Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Нижние оценки относительной емкости компактов и симметризация, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 11, 77–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 06:26:53

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Нижние оценки относительной емкости компактов и симметризация

Дано новое представление относительной емкости (half-plane capacity) ограниченного относительно замкнутого в $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ множества E через внутренний радиус связной компоненты множества $H \setminus E$, примыкающей к бесконечности. Установлены нижние оценки этой емкости через емкость множеств, полученных в результате ряда геометрических преобразований множества E , включая симметризацию Штейнера и круговую симметризацию. Рассматривается также поведение относительной емкости при линейно и радиально усредняющих преобразованиях семейств компактов $\{E_k\}_{k=1}^n$.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: емкость, внутренний радиус, симметризация Штейнера, круговая симметризация, радиальное преобразование, линейно усредняющее преобразование, радиально усредняющее преобразование.

Введение

Пусть E – относительно компактное подмножество верхней полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Понятие относительной емкости множества E (half-plane capacity – $\operatorname{hcap} E$) естественным образом возникает в статистической физике при изучении эволюций Шрамма–Левнера (см. [1]–[3]). Существует несколько определений этой емкости, например через так называемое комплексное броуновское движение (см. [1; § 3.4]). Если множество $H \setminus E$ является односвязной областью, то относительная емкость эквивалентно определяется из разложения

$$\Phi_E(z) = z + \frac{\operatorname{hcap} E}{z} + O(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где функция Φ_E осуществляет конформное и однолистное отображение области $H \setminus E$ на полуплоскость H . Емкость $\operatorname{hcap} E$ не убывает при расширении множества E , не меняется при сдвиге E вдоль вещественной оси,

$$\operatorname{hcap} \left\{ z : \frac{z}{\rho} \in E \right\} = \rho^2 \operatorname{hcap} E$$

при $\rho > 0$ и выполняется неравенство Шоке

$$\operatorname{hcap} E_1 + \operatorname{hcap} E_2 \geq \operatorname{hcap}(E_1 \cup E_2) + \operatorname{hcap}(E_1 \cap E_2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00028) и Дальневосточного отделения РАН (грант № 09-П-СО-01-004).

для любых E_k , $k = 1, 2$ (см. [1; с. 69–71]). Имеется некоторая аналогия в определениях емкости $\text{hcap } E$ и классической логарифмической емкости $\text{cap } E$. Следуя общему подходу (см. [4]), естественно поставить вопрос об оценках емкости $\text{hcap } E$ через емкости более простых (например, симметричных) множеств и об оценке этой емкости через геометрические характеристики. В недавней заметке [5] приводятся нижняя и верхняя оценки емкости $\text{hcap } E$ в случае, когда $H \setminus E$ – односвязная область:

$$\frac{1}{66} \text{hsiz } E < \text{hcap } E < \frac{7}{2\pi} \text{hsiz } E.$$

Здесь $\text{hsiz } E$ – двумерная мера Лебега объединения всех кругов с центрами в E , касающихся вещественной оси. С учетом нижней оценки емкости можно предположить, что существует точное изопериметрическое неравенство, аналогичное неравенству для логарифмической емкости

$$\text{cap } E \geq \sqrt{\frac{\text{area } E}{\pi}},$$

достижимому в случае, когда множество E есть круг (естественно без квадратного корня в случае относительной емкости; см. [4]). Вместе с тем, как будет показано в § 2, для любого компакта E существует множество E' с не большим, чем у E , значением частного $\text{hcap } E' / \text{area } E'$ и со сколь угодно малым “разбросом”

$$\frac{\max\{|\text{Im } z - \text{Im } \zeta| : z, \zeta \in E'\}}{\max\{|\text{Re } z - \text{Re } \zeta| : z, \zeta \in E'\}}.$$

Этот и другие примеры показывают, что природа емкости $\text{hcap } E$ сложнее, чем у $\text{cap } E$. Тем не менее можно показать, что относительная емкость не возрастает при симметризации Штейнера относительно мнимой оси и в некоторых случаях круговой симметризации (см. § 2). Емкость не возрастает при радиальном преобразовании из § 3 и ведет себя аналогично логарифмической емкости при некоторых видах усредняющих преобразований и симметризаций (см. §§ 2, 3). Эти и другие свойства емкости $\text{hcap } E$ вытекают из ее представления через внутренний радиус области (см. § 1) и известных принципов симметризации (см. [6]).

§ 1. Относительная емкость и внутренний радиус

Пусть область B плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ имеет функцию Грина $g_B(z, z_0)$, $z_0 \in B$. *Внутренним радиусом* области B относительно конечной точки $z_0 \in B$ называют величину

$$r(B, z_0) = \exp\left\{\lim_{z \rightarrow z_0} [g_B(z, z_0) + \log |z - z_0|]\right\}.$$

В случае односвязной области B внутренний радиус совпадает с конформным радиусом этой области. Внутренний радиус $r(B, z_0)$ произвольного открытого множества B относительно точки $z_0 \in B$ определим как внутренний радиус связной компоненты B , содержащей точку z_0 .

ЛЕММА 1. Пусть E – ограниченное относительно замкнутое подмножество полуплоскости H . Тогда существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[y^2 - \frac{yr(H \setminus E, iy)}{2} \right]. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим симметричное открытое множество

$$G = \left\{ z : \frac{1}{z} \in \overline{H} \setminus \overline{E} \text{ либо } \frac{1}{\bar{z}} \in \overline{H} \setminus \overline{E} \right\}$$

и открытое множество $G^+ = \{z : 1/\bar{z} \in H \setminus E\} = G \cap H$. Обозначим через $g(z, \zeta)$ функцию Грина связной компоненты множества G , содержащей начало координат, и пусть $h(z, \zeta) = \log |z - \zeta| + g(z, \zeta)$ – регулярная часть этой функции. Если такой функции Грина не существует, то удалим из множества G произвольный отрезок вещественной оси, не содержащий начало координат, и полученное при этом открытое множество вновь обозначим через G . При достаточно большом фиксированном $y > 0$ для функции Грина $g^+(z, \zeta)$ связной компоненты G^+ , содержащей точку i/y , выполняется тождество

$$g^+\left(z, \frac{i}{y}\right) \equiv g\left(z, \frac{i}{y}\right) - g\left(z, -\frac{i}{y}\right).$$

Прибавляя к обеим частям этого тождества $\log |z - i/y|$ и устремляя $z \rightarrow i/y$, получаем равенство

$$\log r\left(G^+, \frac{i}{y}\right) = \log r\left(G, \frac{i}{y}\right) - g\left(\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right).$$

Учитывая последнее выражение, имеем

$$\begin{aligned} \frac{r(H \setminus E, iy)}{y^2} &= r\left(G^+, \frac{i}{y}\right) = r\left(G, \frac{i}{y}\right) \exp\left\{-g\left(\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right)\right\} \\ &= \left\{r\left(G, \frac{i}{y}\right)r\left(G, -\frac{i}{y}\right) \exp\left\{-2g\left(\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right)\right\}\right\}^{1/2} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\left[h\left(\frac{i}{y}, \frac{i}{y}\right) + h\left(-\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right) - 2h\left(\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right) + 2\log\left|\frac{i}{y} + \frac{i}{y}\right|\right]\right\} \\ &= \frac{2}{y} \exp\left\{4 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \zeta}\right] \frac{1}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{y} + 8 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \zeta}\right] \frac{1}{y^3} + o\left(\frac{1}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует существование конечного предела (2).

ЛЕММА 2. Если для ограниченного подмножества E полуплоскости H множество $H \setminus E$ является односвязной областью, то справедлива формула

$$\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[y^2 - \frac{yr(H \setminus E, iy)}{2} \right] = \operatorname{hcap} E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество E и функция Φ_E такие, как в определении (1). Тогда

$$r(H, \Phi_E(iy)) = 2 \operatorname{Im} \left\{ iy + \frac{\operatorname{hcap} E}{iy} + O(y^{-2}) \right\} = 2y - \frac{2(\operatorname{hcap} E)}{y} + O(y^{-2}),$$

$$y \rightarrow \infty.$$

С другой стороны,

$$r(H, \Phi_E(iy)) = r(H \setminus E, iy) |\Phi'_E(iy)| = r(H \setminus E, iy) \left| 1 + \frac{\operatorname{hcap} E}{y^2} + O(y^{-3}) \right|,$$

$$y \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$r(H \setminus E, iy) = 2y - \frac{4(\operatorname{hcap} E)}{y} + O(y^{-2}), \quad y \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство.

Леммы 1 и 2 приводят нас к новому определению относительной емкости множества E . Всюду ниже под относительной емкостью $\operatorname{hcap} E$ будем понимать половину предела (2). В доказательствах полезна следующая формула для внутреннего радиуса, вытекающая из определения $\operatorname{hcap} E$:

$$r(H \setminus E, iy) = 2 \left(y - \frac{2(\operatorname{hcap} E)}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \right), \quad y \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Если $E_1 \subset E_2$, то из монотонности внутреннего радиуса следует

$$r(H, iy) \geq r(H \setminus E_1, iy) \geq r(H \setminus E_2, iy),$$

и с учетом формулы (3) получаем свойство монотонности емкости

$$0 = \operatorname{hcap} \emptyset \leq \operatorname{hcap} E_1 \leq \operatorname{hcap} E_2.$$

Если $\rho E = \{z : z/\rho \in E\}$, $\rho > 0$, то

$$\rho^2 \operatorname{hcap} E = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[(y\rho)^2 - y\rho \frac{r(H \setminus \rho E, iy\rho)}{2} \right] = \operatorname{hcap}(\rho E).$$

Неравенство Шоке для относительной емкости вытекает из неравенства Ренгли (см. [7]) и формулы (3) (ср. [1; § 3.4]). В дополнение к неравенству Шоке приведем следующее свойство емкости:

$$2 \operatorname{hcap} E \geq \operatorname{hcap} E_1 + \operatorname{hcap} E_2,$$

где

$$E_1 = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0, z \in E\} \cup \{z : \operatorname{Re} z \leq 0, -\bar{z} \in E\},$$

$$E_2 = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0, z \in E\} \cup \{z : \operatorname{Re} z \geq 0, -\bar{z} \in E\}.$$

Выписанное неравенство вытекает из асимптотической формулы (3) и теоремы 1.9 статьи [6].

ЛЕММА 3. Для любого ограниченного замкнутого в H множества E существует последовательность ограниченных открытых множеств $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $E \subset U_n$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{hcap}(\overline{U_n} \cap H) = \text{hcap} E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество G и функции $g(z, \zeta)$, $h(z, \zeta)$ такие, как в доказательстве леммы 1, и пусть G_n , $n = 1, 2, \dots$, – исчерпание связной компоненты $\tilde{G}$ множества G , содержащей начало координат, симметричными относительно вещественной оси областями G_n , имеющими классическую функцию Грина, $0 \in \overline{G_n} \subset G_{n+1} \subset \tilde{G}$, $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = \tilde{G}$. Из доказательства леммы 1 имеем

$$y^2 - \frac{yr(H \setminus E, iy)}{2} = -4 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \zeta} \right] + o(1), \quad y \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\text{hcap} E = -2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 h(0, 0)}{\partial z \partial \zeta} \right].$$

Аналогично,

$$\text{hcap}(\overline{U_n} \cap H) = -2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 h_n(0, 0)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 h_n(0, 0)}{\partial z \partial \zeta} \right],$$

где $U_n = \{z \in H : 1/\bar{z} \notin \overline{G_n}\}$ и $h_n(z, \zeta)$ – регулярная часть функции Грина $g_n(z, \zeta)$ области G_n , $n = 1, 2, \dots$. Пользуясь неравенством Гарнака, нетрудно убедиться, что последовательность положительных функций $h(z, \zeta) - h_n(z, \zeta) = g(z, \zeta) - g_n(z, \zeta)$ сходится к нулю равномерно внутри $\tilde{G} \times \tilde{G}$ (по совокупности переменных). Отсюда следует сходимость к нулю частных производных, вычисленных в точке $(0, 0)$. Требуемое неравенство вытекает теперь из выписанных выше представлений относительной емкости.

§ 2. Преобразования множеств вдоль прямых и окружностей

В 1950 г. Поля ввел круговую симметризацию множеств и функций с целью получения изопериметрических неравенств (см. [4]). Следуя Поля, определим здесь круговую симметризацию множества E относительно замкнутого в полуплоскости H . Для заданного вещественного числа a обозначим через $\tau(a)$ луч $\{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \leq a\}$, $\gamma_r(a)$ – окружность $|z - ia| = r$ в случае $0 < r < \infty$ и точка ia (соответственно ∞), если $r = 0$ (соответственно $r = \infty$), и пусть $H^- = \{\operatorname{Im} z \leq 0\}$. Результатом круговой симметризации множества E относительно луча $\tau(a)$ назовем преобразование этого множества в симметричное множество $\operatorname{Cr}_a E \subset H$, определенное следующим образом. Если при данном r , $0 \leq r \leq \infty$, “окружность” $\gamma_r(a)$ не пересекается с множеством $H^- \cup E$, то она не пересекается и с множеством $H^- \cup \operatorname{Cr}_a E$. Если $\gamma_r(a) \subset H^- \cup E$, то $\gamma_r(a) \subset H^- \cup \operatorname{Cr}_a E$. В остальных случаях множество $H^- \cup \operatorname{Cr}_a E$ пересекается

с $\gamma_r(a)$ по замкнутой дуге с центром на луче $\tau(a)$ и линейной мерой, равной мере пересечения $H^- \cup E$ с $\gamma_r(a)$. Нетрудно видеть, что множество $\text{Cr}_a E$ замкнуто в H и $\text{area } E = \text{area } \text{Cr}_a E$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого вещественного числа a справедливо неравенство*

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap } \text{Cr}_a E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множество $H \setminus E$ является областью. По определению круговой симметризации множество $H \setminus \text{Cr}_a E$ является результатом круговой симметризации области $H \setminus E$ относительно луча $\{z : \text{Re } z = 0, \text{Im } z \geq a\}$. Из теоремы Поля-Сегё следует

$$r(H \setminus E, iy) \leq r(H \setminus \text{Cr}_a E, iy)$$

для любых $y \geq a$ (см., например, [4], [6]). Осталось воспользоваться формулой (3).

При $a \rightarrow -\infty$ множество $\text{Cr}_a E$ “размазывается” вдоль вещественной оси с сохранением площади и уменьшением относительной емкости. Было бы интересно найти нижнюю грань величины $\text{hcap } E$ при фиксированных $\text{area } E$ и $\text{Im } E = \max\{\text{Im } z : z \in E\}$ по всевозможным ограниченным замкнутым в H множествам E . В случае $a \rightarrow +\infty$ множество $\text{Cr}_a E$ стремится в некотором смысле к результату симметризации Штейнера множества E относительно мнимой оси $\text{St } E$. Напомним определение этой симметризации. Для произвольного вещественного числа y обозначим через $\lambda(y)$ горизонтальную прямую $\text{Im } z = y$. Симметризацией Штейнера ограниченного замкнутого в H (либо в $\mathbb{C}$) множества E относительно мнимой оси называется преобразование этого множества в симметричное множество $\text{St } E$, определенное следующим образом:

$$\text{St } E = \{x + iy : E \cap \lambda(y) \neq \emptyset, 2|x| \leq \mu(E \cap \lambda(y))\},$$

где $\mu(\cdot)$ – линейная мера Лебега.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap } \text{St } E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3 существует последовательность ограниченных открытых множеств $\{U_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям

$$E \subset U_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{hcap}(\overline{U_n} \cap H) = \text{hcap } E.$$

По заданному n подберем такое большое число a_n , чтобы выполнялось включение

$$\text{Cr}_{a_n}(\overline{U_n} \cap H) \supset \text{St } E, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда по теореме 1 в силу монотонности емкости получаем

$$\text{hcap}(\overline{U_n} \cap H) \geq \text{hcap } \text{Cr}_{a_n}(\overline{U_n} \cap H) \geq \text{hcap } \text{St } E.$$

Остается перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если множество E пересекается с каждой прямой $\lambda(y)$, $0 < y \leq y_0$, то справедлива нижняя оценка

$$\text{hcap } E \geq \frac{y_0^2}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap}[0, iy_0].$$

Подходящая ветвь функции

$$\Phi_{[0, iy_0]}(z) = \sqrt{z^2 + y_0^2} = z + \frac{y_0^2}{2z} + \dots$$

конформно и однолистно отображает полуплоскость H с разрезом по отрезку $[0, iy_0]$ на H . В силу разложения (1) имеем $\text{hcap}[0, iy_0] = y_0^2/2$.

СЛЕДСТВИЕ 2 (см. [5]). Если $H \setminus E$ — односвязная область, то

$$\text{hcap } E \geq \frac{(\text{Im } E)^2}{2}.$$

Для произвольного вещественного числа x обозначим через $l(x)$ вертикальную прямую $\text{Re } z = x$. Преобразование Штейнера ограниченного замкнутого в H множества E относительно вещественной оси назовем множество

$$\text{Sth } E = \{x + iy : 0 < y \leq \mu(E \cap l(x))\}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Для любого ограниченного замкнутого в H множества E справедливо неравенство

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap } \text{Sth } E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится радиальное преобразование Маркуса (см. [8]), переводящее произвольное открытое множество B , $z_0 \in B$, в звездообразное множество

$$M_{z_0} B = \{z_0 + re^{i\theta} : 0 \leq r < M(\theta, B), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

где

$$M(\theta, B) = \rho \exp\left(\int_{F(\rho, \theta, B)} \frac{dr}{r}\right), \quad F(\rho, \theta, B) = \{r : z_0 + re^{i\theta} \in B, \rho \leq r < \infty\}. \quad (4)$$

Здесь $M(\theta, B)$ не зависит от ρ , $\{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subset B$. Пусть $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из леммы 3. Нетрудно убедиться, что для любого заданного числа n существует достаточно большое y_n такое, что при всех $y \geq y_n$ выполняется включение

$$M_{iy}(H \setminus \overline{U_n}) \subset H \setminus \text{Sth } E, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из теоремы 3 работы Маркуса [8] в силу монотонности внутреннего радиуса следует

$$r(H \setminus \overline{U_n}, iy) \leq r(M_{iy}(H \setminus \overline{U_n}), iy) \leq r(H \setminus \text{Sth } E, iy).$$

Формула (3) дает

$$\text{hcap}(\overline{U_n} \cap H) \geq \text{hcap } \text{Sth } E.$$

Осталось воспользоваться леммой 3.

Если множество $H \setminus E$ является односвязной областью, то теорема 3 вытекает из теоремы 1 работы [9]. В общем случае эти утверждения независимы.

В дополнение к симметризациям Поля и Штейнера приведем суперпозицию круговой симметризации и дробно-линейного отображения. Пусть a – произвольное положительное число. Функция

$$w = d_a(z) = \frac{ia - z}{ia + z}$$

конформно и однолистно отображает полуплоскость H на круг $|w| < 1$. Обозначим через Cr круговую симметризацию Поля относительно вещественной положительной полуоси (см. [4], [6]). Тогда для любого компакта E в H и больших y имеем

$$\begin{aligned} r(H \setminus E, iy) &= r(d_a(H \setminus E), d_a(iy)) |d'_a(iy)| \leq r(\text{Cr } d_a(H \setminus E), d_a(iy)) |d'_a(iy)| \\ &= r(d_a^{-1}(\text{Cr } d_a(H \setminus E)), iy). \end{aligned}$$

Применяя асимптотическую формулу (3), заключаем, что

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap}(d_a^{-1}(\text{Cr } d_a(E))).$$

Устремляя здесь a к $+\infty$, вновь приходим к теореме 2.

Рассмотрим теперь усредняющее преобразование множеств вдоль вертикальных прямых. Пусть $\{E_k\}_{k=1}^n$ – семейство ограниченных замкнутых в H множеств E_k , $k = 1, \dots, n$, и пусть $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – совокупность положительных чисел, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. *Результатом линейно усредняющего преобразования семейства $\{E_k\}_{k=1}^n$ назовем множество*

$$\mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^n = \left\{ x + iy : 0 < y \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(E_k \cap l(x)) \right\}.$$

Данное преобразование построено по аналогии с радиально усредняющим преобразованием Маркуса (см. [10]), которое семейству открытых множеств B_k , $k = 1, \dots, n$, содержащих точку z_0 , ставит в соответствие звездообразное множество

$$\mathbb{R}_A^{z_0} \{B_k\}_{k=1}^n = \left\{ z_0 + re^{i\theta} : 0 \leq r < \prod_{k=1}^n (M(\theta, B_k))^{\alpha_k}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

где $M(\theta, B)$ определено соотношениями (4). Теорема 2.2 работы [10] дает

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, z_0))^{\alpha_k} \leq r(\mathbb{R}_A^{z_0} \{B_k\}_{k=1}^n, z_0). \quad (5)$$

Аналогом этой теоремы в случае относительной емкости является

ТЕОРЕМА 4. *Для любого семейства ограниченных замкнутых в H множеств $\{E_k\}_{k=1}^n$ и любой совокупности положительных чисел $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \operatorname{hcap} E_k \geq \operatorname{hcap} \mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^n$ – совокупность ограниченных открытых множеств в H , удовлетворяющих условиям

$$E_k \subset U_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для любого k , $1 \leq k \leq n$, замкнутое множество $H \setminus U_k$ принадлежит множеству $H \setminus E_k$ вместе с некоторой окрестностью. Поэтому при достаточно большом y выполняется включение

$$\mathbb{R}_A^{iy} \{H \setminus \overline{U_k}\}_{k=1}^n \subset H \setminus \mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^n.$$

Из неравенства (5) и монотонности внутреннего радиуса получаем

$$\prod_{k=1}^n (r(H \setminus \overline{U_k}, iy))^{\alpha_k} \leq r(\mathbb{R}_A^{iy} \{H \setminus \overline{U_k}\}_{k=1}^n, iy) \leq r(H \setminus \mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^n, iy).$$

Устремляя y к $+\infty$, получаем из (3)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \operatorname{hcap}(\overline{U_k} \cap H) \geq \operatorname{hcap} \mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^n.$$

Завершает доказательство применение леммы 3.

L-симметризацией компакта E в H назовем преобразование этого компакта в симметричный компакт $\mathbb{L} E$:

$$\mathbb{L} E = \left\{ x + iy : 0 < y \leq \frac{\mu(E \cap l(x)) + \mu(E \cap l(-x))}{2} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5. *При L-симметризации компакта в полуплоскости H относительная емкость не увеличивается.*

Доказательство вытекает из теоремы 4, если заметить, что

$$\mathbb{L} E = \mathbb{L}_A \{E_k\}_{k=1}^2, \quad A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \quad E_1 = E, \quad E_2 = \{z : -\bar{z} \in E\}.$$

§ 3. Радиальные преобразования и симметризация

Следуя радиальному преобразованию Маркуса (4), определим преобразование ограниченного замкнутого в H множества E по формуле

$$ME = \{re^{i\theta} : 0 < r \leq \overline{M}(\theta, E), 0 < \theta < \pi\},$$

где

$$\begin{aligned} \overline{M}(\theta, E) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \exp \left(\int_{F(\rho, \theta, E)} \frac{dr}{r} \right), \quad \rho > 0, \\ F(\rho, \theta, E) &= \{r : re^{i\theta} \in E, \rho \leq r < \infty\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что если множество ME не пусто, то $\overline{ME}$ – замкнутое ограниченное множество, звездообразное относительно начала координат, и если в некоторой окрестности точки $z = 0$ нет точек множества E , то множество ME пусто.

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$\text{hcap } E \geq \text{hcap } ME.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad F_c \left(\frac{1}{\rho}, \theta, H \setminus E \right) = \left\{ r : re^{i\theta} \in H \setminus E, 0 < r \leq \frac{1}{\rho} \right\}, \quad \rho > 0.$$

Для любого θ , $0 < \theta < \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{M}(\theta, E) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \exp \left[\log \rho + \int_{F(\rho, \theta, E)} \frac{dr}{r} \right] = \exp \left[-\log \rho - \int_{F_c(1/\rho, \theta, H \setminus E)} \frac{dr}{r} \right] \\ &= \exp \left[-\log \rho - \frac{1}{2} \int_{F(\rho^2, 2\theta, f(H \setminus E))} \frac{dr}{r} \right] \\ &= \left\{ \exp \left[-\log \rho^2 - \int_{F(\rho^2, 2\theta, f(H \setminus E))} \frac{dr}{r} \right] \right\}^{1/2} = M_0^{-1/2}(2\theta, f(H \setminus E)) \end{aligned}$$

(см. (4)). Отсюда следует, что множество ME можно представить в виде

$$ME = H \setminus f^{-1}(M_0 f(H \setminus E)).$$

Пусть теперь U – ограниченное открытое множество в H , содержащее множество E . Тогда $f(H \setminus U) \subset f(H \setminus E)$ и найдется такое число $y' > 0$, что для любого $y \geq y'$ выполняется включение

$$M_{-y^{-2}} f(H \setminus \overline{U}) \subset M_0 f(H \setminus E).$$

Учитывая теорему Маркуса (см. [8]) и монотонность внутреннего радиуса, для достаточно больших y получаем

$$\begin{aligned} r(H \setminus \overline{U}, iy) 2y^{-3} &= r(f(H \setminus \overline{U}), -y^{-2}) \leq r(M_{-y^{-2}} f(H \setminus \overline{U}), -y^{-2}) \\ &\leq r(M_0 f(H \setminus E), -y^{-2}) = r(H \setminus ME, iy) 2y^{-3}. \end{aligned}$$

Формула (3) дает

$$\text{hcap}(\overline{U} \setminus H) \geq \text{hcap} M E.$$

Завершает доказательство применение леммы 3.

Пусть вновь $\{E_k\}_{k=1}^n$ – семейство ограниченных замкнутых в H множеств E_k , $k = 1, \dots, n$, и пусть $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – совокупность положительных чисел, сумма которых равна единице. Положим

$$\mathbb{R}_A \{E_k\}_{k=1}^n = \left\{ r e^{i\theta} : 0 < r \leq \prod_{k=1}^n (\overline{M}(\theta, E_k))^{\alpha_k}, 0 < \theta < \pi \right\},$$

где $\overline{M}(\theta, E)$ определено соотношениями (6).

ТЕОРЕМА 7. *Для любого семейства $\{E_k\}_{k=1}^n$ и любой совокупности $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \text{hcap} E_k \geq \text{hcap} \mathbb{R}_A \{E_k\}_{k=1}^n.$$

Доказательство повторяет в идейном плане доказательство предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что вместо радиальных преобразований Маркуса $M_{-y^{-2}}$ и M_0 необходимо использовать усредняющие преобразования соответственно $\mathbb{R}_A^{-y^{-2}}$ и $\mathbb{R}_A^0$.

R -симметризацией компакта E в H назовем преобразование этого компакта в симметричный относительно мнимой оси компакт

$$R E = \{ r e^{i\theta} : 0 < r \leq (\overline{M}(\theta, E) \overline{M}(\pi - \theta, E))^{1/2}, 0 < \theta < \pi \}.$$

Нетрудно видеть, что

$$R E = \mathbb{R}_A \{E_k\}_{k=1}^2, \quad A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \quad E_1 = E, \quad E_2 = \{z : -\bar{z} \in E\}.$$

Поэтому из теоремы 7 вытекает

ТЕОРЕМА 8. *При R -симметризации компакта в полуплоскости H относительная емкость не увеличивается.*

Автор благодарит рецензента за улучшение текста статьи и информацию о работах [2], [3].

Список литературы

- [1] G. F. Lawler, *Conformally invariant processes in the plane*, Math. Surveys Monogr., **114**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] G. Lawler, “Schramm–Loewner evolution (SLE)”, *Statistical mechanics* (Park City, UT, USA, 2007), IAS/Park City Math. Ser., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 231–295.

- [3] G. F. Lawler, “Conformal invariance and 2D statistical physics”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **46**:1 (2009), 35–54.
- [4] Г. Поля, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, ГИФМЛ, М., 1962; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud., **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951.
- [5] S. P. Lalley, G. F. Lawler, H. Narayanan, “Geometric interpretation of half-plane capacity”, *Electron. Commun. Probab.*, **14** (2009), 566–571.
- [6] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.
- [7] H. Renggli, “An inequality for logarithmic capacities”, *Pacific J. Math.*, **11**:1 (1961), 313–314.
- [8] M. Marcus, “Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions”, *Pacific J. Math.*, **14**:2 (1964), 613–626.
- [9] В. Н. Дубинин, “Симметризация Штейнера и начальные коэффициенты однолистных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 75–82; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Steiner symmetrization and the initial coefficients of univalent functions”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 735–742.
- [10] M. Marcus, “Radial averaging of domains, estimates for Dirichlet integrals and applications”, *J. Analyse Math.*, **27**:1 (1974), 47–78.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Институт прикладной математики ДВО РАН,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

15.12.2009 и 02.04.2010