3). Значит, верно (6.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Справедливы следующие включения:

$$q_k z \in \operatorname{im}(\tilde{Q}z)^*, \quad \ker q_k z \supseteq \ker \tilde{Q}z. \quad (6.2)$$

Докажем второе включение в (6.2). Действительно, предположим противное. Тогда существует $h \in \ker \tilde{Q}z$ такое, что $\langle q_k z, h \rangle \neq 0$, откуда $y = (0, \dots, 0, -1) \in \operatorname{im} Qz$, что противоречит (6.1). Искомое включение доказано. Из него по лемме об аннуляторе вытекает первая формула в (6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Справедливо неравенство

$$\lambda^k > 0, \quad \lambda \in \Lambda_{k-1}(z). \quad (6.3)$$

Этот факт – следствие (3.3) и того, что $y = (0, \dots, 0, -1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В любой окрестности точки z найдется точка $x \in \tilde{M}$, для которой $q_k(x) > 0$.

Действительно, предположим противное. Тогда точка $x = z$ является локальным минимумом в задаче

$$-q_k(x) \rightarrow \min, \quad \tilde{Q}(x) = 0.$$

В силу необходимых условий второго порядка (см. теорему 4.1 из [1]) существует $\lambda \in \Lambda_{k-1}(z)$ такое, что $\lambda^k \leq 0$, что противоречит (6.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Справедливо следующее включение:

$$z \in \operatorname{cl}\{w \in \tilde{M} : \operatorname{rank} \tilde{Q}w = k - 1\}. \quad (6.4)$$

Иными словами, для любого нуля z квадратичного отображения Q существует сходящаяся к нему последовательность регулярных нулей отображения $\tilde{Q}$.

Действительно, в силу (6.3) имеем $\{\lambda \in \Lambda_{k-1}(z) : \lambda^k = 0\} = \emptyset$. Кроме того, $\ker Qz = \ker \tilde{Q}z$ в силу (6.2). Поэтому согласно предложению 9.4 из [9] у гессиана отображения $\tilde{Q}$ в точке z существует регулярный нуль. Теперь (6.4) вытекает из леммы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\operatorname{rank} Qz = k - 1$ для некоторого $z \in N$. Тогда $q_k(x) \geq 0$ для всех $x \in \tilde{M}$, принадлежащих некоторой окрестности точки z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6.2) $\operatorname{rank} \tilde{Q}z = k - 1$. Поэтому пересечение некоторой окрестности точки z с множеством $\tilde{M}$ является гладким многообразием, коразмерность которого равна $k - 1$. Тогда в силу (6.2) для всех $x \in N$, близких к z , множество $\Lambda_{k-1}(x)$ содержит единственный единичный вектор $\lambda = \lambda(x)$, причем в силу замечания 3 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\lambda^k(x) \geq \varepsilon_0$ для всех указанных $x \in N$.

Выберем замкнутую окрестность O точки z настолько малой так, что

$$\forall z_1, z_2 \in O \cap \tilde{M}, \quad z_1 \neq z_2, \quad \exists \xi \in T_{\tilde{M}}(z_1) : \quad \langle \xi, z_2 - z_1 \rangle > 0 \quad (6.5)$$

и $\lambda^k(x) \geq \varepsilon_0$ для любого $x \in O \cap N$. Предположим, что существует $\bar{z} \in \tilde{M} \cap O$ такое, что $q_k(\bar{z}) < 0$. Найдём ближайшую к ней (в смысле метрики $\mathbb{R}^n$) точку

$\tilde{z} \in \widetilde{M} \cap O$ такую, что $q_k(\tilde{z}) \geq 0$. Покажем, что $q_k(\tilde{z}) = 0$. Действительно, если это не так, то $q_k(\tilde{z}) > 0$. В силу (6.5) существует $\xi \in T_{\widetilde{M}}(\tilde{z})$ такое, что $\langle \xi, \bar{z} - \tilde{z} \rangle > 0$. Поэтому $z(\varepsilon) = \tilde{z} + \varepsilon \xi + o(\varepsilon) \in \widetilde{M}$, $q_k(z(\varepsilon)) > 0$, $|z(\varepsilon) - \bar{z}| < |\tilde{z} - \bar{z}|$ при всех малых $\varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает, что если $q_k(\tilde{z}) = 0$, то $\tilde{z} \in N$.

Поэтому (поскольку $\lambda(\tilde{z}) \in \Lambda_{k-1}(\tilde{z})$) имеем $\lambda(\tilde{z})Q\tilde{z} = 0$. Докажем, что

$$\exists \tilde{\xi} \in \ker Q\tilde{z} : \quad \lambda(\tilde{z})Q[\tilde{\xi}, \tilde{\xi}] > 0. \quad (6.6)$$

Действительно, $\lambda(\tilde{z})Q[\xi, \xi] \geq 0$ для любого $\xi \in \ker Q\tilde{z}$. Поэтому если указанного $\tilde{\xi}$ не существует, то $\lambda(\tilde{z})Q[\xi, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \ker Q\tilde{z}$. Тогда $-\lambda(\tilde{z}) \in \Lambda_{k-1}(\tilde{z})$, что противоречит (3.3).

Малым возмущением вектора $\tilde{\xi}$ добьемся того, что наряду с (6.6) будет выполняться условие $\langle \tilde{\xi}, \tilde{z} - \bar{z} \rangle \neq 0$. После этого, заменяя, если надо, ξ на $-\xi$, добьемся того, что

$$\langle \tilde{\xi}, \tilde{z} - \bar{z} \rangle > 0. \quad (6.7)$$

Положим $g(x) = \lambda(\tilde{z})Q[x, x]$. Тогда $g(\tilde{z}) = 0$, $g'(\tilde{z}) = 0$ и в силу (6.6) $g''(\tilde{z})[\tilde{\xi}, \tilde{\xi}] > 0$. Отсюда при малых $\varepsilon > 0$ имеем $z(\varepsilon) = \tilde{z} + \varepsilon \tilde{\xi} + o(\varepsilon) \in \widetilde{M}$, а также $g(z(\varepsilon)) > 0$ из чего следует, что $q_k(z(\varepsilon)) > 0$ (так как $\lambda^k(\tilde{z}) \geq \varepsilon_0$ и $\tilde{Q}[z(\varepsilon), z(\varepsilon)] = 0$). При этом в силу (6.7) имеем $|z(\varepsilon) - \bar{z}| < |\tilde{z} - \bar{z}|$, т.е. точка $z(\varepsilon)$ ближе (в смысле метрики $\mathbb{R}^n$) к $\bar{z}$, чем $\tilde{z}$. Получили противоречие. Следовательно, $q_k(x) \geq 0$, $x \in \widetilde{M} \cap O$. Предложение доказано.

Пусть $O \subseteq X$ – произвольное открытое полуалгебраическое множество, замыкание которого не содержит нуль. Рассмотрим подмногообразия $N_1, \dots, N_m$, которые задают стратификацию множества $\widetilde{M}_O = \widetilde{M} \cap O$, удовлетворяющую свойствам а), б) предложения 3. Страты N_i , $i = 1, \dots, m$, будем называть *стратами 1-й категории*, если $N_i \subseteq R$. Остальные страты будем называть *стратами 2-й категории*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если существует $x' \in N_j$ такой, что $q_k(x') \geq 0$, то $q_k(x) \geq 0$ для любого $x \in N_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала N_j является стратом первой категории. Предположим, что существует $\bar{x} \in N_j$ такой, что $q_k(\bar{x}) < 0$. Соединим точки x' и $\bar{x}$ непрерывной кривой $x(t)$, $t \in [0, 1]$, $x(0) = x'$, целиком лежащей в страте N_j (в силу линейной связности страта). Положим $\varphi(t) = q_k(x(t))$. В силу непрерывности функции φ найдутся точка $t_0 \in [0, 1]$ такая, что $\varphi(t_0) = 0$, и последовательность $\{t_i\}$ такая, что $\varphi(t_i) < 0$, $t_i \rightarrow t_0 +$. Но по определению $N_j \subseteq R$, где R – множество регулярных нулей $\tilde{Q}$. Поэтому в окрестности нуля $z_0 = x(t_0) \in N$ все нули отображения Q имеют ранг $k - 1$. Значит, в силу предложения 6 функция q_k неотрицательна на страте N_j в некоторой окрестности точки z_0 . Полученное противоречие доказывает, что функция q_k неотрицательна на всем страте первой категории, если только она неотрицательна хотя бы в одной точке этого страта.

Пусть N_j является стратом второй категории. Покажем, что ни в каком страте второй категории не существует точек, принадлежащих множеству N . Действительно, предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in N_j \cap N$. Тогда в силу (6.4) $\bar{x} \in \text{cl } R$, что противоречит свойству а) предложения 3. Таким образом, $N_j \cap N = \emptyset$. Кроме того, по построению $0 \notin N_j$. Значит, функция q_k на множестве N_j не обращается в нуль. Отсюда в силу линейной связности страта N_j и непрерывности функции q_k вытекает, что на множестве N_j эта функция является знакоопределенной. Значит, $q_k(x) > 0$, $x \in N_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть заданы векторы $x_0 \in N$, $l \in X$: $|l| = 1$ и K – замкнутая коническая окрестность вектора l . Предположим, что множество $\widetilde{M} \cap (x_0 + K) \setminus \{x_0\}$ представимо в виде конечного объединения r своих линейно связных компонент S_i : $\widetilde{M} \cap (x_0 + K) \setminus \{x_0\} = \bigcup_{i=1}^r S_i$,¹ причем множества $S_i \cup \{x_0\}$ замкнуты для любого i .

Пусть S – одна из указанных компонент. Предположим, что

- а) $q_k x_0 \in \text{im}(\widetilde{Q}x_0)^*$;
- б) $Q[l, l] \in \text{im } Qx_0$;
- в) $l \in T_S(x_0)$;
- г) $q_k(x) < 0$ для любого $x \in S$.

Тогда $\Lambda_{k-1}(x_0) \neq \emptyset$ и, более того, существует $\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$ такое, что $\lambda^k \leq 0$, где λ^k – это последняя координата вектора λ .

Предложение 8 носит в основном “технический” характер и его доказательство будет приведено ниже в приложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть точка $w \in \widetilde{M}$ принадлежит замыканию некоторого страта, на котором функция q_k неотрицательна. Тогда функция q_k неотрицательна на любом страте, замыкание которого содержит точку w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение индукцией по s – количеству стратов, замыкание которых содержит произвольную точку $w \in \widetilde{M}$. При $s = 1$ оно выполняется автоматически.

Предположим, что искомое утверждение уже доказано для любой точки $w \in \widetilde{M}$ такой, что количество стратов, замыкание которых содержит эту точку, строго меньше s . Это $(s - 1)$ -й шаг индукции. Докажем утверждение s -го шага индукции. А именно, пусть задана точка $w \in \widetilde{M}$, которая принадлежит замыканиям ровно s стратов. Пусть это будут страты N_{i_j} , $j = 1, \dots, s$, причем на одном из них, например, на N_{i_1} , функция q_k неотрицательна. Не ограничивая общности, для простоты обозначений будем считать, что $i_j = j$, $j = 1, \dots, s$.

Докажем, что функция q_k неотрицательна на стратах $N_2, \dots, N_s$. Для $i \neq j$ положим $S_{i,j} = \text{cl } N_i \cap \text{cl } N_j$. Ниже под окрестностью (замкнутой окрестностью) точки будем понимать открытый (замкнутый) шар с центром в этой точке.

Рассмотрим окрестность O_w точки w такую, что пересечение этой окрестности с другими стратами, имеющими номера больше s , пусто. В силу предложения 7 нам достаточно доказать неотрицательность функции q_k лишь на

¹То есть множества S_i , $i = 1, \dots, r$, попарно не пересекаются.

множествах $N_j \cap O_w$. Поэтому (поскольку дальнейшие рассмотрения проводятся лишь в окрестности O_w) без ограничения общности будем считать, что $\widetilde{M} \subset O_w$, и, значит, общее число всех стратов равно s .

Сначала покажем, что среди стратов $N_2, \dots, N_s$ имеется хотя бы один страт, на котором функция q_k также неотрицательна. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала существуют $i, j \in \{2, \dots, s\}$, $u \in S_{1,j}$ такие, что $u \notin \text{cl } N_i$. Тогда в силу индуктивного предположения, примененного к точке u , функция q_k неотрицательна на N_j .

Рассмотрим второй случай: $S_{1,j} \subseteq \text{cl } N_i$ при всех $i, j \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{1,j} = \text{cl } N_1 \cap S_{1,j} &\subseteq \text{cl } N_1 \cap \text{cl } N_i \implies S_{1,j} \subseteq S_{1,i} \quad \forall i, j \geq 2 \\ \implies S_{1,j} &= S_{1,i} \quad \forall i, j \geq 2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Множество $S_{1,2}$ является полуалгебраическим. Значит, оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся связных подмногообразий. Поэтому в силу следствия 1 из предложения 2 существует такая точка $\bar{u} \in S_{1,2}$, принадлежащая некоторому подмногообразию из этого разложения, что некоторая ее окрестность $O_{\bar{u}}$ не пересекается с другими подмногообразиями из указанного разложения. В силу свойства б) предложения 3 $\dim(S_{1,2} \cap O_{\bar{u}}) < \dim N_2$. Поэтому согласно предложению 4 существуют точка $v \in S_{1,2} \cap O_{\bar{u}}$ и вектор $l \in T_{N_2}(v)$ такие, что $l \notin T_{S_{1,2}}(v)$.

Поэтому существует замкнутая коническая окрестность K вектора l , для которой $T_{S_{1,2}}(v) \cap K = \{0\}$. В силу (6.8) существует такая замкнутая окрестность $O_v \subseteq O_{\bar{u}}$ точки v , что для множества

$$C := (v + K) \cap \left(\bigcup_{i=2}^s \text{cl } N_i \right)$$

имеет место равенство

$$(C \cap O_v) \cap (\text{cl } N_1 \cap (v + K) \cap O_v) = \{v\}. \quad (6.9)$$

В то же время несложно доказать следующее утверждение: если два замкнутых множества пересекаются в единственной точке $\{v\}$, то любая непрерывная кривая, соединяющая точки первого и второго множеств, всегда проходит через точку v .

Кроме того, по определению

$$\widetilde{M} \cap (v + K) \cap O_v = (C \cap O_v) \cup (\text{cl } N_1 \cap (v + K) \cap O_v).$$

Поэтому из (6.9) и сказанного выше следует, что если S является связной компонентой множества $C \cap O_v \setminus \{v\}$, то она также будет и связной компонентой множества $\widetilde{M} \cap (v + K) \cap O_v \setminus \{v\}$. Из последнего, в частности, вытекает, что $S \cap \text{cl } N_1 = S \cap \text{cl } N_1 \cap (v + K) \cap O_v = \emptyset$. Все это используем ниже.

Могут быть две возможности. Пусть сначала $q_k(v) > 0$. Тогда для любого i существует $\bar{x}_i \in N_i$ такое, что $q_k(\bar{x}_i) > 0$ (так как в силу (6.8) $v \in \text{cl } N_i$). Следовательно, в силу предложения 7 функция q_k неотрицательна на всех стратах N_i , $i = 2, \dots, s$, что завершает шаг индукции.

Рассмотрим вторую возможность, а именно, пусть $q_k(v) = 0$. Тогда $v \in N$. Заметим, что $l \in T_{\widetilde{M}}(v) \subseteq \ker \widetilde{Q}v$. Но в силу (6.2) имеем $\ker Qv = \ker \widetilde{Q}v$ и, следовательно, $l \in \ker Qv$. Поэтому в силу (3.2) существует $\beta \in \Lambda_{k-1}(v)$ такое, что $\langle \beta, Q[l, l] \rangle \geq 0$. Пусть $\beta = (\widetilde{\beta}, \beta^k)$. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\langle \beta, Q[l, l] \rangle > 0$. Тогда в силу того, что $\beta Qv = 0$, а вектор l является касательным к подмногообразию N_2 в точке v , получаем, что существует $\bar{x} \in N_2$, для которого $\langle \beta, Q[\bar{x}, \bar{x}] \rangle > 0$. Однако в силу (6.3) имеем $\beta^k > 0$. Поэтому $q_k(x) = \langle \beta, Q[x, x] \rangle / \beta^k$ для любого $x \in \widetilde{M}$. Значит, функция q_k положительна в любой точке $x \in \widetilde{M}$, в которой $\langle \beta, Q[x, x] \rangle > 0$. Таким образом, $q_k(\bar{x}) > 0$. Поэтому в силу предложения 7 функция q_k неотрицательна на множестве N_2 .

Рассмотрим второй случай: $\langle \beta, Q[l, l] \rangle = 0$. Покажем, что

$$Q[l, l] \in \text{im } Qv. \quad (6.10)$$

Действительно, поскольку $\beta Qv = 0$ и $\beta^k > 0$, имеем

$$\text{im } Qv = \{y = (\widetilde{y}, y_k) : \exists \xi \in X, \widetilde{y} = \widetilde{Q}[v, \xi], y_k = -\langle \widetilde{\beta}, \widetilde{Q}[v, \xi] \rangle / \beta^k\}.$$

В то же время, так как $l \in T_{\widetilde{M}}(v)$, то $\widetilde{Q}[l, l] \in \text{im } \widetilde{Q}v$. Поэтому (6.10) вытекает из равенства $\langle \beta, Q[l, l] \rangle = 0$ и того, что $\beta^k > 0$.

Пусть теперь S — это связная компонента множества $C \cap O_v \setminus \{v\}$, для которой $l \in T_S(v)$. Тогда в силу сказанного выше множество S является связной компонентой множества $\widetilde{M} \cap (v + K) \cap O_v \setminus \{v\}$. Предположим, что $q_k(x) < 0$, $x \in S$. Таким образом, в силу (6.2), (6.10) и предложения 5 (и замечания к нему) для точки $x_0 = v$, вектора l , конуса K и множества S выполнены условия а)–д) предложения 8.

Применяя предложение 8, получаем, что существует $\lambda \in \Lambda_{k-1}(v)$ такое, что $\lambda^k \leq 0$, а это противоречит (6.3). Поэтому существует $x' \in S$ такое, что $q_k(x') \geq 0$. Если $q_k(x') > 0$, то поскольку $x' \notin \text{cl } N_1$, очевидно, существуют $j \geq 2$, $\bar{x} \in N_j$ такие, что $q_k(\bar{x}) > 0$. Поэтому в силу предложения 7 функция q_k неотрицательна на множестве N_j . Если же $q_k(x') = 0$, то $x' \in N$. Значит, в силу замечания 4 и того, что $x' \notin \text{cl } N_1$, найдется близкая к x' точка $x'' \notin \text{cl } N_1$ такая, что $q_k(x'') > 0$. Таким образом, случай $q_k(x') = 0$ сводится к предыдущему.

Итак, мы показали, что среди стратов $N_2, \dots, N_s$ имеется хотя бы один страт, на котором функция q_k неотрицательна. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что этот страт N_2 .

Докажем, что среди стратов $N_3, \dots, N_s$ имеется хотя бы один, на котором функция q_k неотрицательна. Рассуждая аналогично, рассмотрим два случая.

Пусть сначала существуют $i, j \in \{3, \dots, s\}$, $u \in S_{1,j} \cup S_{2,j}$ такие, что $u \notin \text{cl } N_i$. Тогда в силу индуктивного предположения, примененного к точке u , функция q_k неотрицательна на множестве N_j .

Рассмотрим второй случай: $S_{1,j} \cup S_{2,j} \subseteq \text{cl } N_i$, $i, j \geq 3$. Отсюда, как и выше, вытекает, что

$$\begin{aligned} S_{1,j} &\subseteq S_{1,i} \quad \forall i, j \geq 3, & S_{2,j} &\subseteq S_{2,i} \quad \forall i, j \geq 3 \\ \implies S_{1,j} &= S_{1,i}, & S_{2,j} &= S_{2,i} \quad \forall i, j \geq 3. \end{aligned}$$

Пусть сначала $S_{1,j} \neq S_{2,j}$. Тогда существует точка u , принадлежащая одному из этих множеств и не принадлежащая другому. Поэтому в силу индуктивного предположения функция q_k неотрицательна на множествах N_j , $j \geq 3$.

Пусть теперь $S_{1,j} = S_{2,j}$. Повторяя дословно приведенные выше рассуждения, построим точку v , замкнутую окрестность O_v точки v , вектор l , конус K и связную компоненту S множества

$$O_v \cap (v + K) \cap \left(\bigcup_{i=3}^s \text{cl } N_i \right)$$

такую, что $S \cap (\text{cl } N_1 \cup \text{cl } N_2) = \emptyset$. Как и выше, используя предложение 8, получим, что среди стратов $N_3, \dots, N_s$ имеется хотя бы один (пусть это будет, например, N_3), на котором функция q_k неотрицательна. Повторяя указанную процедуру, найдем среди стратов $N_4, \dots, N_s$ хотя бы один, на котором функция q_k неотрицательна, и так далее, пока не исчерпаем все страты. Это завершает рассмотрение шага индукции. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Предположим противное, т.е. что множество $M(y)$ неограничено. Тогда существуют $x_i \in M(y)$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что $|x_i| \rightarrow \infty$. Рассмотрим векторы $l_i = x_i/|x_i|$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $l_i \rightarrow x_0$. Очевидно, что $x_0 \in N$. Пусть O – произвольная полуалгебраическая окрестность точки x_0 такая, что $0 \notin \text{cl } O$. Положим $\widetilde{M}_O := \widetilde{M} \cap O$.

Покажем, что $q_k(x) \geq 0$ для всех $x \in \widetilde{M}_O \cap V$, где V – некоторая окрестность точки x_0 . Множество $\widetilde{M}_O$ является полуалгебраическим множеством. Как отмечалось в § 5, $\widetilde{M}_O$ представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся линейно связных полуалгебраических компонент $\widetilde{M}_O^i$, $i = 1, \dots, p$.

Для удобства будем считать, что $x_0 \in \widetilde{M}_O^1$. Заметим, что $x_0 \notin \text{cl } \widetilde{M}_O^i$, $i \geq 2$. Покажем, что функция $q_k(x)$ неотрицательна на $\widetilde{M}_O^1$. Рассмотрим стратификацию множества $\widetilde{M}_O$ подмногообразиями $N_1, \dots, N_m$, удовлетворяющую свойствам а), б) предложения 3.

В силу замечания 4 существует $\xi \in \widetilde{M}_O^1$ такая, что $q_k(\xi) > 0$. “Шевеля” достаточно мало точку ξ , добьемся того, что ξ будет принадлежать одному из стратов. Тогда в силу предложения 7 функция q_k неотрицательна на этом страте. Возьмем произвольную точку $x \in \widetilde{M}_O^1$ и соединим ее с ξ непрерывной кривой, лежащей в $\widetilde{M}_O^1$. Эта кривая лежит в объединении замыканий стратов N_i , число которых конечно. Применяя теперь предложение 9, легко получаем, что функция q_k неотрицательна на этой кривой и, значит, $q_k(x) \geq 0$ на $\widetilde{M}_O^1$.

Итак, $q_k(x) \geq 0$, $x \in \widetilde{M}_O^1$. Поэтому, выбрав окрестность V точки x_0 так, что $V \cap (\widetilde{M}_O \setminus \widetilde{M}_O^1) = \emptyset$, получим, что $q_k(x) \geq 0$, $x \in \widetilde{M}_O \cap V$. Получили противоречие, поскольку $l_i \rightarrow x_0$, $l_i \in \widetilde{M}$, и, кроме того, $q_k(l_i) < 0$, $i \geq 1$, так как из условия $x_i \in M(y)$ следует, что $q_k(x_i) = -1$. Итак, множество $M(y)$ ограничено.

Лемма доказана.

Заметим, что на самом деле доказано даже более сильное локальное утверждение.

ЛЕММА 3 (локальная версия леммы 2). *Предположим, что $x_0 \in N$ и существует такая окрестность O точки x_0 , что*

$$\Lambda_{k-1}(z) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}(z): |\lambda|=1} \lambda Q[\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \ker Qz \quad \forall z \in N \cap O. \quad (6.11)$$

Пусть $y \in Y$ и выполнено условие

$$\langle \lambda, y \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}(z) \quad \forall z \in N \cap O. \quad (6.12)$$

Тогда существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $\tau > 0$ уравнение $Q[x, x] = \tau y$ не имеет решений $x \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова, не ограничивая общности, будем считать, что $y = (0, \dots, 0, -1)$. Предположим противное. Тогда существуют $x_i \in \tilde{M}$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что $x_i \rightarrow x_0$, $q_k(x_i) < 0$, $i \geq 1$.

Выберем произвольную полуалгебраическую окрестность $\tilde{O}$ точки x_0 , для которой $\tilde{O} \subset O$ и $0 \notin \text{cl } \tilde{O}$. Далее, повторяя приведенные при доказательстве леммы 2 рассуждения, в которых только множество $\tilde{M}_O$ заменено на множество $\tilde{M} \cap \tilde{O}$, получим, что $q_k(x_i) \geq 0$ при всех больших i . Полученное противоречие завершает рассуждения.

Отметим, что лемма 2 вытекает из леммы 3. Действительно, пусть имеет место (3.2) и (3.3). Тогда условия (6.11) и (6.12) выполняются при $O = X$ для любого $x_0 \in N$. Предположим, что множество $M(y)$ неограничено. Тогда существуют x_i , для которых $Q[x_i, x_i] = y$ и $|x_i| \rightarrow \infty$. Рассмотрим векторы $l_i = x_i/|x_i|$. Переходя к подпоследовательности, имеем $l_i \rightarrow x_0 \in N$. Поскольку $Q[l_i, l_i] = \tau_i y$, где $\tau_i = |x_i|^{-2} > 0$, утверждение леммы 3 нарушается в точке x_0 . Это противоречие завершает рассуждения.

Заметим, что лемма 3 в настоящей работе не используется. Однако она имеет приложения в теории аномальных экстремальных задач (см. [1; гл. 1]).

§ 7. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Осуществляя в X линейное невырожденное преобразование, будем далее считать, что $l = (1, 0, \dots, 0)$. Покажем, что осуществляя еще и в Y линейное невырожденное преобразование, можно, не теряя общности, считать, что вместо условий а) и б) выполнено следующее условие:

$$\text{е) } q_k x_0 = 0, \quad q_k[l, l] = 0.$$

Действительно, в силу условия а)

$$\exists \theta \in \mathbb{R}^{k-1} : \quad q_k x_0 = (\tilde{Q}x_0)^* \theta. \quad (7.1)$$

Положим $g(x) = q_k(x) - \langle \theta, \tilde{Q}(x) \rangle$. Очевидно, что если $x \in \tilde{M}$, то условие $g(x) < 0$ равносильно тому, что $q_k(x) < 0$. Кроме того, в силу (7.1) имеем

$g'(x_0) = 0$. Покажем, что $g''(x_0)[l, l] = 0$. Действительно, в силу (7.1) имеем $(\theta, -1)(Qx_0)^* = 0$. Отсюда в силу б) следует, что $\langle (\theta, -1), Q[l, l] \rangle = 0$, так как ядро сопряженного оператора $(Qx_0)^*$ ортогонально образу оператора Qx_0 . Но по построению

$$\frac{1}{2}g''(x_0)[l, l] = -q_k[l, l] + \langle \theta, \tilde{Q}[l, l] \rangle = \langle (\theta, -1), Q[l, l] \rangle.$$

Поэтому $g''(x_0)[l, l] = 0$.

Пусть A – такое невырожденное линейное преобразование пространства Y , которое первые $k - 1$ координат вектора $y \in Y$ переводит в себя, а последнюю координату y_k переводит в $y_k - \theta^1 y_1 - \dots - \theta^{k-1} y_{k-1}$. Ясно, что A переводит квадратичное отображение $Q = (\tilde{Q}, q_k)$ в квадратичное отображение $Q' = (\tilde{Q}, g)$. По аналогии с $\Lambda_{k-1}(x_0)$ обозначим через $\Lambda'_{k-1}(x_0)$ множество векторов $\lambda' \in (\text{im } Q'x_0)^\perp$, $\lambda' \neq 0$, для каждого из которых существует подпространство $\Pi = \Pi(\lambda') \subseteq \ker Q'x_0$, коразмерность которого не превышает числа $k - 1$, такое, что $\lambda' Q'[\xi, \xi] \geq 0$, $\xi \in \Pi$.

В силу доказанного выше для квадратичного отображения Q' выполнены условия а)–д) предложения. Предположим, что для Q' утверждение уже доказано и $\lambda' \in \Lambda'_{k-1}(x_0)$ таково, что $\lambda'^k \leq 0$ – искомый вектор (λ'^k – его последняя координата). Покажем, что тогда $\lambda = A^* \lambda'$ отвечает отображению Q в силу предложения.

Очевидно, $\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Далее, оператор A^{-1} первые $k - 1$ координат вектора $y \in Y$ оставляет неизменными, а последнюю координату y_k переводит в $y_k + \theta^1 y_1 + \dots + \theta^{k-1} y_{k-1}$. Поэтому вектор $e = (0, \dots, 0, 1)$ является неподвижной точкой для A^{-1} (т.е. $A^{-1}e = e$) и, кроме того,

$$\lambda'^k = \langle \lambda', e \rangle = \langle (A^*)^{-1} \lambda, e \rangle = \langle (A^{-1})^* \lambda, e \rangle = \langle \lambda, A^{-1}e \rangle = \langle \lambda, e \rangle = \lambda^k \leq 0.$$

Таким образом, вектор λ удовлетворяет утверждению предложения. Поэтому в силу полученных выше свойств квадратичной формы g , не теряя общности, далее будем считать, что вместо условий а) и б) нам задано условие е).

Рассмотрим квадратичную форму $\psi(x) = -x_1^2 + c(x_2^2 + \dots + x_n^2)$, где число $c > 0$ выбрано достаточно большим так, что

$$\{x \in X : \psi(x) \leq 0\} \subseteq \text{int } K. \quad (7.2)$$

Это возможно, так как $l \in \text{int } K$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \widetilde{M} \setminus S; \\ \psi(x - x_0), & \text{если } x \in (X \setminus \widetilde{M}) \cup S. \end{cases}$$

(Легко видеть, что множество $(X \setminus \widetilde{M}) \cup S$ является дополнением множества $\widetilde{M} \setminus S$.) Покажем, что функция φ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности любой точки $w \in \widetilde{M}$ такой, что $\varphi(w) < 0$. Действительно, в силу определения φ имеем $w \in S$. Заметим также, что так как $\varphi(w) < 0$, то в силу (7.2) выполнено $w \in x_0 + \text{int } K$. Очевидно, что $w \neq x_0$.

Докажем существование окрестности точки w , которая не пересекается с множеством $\widetilde{M} \setminus S$. Предположим противное. Тогда существует последовательность $w_i \rightarrow w$ такая, что $w_i \in \widetilde{M}$, $w_i \notin S$ для всех i . Далее, так как $w \in x_0 + \text{int } K$, то существует такая окрестность $\widetilde{O}_w$ точки w , что $\widetilde{O}_w \subset x_0 + \text{int } K$. Заметим, что

$$\widetilde{O}_w \cap \left(\bigcup_{i=1}^r S_i \right) = \widetilde{O}_w \cap \widetilde{M}.$$

Поэтому существует такой номер j , что после перехода от последовательности w_i к ее подпоследовательности имеем $w_i \in S_j \neq S$ для всех i . Но тогда $w \in S_j$, поскольку $w \neq x_0$ и по условию множество $S_j \cup \{x_0\}$ замкнуто. Получили противоречие, так как $w \in S$, но $S \cap S_j = \emptyset$.

Поэтому (в силу определения φ) мы доказали, что для любой точки $w \in \widetilde{M}$ такой, что $\varphi(w) < 0$, существует такая окрестность O_w , что $\varphi(x) = \psi(x - x_0)$, $x \in O_w$, и, значит, функция φ дважды непрерывно дифференцируема в O_w . Используем это ниже.

Так как $l \in T_S(x_0)$, то существует последовательность $\{z_i\} \subset S$ такая, что

$$z_i \rightarrow x_0, \quad \frac{z_i - x_0}{|z_i - x_0|} \rightarrow l, \quad i \rightarrow \infty. \quad (7.3)$$

Покажем, что

$$\frac{q_k(z_i)}{\varphi(z_i)} \rightarrow 0+, \quad i \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$

Действительно, по построению $\psi[l, l] < 0$, а также $\varphi(z_i) = \psi(z_i - x_0)$, так как $z_i \in S$. Поэтому $\varphi(z_i)/|z_i - x_0|^2 \rightarrow \psi[l, l] < 0$, $i \rightarrow \infty$. С другой стороны, $q_k(z_i)/|z_i - x_0|^2 \rightarrow 0-$, $i \rightarrow \infty$, поскольку в силу е) $q_k(z_i) = q_k(z_i - x_0 + x_0) = q_k(z_i - x_0)$ и $q_k[l, l] = 0$, а в силу d) $q_k(z_i) < 0$. Отсюда непосредственно вытекает (7.4).

Для $\varepsilon > 0$ положим $\varphi_\varepsilon(x) = (\varphi(x) + \varepsilon)^+$, где $a^+ = \max\{a, 0\}$. Далее применим метод возмущения, предложенный в [13]. Для каждого фиксированного $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \gamma_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) + \frac{(-q_k(x))^+}{\varphi_\varepsilon(x)} \rightarrow \min, \\ \widetilde{Q}(x) = 0, \\ |x - x_0| \leq 1, \varphi_\varepsilon(x) > 0, \end{cases}$$

которую будем называть ε -задачей.

Покажем, что в каждой ε -задаче решение существует. Действительно, пусть x_j – произвольная минимизирующая последовательность ε -задачи. Переходя к подпоследовательности, имеем $x_j \rightarrow x_\varepsilon$, $j \rightarrow \infty$. Покажем, что $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$. Предположим противное. Тогда $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$. Отсюда $\varphi(x_\varepsilon) \leq -\varepsilon < 0$. Из непрерывности $\widetilde{Q}$ следует, что $x_\varepsilon \in \widetilde{M}$. Поэтому $x_\varepsilon \in S$ по определению φ . Тогда в силу условия d) $q_k(x_\varepsilon) < 0$. Но тогда из определения минимизируемого функционала γ_ε и того, что функция φ непрерывна в окрестности точки x_ε , имеем $\gamma_\varepsilon(x_j) \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$. Однако это противоречит тому, что $\gamma_\varepsilon(x_j) \leq \gamma_\varepsilon(x_0) = \varepsilon$

при больших j , так как x_0 – допустимая точка в ε -задаче и $\varphi(x_0) = 0$, $q_k(x_0) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$. Значит, точка x_ε удовлетворяет всем ограничениям ε -задачи. Однако этого еще недостаточно, чтобы утверждать, что x_ε – это решение ε -задачи, так как функция $\gamma_\varepsilon(\cdot)$, вообще говоря, не является полунепрерывной снизу.

Однако мы докажем, что в окрестности точки x_ε функция γ_ε непрерывна и, значит, x_ε является решением ε -задачи. Для этого в силу неравенства $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$ достаточно доказать, что функция φ непрерывна в окрестности x_ε .

Докажем, что $\varphi(x_\varepsilon) < 0$. Сначала покажем, что при всех больших i построенные выше точки z_i удовлетворяют всем ограничениям ε -задачи и $\gamma_\varepsilon(z_i) < \varepsilon$. Действительно, если $z_i \in S$, то $q_k(z_i) < 0$ и тогда $(-q_k(z_i))^+ = -q_k(z_i)$. Кроме того, в силу (7.3)

$$\varphi(z_i) = \psi(z_i - x_0) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

и, значит, $\varphi_\varepsilon(z_i) = \varphi(z_i) + \varepsilon > 0$ при больших i . Поэтому точки z_i являются допустимыми в ε -задаче, а для доказательства неравенства $\gamma_\varepsilon(z_i) < \varepsilon$ достаточно установить, что

$$\frac{-q_k(z_i)}{\varphi(z_i) + \varepsilon} < -\varphi(z_i).$$

Но это неравенство вытекает из того, что в силу (7.4)

$$\frac{-\varphi(z_i)}{-q_k(z_i)}(\varphi(z_i) + \varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Таким образом, доказано, что всех больших i точка z_i удовлетворяет всем ограничениям ε -задачи и $\gamma_\varepsilon(z_i) < \varepsilon$. Поэтому в силу того, что $\{x_j\}$ является минимизирующей последовательностью ε -задачи, существует $\delta \in (0, \varepsilon)$, для которого $\gamma_\varepsilon(x_j) \leq \delta$ при всех больших j . Используя определение функции φ и принимая во внимание то, что $x_\varepsilon \neq x_0$, а множество S содержит все свои предельные точки, за исключением точки x_0 , при больших j имеем

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(x_j) \leq \delta < \varepsilon &\implies \varphi(x_j) \leq \delta - \varepsilon < 0 \implies x_j \in S \text{ (так как } x_j \in \widetilde{M}) \\ &\implies x_\varepsilon \in S \text{ (так как } x_\varepsilon \in \widetilde{M}, x_\varepsilon \neq x_0) \\ &\implies \varphi(x_j) = \psi(x_j - x_0) \leq \delta - \varepsilon, \quad \varphi(x_\varepsilon) = \psi(x_\varepsilon - x_0) \\ &\implies \varphi(x_\varepsilon) \leq \delta - \varepsilon < 0. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что $x_\varepsilon \in S$ и $\varphi(x_\varepsilon) < 0$. Поэтому в силу установленных выше свойств функции φ получаем, что функция φ непрерывна в некоторой окрестности точки x_ε . Поэтому и в силу условия $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$ функция φ_ε (а значит, и γ_ε) непрерывна в некоторой окрестности O_ε точки x_ε и, более того, имеет место представление $\varphi_\varepsilon(x) = \psi(x - x_0) + \varepsilon$, $x \in O_\varepsilon$. Отсюда уже вытекает, что x_ε является решением ε -задачи.

Из того, что $x_\varepsilon \in S$, следует, что $q_k(x_\varepsilon) < 0$ в силу условия d). Поэтому, уменьшая окрестность O_ε , добьемся того, чтобы было справедливо представление

$$\gamma_\varepsilon(x) = \psi(x - x_0) + \varepsilon + \frac{-q_k(x)}{\psi(x - x_0) + \varepsilon}, \quad x \in O_\varepsilon. \quad (7.5)$$

Покажем, что $x_\varepsilon \rightarrow x_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, пусть x' – произвольная предельная точка последовательности $\{x_\varepsilon\}$. Ясно, что $x' \in \text{cl } S = S \cup \{x_0\}$. Так как из условия $0 > \varphi(x_\varepsilon) > -\varepsilon$ следует, что $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то в силу неравенств $\gamma_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $q_k(x_\varepsilon) < 0$ имеем $q_k(x') = 0$. Отсюда в силу условия d) получаем, что $x' = x_0$. Из доказанного, в частности, вытекает, что $|x_\varepsilon - x_0| < 1$ при всех малых ε , которые только и будем рассматривать.

Для указанных ε в ε -задаче выпишем в точке минимума x_ε необходимые условия второго порядка из [1]. А именно, на основании теоремы 4.1 из [1], используя представление (7.5), заключаем, что существуют подпространство $\Pi_\varepsilon \subseteq \ker \tilde{Q}x_\varepsilon$, $\text{codim } \Pi_\varepsilon \leq k-1$, и не равные одновременно нулю число $\lambda_\varepsilon^0 \geq 0$ и вектор $\theta_\varepsilon \in \mathbb{R}^{k-1}$ такие, что

$$(\lambda_\varepsilon^0 - \varkappa_\varepsilon)\psi\bar{x}_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^k q_k x_\varepsilon + \theta_\varepsilon \tilde{Q}x_\varepsilon = 0, \quad (7.6)$$

$$(\lambda_\varepsilon^0 - \varkappa_\varepsilon)\psi[\xi, \xi] + \lambda_\varepsilon Q[\xi, \xi] - 2\langle \lambda_\varepsilon^k q_k x_\varepsilon - \varkappa_\varepsilon \psi\bar{x}_\varepsilon, \xi \rangle \frac{\langle \psi\bar{x}_\varepsilon, \xi \rangle}{\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)} \geq 0, \quad \xi \in \Pi_\varepsilon, \quad (7.7)$$

где

$$\bar{x}_\varepsilon = x_\varepsilon - x_0, \quad \lambda_\varepsilon = (\theta_\varepsilon, \lambda_\varepsilon^k), \quad \varkappa_\varepsilon = \frac{-\lambda_\varepsilon^0 q_k(x_\varepsilon)}{[\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)]^2}, \quad \lambda_\varepsilon^k = \frac{-\lambda_\varepsilon^0}{\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)}.$$

Заметим, что $\lambda_\varepsilon^k \leq 0$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $\lambda_\varepsilon^0 > 0$ при всех малых ε . Нормируя множители Лагранжа, добьемся того, что $\lambda_\varepsilon^0 + |\lambda_\varepsilon| = 1$. Легко видеть, что

$$\frac{\varkappa_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon^k} = \frac{q_k(x_\varepsilon)}{\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(так как $\gamma_\varepsilon(x_\varepsilon) < \varepsilon \rightarrow 0$). Значит, $\varkappa_\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, $\lambda_\varepsilon^0 \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (так как $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) \rightarrow 0$ и $|\lambda_\varepsilon^k| \leq 1$). Из (7.6) имеем

$$\lambda_\varepsilon^k q_k x_\varepsilon = -(\lambda_\varepsilon^0 - \varkappa_\varepsilon)\psi\bar{x}_\varepsilon - \theta_\varepsilon \tilde{Q}x_\varepsilon.$$

Подставим это выражение в (7.7). Учтем, что если $\xi \in \Pi_\varepsilon$, то $\xi \in \ker \tilde{Q}x_\varepsilon$, откуда следует, что $\langle \theta_\varepsilon, \tilde{Q}[x_\varepsilon, \xi] \rangle = 0$. Тогда получим, что

$$(\lambda_\varepsilon^0 - \varkappa_\varepsilon)\psi[\xi, \xi] + \lambda_\varepsilon Q[\xi, \xi] - 2\lambda_\varepsilon^k (\langle \psi\bar{x}_\varepsilon, \xi \rangle)^2 \geq 0, \quad \xi \in \Pi_\varepsilon. \quad (7.8)$$

Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$. При этом $|\lambda| = 1$, так как $\lambda_\varepsilon^0 \rightarrow 0$. Докажем, что $\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Для этого осуществим в (7.8) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Воспользуемся теоремой 4.4 из [1]. В силу указанной теоремы в X существует линейное подпространство Π такое, что $\text{codim } \Pi \leq k-1$ и для любого $\xi \in \Pi$ существует последовательность $\{\xi_\varepsilon\}$, $\xi_\varepsilon \in \Pi_\varepsilon$, для которой вектор ξ является ее предельной точкой. При этом ясно, что $\Pi \subseteq \ker \tilde{Q}x_0$. Поэтому из условия а) вытекает, что $\Pi \subseteq \ker Qx_0$.

Зафиксируем произвольный вектор $\xi \in \Pi$ и возьмем отвечающую ему последовательность $\{\xi_\varepsilon\}$. Подставляя в (7.8) $\xi = \xi_\varepsilon$ и осуществляя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая при этом, что λ_ε^0 , $\varkappa_\varepsilon$, $\bar{x}_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$\langle \lambda, Q[\xi, \xi] \rangle \geq 0$. Отсюда в силу произвольности $\xi \in \Pi$ и того, что $\Pi \subseteq \ker Qx_0$, получаем, что $\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Ясно, что $\lambda^k \leq 0$.

Рассмотрим второй случай. Пусть существует последовательность натуральных чисел $\{s_j\}$ такая, что $s_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$, и $\lambda_\varepsilon^0 = 0, \varepsilon = s_j^{-1}, j = 1, 2, \dots$. Тогда $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^k = 0$, откуда в силу (7.7) имеем $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, выбирая подпоследовательность и переходя к пределу, найдем вектор $\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$ такой, что $\lambda^k = 0$. Предложение доказано.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Аграчеву за ценные советы и обсуждения.

Список литературы

- [1] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997.
- [2] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
- [3] Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47:5** (1990), 3–13; англ. пер.: E. R. Avakov, “Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping”, *Math. Notes*, **47:5** (1990), 425–432.
- [4] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46:2** (2006), 205–215; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem without a priori assumptions about normality”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46:2** (2006), 195–205.
- [5] А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49:3** (1990), 990–1013.
- [6] А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299:5** (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachëv, “Homology of intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37:2** (1988), 493–496.
- [7] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки”, *Матем. сб.*, **191:1** (2000), 3–26; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem as a realization of the Lagrange principle. Abnormal points”, *Sb. Math.*, **191:1** (2000), 1–24.
- [8] Д. Ю. Карамзин, “Исследование достаточных условий существования регулярного нуля у квадратичных отображений”, *Исследования по выпуклому анализу*, Итоги науки. ЮФО. Математический форум, **2**, Владикавказ, 2009, 84–97.
- [9] А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, “Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **13:6** (1996), 635–690.
- [10] А. В. Арутюнов, “Некоторые свойства квадратичных отображений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. ВМуК*, 1999, № 2, 30–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Some properties of quadratic mappings”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, 1999, № 2, 24–28.
- [11] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия экстремума в анормальной экстремальной задаче с ограничениями типа равенств”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46:8** (2006), 1363–1368; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Necessary optimality conditions in an abnormal optimization problem with equality constraints”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46:8** (2006), 1293–1298.

- [12] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **36**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [13] Д. Ю. Карамзин, “К необходимым условиям экстремума в аномальных задачах с ограничениями типа равенств и неравенств”, *Вопросы моделирования и анализа в задачах принятия решений*, ВЦ РАН, М., 2004, 88–99.

А. В. Арутюнов (A. V. Arutyunov)

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: arutun@orc.ru

Поступила в редакцию

14.12.2009 и 28.02.2011

Д. Ю. Карамзин (D. Yu. Karamzin)

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,

г. Москва

E-mail: dmitry_karamzin@mail.ru