Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Трехмерные квартики с плоскостью,
Матем. сб., 2011, том 202, номер 2, 57–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:34:32

УДК 512.763

М. М. Гриненко

Трехмерные квартики с плоскостью

Изучаются трехмерные многообразия Фано, бирационально изоморфные квартике с плоскостью. Доказано, что линейные системы при отсутствии максимальной особенности в особой точке многообразия могут иметь максимальные особенности только вдоль кривых степени один. Построены соответствующие бирациональные автоморфизмы.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: бирациональная геометрия, многообразия Фано, метод максимальных особенностей.

§ 1. Предварительные замечания

Трехмерные квартики играют в бирациональной геометрии совершенно особую роль. С одной стороны, они часто используются для получения каких-то принципиально новых результатов, а с другой – являются “полигоном” для проверки новых технических идей. Так, появившаяся в 1971 г. революционная статья [1] В. А. Исковских и Ю. И. Манина о нерациональности неособых трехмерных квартик привела к появлению нового метода, с тех пор неоднократно успешно применявшегося в исследованиях рациональности алгебраических многообразий. Позже А. В. Пухликов, слегка “испортив” неособую квартику обыкновенной двойной точкой, получил, по-видимому, первый пример многообразия с конечно порожденной группой бирациональных автоморфизмов; следует отметить, что это было первое успешное применение метода максимальных особенностей к многообразиям с особенностями. Два других автора в [2], “ухудшив” обыкновенную двойную точку до особенности типа sA_2 , построили первый пример бирационально нежесткого многообразия, имеющего в своем классе бирациональной эквивалентности в точности два многообразия Фано (в предыдущих возникали расслоения). Наконец, интенсивное влияние программы минимальных моделей на метод максимальных особенностей привело к созданию целого ряда важных технических приемов (см., в частности, [3], [4]), и первым мерилom эффективности этих приемов была, разумеется, квартика.

Один из способов еще более усложнить в бирациональном смысле квартику $X \subset \mathbb{P}^4$ – это “посадить” на нее плоскость $P \subset X$. Такое многообразие в общем случае, как нетрудно убедиться, имеет ровно девять обыкновенных двойных точек. Задачу исследования бирациональной геометрии такого многообразия автору поставил А. В. Пухликов более десяти лет назад. Но на тот момент это вполне классическое многообразие (его рассматривал в свое время сам Фано),

вероятно, вряд ли могло быть исследовано до конца из-за технических трудностей. Однако интерес к квартике с плоскостью постоянно возрастал, так как по мере продвижения исследований в области бирациональной геометрии у этого многообразия обнаруживались новые интересные особенности. Например, выяснилось, что если вне плоскости квартика имеет особенность типа cD_4 , то она становится бирационально изоморфной двойному пространству индекса два (см. [5]), а это многообразие Фано индекса два является, вероятно, на данный момент пределом мечтаний в развитии метода максимальных особенностей в трехмерной ситуации.

Квартика с плоскостью, однако, и сама по себе – чрезвычайно интересное многообразие. Заметим, что плоскость P не является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором на X . Действительно, если M_1 и M_2 – две гиперплоскости, содержащие P , а F_1 и F_2 – соответствующие вычетные кубики, т.е. $M_i \cap X = F_i \cup P$, то в общем случае F_1 и F_2 пересекаются по точкам. Таким образом, сама квартика X не лежит в категории Мори.

Довольно просто построить две модели X , лежащие в категории Мори. Одна из них, многообразие Фано V с особой точкой ζ (это – простейшая факторособенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$), являющееся полным пересечением типа $(3, 3)$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^5, 2)$, получается, если раздуть плоскость $P \subset \mathbb{P}^4$ (это будет малым разрешением особенностей) и затем стянуть собственный прообраз плоскости. Вторая модель W немедленно получается, если взять другое малое разрешение особенностей X . Многообразие W является расслоением на кубические поверхности над прямой, т.е. имеется морфизм $\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1$. Конструкция расслоения $W \rightarrow \mathbb{P}^1$ следующая. Рассмотрим $\mathbb{P}^3$ -расслоение

$$\pi: \mathcal{S} = \text{Proj}_{\mathbb{P}^1} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Пусть M – тавтологический дивизор, т.е. $\pi_* \mathcal{O}(M) = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, L – слой расслоения. Тогда $W \sim 3M + L$ на $\mathcal{S}$. Положим $F = L|_U$. Тогда легко убедиться в том, что $P_W \sim (-K_V) - F$, где P_W – образ P на W .

Таким образом, существует бирациональная перестройка $\chi: V \dashrightarrow W$ между двумя расслоениями Мори, которая реализуется так: мы берем разрешение особенности $\zeta \in V$ (а именно, взвешенное раздутие $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) и затем производим флоп одновременно в девяти прямых.

Выясняется, однако, что это еще не все. Дело в том, что на V существуют бирациональные автоморфизмы, связанные с кривыми степени один на V . Они исследованы в § 6. Если l – такая прямая и π_l – соответствующий бирациональный автоморфизм, то, рассматривая действие π_l на U , можно показать, что этот бирациональный автоморфизм не сохраняет слои, иначе говоря, бирациональное отображение

$$\chi \circ \pi_l \circ \chi^{-1}: W \dashrightarrow W$$

не послонно. С одной стороны, $\chi \circ \pi_l \circ \chi^{-1}$ можно рассматривать как бирациональный автоморфизм W , “перекручивающий” слои. Но с точки зрения программы Саркисова (см. [3]), мы имеем дело с целым “одномерным семейством”

разных бирациональных структур на X . Можно сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1.1. Пусть X – общая кватрика с плоскостью, Z/S – некоторое расслоение Мори, бирационально изоморфное X , $\alpha: Z \dashrightarrow V$ и $\beta: Z \dashrightarrow W$ – соответствующие бирациональные изоморфизмы. Тогда либо $Z \cong V$, либо Z является расслоением на кубические поверхности над $\mathbb{P}^1$ и в последнем случае существует бирациональный автоморфизм $\gamma: W \dashrightarrow W$ такой, что отображение $\gamma \circ \beta: Z \dashrightarrow W$ послонно. Других структур Мори на X не содержится, в частности, X не бирационально изоморфно никакому расслоению на коники, откуда следует, что X нерационально.

Основным содержанием настоящей статьи является частичная проверка гипотезы 1.1, а именно, описание максимальных особенностей линейных систем и соответствующих “откручивающих” бирациональных автоморфизмов на модели V (теорема 2.1). Тем самым будет доказана “половина” желаемого результата. Доказательство остальной части, связанной с максимальными особенностями на расслоении $U/\mathbb{P}^1$, предполагается дать в следующей статье.

§ 2. Постановка задачи

Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – гиперповерхность степени четыре, в однородных координатах $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$, задаваемая уравнением

$$x_0 Q_0(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) - x_1 Q_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (2.1)$$

где Q_0 и Q_1 – однородные полиномы третьей степени. Очевидно, кватрика X содержит плоскость $P = \{x_0 = x_1 = 0\}$. Мы будем предполагать, что полиномы Q_0 и Q_1 таковы, что определяемые ими на плоскости P кубические кривые имеют ровно девять точек пересечения в общем положении, т.е. никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие шесть – на одной конике. Легко видеть, что указанные девять точек являются обыкновенными двойными точками кватрики, и мы полагаем X неособой во всех остальных точках.

Многообразие X не лежит в категории Мори: плоскость P не является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором, группа классов дивизоров порождена этой плоскостью и классом гиперплоского сечения, который, в свою очередь, порождает группу Пикара.

Существует два малых разрешения особенностей X . Одно из них (всюду далее соответствующее многообразие будет обозначаться через $\tilde{V}$) получается так: надо раздуть плоскость P как подмногообразие в $\mathbb{P}^4$ и в качестве $\tilde{V}$ взять собственный прообраз X . Легко видеть, что $\psi: \tilde{V} \rightarrow X$ является малым стягиванием, $\tilde{V}$ неособо, отличается от X девятью прямыми с нормальными пучками $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ и

$$\mathrm{Pic}(\tilde{V}) = \mathbb{Z}[-K_{\tilde{V}}] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{P}],$$

где $\tilde{P} \cong \mathbb{P}^2$ – собственный прообраз P . Отметим, что $\mathcal{N}_{P|\tilde{V}} \simeq \mathcal{O}(-2)$ и существует бирациональное стягивание

$$\varphi: \tilde{V} \longrightarrow V$$

на многообразии Фано $V \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$ с факторособенностью ζ типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ в особой точке взвешенного проективного пространства. Заметим, что φ является единственным разрешением особенностей V с неприводимым дивизором и в подходящих координатах является взвешенным раздутием типа $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Отметим, что V является взвешенным полным пересечением кубик в $\mathbb{P}(1^5, 2)$. Это нетрудно понять, рассматривая V как “обратную проекцию” X . Действительно, используя уравнение 2.1, положим

$$y = \frac{Q_1}{x_0} = \frac{Q_0}{x_1}.$$

Рассматривая $x_0, \dots, x_4$ как координаты веса один и y – как координату веса два в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, получаем следующую систему уравнений для V :

$$\begin{cases} x_0 y = Q_1, \\ x_1 y = Q_0. \end{cases}$$

С другой стороны, в указанных девяти специальных прямых многообразия $\tilde{V}$ можно одновременно произвести флоп

$$\chi: \tilde{V} \dashrightarrow W$$

на неособое многообразие W , расслоенное над прямой на кубические поверхности. Если прокрутить через P пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^4$, то высекаемые им на X вычеты кубические поверхности будут изоморфны слоям $W/\mathbb{P}^1$.

Обозначим через H гиперплоское сечение X . Пусть $\tilde{H}$ и H_V – его собственные прообразы на $\tilde{V}$ и V , F – вычетная кубическая поверхность какого-нибудь гиперплоского сечения X , содержащего P (так что $H \sim P + F$), $\tilde{F}$ – ее прообраз на $\tilde{V}$, F_W – слой расслоения $W \rightarrow \mathbb{P}^1$ и P_W – собственный прообраз плоскости P на W . Тогда

$$\begin{aligned} K_V &\sim -H_V, & K_X &\sim H, & P_W &\sim (-K_W) - F_W, \\ \tilde{H} &\sim \varphi^*(H) - \frac{1}{2}\tilde{P}, & \tilde{F} &\sim \varphi^*(H) - \frac{3}{2}\tilde{P}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем полагать, что многообразие X удовлетворяет следующим условиям общности положения.

- $\mathcal{G}_1$) X имеет девять обыкновенных двойных точек $O_1, \dots, O_9$; на плоскости P эти точки находятся в общем положении.
- $\mathcal{G}_2$) Пусть $l \subset X$ – прямая, $\tilde{l}$ – ее собственный прообраз на $\tilde{V}$. Тогда $\mathcal{N}_{\tilde{l}|\tilde{V}} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}$.
- $\mathcal{G}_3$) Пусть $T \subset \mathbb{P}^4$ – касательная гиперплоскость к X в точке $B \in X \setminus P$, не содержащая плоскость P . Тогда через точку B проходят не более трех прямых на X .

$\mathcal{G}_4$) Пусть в соответствующих аффинных координатах в окрестности особой точки O кватрика X имеет уравнение $f_2 + f_3 + f_4 = 0$, где f_i – однородные полиномы степени i , $L \subset \{f_2 = 0\}$ – плоскость любого из двух семейств плоскостей на невырожденном квадратичном конусе $\{f_2 = 0\}$, $M \subset \mathbb{P}^4$ – общая гиперплоскость, содержащая L . Тогда $M|_X$ имеет дювалевскую особенность типа A_2 в точке O .

$\mathcal{G}_5$) Дивизоры из линейной системы $|H - P|$ (это вычетные кубики, высекаемые пучком гиперплоскостей через P) имеют, самое большее, одну дювалевскую особенность типа A_1 .

Далее, легко видеть, что X содержит одномерное семейство прямых, не пересекающих плоскость P : размерность пространства деформаций таких прямых не менее единицы, а счетом констант показывается, что эта размерность не более единицы (см. [6]). Такого сорта прямые будем называть прямыми типа А. Кроме того, через каждую из двойных точек X проходит ровно семнадцать прямых, не лежащих на плоскости P (то, что прямых семнадцать, следует из условия общности $\mathcal{G}_2$). Такие прямые будем называть прямыми типа Б. Собственные прообразы этих прямых на V не проходят через особую точку $\zeta \in V$ и имеют степень один (относительно пересечения с H_V); про них мы тоже будем говорить, что они имеют тип А или Б соответственно. Как будет далее показано, с этими прямыми связаны бирациональные автоморфизмы V .

Пусть $\mathcal{D} \subset |nH_V|$ – непустая линейная система на V без неподвижных компонент. Кратностью $\nu_0 = \text{mult}_\zeta D$ линейной системы $\mathcal{D}$ в точке ζ будем называть такое число $\nu_0 \geq 0$, что для собственного прообраза $\tilde{D}$ общего дивизора $D \in \mathcal{D}$ на $\tilde{V}$ выполнено

$$\tilde{D} \sim \varphi^*(D) - \nu_0 \tilde{P}.$$

Заметим, что если $\nu_0 > \frac{1}{2}n$, то линейная система $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность в точке ζ (т.е. лог-пара $K_V + \frac{1}{n}\mathcal{D}$ неканонична в этой точке). Действительно,

$$K_{\tilde{V}} + \frac{1}{n}\tilde{D} = \varphi^*\left(K_V + \frac{1}{n}D\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_0}{n}\right)\tilde{P},$$

при этом $\frac{1}{2} - \frac{\nu_0}{n} < 0$. В таком случае собственный прообраз $\mathcal{D}_W$ линейной системы $\mathcal{D}$ на W будет подсистемой в $|(\frac{3}{2} - \nu_0)(-K_W) + (\nu_0 - \frac{n}{2})F_W|$. Поскольку $\frac{3}{2}n - \nu_0 < n$ и $\nu_0 - \frac{n}{2} > 0$, мы видим, что порог канонического присоединения линейной системы $\mathcal{D}_W$ ниже, чем у $\mathcal{D}$. Перестройка $V \dashrightarrow W$ является примером линка Саркисова типа один, “откручивающего” максимальную особенность линейной системы; при этом работать мы уже должны с линейной системой $\mathcal{D}_W$ на расслоении $W/\mathbb{P}^1$ методами, предложенными в работе [7].

Отметим, что если лог-пара $K_V + \frac{1}{n}\mathcal{D}$ неканонична в некотором подмножестве V , содержащем точку ζ , то она неканонична уже в дивизоре $\tilde{P}$ (т.е. существует максимальная особенность $\mathcal{D}$, реализуемая дивизориальным раздутием φ). Это следует из основного результата статьи [8] и теоремы Шокурова о связности. Таким образом, если в настоящей статье наша цель – описать максимальные особенности линейных систем на V , то мы можем предполагать, что центр этих максимальных особенностей “не задевает” точку ζ .

Основным результатом статьи является следующая теорема (теорема 2.1).

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть X – кватрика с плоскостью, удовлетворяющая условиям общности положения $(\mathcal{G}_1), \dots, (\mathcal{G}_5)$, $V \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$ – соответствующее ей взвешенное полное пересечение кубик. Пусть $\mathcal{D} \subset |nH_V|$ – непустая линейная система без неподвижных компонент, не имеющая максимальной особенности в особой точке $\zeta \in V$, т.е. $\nu_0 = \text{mult}_\zeta \mathcal{D} \leq \frac{n}{2}$. Тогда $\mathcal{D}$ может иметь максимальные особенности только в прямых типа А или В на V .*

Дальнейшее изложение материала статьи проводится по следующему плану. В § 3 даются необходимые пояснения, связанные с применяемым в этой работе методом максимальных особенностей. В §§ 4 и 5 исключаются случаи максимальных особенностей в кривых, кроме прямых типа А и В, в § 6 строятся бирациональные автоморфизмы, связанные с этими прямыми. В §§ 7–9 исключаются бесконечно близкие максимальные особенности. Параграф 10 целиком посвящен неожиданно трудному случаю максимальных особенностей, реализуемых обычным раздутием. В § 11 доказываются условия общности положения.

§ 3. Отступление: о методе максимальных особенностей

Технической основой настоящей работы является метод максимальных особенностей. С общими положениями этого метода можно познакомиться в статье [9]. В этом параграфе мы укажем лишь некоторые специальные детали, используемые далее.

Напомним, что дискретное нормирование $\mathfrak{v}$ поля функций многообразия U задает максимальную особенность линейной системы $\mathcal{D}$ без неподвижных компонент, если выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\mathfrak{v}(\mathcal{D}) > \mu \delta_{\mathfrak{v}},$$

где $\mathfrak{v}(\mathcal{D})$ – кратность линейной системы относительно нормирования, μ – порог канонического присоединения, $\delta_{\mathfrak{v}}$ – каноническая кратность относительно нормирования. Предположим, что U лежит в категории Мори, и пусть $B \subset U$ – центр нормирования $\mathfrak{v}$ на U . Тогда, используя крепантные разрешения для лог-пар и рассуждая, как в работе [3; § 2], можно показать, что существует дивизориальное раздутие $U' \rightarrow U$ с центром $B_0 \subset B$ такое, что соответствующее ему нормирование $\mathfrak{v}_{\text{div}}$ также задает максимальную особенность линейной системы $\mathcal{D}$. Более того, в работе [4] доказано, что дивизориальные раздутия неособых точек трехмерного многообразия являются в точности взвешенными раздутиями веса $(1, L, N)$, где $L < N$, в некоторой локальной системе координат.

В статье [9] показано, что любое (геометрическое) дискретное нормирование с неособым центром реализуется цепочкой раздутий

$$U = U_0 \longleftarrow U_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow U_L \longleftarrow U_{L+1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow U_N$$

с центрами $B_i \subset U_i$ и исключительными дивизорами $E_i \subset U_i$, причем $B_i \subset E_i$, $B_0, \dots, B_{L-1}$ – точки и $B_L, \dots, B_{N-1}$ – неособые кривые, являющиеся сечениями соответствующих линейчатых поверхностей $E_L, \dots, E_{N-1}$. При этом в случае дивизориальных раздутий соответствующая цепочка раздутий, реализующих нормирование $\mathbf{v}_{\text{div}}$, устроена так, что $B_i \cap E_{i-1}^i = \emptyset$, где E_{i-1}^i обозначает собственный прообраз дивизора E_{i-1} на многообразии U_i . В частности, это означает, что граф $\Gamma(\mathbf{v}_{\text{div}})$ (см. [9]) имеет только стрелки $i+1 \rightarrow i$, исключительные дивизоры E_i при $i > L$ представляют собой линейчатые поверхности типа $\mathbb{F}_{i+1-L}$, кривые $B_i \subset E_i$ являются сечениями класса $s_i + (i+1-L)f_i$ (s_i и f_i – минимальное сечение и слой E_i соответственно), которые, очевидно, не пересекают минимальные сечения $s_i \subset E_i$, высекаемые дивизорами E_{i-1}^i . Здесь и всюду далее под поверхностью $\mathbb{F}_k$ мы понимаем поверхность, изоморфную $\text{Proj}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(k))$.

Обозначим $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \mathcal{D}^{i-1}$, где $\mathcal{D}^{i-1}$ – собственный прообраз линейной системы на U_{i-1} . Тогда для дивизориальных раздутий типа $(1, L, N)$ неравенство Нётера–Фано запишется в виде

$$\nu_1 + \dots + \nu_N > \mu(L + N), \quad (3.1)$$

а для кратностей $m_i = \text{mult}_{B_i}(D_1 \circ D_2)^i$, где D_1 и D_2 – общие элементы линейной системы $\mathcal{D}$ и $(D_1 \circ D_2)^i$ – собственный прообраз одномерного цикла $D_1 \circ D_2$ на U_i , выполняется так называемое квадратичное неравенство:

$$m_0 + \dots + m_{L-1} \geq \sum_{i=1}^N \nu_i^2 > \mu^2 \frac{(N+L)^2}{N}. \quad (3.2)$$

Наконец, мы постоянно будем использовать следующий факт (см. [9]).

ЛЕММА 3.1. Пусть B – либо неособая точка, либо – неособая кривая, лежащая в неособой части многообразия U , а S и T – различные неприводимые дивизоры на U , $\mu_1 = \text{mult}_B S$, $\mu_2 = \text{mult}_B T$, и $U' \rightarrow U$ – раздутие B с исключительным дивизором $E \subset U'$. Для собственных прообразов S' и T' дивизоров на U' положим $S' \circ T' = Z' + Z$, где Z' – собственный прообраз одномерного цикла $S \circ T$ на U' и $\text{Supp} Z \subset E$. Под $\deg Z$ будем понимать индекс пересечения цикла с прямой в случае, когда E – плоскость, и индекс пересечения со слоем в случае линейчатой поверхности (т.е. когда B – кривая). Тогда

$$\text{mult}_B S \circ T = \mu_1 \mu_2 + \deg Z.$$

§ 4. Максимальные кривые I

В этом параграфе мы докажем, что если $\nu_0 = \text{mult}_\zeta \mathcal{D} \leq \frac{1}{2}n$ и для линейной системы $\mathcal{D} \subset |nH_V|$ без неподвижных компонент неприводимая кривая C_V является максимальной (т.е. центром максимальной особенности), то $\deg C_V = H_V \circ C_V = 1$, т.е. C_V – это прямая типа А или Б.

Итак, пусть C_V – максимальная кривая, $\nu = \text{mult}_{C_V} \mathcal{D} > n$. Тогда $\zeta \notin C_V$. Действительно, в противном случае на многообразии $\tilde{V}$ собственный прообраз $\tilde{C}$ кривой C_V пересекает $\tilde{P}$ в некоторой точке A . Так как $\tilde{\mathcal{D}}|_{\tilde{P}} \sim 2\nu_0 l$, где

$\tilde{\mathcal{D}}$ – собственный прообраз $\mathcal{D}$ и l – прямая на $\tilde{P}$, то

$$2\nu_0 \geq \nu > n,$$

т.е. $\nu_0 > \frac{1}{2}n$, что противоречит исходному требованию. Таким образом, $\zeta \notin C_V$, а значит, $\deg C_V$ – целое число. Более того, для общих элементов D_1 и D_2 из линейной системы $\mathcal{D}$ имеем

$$\frac{9}{2}n^2 = D_1 \circ D_2 \circ H_V \geq \nu^2 \deg C_V > n^2 \deg C_V,$$

так что $\deg C_V$ равна один, два, три или четыре. Рассмотрим случаи степени три и четыре.

4.1. Случай $\deg C_V = 4$. Так как $\zeta \notin C_V$, то ее собственный прообраз $C \subset X$ будет кривой степени четыре.

Предположим сначала, что C_V – неособая и C не является плоской. Тогда C либо неособа, либо имеет двойную точку в особой точке X . Пусть C неособа, тогда либо C рациональна (не лежит ни в какой гиперплоскости), либо эллиптическая (лежит в некоторой гиперплоскости). В любом случае C высекается квадратами в $\mathbb{P}^4$. Таким образом, мы можем записать, что

$$C_V \subset \text{Bas } |2H_V - C_V| = C_V \cup l_1 \cup \dots \cup l_k,$$

где $l_1, \dots, l_k$, $0 \leq k \leq 9$, – кривые степени $\frac{1}{2}$. Если $k > 0$, то это означает, что C пересекает P в k двойных точках. Отметим, что C пересекает l_i в одной точке (с учетом кратности). Пусть $S \in |2H_V - C_V|$ и $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ – общие элементы, $\gamma: U \rightarrow V$ – раздутие C_V с исключительным дивизором E , $E^3 = -2 - 2g(C)$. Тогда для собственных прообразов дивизоров на U имеем

$$D_{1U} \circ D_{2U} \circ S_U = 9n^2 - 8\nu n - (6 - 2g(C))\nu^2.$$

Заметим, что $D_{1U} \circ D_{2U} = \alpha_1 l_{1U} + \dots + \alpha_k l_{kU} + Z$, где l_{iU} – собственные прообразы l_i на U и $\text{Supp } Z \not\subset S_U$. Так как $l_{iU} \circ S_U = 0$, то получаем противоречие, а именно,

$$0 > 9n^2 - 8\nu n - (6 - 2g(C))\nu^2 = Z \circ S_U + \sum l_{iU} \circ S_U \geq 0.$$

Пусть теперь C имеет двойную точку в особой точке кватрики X и по-прежнему не является плоской. Тогда с какой-нибудь кривой степени $\frac{1}{2}$, например, с l_1 , C_V имеет две точки пересечения (с учетом кратности). Отметим, что C_V – неособая рациональная кривая. Мы можем записать, что

$$D_1 \circ D_2 = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_k l_k + Z,$$

где $\text{Supp } Z$ не содержит l_i . Как и ранее, пусть $U \rightarrow V$ – раздутие C_V . Для собственного прообраза S_U общего элемента $S_V \in |2H_V - C_V|$ имеем $S_U \circ l_{1U} = -1$ и $S_U \circ l_{iU} = 0$ при $1 < i \leq k$. Чтобы оценить кратности α_i , выберем общий элемент $T \in |2H_V|$. Тогда

$$9n^2 = D_1 \circ D_2 \circ T \geq \nu^2 C_V \circ T + \sum \alpha_i l_i \circ T > 8n^2 + \sum \alpha_i,$$

так что $\sum \alpha_i < n^2$ и, в частности, $\alpha_1 < n^2$. Тогда

$$9n^2 - 8\nu n - 6\nu^2 = D_{1U} \circ D_{2U} \circ S_U \geq -\alpha_1,$$

и мы приходим к противоречию:

$$n^2 > \alpha_1 \geq 8\nu n + 6\nu^2 - 9n^2 > 5n^2.$$

Итак, случай, когда C_V неособа и C не плоская, разобран. Пусть теперь C_V имеет особую точку $A \in V$ и C не является плоской. Возможны два варианта: особая точка C_V может лежать или не лежать на кривой степени $\frac{1}{2}$. Рассмотрим первую ситуацию. Так как $V \dashrightarrow X$ – изоморфизм в окрестности особой точки $A \in C_V$, то кривая C будет изоморфна V_C (другие особые точки не появятся, так как C не плоская). Значит, C высекается квадрами в $\mathbb{P}^4$. Рассмотрим линейную систему $|2H_V - C_V|$ и ее общий элемент S . Заметим, что если $V' \rightarrow V$ – раздутие точки A , то на исключительном дивизоре E' появится прямая l , базисная для собственного прообраза линейной системы $2H_V - C_V$. Пусть тогда $U \rightarrow V'$ – раздутие сначала кривой l , а затем собственного прообраза C . Если ν' – кратность $\mathcal{D}$ в точке A , а μ – кратность в кривой l , то для собственных прообразов общих элементов $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ на U имеем

$$D_{1U} \circ D_{2U} \circ S_U = 9n^2 - \nu'^2 - \mu^2 - 6\nu^2 - 2\mu\nu' - 8\nu\nu' + 4\nu\nu' + 4\mu\nu' \geq 0,$$

откуда получаем противоречие:

$$0 \leq 9n^2 - 2\nu^2 - 8\nu\nu' - (\mu + \nu' - 2\nu)^2 < 0.$$

Пусть теперь особая точка $A \in C$ лежит на кривой l_1 степени $\frac{1}{2}$. Только что проведенные рассуждения применимы и в такой ситуации, если мы докажем, что собственный прообраз l_1 на V' не пересекает прямую l , поскольку в этом случае S_U неотрицательна на всех кривых в U . Но это действительно так. Заметим, что C имеет двойную точку в особой точке X , так как C не плоская. По условию общности $\mathcal{G}_4$, найдется элемент $G_V \in |H_V - l_1|$, имеющий в точке A особенность типа A_1 . Его собственный прообраз G на X будет иметь особую точку типа A_2 в двойной точке X и высекаться гиперплоскостью M , содержащей плоскость $L \subset \mathbb{P}^4$ такую, что P и L пересекаются только в двойной точке X . Тогда общая квадра в $Q \subset \mathbb{P}^4$, содержащая C , будет касаться M в этой точке и собственный прообраз $Q \cap X$ на V будет содержать l_1 и иметь особенность A_1 в точке A , откуда следует то, что нам надо, если дополнительно заметить, что ни одна из ветвей кривой C не касается l_1 (иначе M пересекала бы C по более чем четырем точкам).

Пусть теперь C является плоской и $L \subset \mathbb{P}^4$ – плоскость, содержащая C . Очевидно, $C = X \cap L$. Предположим сначала, что $A = L \cap P$ – точка. Тогда это обязательно одна из особых точек X (мы используем то, что $\zeta \notin C_V$). Очевидно, точка A также является особой точкой C .

Пусть $f_2 + f_3 + f_4 = 0$ – уравнение X в аффинной системе координат в окрестности точки A , f_i – однородные полиномы степени i . Предположим,

что $\text{mult}_A C = 2$. Тогда L не лежит ни в одном из двух семейств плоскостей невырожденного квадратичного конуса $\{f_2 = 0\}$. Кривую, которая вклеится на место точки A при малом разрешении $\tilde{V} \rightarrow X$, обозначим через l . Положим $\mu = \text{mult}_l \tilde{\mathcal{D}}$. При этом, очевидно, $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu$. Пусть $U \rightarrow \tilde{V}$ – раздутие l с исключительным дивизором E , минимальное сечение и слой которого обозначим через s и f соответственно. Собственный прообраз C_U кривой C на U либо проходит через две различные точки E , либо касается E в какой-то точке, причем из того факта, что $L \not\subset \{f_2 = 0\}$, следует, что на E существует неприводимая кривая $r \sim s + f$, не являющаяся базисной для собственного прообраза $\mathcal{D}_U$ линейной системы и проходящая через точки $C_U \cap E$ (либо касающаяся C_U в точке пересечения с E). Так как

$$\mathcal{D}_U|_E \subset \left| \mu s + \left(\left(\mu + \frac{n}{2} \right) - \nu_0 \right) f \right|,$$

то из условия пересечения с кривой r мы получаем, что

$$2\mu + \frac{n}{2} - \nu_0 \geq 2\nu,$$

что противоречит условиям $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu$ и $\mu \leq n$.

Пусть $L \subset \{f_2 = 0\}$. Предположим, что $l = L \cap P$ – прямая (заметим, что $P \subset \{f_2 = 0\}$). Тогда существует гиперплоскость M , содержащая плоскости L и P . Пусть S – вычетная кубическая поверхность, т.е. $M \cap X = L \cup S$. Так как $C \circ P = 4$ (как подмногообразие в M), то C не может проходить через все девять двойных точек X . Пусть $L' \subset M$ – общая плоскость, содержащая ту двойную точку X , через которую не проходит C , и $t = L' \cap S$ – кубическая кривая. Отметим, что t пересекает C в четырех точках. Тогда для ее собственного прообраза t_V на V имеем $\deg t_V = 4$ и мы получаем следующее противоречие:

$$4n = D \circ t_V \geq 4\nu > 4n.$$

Пусть теперь L лежит в том же пучке плоскостей на $\{f_2 = 0\}$, что и P , и $A = P \cap L$ – точка. Тогда $\text{mult}_A C = 3$ и $C_V \cong C$. Пусть S – общее гиперплоское сечение, содержащее L . Тогда S – это КЗ-поверхность с одной особой точкой типа A_2 , как это следует из условия общности $\mathcal{G}_4$). Собственный прообраз S_V поверхности S на V будет иметь две точки типа A_1 (одна из них – ζ), и через эти две точки проходит кривая l степени $\frac{1}{2}$. Очевидно, на S_V мы имеем $l^2 = -1$ и $l \circ C_V = \frac{3}{2}$. Пусть $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$ и D – общий элемент $\mathcal{D}$. Тогда

$$D|_{S_V} = \mu l + Z,$$

причем $l \not\subset \text{Supp } Z$ в силу общего выбора гиперплоского сечения. Но тогда

$$Z \circ l = \frac{n}{2} + \mu \geq \nu(C_V \circ l) = \frac{3}{2}\nu > \frac{3}{2}n,$$

откуда следует, что $\mu > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

4.2. Случай $\deg C_V = 3$. Предположим сначала, что C не является плоской. Тогда C неособа, высекается квадрिकाми и может пересекать P только в особых точках. Как и в случае степени четыре, имеем

$$\text{Bas } |2H_V - C_V| = C_V + \sum_{i=1}^k l_i,$$

где l_i – кривые степени $\frac{1}{2}$, которые C_V трансверсально пересекает, $0 \leq k \leq 9$. Рассмотрим общие элементы $S \in |2H_V - C_V|$ и $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Пусть $U \rightarrow V$ – раздутие C_V . Поскольку собственный прообраз S пересекает собственные прообразы l_i на U по нулю, получаем следующее противоречие:

$$0 \leq D_{1U} \circ D_{2U} \circ S_U = 9n^2 - 6\nu n - 5\nu^2 < 0.$$

Пусть теперь C – плоская, $L \subset \mathbb{P}^4$ – содержащая ее плоскость, и t – вычетная прямая, т.е. $X \cap L = C \cup t$. Предположим сначала, что L пересекает P в неособой точке. Тогда t пересекает P в той же точке, и собственный прообраз t_V прямой на V имеет степень $\frac{3}{2}$. Пусть S – общее гиперплоское сечение через плоскость L . Тогда S – неособая КЗ-поверхность, ее собственный прообраз S_V – тоже КЗ-поверхность с точкой A_1 . Пусть $\mu = \text{mult}_{t_V} \mathcal{D}$. Тогда для общего $D \in \mathcal{D}$ имеем

$$D|_{S_V} = \mu l + Z,$$

где $l \not\subset \text{Supp } Z$ в силу общего выбора S . Тогда

$$Z \circ t_V = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\mu \geq 3\nu > 3n,$$

откуда следует, что $\mu > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

Пусть теперь L пересекает P в особой точке A квартики X (и нигде более), а $f_2 + f_3 + f_4 = 0$ – уравнение X в окрестности этой особой точки. Предположим, что $L \not\subset \{f_2 = 0\}$. Тогда общее гиперплоское сечение S через плоскость L имеет обыкновенную двойную точку в точке A . Очевидно, $A \in C$. Пусть C сама имеет особенность в точке A . Собственный прообраз S_V поверхности S на V содержит кривую l степени $\frac{1}{2}$, причем на S_V мы имеем $C_V \circ l = 2$. Таким образом, для общего $D \in \mathcal{D}$ получаем

$$(D|_{S_V} - \mu l) \circ l = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\mu \geq 2\nu > 2n,$$

откуда следует, что $\mu > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$. Пусть C неособа в точке A . Тогда обязательно $A \in t$, поскольку кривая $t \cup C$ имеет особенность в точке A . Как и выше, рассмотрим общее гиперплоское сечение S через L и его собственный прообраз S_V на V . Пусть $l \subset S_V$ – кривая степени $\frac{1}{2}$, $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$ и $\alpha = \text{mult}_{t_V} \mathcal{D}$. Положим для общего $D \in \mathcal{D}$

$$D|_{S_V} = \mu l + \alpha t_V + Z.$$

Получаем систему двух неравенств:

$$Z \circ t_V = n - \mu + 2\alpha \leq \nu, \quad Z \circ l = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\mu - \alpha \geq 2\nu,$$

из которой следует, что $n + \mu \geq \frac{5}{2}\nu$, так что $\mu > n$. Но это противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$. Теперь предположим, что L пересекает P по точке A , но теперь уже $L \subset \{f_2 = 0\}$, т.е. L и P – в одном семействе плоскостей конуса $\{f_2 = 0\}$. По условию общности $\mathcal{G}_2$) общее гиперплоское сечение S через L имеет джовалевскую особенность A_2 в точке A . Более того, так как $\text{mult}_A(X \cap L) = 3$, то $\text{mult}_A C = 2$. Пусть l – кривая степени $\frac{1}{2}$ на собственном прообразе S_V поверхности S на V , $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$. Тогда

$$(D|_{S_V} - \mu l) \circ l = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\mu \geq 2\nu > 2n,$$

что опять приводит к противоречию: $\mu > n$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $t = L \cap P$ – прямая. Очевидно, t проходит через некоторую особую точку $A \in X$. Пусть $L \not\subset \{f_2 = 0\}$. Тогда общее гиперплоское сечение S через L имеет особенность типа A_1 в точке A . Отметим, что $\text{mult}_A(X \cap L) = 2$, так что C неособа в точке A . Так как вне точки A индекс пересечения C и t равен двойке, C нигде не касается t (так как $\zeta \notin C_V$), а t не проходит через три особые точки X по условию общности $\mathcal{G}_1$), то t проходит через еще одну особую точку $B \in X$, причем C имеет в этой точке особенность. Таким образом, $\text{mult}_B(X \cap L) = 3$, т.е. $L \subset \{f'_2 = 0\}$, где $f'_2 + f'_3 + f'_4 = 0$ – уравнение X в окрестности точки B , так что S имеет особенность типа A_1 в точке A и типа A_2 в точке B по условию общности $\mathcal{G}_4$). В итоге мы имеем следующую ситуацию: S_V содержит две кривые l_1 и l_2 степени $\frac{1}{2}$, две особые точки типа A_1 , одна из которых – ζ , кривая l_1 проходит только через ζ , кривая l_2 – через обе особые точки. Отметим, что $C_V \circ l_1 = 1$ и $C_V \circ l_2 = 2$ на S_V . Положим $\mu_i = \text{mult}_{l_i} \mathcal{D}$. Тогда для общего $D \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \mu_1 l_1 - \mu_2 l_2) \circ l_1 &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \mu_1 l_1 - \mu_2 l_2) \circ l_2 &= \frac{1}{2}n + \mu_2 - \frac{1}{2}\mu_1 \geq 2\nu, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 > 2n$, т.е. для какого-то из μ_i выполнено $\mu_i > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

Наконец, пусть $L \in \{f_2 = 0\}$. Тогда $\text{mult}_A(X \cap L) = 3$ и мы приходим в точности к только что рассмотренной ситуации, если поменять местами точки A и B . Тем самым рассмотрение случая $\deg C_V = 3$ завершено.

§ 5. Максимальные кривые II

В этом параграфе рассматриваются случаи максимальных кривых степени два, т.е. $\deg C_V = 2$. Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа.

Итак, пусть $\deg C_V = 2$, так что $C \subset X$ – неприводимая коника, и L – содержащая ее плоскость. Далее в этом параграфе, если A – особая точка X , то под уравнением $f_2 + f_3 + f_4 = 0$ понимается уравнение X в аффинных координатах в окрестности точки A . Рассматриваемые ниже случаи исчерпывают все ситуации взаимного расположения L и P .

5.1. Случай, когда L пересекает P в неособой точке. В этой ситуации, очевидно, $C \cap P = \emptyset$. Пусть $A = L \cap P$. У нас есть следующие варианты:

- 1) $X \cap L = C \cup C'$, где C' – неприводимая коника, $C' \cap P = A$;
- 2) $X \cap L = C \cup t \cup s$, где t и s – прямые, пересекающиеся в точке A (т.е. L касается X в точке A);
- 3) $X \cap L = C \cup t \cup s$, где t и s – прямые, $A \in t$, $s \cap P = \emptyset$.

Пусть S – общее гиперплоское сечение через L . Тогда S – неособая КЗ-поверхность, а ее собственный прообраз S_V на V имеет обыкновенную двойную точку ζ .

Рассмотрим случай 1). Отметим, что $C_V \circ C'_V = 4$ на S_V . Пусть $\mu = \text{mult}_{C'_V} \mathcal{D}$. Тогда для общего $D \in \mathcal{D}$ выполняется

$$(D|_{S_V} - \mu C'_V) \circ C'_V = \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}\mu \geq 4\nu > 4n,$$

откуда следует, что $\mu > n$, чего быть не может.

Случаи 2) и 3) рассматриваются аналогично. Пусть $\mu_1 = \text{mult}_{t_V} \mathcal{D}$, $\mu_2 = \text{mult}_{s_V} \mathcal{D}$. Тогда в случае 2) имеем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ t_V &= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_2 \geq 2\nu, \\ (D|_{S_V} - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ s_V &= \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2 \geq 2\nu. \end{aligned}$$

Сложив оба неравенства, мы немедленно получаем противоречие: $3n \geq 4\nu > 4n$. В случае 3) получаем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \mu_1 t_V - \mu_2 s) \circ t &= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\mu_1 - \mu_2 \geq 2\nu, \\ (D|_{S_V} - \mu_1 t_V - \mu_2 s) \circ s &= n - \mu_1 + 2\mu_2 \geq 2\nu, \end{aligned}$$

так что $\frac{5}{2}n + \frac{1}{2}\mu_1 + \mu_2 \geq 4\nu > 4n$, что невозможно, так как $\mu_1 \leq n$ и $\mu_2 \leq n$.

5.2. Случай, когда L пересекает P в особой точке A и не лежит в $\{f_2 = 0\}$. Отметим сразу, что $\text{mult}_A(X \cap L) = 2$. У нас имеются следующие варианты:

- 1) $X \cap L = C \cup C'$, где C' – неприводимая коника, $A \in C' \cap C$;
- 2) $X \cap L = C \cup t \cup s$, где t и s – прямые, пересекающиеся в точке A , $A \notin C$;
- 3) $X \cap L = C \cup t \cup s$, где t и s – прямые, $A \in t \cap C$, $s \cap P = \emptyset$.

Как и выше, рассмотрим общее гиперплоское сечение S через L . Тогда S будет КЗ-поверхностью с обыкновенной двойной точкой, на ее собственном прообразе S_V на V вклеится кривая l степени $\frac{1}{2}$. Пусть $\alpha = \text{mult}_l \mathcal{D}$ и $D \in \mathcal{D}$ – общий элемент.

В случае 1), обозначив $\mu' = \text{mult}_{C'_V} \mathcal{D}$, на S_V имеем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha l - \mu' C'_V) \circ l &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\alpha - \mu' \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu' C'_V) \circ C'_V &= 2n - \alpha + 2\mu' \geq 3\nu, \end{aligned}$$

откуда следует, что $3n + 2\alpha \geq 5\nu > 5n$, так что $\alpha > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

В случаях 2) и 3) пусть $\mu_1 = \text{mult}_{t_V} \mathcal{D}$ и $\mu_2 = \text{mult}_{s_V} \mathcal{D}$. В случае 2) имеем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ l &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\alpha - \mu_1 - \mu_2 \geq 0, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ t_V &= n - \alpha + 2\mu_1 \geq 2\nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ s_V &= n - \alpha + 2\mu_2 \geq 2\nu, \end{aligned}$$

так что $3n + \alpha \geq 4\nu > 4n$, что невозможно при $\alpha \leq n$. В третьем случае получаем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ l &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\alpha - \mu_1 \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ t_V &= n - \alpha + 2\mu_1 - \mu_2 \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ s_V &= n - \mu_1 + 2\mu_2 \geq 2\nu. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{9}{2}n + \frac{5}{2}\alpha \geq 7\nu > 7n$, что опять-таки невозможно при $\alpha \leq n$.

5.3. Случай, когда L пересекает P по прямой t , проходящей через особую точку A , и не лежит в $\{f_2 = 0\}$. Заметим, что t обязана проходить через одну из двойных точек $A \in X$, так как C может пересекать P только в двойных точках X . Мы имеем $X \cap L = C \cup t \cup t'$, где t' — прямая на X . Так как $t \circ C = 2$ на L и C не касается t ни в какой точке (т.е. C пересекает t в двух разных точках), то существует еще особая точка $B \in X$, через которую проходит t . Таким образом, $t \cap C = A \cup B$ и у нас есть два варианта:

- 1) t' не содержит ни одну из точек A или B ;
- 2) $B \in t'$.

Пусть S — общее гиперплоское сечение через L , а l_1 и l_2 — кривые степени $\frac{1}{2}$ на S_V , которые вкляются на место двойных точек A и B , $\mu' = \text{mult}_{t'_V} \mathcal{D}$, $\alpha_1 = \text{mult}_{l_1} \mathcal{D}$ и $\alpha_2 = \text{mult}_{l_2} \mathcal{D}$.

Заметим, что в случае 1) сечение S имеет две обыкновенные двойные точки, в случае 2) у S имеется особенность A_1 в точке A и особенность A_2 в точке B по условию общности $\mathcal{G}_2$). Для общего элемента $D \in \mathcal{D}$ в случае 1) получаем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ l_1 &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\mu' \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ l_2 &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\mu' \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ t'_V &= \frac{3}{2}n - \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{3}{2}\mu' \geq 2\nu, \end{aligned}$$

так что $\frac{5}{2}n + \frac{1}{2}\mu' \geq 4\nu > 4n$, что невозможно при $\mu' \leq n$. В случае 2) имеем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ l_1 &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ l_2 &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \mu' \geq \nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \mu' t'_V) \circ t'_V &= n - \alpha_2 + 2\mu' \geq \nu. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{5}{2}n + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 4\nu > 4n$, что противоречит условиям $\alpha_1 \leq n$ и $\alpha_2 \leq n$.

5.4. Случай, когда L пересекает P по прямой t , проходящей через особую точку A , и лежит в $\{f_2 = 0\}$. В этой ситуации $\text{mult}_A(X \cap L) = 3$ и мы приходим к только что рассмотренному выше случаю 2), если поменяем местами точки A и B .

5.5. Случай, когда L пересекает P в особой точке A и лежит в том же семействе плоскостей на $\{f_2 = 0\}$, что и P . Имеем $\text{mult}_A(X \cap L) = 3$, так что $X \cap L = C \cup t \cap s$, где t и s – прямые, $A = C \cap t \cap s$. Опять выберем общее гиперплоское сечение через L , положим $\mu_1 = \text{mult}_{t_V} \mathcal{D}$ и $\mu_2 = \text{mult}_{s_V} \mathcal{D}$. Поверхность S_V будет иметь две особые точки типа A_1 , одна из которых – ζ , через другую проходят C_V , t_V и s_V , а кривая l степени $\frac{1}{2}$ проходит через обе особые точки. Пусть $\alpha = \text{mult}_l \mathcal{D}$. Для общего $D \in \mathcal{D}$ получаем

$$\begin{aligned} (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ l &= \frac{1}{2}n + \alpha - \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 \geq \frac{1}{2}\nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ t_V &= n - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 \geq \frac{3}{2}\nu, \\ (D|_{S_V} - \alpha l - \mu_1 t_V - \mu_2 s_V) \circ s_V &= n - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2 \geq \frac{3}{2}\nu. \end{aligned}$$

Тогда $3n + \alpha \geq 4\nu > 4n$, т.е. $\alpha > n$, но это противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

§ 6. Максимальные кривые III. Бирациональные автоморфизмы

Итак, на данный момент мы доказали, что линейная система $\mathcal{D} \subset |nH_V|$ не может иметь максимальных особенностей в кривых степени, отличной от единицы, при условии, что нет максимальной особенности в точке ζ , т.е. что $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

В этом параграфе мы покажем, что если l – кривая степени один на V , то с ней связан бирациональный автоморфизм (инволюция) $\tau = \tau_l: V \dashrightarrow V$ такой, что если $\nu = \text{mult}_l \mathcal{D} > n$ (максимальная особенность в l), то $\tau_{l*}^{-1}(\mathcal{D}) \subset |n'H_V|$, где $n' < n$.

6.1. Бирациональные автоморфизмы, связанные с прямыми типа А. Пусть $l \subset V$ – прямая типа А, $\deg l = 1$. Ее собственный прообраз на X обозначим также через l , это не вызовет недоразумений.

Прямая l на X не пересекает плоскость P . Бирациональный автоморфизм $\tau = \tau_l$ строится так. Пусть L – общая плоскость, проходящая через l , f – вычетная кубическая кривая, т.е. $X \cap L = l \cup f$. Плоская кубика f пересекает плоскость P в некоторой точке O . Отражение в смысле группового закона на f относительно O (т.е. для точки $A \in f$ имеем $A + \tau(A) \sim 2O$) как раз и есть ограничение τ на l . Иными словами, раздутие $Y \rightarrow X$ прямой l реализует Y как расслоение $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ на эллиптические кривые, имеющее сечение P . Выкинув конечное количество слоев, мы получаем групповой закон в смысле отражения относительно сечения P на всем двумерном семействе эллиптических кривых.

Вычислим действие бирационального автоморфизма на группе Пикара. Пусть H – общее гиперплоское сечение X , проходящее через l . Тогда H – неособая КЗ-поверхность, расслоенная на эллиптические кривые над прямой

$e = P \cap H$, имеющая 3-сечение l . Очевидно, что $\tau|_H \in \text{Aut}(H)$. Вычислим действие $\tau|_H$ на группе Пикара поверхности H . Пусть f – слой H (рассматриваемой как расслоение с сечением e). Обозначив классы дивизоров e , l и f теми же буквами, для некоторых целых чисел α , β и γ имеем

$$\tau|_H^*(e) = e, \quad \tau|_H^*(f) = f, \quad \tau|_H^*(l) = \alpha l + \beta e + \gamma f.$$

Учитывая, что $e^2 = l^2 = -2$, $e \circ l = f^2 = 0$, $e \circ f = 1$ и $l \circ f = 3$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} e \circ l &= \tau|_H^*(e) \circ \tau|_H^*(l) = e \circ (\alpha l + \beta e + \gamma f) = -2\beta + \gamma = 0, \\ f \circ l &= \tau|_H^*(f) \circ \tau|_H^*(l) = f \circ (\alpha l + \beta e + \gamma f) = 3\alpha + \beta = 3, \\ l \circ l &= \tau|_H^*(l) \circ \tau|_H^*(l) = (\alpha l + \beta e + \gamma f)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha\gamma - \beta\gamma = 1. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что либо $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, т.е. $\tau = \text{id}$, что невозможно, либо $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 6, 12)$. Учитывая, что $h = H|_H \sim l + f$, и поднимая действие автоморфизма на все X и затем перенося на V , находим, что если

$$\mathcal{D} \subset |nH_V - \nu l|,$$

то

$$\tau_*^{-1}(\mathcal{D}) \subset |(13n - 12\nu)H_V - (14n - 13\nu)l|.$$

Заметим, что $14n - 13\nu < 13n - 12\nu$ и $13n - 12\nu < n$, если $\nu > n$, т.е. если $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность в l , то $\tau_*^{-1}(\mathcal{D})$ имеет меньший порог канонического присоединения ($13n - 12\nu$ в данном случае) и при этом не имеет максимальной особенности в l .

6.2. Бирациональные автоморфизмы, связанные с прямыми типа Б. Этот случай уже рассматривался в работе [10]: если на X прямая l проходит через особую точку A , то общая плоскость через l высекает вычетную кубик, проходящую через точку A , и отражение относительно этой точки в смысле группового закона на эллиптической кривой в конечном итоге определяет бирациональный автоморфизм X . Здесь мы приведем лишь действие автоморфизма. Если

$$\mathcal{D} \subset |nH_V - \nu l|,$$

то

$$\tau_*^{-1}(\mathcal{D}) \subset |(11n - 10\nu)H_V - (12n - 11\nu)l|.$$

Таким образом, максимальные особенности в этом случае также могут быть “откручены” с понижением порога канонического присоединения.

§ 7. Бесконечно близкие точки I

К этому моменту мы доказали, что если $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$, то линейная система $\mathcal{D} \subset |nH_V|$ без неподвижных компонент может иметь максимальные особенности только в кривых степени один. Как было показано в предыдущем параграфе, такие максимальные особенности “откручиваются” соответствующими

бirationальными автоморфизмами с понижением порога канонического присоединения; в данном случае это n . Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$ и $\mathcal{D}$ не имеет максимальных особенностей в кривых. Мы покажем, что в такой ситуации линейная система не имеет максимальных особенностей с центром в точке.

Как уже упоминалось в § 3, если существует максимальная особенность с центром в неособой точке, то существует и максимальная особенность с центром в этой точке, реализуемая взвешенным раздутием с весами $(1, L, N)$. В этом параграфе мы разберем ситуацию $(1, 1, N)$, $N > 1$, и покажем, что она не реализуется.

Итак, пусть $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность, реализуемую взвешенным раздутием типа $(1, 1, N)$, $N > 1$, что эквивалентно (с точки зрения нормирования) раздутию точки B_0 и затем кривых $B_1, \dots, B_{N-1}$ (см. § 3), в которых линейная система имеет кратности соответственно $\nu_1, \dots, \nu_N$.

Пусть $l_1, \dots, l_9$ – кривые степени $\frac{1}{2}$ на V . Предположим, что $B_0 \notin l_1 \cup \dots \cup l_9$. Тогда линейная система $|H_V - B_0|$ не имеет базисных кривых на V и для общих элементов $S \in |H_V - B_0|$ и $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, используя квадратичное неравенство (3.2), получаем

$$\frac{9}{2}n^2 = D_1 \circ D_2 \circ S \geq \text{mult}_{B_0}(D_1 \circ D_2) \geq \sum_{i=1}^N \nu_i^2 \geq \frac{(N+1)^2}{N}n^2,$$

что невозможно при $N \geq 2$.

Таким образом, можно предполагать, что $B_0 \in l = l_1$. Тогда $l = \text{Bas } |H_V - B_0|$. Для общих $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l + C,$$

где $l \not\subset \text{Supp } C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Выполнено неравенство $N \leq 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\alpha \leq \frac{9}{2}n^2$. Положим $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$. Перейдем на многообразие $\tilde{V}$, сохраняя обозначения (это не вызовет путаницы). Пусть $\gamma: V' \rightarrow \tilde{V}$ – раздутие кривой l , E' – исключительный дивизор (линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_0$). Собственные прообразы D'_1 и D'_2 дивизоров на V' в пересечении высекают одномерный цикл $\gamma^{-1}(D_1 \circ D_2) + Z$, где $\text{Supp } Z \subset E'$. Пусть α' – степень Z на E' (относительно пересечения со слоем). Тогда, как следует из леммы 3.1, $\alpha = \mu^2 + \alpha'$. С другой стороны, собственный прообраз общего элемента $S \in |H_V - B_0|$ высекает неприводимое сечение класса $s' + f'$, где s' и f' – минимальное сечение и слой E' соответственно, так что $\deg Z \leq Z \circ S'|_{E'}$. Таким образом, $D'_1 \circ D'^2 \circ S' \geq \alpha'$, откуда

$$\frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - 2\mu \left(\frac{1}{2}n - \nu_0 \right) - 2\mu^2.$$

Тогда

$$\alpha \leq \frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - 2\mu \left(\frac{1}{2}n - \nu_0 \right) - \mu^2 \leq \frac{9}{2}n^2.$$

Теперь заметим, что $\text{mult}_{B_0}(D_1 \circ D_2) = \alpha + \text{mult}_{B_0} C$. Для общего $S \in |H_V - B_0|$ имеем

$$\text{mult}_{B_0} C \leq (D_1 \circ D_2 - \alpha l) \circ S = \frac{9}{2}n^2 - \frac{1}{2}\alpha,$$

так что

$$\text{mult}_{B_0}(D_1 \circ D_2) \leq \alpha + \frac{9}{2}n^2 - \frac{1}{2}\alpha = \frac{9}{2}n^2 + \frac{1}{2}\alpha \leq \frac{27}{4}n^2.$$

Применяя квадратичное неравенство (3.2), получаем

$$\frac{27}{4}n^2 \geq \text{mult}_{B_0}(D_1 \circ D_2) > \frac{(N+1)^2}{N}n^2 = \left(N + 2 + \frac{1}{N}\right)n^2,$$

откуда следует, что $N \leq 4$. Предложение доказано.

Таким образом, осталось рассмотреть случаи, когда N равно двум, трем или четырем. Пусть $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$ и

$$\tilde{V} \leftarrow V_1 \leftarrow \dots \leftarrow V_N$$

– разрешение максимальной особенности, как в §3. Для обозначения собственных прообразов кривых и дивизоров на V_i будем использовать верхний индекс i .

Предположим, что $l^1 \cap B_1 = \emptyset$. Тогда $\nu_1 \geq \nu_2 + \mu$ (напомним, что $E_1 \cong \mathbb{P}^2$ в данном случае). Если теперь $V' \rightarrow V_1$ – раздутие l^1 с исключительным дивизором $E' \cong \mathbb{F}_0$, то собственный прообраз D' общего элемента $D \in \mathcal{D}$ ограничивается на E' как

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left(2\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1\right)f',$$

где s' и f' – минимальное сечение и слой E' соответственно. Тогда

$$2\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 \geq 0,$$

так что

$$2\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_0 + \nu_2 + \mu,$$

откуда, учитывая, что $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu$, получаем

$$\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_2 > n,$$

т.е. $\mu > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

Таким образом, $l^1 \cap B_1 \neq \emptyset$. Тогда на V_2 раздуем кривую l^2 с исключительным дивизором $E' \cong \mathbb{F}_1$ и ограничим собственный прообраз D на E' . Получаем

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left(3\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \nu_2\right)f'.$$

Из эффективности $D'|_{E'}$ и неравенства $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu$ следует, что

$$\frac{5}{2}\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_1 + \nu_2. \quad (7.1)$$

Если $N = 2$, то из неравенства Нётера–Фано (3.1) имеем $\nu_1 + \nu_2 > 3n$ и приходим к противоречию с условием $\mu \leq n$.

Таким образом, $N \geq 3$. Пусть $l^2 \cap B_2 = \emptyset$. Так как $E_2 \cong \mathbb{F}_2$ и $B_2 \cap E_1^2 = \emptyset$, то из пересечения с сечением класса $s + 2f$ (как обычно, s и f – минимальное сечение и слой линейчатой поверхности соответственно), проходящим через точку $l_2 \cap E_2$, находим $\nu_1 + \nu_2 \geq 2\nu_3 + \mu$, и подстановка в неравенство (7.1) дает

$$\frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}n \geq 2\nu_3 > 2n.$$

Отсюда получаем, что $\mu > n$, что исключено.

Значит, $l^2 \cap B_2 \neq \emptyset$. Повторим ту же процедуру, но с раздутием l^3 на V_3 . Исключительный дивизор E' является линейчатой поверхностью типа $\mathbb{F}_0$ или $\mathbb{F}_2$. В наихудшем для нас варианте (это $\mathbb{F}_2$) мы имеем

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left(4\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3\right)f',$$

откуда

$$4\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3. \quad (7.2)$$

Если $N = 3$, то неравенство Нётера–Фано дает $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > 4n$ и мы снова получаем противоречие с условием $\mu \leq n$.

Остается случай $N = 4$. Будем рассуждать, как и выше. Если $l^3 \cap B_3 = \emptyset$, то, поскольку $E_3 \cong \mathbb{F}_3$ и B_3 не пересекает минимальное сечение E_3 , получаем

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > 3\nu_4 + \mu,$$

что опять приводит к противоречию при подстановке этого неравенства в неравенство (7.2). Поэтому $l^3 \cap B_3 \neq \emptyset$ и нам остается повторить процедуру с раздутием уже теперь кривой l^4 . Исключительный дивизор E' имеет тип либо $\mathbb{F}_1$, либо $\mathbb{F}_3$. Наихудший (с точки зрения оценок) вариант для нас – последний, и из ограничения $D'|_{E'}$ получаем

$$5\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4 \geq 0,$$

но это противоречит неравенству Нётера–Фано (3.1) при $N = 4$. Рассмотрение ситуации взвешенного раздутия $(1, 1, N)$ при $N > 1$ завершено.

§ 8. Бесконечно близкие точки II

В этом параграфе мы покажем, что максимальные особенности, реализуемые взвешенными раздутиями с весами $(1, L, N)$ при $1 < L < N$ на V , не существуют. Ситуации разбираются последовательно, в зависимости от того, проходят или нет через пару точек (B_0, B_1) кривые степени $\frac{1}{2}$, 1 или $\frac{3}{2}$. Здесь под “парой точек” понимается следующее. Точка B_1 бесконечно близка к B_0 , т.е. лежит на исключительном дивизоре раздутия. Кривая проходит через эту пару точек, если она проходит через B_0 и ее собственный прообраз на раздутии B_0 проходит через B_1 .

8.1. Точки (B_0, B_1) не лежат на кривых степени $\frac{3}{2}$ и 1, B_0 не лежит на кривой степени $\frac{1}{2}$. Поскольку точка B_0 не лежит на кривых степени $\frac{1}{2}$, отображение $V \dashrightarrow X$ является изоморфизмом в окрестности этой точки. Перенесем рассмотрение ситуации на X . Точка B_1 бесконечно близка к точке B_0 , вместе они определяют прямую $p \subset \mathbb{P}^4$. Так как через точки (B_0, B_1) на X не проходят прямые (на V через (B_0, B_1) не проходят кривые степени 1 и $\frac{3}{2}$, которые отображаются в прямые на X), то $p \not\subset X$. Пусть M – гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$. Тогда базисное множество

$$\text{Bas } |M - p|_X = \text{Bas } |M - B_0 - B_1|_X = \text{Bas } |H - B_0 - B_1|$$

не содержит кривых. Предположим, что p не проходит через особую точку X . Тогда на V линейная система $|H_V - B_0 - B_1|$ не содержит базисных кривых. Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ – общие элементы, $Z = D_1 \circ D_2$ и $m_i = \text{mult}_{B_i} Z^i$. Тогда для общего $S \in |H_V - B_0 - B_1|$ мы имеем

$$m_0 + m_1 \leq D_1 \circ D_2 \circ S = \frac{9}{2}n^2.$$

Поскольку $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{L-1}$, из квадратичного неравенства (3.2) получаем противоречие:

$$\frac{9}{4}n^2L \geq L \left(\frac{m_0 + m_1}{2} \right) \geq m_0 + \dots + m_{L-1} > \frac{(N+1)^2}{N}n^2 > 4n^2.$$

Пусть p проходит через двойную точку X . Тогда найдется кривая l степени $\frac{1}{2}$ (та, что вклеится вместо двойной точки, через которую проходит p) такая, что

$$\text{Bas } |H_V - B_0 - B_1| = B_0 \cup l,$$

но в окрестности точки B_0 эта линейная система не будет иметь базисных кривых. Таким образом, работают аргументы случая, когда p не проходит через двойную точку X .

8.2. Случай $(B_0, B_1) \in l$, где $\deg l = 1$, и B_0 не лежит на кривых степени $\frac{1}{2}$. Образ l на X будет прямой, которую обозначим той же буквой. Мы имеем две возможности на X : либо $l \cap P = \emptyset$, либо l проходит через двойную точку X .

Пусть сначала $l \cap P = \emptyset$. На многообразии V определим

$$k = \max_{1 \leq i \leq L} \{i : B_{i-1} \in l^{i-1}\}.$$

Очевидно, $k \geq 2$. Пусть $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$. Для общих $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l + C,$$

где $l \not\subset \text{Supp } C$. Пусть Z – цикл на исключительном дивизоре раздутия l , высекаемый собственными прообразами D_1 и D_2 , и α' – степень этого цикла относительно пересечения со слоем исключительного дивизора. Тогда

$$\alpha = \mu^2 + \alpha'$$

по лемме (3.1). Рассмотрим цепочку раздутий

$$V = V_0 \longleftarrow V_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow V_k$$

с центрами в точках $B_0, \dots, B_{k-1}$. Пусть также $V' \rightarrow V_k$ – раздутие l^k с исключительным дивизором E' . Собственный прообраз линейной системы $|H_V - l|$ не имеет базисных точек на V' , кроме прообраза точки особой точки $\zeta \in V$. Выберем общий элемент $S \in |H_V - l|$. Тогда для собственных прообразов на V' получим

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S' = \frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu(n - \nu_1 - \cdots - \nu_k) - (k+2)\mu^2 \geq \alpha'.$$

Неравенство следует из того факта, что S' высекает на $E' \cong \mathbb{F}_1$ сечение класса $s' + (k+1)f'$ (s' и f' – минимальное сечение и слой E' соответственно), являющееся обильным дивизором, так как $k \geq 2$. Таким образом,

$$\frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu(n - \nu_1 - \cdots - \nu_k) - (k+1)\mu^2 \geq \alpha.$$

Рассматривая левую часть этого неравенства как квадратичную форму по μ и оценивая ее максимум, имеем

$$\frac{9}{2}n^2 - \nu_1^2 - \cdots - \nu_k^2 + \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_k - n)^2}{k+1} \geq \alpha.$$

Положим

$$\theta = \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_k}{k}.$$

Тогда

$$\frac{9}{2}n^2 - k\theta^2 + \frac{(k\theta - n)^2}{k+1} \geq \alpha.$$

Так как $\theta > n$, то

$$\frac{9}{2}n^2 - kn^2 + \frac{(k-1)^2}{k+1}n^2 > \alpha.$$

При $k \geq 2$ приходим к оценке $\alpha < \frac{7}{2}n^2$.

Положим $m_i = \text{mult}_{B_i} C_i$. Квадратичное неравенство запишется в виде

$$k\alpha + m_0 + \cdots + m_{L-1} > 4n^2L.$$

Но, очевидно, из пересечения цикла C с общим элементом из $|H_V - l|$ имеем

$$m_0 + m_1 \leq \frac{9}{2}n^2 - \alpha.$$

Тогда получаем противоречие с квадратичным неравенством, а именно,

$$k\alpha + m_0 + \cdots + m_{L-1} \leq L\alpha + \frac{9n^2/2 - \alpha}{2}L = L\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{4}n^2L < \frac{7}{4}n^2L + \frac{9}{4}n^2L = 4n^2L.$$

Пусть теперь на X прямая l проходит через двойную точку. Тогда на V найдется кривая степени $\frac{1}{2}$, например, l_1 , такая, что $l \cap l_1 \neq \emptyset$, и

$$\text{Bas } |H_V - l| = l \cup l_1.$$

Рассмотрим цепочку раздутий

$$\tilde{V} = V_0 \longleftarrow V_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow V_k \longleftarrow V' \longleftarrow \hat{V}$$

с центрами в точках $B_0, \dots, B_{k-1}$ и затем в собственных прообразах кривых l_1 и l (именно в таком порядке). Исключительный дивизор $\hat{E}$ раздутия собственного прообраза кривой l будет линейчатой поверхностью типа $\mathbb{F}_0$ или $\mathbb{F}_2$, но и в том, и в другом случае ограничение собственного прообраза линейной системы $|H_V - l|$ на $\hat{E}$ будет обильной линейной системой, а значит, оценку для α' в формуле $\alpha = \mu^2 + \alpha'$ можно получить тем же способом, что и выше. Обозначив $\varepsilon = \text{mult}_{l_1} \mathcal{D}$, для собственных прообразов общих элементов $S \in |H_V - l|$ и $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ на $\hat{V}$ получим

$$\hat{D}_1 \circ \hat{D}_2 \circ \hat{S} = \frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu(n - \sum_{i=1}^k \nu_i) - (k+2)\mu^2 - 2\varepsilon\left(\frac{1}{2}n - \nu_0\right) - 2\varepsilon^2 \geq \alpha'.$$

Отсюда, учитывая то, что $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$, получаем

$$\frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu(n - \nu_1 - \dots - \nu_k) - (k+1)\mu^2 \geq \alpha,$$

т.е. то же неравенство, что и в ситуации выше, и далее остается только повторить рассуждения, использованные в случае $l \cap P = \emptyset$.

8.3. Случай $(B_0, B_1) \in l$, где $\deg l = \frac{3}{2}$. В этой ситуации на X прямая l пересекает плоскость P в неособой точке. Мы повторяем рассуждения, использованные в предыдущем случае, когда прямая не пересекала плоскость, только стартуем с $\tilde{V}$: возьмем цепочку раздутий с центрами $B_1, \dots, B_k$, затем раздуем l^k и вычислим пересечение собственных прообразов. Получим неравенство

$$\frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu\left(\frac{3}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \dots - \nu_k\right) - (k+1)\mu^2 \geq \alpha.$$

Оценивая максимум квадратичной формы по μ и учитывая, что $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$, имеем

$$\frac{9}{2}n^2 - \nu_1^2 - \dots - \nu_k^2 + \frac{(\nu_1 + \dots + \nu_k - n)^2}{k+1} \geq \alpha,$$

т.е. получаем в итоге то же неравенство и можем завершить рассмотрение этого случая при помощи тех же аргументов.

§ 9. Бесконечно близкие точки III

В ситуации максимальной особенности, реализуемой взвешенным раздутием $(1, L, N)$, нам осталось рассмотреть случаи, когда точка B_0 лежит на кривой степени $\frac{1}{2}$.

Пусть l_1 – кривая степени $\frac{1}{2}$, l – прямая типа Б (т.е. на X ее собственный прообраз проходит через двойную точку). Предположим, что $B_0 \in l_1$. Наши рассуждения зависят от того, как расположены l_1 и l по отношению к паре точек (B_0, B_1) . Возможны три варианта: пара точек не лежит ни на одной из этих кривых (при этом B_0 может принадлежать и той, и другой кривой), $(B_0, B_1) \in l$ или $(B_0, B_1) \in l_1$.

9.1. Точки (B_0, B_1) не лежат ни на l_1 , ни на l . Выберем общие элементы $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ и пусть

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l_1 + \beta l + C,$$

где $\text{Supp } C$ не содержит ни одну из кривых l и l_1 . Положим $\mu = \text{mult}_{l_1} \mathcal{D}$. Тогда выполняется неравенство

$$\alpha \leq \frac{9}{2}n^2 - \nu_1^2 + \frac{1}{2}\left(\nu_1 - \frac{1}{2}n\right)^2. \quad (9.1)$$

Действительно, если $V' \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 = \tilde{V}$ – раздутие точки B_0 и затем собственного прообраза l_1 , то из пересечения с прообразом общего элемента $S \in |H_V - l_1|$, применяя лемму 3.1, находим

$$\frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \nu_1^2 - 2\mu\left(\frac{n}{2} - \nu_0 - \nu_1\right) - 3\mu^2 \geq \alpha',$$

где $\alpha = \mu^2 + \alpha'$. Отсюда следует, что

$$\frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \nu_1^2 - 2\mu\left(\frac{n}{2} - \nu_0 - \nu_1\right) - 2\mu^2 \geq \alpha.$$

Квадратичная форма по ν_0 в левой части достигает своего максимума при $\nu_0 = \frac{1}{2}\mu$, после чего остается рассмотреть левую часть как квадратичную форму по μ и найти ее максимальное значение. Неравенство (9.1) доказано.

Заметим, что линейная система $|H_V - B_0 - B_1|$ имеет базисными кривыми только l_1 и l (в случае, если l проходит через B_0). Поэтому для чисел

$$m_i = \text{mult}_{B_i} C^i$$

выполнено

$$m_0 + m_1 \leq \frac{9}{2}n^2 - \frac{1}{2}\alpha - \beta.$$

Квадратичное неравенство (3.2) в данном случае имеет вид

$$\alpha + \beta + m_0 + \dots + m_{L-1} > \frac{(N+L)^2}{N}n^2.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{4}L\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{2}L\right) + \frac{9}{4}n^2L > \frac{(N+L)^2}{N}n^2,$$

а так как $L \geq 2$, то

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{4}n^2L > \frac{(N+L)^2}{N}n^2.$$

Из неравенства (9.1) в силу условия $\nu_1 > n$ имеем оценку $\alpha < \frac{29}{8}n^2$ и окончательно для $L \geq 2$ получаем противоречие:

$$\left(\frac{29}{32}n^2 + \frac{9}{4}n^2\right)L \geq \frac{1}{2L}\alpha L + \frac{9}{4}n^2L > 4n^2L.$$

9.2. Случай $(B_0, B_1) \in l$. Как и выше, полагаем $D_1 \circ D_2 = \alpha l_1 + \beta l + C$. Рассмотрим число

$$k = \max_{1 \leq i \leq L} \{i : B_{i-1} \in l^{i-1}\}.$$

Очевидно, $2 \leq k \leq L$. Покажем, что число β удовлетворяет неравенству

$$\beta \leq \frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{2}n^2 - \frac{k\theta(\theta + 2n) - n^2}{k+1}, \quad (9.2)$$

где

$$\theta = \frac{1}{k}(\nu_1 + \dots + \nu_k).$$

Для этого рассмотрим цепочку раздутий

$$V = V_0 \longleftarrow V_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow V_k \longleftarrow V',$$

где $V' \rightarrow V_k$ – раздутие кривой l^k с исключительным дивизором $E' \cong \mathbb{F}_1$. Заметим, что собственный прообраз S' общего элемента $S \in |H_V - l|$ пересекает положительно все кривые на E' и неотрицателен на всех кривых в V' , кроме собственного прообраза кривой l_1 , с которой он пересекается по $-\frac{1}{2}$. Используя лемму 3.1, находим, что

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S' = \frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu \left(n - \sum_{i=1}^k \nu_i\right) - (k+2)\mu^2 \geq \beta' - \frac{1}{2}\alpha,$$

где $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$ и $\beta = \mu^2 + \beta'$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu \left(n - \sum_{i=1}^k \nu_i\right) - (k+1)\mu^2 \geq \beta.$$

Неравенство (9.2) теперь получится, если мы рассмотрим максимум квадратичной формы по μ в левой части и учтем, что $\nu_1^2 + \dots + \nu_k^2 \geq k\theta^2$.

Как и ранее, положим $m_i = \text{mult}_{B_i} C^i$. Тогда квадратичное неравенство запишется в виде

$$\alpha + k\beta + m_0 + \dots + m_{L-1} > \frac{(N+L)^2}{N}n^2.$$

На V_1 собственный прообраз элемента $S \in |H_V - l|$ неотрицателен на всех кривых, кроме l_1^1 , так что

$$m_0 + m_1 \leq C \circ S = \frac{9}{2}n^2 - \frac{1}{2}\alpha - \beta.$$

Подставляя это в квадратичное неравенство, получим

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{4}L\right) + \left(k - \frac{1}{2}L\right)\beta + \frac{9}{4}n^2L > \frac{(N+L)^2}{N}n^2. \quad (9.3)$$

Покажем, что $k = L$. Предположим противное, т.е. что $k \leq L - 1$. Используя неравенства 9.1 и 9.2 при $\nu_1 > n$ и $\theta > n$, при $k \geq 2$ находим, что

$$\begin{aligned} \alpha &< \frac{29}{8}n^2, \\ \beta &< \frac{1}{2}\alpha + \frac{17}{6}n^2. \end{aligned}$$

Подставляя это в квадратичное неравенство, в наихудшем случае $k = L - 1$ получаем противоречие:

$$4n^2 < \frac{(N+L)^2}{N}n^2 < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(L-1)\frac{17}{6}n^2 + \frac{9}{4}n^2L < \frac{544}{144}n^2L < 4n^2.$$

Таким образом, далее будем полагать, что $k = L$. Пусть $\theta < \frac{3}{2}n$. Тогда из неравенства Нётера–Фано (3.1) следует, что $N \geq 2L + 1$, откуда получаем, что

$$\frac{(N+L)^2}{N}n^2 \geq \left(\frac{9}{2}L + \frac{3}{4} + \frac{1}{2L+1}\right)n^2.$$

Воспользуемся оценками (9.1) и (9.2), подставив n вместо ν_1 и θ , L – вместо k . Тогда из квадратичного неравенства следует, что

$$\frac{29}{8}n^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{9}{2} - \frac{3L-1}{L+1}\right)n^2 + \frac{9}{4}n^2 \geq \left(\frac{9}{2}L + \frac{3}{4} + \frac{1}{2L+1}\right)n^2,$$

так что

$$\frac{23}{8}n^2 \geq \frac{L(3L-1)+2}{2(L+1)}n^2.$$

Но это невозможно при $L \geq 3$. Пусть тогда $\theta > \frac{3}{2}n$. Тогда $\nu_1 > \frac{3}{2}n$ и оценки (9.1), (9.2) дают

$$\alpha < \frac{11}{4}n^2, \quad \beta < \frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{2}n^2 - \frac{(21L/4 - 1)n^2}{L+1}.$$

Квадратичное неравенство приобретает следующий вид:

$$\frac{11}{4}n^2 + \frac{9}{2}n^2L - \frac{L(21L/4 - 1)n^2}{2(L+1)} > \frac{(n+L)^2}{N}n^2,$$

что, как нетрудно убедиться, приводит к противоречию при $L \geq 3$.

Таким образом, нам осталось разобрать случай $k = L = 2$. Ранее уже были получены оценки $\alpha < \frac{29}{8}n^2$ и $\theta < \frac{1}{2}\alpha + \frac{17}{6}n^2$. Подстановка их в неравенство (9.3) дает при $L = 2$ следующую оценку:

$$\frac{263}{24}n^2 > \left(N + 4 + \frac{4}{N}\right)n^2,$$

из которой следует, что $3 \leq N \leq 6$. Пусть $N = 6$. Тогда неравенство Нёте-ра–Фано приводит к оценке $\nu \geq \theta > \frac{4}{3}n$ и из (9.1) и (9.2) мы имеем

$$\alpha < \frac{221}{72}n^2, \quad \beta < \frac{1}{2}\alpha + \frac{101}{54}n^2.$$

Подстановка этих оценок в квадратичное неравенство приводит к противоречию, а именно,

$$\frac{2039}{216}n^2 > \frac{(6+2)^2}{6}n^2 = \frac{32}{3}n^2.$$

Точно таким же образом исключаем случаи $N = 5$, $N = 4$ и $N = 3$, в которых θ оценивается снизу через $\frac{7}{5}n$, $\frac{3}{2}n$ и $\frac{5}{3}n$ соответственно.

9.3. Случай $(B_0, B_1) \in l_1$. Для общих элементов $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l_1 + C,$$

где, как и ранее, $l_1 \not\subset \text{Supp } C$. Пусть $\mu = \text{mult}_{l_1} \mathcal{D}$, $S \in |H_V - l_1|$ – общий элемент. Чтобы оценить сверху кратность α , рассмотрим цепочку раздутий

$$\tilde{V} = V_0 \longleftarrow V_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow V_k \longleftarrow V',$$

где

$$k = \max_{1 \leq i \leq L} \{i : B_{i-1} \in l_1^{i-1}\},$$

морфизм $V' \rightarrow V_k$ – раздутие l_1^k с исключительным дивизором E' . Нетрудно проверить, что собственный прообраз S' дивизора S положителен на всех кривых в E' и тогда

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S' = \frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 - 2\mu \left(\frac{1}{2}n - \nu_0 \sum_{i=1}^k \nu_i \right) - (k+2)\mu^2 \geq \alpha',$$

причем $\alpha = \mu^2 + \alpha'$. Оценивая максимум квадратичной формы по μ , находим

$$\frac{9}{2}n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 + \frac{(\sum_{i=1}^k \nu_i + \nu_0 - n/2)^2}{k+1} \geq \alpha.$$

Так как $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$, то после подстановки $\theta = \frac{1}{k}(\nu_1 + \cdots + \nu_k)$ получаем

$$\frac{9}{2}n^2 - k\theta^2 + \frac{k^2\theta^2}{k+1} \geq \alpha,$$

или, учитывая, что $\theta > n$,

$$\alpha < \left(\frac{9}{2} - \frac{k}{k+1} \right) n^2.$$

Обозначив $m_i = \text{mult}_{B_{i-1}} C^{i-1}$, оценим кратности из пересечения C и S :

$$m_0 + \dots + m_{k-1} \leq \frac{9}{2} n^2 - \frac{1}{2} \alpha.$$

Тогда имеем квадратичное неравенство в следующем виде:

$$k\alpha + \frac{1}{k} \left(\frac{9}{2} n^2 - \frac{1}{2} \alpha \right) > \frac{(N+L)^2}{N} n^2.$$

Ограничим собственный прообраз общего дивизора $D \in \mathcal{D}$ на исключительный дивизор E' . Тогда

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left((k+1)\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \dots - \nu_k \right) f',$$

где s' и f' – минимальное сечение и слой E' соответственно. Отсюда

$$(k+1)\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_k. \quad (9.4)$$

Так как $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu \leq \frac{1}{2}n$, то получаем оценку

$$\theta \geq \frac{k+1}{k} n,$$

которая при подстановке в неравенство Нётера–Фано (3.1) дает $N > kL$ и мы приходим к квадратичному неравенству вида

$$k\alpha + \frac{1}{k} \left(\frac{9}{2} n^2 - \frac{1}{2} \alpha \right) > \frac{(k+1)^2}{k} L n^2$$

или

$$\frac{9}{2k} n^2 + \alpha \left(\frac{k}{L} - \frac{1}{2k} \right) > \frac{(k+1)^2}{k} n^2.$$

Подставляя сюда оценку для α , имеем

$$\left(\frac{9}{2} - \frac{k}{k+1} \right) \left(\frac{k}{L} - \frac{1}{2k} \right) > \frac{(k+1)^2}{k}, \quad (9.5)$$

откуда следует, что $k = L = 2$.

Предположим, что $l^2 \cap B_2 = \emptyset$ (напомним, что при $L = 2$ центр раздутия B_2 – это прямая на плоскости). Тогда, очевидно, $\nu_2 \geq \nu_3 + \mu$ и из (9.4) следует, что

$$3\mu + \frac{1}{2}n \geq \nu_1 + \nu_2 + \nu_0 \geq 2\nu_3 + 2\mu + \frac{1}{2}\mu,$$

т.е. $\mu > n$, что противоречит условию $\nu_0 \leq \frac{1}{2}n$.

Предположим тогда, что $l^2 \cap B_2 \neq \emptyset$. Тогда, раздувая l^3 с исключительным дивизором E' , для общего элемента линейной системы находим ограничение на E' :

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left(4\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3\right) f',$$

откуда $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 4n$, так что $\theta \leq \frac{4}{3}n$. Тогда из неравенства Нётера–Фано следует, что $N > 3L = 6$, т.е. $N \geq 7$, откуда

$$\frac{(N+L)^2}{NL} n^2 \geq \frac{81}{14} n^2.$$

Если теперь в правую часть неравенства (9.5) подставить эту оценку, то при $k = L = 2$ получаем противоречие:

$$\frac{41}{8} n^2 > \frac{81}{14} n^2.$$

Таким образом, все случаи бесконечно близких максимальных особенностей исключены.

§ 10. Максимальные точки

Для того чтобы исключить максимальные особенности с центром в точке, нам осталось рассмотреть случай максимальной особенности, реализуемой обыкновенным раздутием (что соответствует взвешенному раздутию с весами $(1, 1, 1)$). Итак, пусть $B_0 \neq \zeta$ – точка на V , $\nu_1 = \text{mult}_{B_0} \mathcal{D} > 2n$.

Предположим сначала, что существует кривая l степени $\frac{1}{2}$, проходящая через точку B_0 . Раздую точку B_0 , затем собственный прообраз l и ограничим прообраз общего элемента $D \in \mathcal{D}$ на исключительный дивизор E' . Имеем

$$D'|_{E'} \sim \mu s' + \left(2\mu + \frac{1}{2}n - \nu_0 - \nu_1\right) f',$$

где $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$, s' и f' – минимальное сечение и слой E' соответственно. Учитывая, что $\nu_0 \geq \frac{1}{2}\mu$, получаем противоречие с исходными требованиями: $\mu > n$, т.е. $\nu_0 > \frac{1}{2}n$.

Далее полагаем, что через точку B_0 не проходят кривые степени $\frac{1}{2}$. Таким образом, отображение $V \dashrightarrow X$ – изоморфизм в окрестности точки B_0 . Далее через $T \subset \mathbb{P}^4$ будем обозначать касательную гиперплоскость к X в точке B_0 .

Предположим, что T содержит плоскость P . Пусть F – вычетная кубическая поверхность, т.е. $X \cap T = P \cup F$. Тогда $B_0 \in F$ – особая точка. По условию общности $\mathcal{G}_5$ это обыкновенная двойная точка, а значит, через B_0 проходит не более шести прямых на F . Таким образом, всегда найдется прямая $l \subset T$, проходящая через точку B_0 и какую-нибудь двойную точку X и при этом не лежащая на F . Пусть $Q \subset T$ – общая плоскость через l , $C = Q \cap F$, C_V – ее собственный прообраз на V . Тогда $\deg C_V = C_V \circ H_V = 4$ и для пересечения с общим элементом $D \in \mathcal{D}$ мы получаем противоречивую оценку:

$$4n = C_V \circ D \geq \nu \text{mult}_{B_0} C_V > 4n.$$

Пусть теперь T не содержит плоскость и $\text{mult}_{B_0}(T \cap X) \geq 3$. Пусть $C \subset T \cap X$ – общее плоское сечение. Тогда снова приходим к противоречию:

$$\frac{9}{2}n = C_V \circ D \geq \nu \text{mult}_{B_0} C_V > 6n.$$

Осталось рассмотреть последний случай: $P \not\subset T$ и $\text{mult}_{B_0}(T \cap X) = 2$. Выберем аффинные координаты (x, y, z, w) в окрестности точки B_0 так, чтобы $B_0 = \{x = y = z = w = 0\}$ и $T = \{w = 0\}$. Уравнение X в окрестности точки B_0 иметь следующий вид:

$$w + f_2 + f_3 + f_4 + w(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = 0,$$

где f_i – однородные полиномы степени i от переменных (x, y, z) , g_i – однородные полиномы степени i от переменных (x, y, z, w) . Очевидно, уравнение кватрики $X|_T$ таково:

$$f_2 + f_3 + f_4 = 0,$$

при этом $f_2 \neq 0$. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – кватрика через точку B_0 , задаваемая уравнением

$$w + f_2 + wl = 0,$$

где l – линейная форма от (x, y, z) . Очевидно, $Q|_T = \{f_2 = 0\}$ и $\text{mult}_{B_0} Q|_X \geq 3$. Нам понадобятся следующие результаты.

ЛЕММА 10.1. *Рассмотрим кривую $C = X \cap Q \cap T$. В зависимости от $Q|_T$ возможны следующие варианты.*

- 1) Пусть ранг квадратичной формы f_2 равен двум, т.е. $Q|_T$ – невырожденный квадратичный конус. Тогда C – одна из следующих кривых:
 - а) C неприводима, $\deg C = 8$, $\text{mult}_{B_0} C = 6$;
 - б) $C = l \cup C'$, где C' неприводима, $\deg l = 1$, $\deg C' = 7$, $\text{mult}_{B_0} C' = 5$;
 - в) $C = l_1 \cup l_2 \cup C'$, где C' неприводима, $\deg l_1 = \deg l_2 = 1$, $\deg C' = 8$, $\text{mult}_{B_0} C' = 4$;
 - г) $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup C'$, где C' неприводима, $\deg l_1 = \deg l_2 = \deg l_3 = 1$, $\deg C' = 5$, $\text{mult}_{B_0} C' = 3$.
- 2) Пусть ранг формы f_2 равен двум, т.е. $Q|_T$ – пара плоскостей. Тогда C – одна из следующих кривых:
 - а) $C = C_1 \cup C_2$, где C_i – неприводимые плоские кватрики (в разных плоскостях), $\text{mult}_{B_0} C_1 = \text{mult}_{B_0} C_2 = 3$;
 - б) $C = l \cup C_1 \cup C_2$, где l – прямая, C_1 – неприводимая плоская кубика, C_2 – неприводимая плоская кватрика, $\text{mult}_{B_0} C_1 = 2$, $\text{mult}_{B_0} C_2 = 3$;
 - в) $C = l_1 \cup l_2 \cup C_1 \cup C_2$, где l_i – прямые, C_1 – неособая коника через B_0 , C_2 – неприводимая плоская кватрика, $\text{mult}_{B_0} C_2 = 3$;
 - г) $C = l_1 \cup l_2 \cup C_1 \cup C_2$, где l_i – прямые, C_i – кубики с двойными точками в B_0 ;
 - д) $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup C_1 \cup C_2$, где l_i – прямые, C_1 – неособая коника через B_0 , C_2 – неприводимая кубика, $\text{mult}_{B_0} C_2 = 2$.
- 3) Пусть ранг f_2 равен единице, т.е. $Q|_T$ – двойная плоскость $L \subset T$, $C = X|_L$. Тогда C – одна из следующих кривых:

- а) C – неприводимая кватрика с тройной точкой в B_0 ;
- б) $C = l \cup C'$, где C' – неприводимая кубика с двойной точкой в B_0 , l – прямая;
- в) $C = l_1 \cup l_2 \cup C'$, где C' – неприводимая коника, $\deg l_1 = \deg l_2 = 1$;
- г) C распадается на четыре прямых, три из которых проходят через B_0 .

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Пусть $\text{mult}_{B_0} T|_X = 2$, $C \subset X$ – неприводимая кривая через точку B_0 , отличная от прямой. Тогда:

- а) если через B_0 проходит не более двух прямых на X , то

$$\frac{\text{mult}_{B_0} C}{\deg C} \leq \frac{3}{4};$$

- б) если через B_0 проходят три прямые, то

$$\frac{\text{mult}_{B_0} C}{\deg C} \leq \frac{2}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 10.1 И СЛЕДСТВИЯ 10.2. По условию общности $\mathcal{U}_3$) через точку B_0 проходит не более трех прямых. Отметим, что $\text{mult}_{B_0} C \geq 6$. Для доказательства первой части леммы достаточно раздуть точку B_0 , тогда собственный прообраз конуса $Q|_T$ будет изоморфен линейчатой поверхности типа $\mathbb{F}_2$, а собственный прообраз C состоит из сечения и не более чем трех слоев. Для доказательства утверждения 2) достаточно заметить, что C распадается на плоские кватрики с точками кратности три. Утверждение 3) очевидно.

Для доказательства следствия предположим, что C не лежит в T . Пусть

$$\frac{\text{mult}_{B_0} C}{\deg C} > \frac{2}{3}.$$

Тогда $\deg C = T \circ C = T|_X \circ C \geq 2 \text{mult}_{B_0} C > \frac{4}{3} \deg C$, что невозможно. Если же C лежит в T , то это одна из неприводимых кривых, перечисленных в лемме, и результат немедленно следует из сравнения соответствующих степеней и кратностей. Лемма и следствие доказаны.

ЛЕММА 10.3. Пусть $l \subset V$ – прямая типа A через точку B_0 . Для общих $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l + C,$$

где $l \not\subset \text{Supp } C$, $\nu_1 \text{mult}_{B_0} \mathcal{D} > 2n$. Тогда $\alpha < n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu = \text{mult}_l \mathcal{D}$, $V' \rightarrow V$ – раздутие сначала точки B_0 , затем собственного прообраза кривой l с исключительным дивизором E' . Заметим, что ограничение собственного прообраза S' общего элемента $S \in |H_V - l|$ положительно на всех кривых в E' . Тогда из леммы 3.1 следует, что

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S = \frac{9}{2}n^2 - \nu_1^2 - 2\mu(n - \nu_1) - 3\mu^2 \geq \alpha',$$

где $\alpha = \mu^2 + \alpha'$. Оценивая левую часть неравенства максимумом квадратичной формы по μ , находим

$$\alpha \leq \frac{9}{2}n^2 - \nu_1^2 + \frac{1}{2}(\nu_1 - n)^2 < n^2.$$

Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению оставшегося случая. Для общих $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ положим

$$D_1 \circ D_2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i l_i + R,$$

где l_i – кривые степени один, $\text{Supp } R$ не содержит кривых степени один. По условию $\mathcal{G}_3$) имеем $k \leq 3$. Заметим, что если C – неприводимая кривая на X через точку B_0 , не лежащую на кривой степени $\frac{1}{2}$, то для ее собственного прообраза C_V на V имеем

$$\frac{\text{mult}_{B_0} C_V}{\deg C_V} \leq \frac{\text{mult}_{B_0} C}{\deg C},$$

так как $\deg C \leq \deg C_V$ и $V \dashrightarrow X$ – изоморфизм в окрестности B_0 . Пусть $k = 3$. Тогда

$$\deg R = \frac{9}{2}n^2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

и в силу следствия 10.2 получаем, что

$$\text{mult}_{B_0} R \leq \frac{2}{3} \left(\frac{9}{2}n^2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \right).$$

Таким образом, из квадратичного неравенства (3.2) и леммы 10.3 следует, что

$$4n^2 < \text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{2}{3} \left(\frac{9}{2}n^2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \right) < 4n^2.$$

Предположим, что $k \leq 2$. Тогда

$$\text{mult}_{B_0} R \leq \frac{3}{4} \left(\frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right)$$

и снова получаем противоречие:

$$4n^2 < \text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i + \frac{3}{4} \left(\frac{9}{2}n^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) = \frac{27}{8}n^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \alpha_i < \frac{31}{8}n^2.$$

Рассмотрение ситуации максимальных особенностей, реализуемых обыкновенным раздутием неособой точки, завершено.

§ 11. Условия общности

Для завершения доказательства теоремы 2.1 нам осталось доказать, что для общего многообразия X условия общности положения, сформулированные в § 2, выполнены.

Условия $\mathcal{G}_1$) и $\mathcal{G}_5$) очевидны: первое следует из того, что однородные кубические полиномы Q_0 и Q_1 в уравнении (2.1) могут быть выбраны общими, так что высекаемые ими на плоскости P кубики будут в общем положении, а второе условие следует из теоремы Бертини.

11.1. Условие $\mathcal{G}_2$). Выполнение этого условия доказывается счетом констант. Пусть сначала $l \subset V$ – прямая типа А. В окрестности этой прямой отображение $V \dashrightarrow X$ является изоморфизмом. Образ l на X обозначим той же буквой. Легко видеть, что нормальный пучок $\mathcal{N}_{l|X}$ изоморфен либо $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}$, либо $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1)$. Вторая возможность реализуется в том и только том случае, когда существует плоскость $L \subset \mathbb{P}^4$, содержащая l , такая, что ограничение X на L высекает кратную прямую l . В этом можно убедиться, выполнив вложенное раздутие l как прямой в $\mathbb{P}^4$: ограничение $X|_L$ для некоторой плоскости L высекает l с кратностью, большей единицы, если и только если собственный прообраз X содержит на исключительном дивизоре минимальное сечение, так что ограничение исключительного дивизора на собственный прообраз X будет линейчатой поверхностью типа $\mathbb{F}_3$.

Остается показать, что на общей квартике X нет прямых l , для которых существует такая плоскость L . Мы фиксируем плоскость $P \subset \mathbb{P}^4$ и полагаем, что P в однородных координатах задается уравнениями

$$x_0 = x_1 = 0. \quad (11.1)$$

Рассмотрим открытое подмножество Z многообразия флагов $\mathcal{F} = \{(l, L) : l \subset L \subset \mathbb{P}^4\}$, выделяемое условием $l \cap P = \emptyset$. Легко видеть, что $\dim Z = 8$. Выберем пару (l, L) . Будем полагать, что $l = \{x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ и $L = \{x_3 = x_4 = 0\}$. С другой стороны, любая квартика, содержащая плоскость P , задается уравнением

$$(x_0 + \alpha_1 x_1)Q_0 + (\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1)Q_1 = 0, \quad (11.2)$$

где Q_0 и Q_1 – однородные кубические полиномы от переменных $(x_0, \dots, x_4)$. Теперь легко убедиться в том, что условие того, что X высекает l на L кратно, накладывает девять независимых условий, что больше $\dim Z$. Таким образом, общая квартика X не содержит прямых типа А с нормальными пучком $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1)$.

Пусть теперь $l \subset X$ – прямая, пересекающая P в неособой точке X . Ее образ на V будет иметь степень $\frac{3}{2}$. Пусть теперь Z – подмножество описанного выше многообразия флагов $\mathcal{F}$ такое, что l пересекает P в точке. При этом мы можем рассматривать только такие пары (l, L) , что $L \cap P = l \cap P$. Действительно, если бы L высекала на P прямую, то нашлась бы гиперплоскость $M \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $P \cup L \subset M$. Но тогда на вычетной кубике F (т.е. $F \cup P = X \cap M$) плоскость L

не может высекать двойную прямую, так как это противоречит условию $\mathcal{G}_2$). Заметим, что $\dim Z = 7$.

Таким образом, мы фиксируем пару (l, L) и можем полагать, что $l = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$ и $L = \{x_2 = x_3 = 0\}$, а X по-прежнему определяется уравнением (11.2). Опять легко видеть, что условие $2l \subset X|_L$ налагает восемь независимых условий на коэффициенты уравнения (11.2), что больше $\dim Z$. Значит, общая квартика X таких прямых также не содержит.

Осталось разобраться с прямыми, пересекающими P в двойной точке X . Для них верен аналог того, что было рассмотрено выше, а именно: на $\tilde{V}$ собственный прообраз l имеет нормальный пучок $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1)$, если и только если существует плоскость $L \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $2l \subset X|_L$. Прямых, пересекающих P в двойной точке, конечное число, и очевидно, что при общем выборе кубических полиномов Q_0 и Q_1 описанная ситуация невозможна.

11.2. Условие $\mathcal{G}_3$). Сначала покажем, что если X – общая квартика, то для точки $A \in X \setminus P$ не существует плоскости $L \subset \mathbb{P}^4$, проходящей через точку A , такой, что X высекает на L четыре прямые, проходящие через A .

Действительно, пусть L – такая плоскость. Очевидно, L не может пересекать P по прямой, так как $A \notin P$. Рассмотрим многообразие пар Z , где каждая пара состоит из точки (не лежащей на P) и плоскости через эту точку. Очевидно, $\dim Z = 8$. Фиксируем пару (A, L) . Можно полагать, что P и X заданы уравнениями (11.1) и (11.2), точка $A = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$, плоскость $L = \{x_3 = x_4 = 0\}$. Условие прохождения через точку A четырех прямых в плоскости L – это одиннадцать условий на коэффициенты уравнения (11.2), что больше $\dim Z$.

Покажем теперь, что на X нет плоскостей, проходящих через точку A , и нет конусов с вершиной в этой точке. Рассуждения основаны на следующей простой лемме.

ЛЕММА 11.1. Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 – однородные полиномы от переменных $x_0, \dots, x_4$, определяющие гиперповерхности $S_i = \{f_i = 0\} \subset \mathbb{P}^4$, и для степеней $n_i = \deg f_i$ выполнено $n_1 + n_2 = n_3 + n_4$. Пусть гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}^4$ задается уравнением $f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0$ и $Z = \text{Sing } S$ – множество особых точек S . Множество Z состоит только из обыкновенных двойных точек S тогда и только тогда, когда пересечение $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ состоит в точности из $n_1 n_2 n_3 n_4$ различных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка $B \in S$ является обыкновенной двойной точкой, если и только если $B \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ и гиперповерхности S_i образуют локальную систему координат в $\mathbb{P}^4$ в окрестности точки B . Лемма доказана.

Пусть $Q \subset X$ – плоскость, проходящая через точку A , или конус с вершиной в этой точке, и T – касательная гиперплоскость к X в точке A . Очевидно, $Q \subset T$. Заметим, что $P \not\subset T$ по условию общности $\mathcal{G}_5$). Таким образом, Q пересекает P в конечном множестве точек. Легко убедиться в том, что X может быть представлена в виде уравнения $f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0$, как в лемме 11.1, кроме случая, когда Q – неприводимый конус степени четыре. Последнее не реализуется, так как иначе общая плоскость $L \subset T$ через точку A высекает четыре

прямые, проходящие через A , что для общего случая исключено рассуждениями выше. Таким образом, $\deg Q < 4$, и мы полагаем, что $Q = \{f_1 = f_2 = 0\}$. Так как $P \not\subset T$, т.е. T пересекает P по некоторой прямой C , и X имеет только девять обыкновенных двойных точек $Q_1, \dots, Q_9$, то по условию $\mathcal{G}_1$) прямая C может проходить максимум через две двойные точки, что противоречит лемме 11.1. Тем самым мы показали, что на X нет плоскостей, проходящих через точку A , и нет конусов с вершиной в этой точке.

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда через точку $A \in X \setminus P$ проходят прямые $l_1, \dots, l_4$, первые три из которых определяют касательную гиперплоскость T к X в точке A . Рассмотрим многообразие пар

$$Z = \{(A, (l_1, l_2, l_3))\},$$

где $A \in \mathbb{P}^4$ – точка, а (l_1, l_2, l_3) – три (вообще говоря, не компланарные) прямые, проходящие через A . Легко видеть, что $\dim Z = 4 + 3 + 3 + 3 = 13$. Выберем конкретную пару из Z : можно положить $A = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$, $l_1 = \{x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$, $l_2 = \{x_1 = x_3 = x_4 = 0\}$, $l_3 = \{x_1 = x_2 = x_4 = 0\}$, а для X в качестве уравнения возьмем следующее уравнение:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) Q_0 + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right) Q_1 = 0,$$

причем $\alpha_0 \neq 0$. Тогда требование $l_1 \subset X$ определяет пять независимых условий на коэффициенты уравнения, а аналогичное требование для l_2 и l_3 дает еще восемь независимых условий. Итак, получаем тринадцать условий. Предположение о том, что через точку A проходит еще одна прямая, дает минимум одно условие, если мы покажем, что через точку A не проходят плоскости или конуса с вершиной в A (иначе бы на X были плоскости или конусы с вершиной в точке A , чего быть не может). Таким образом, четыре прямые через точку на общей квартирке X не проходят.

11.3. Условие $\mathcal{G}_4$). Мы всегда можем полагать, что одна из особых точек $A \in X$ в аффинных координатах (x, y, z, w) задается условиями $x = y = z = w = 0$, плоскость $P = \{x = y = 0\}$, а X удовлетворяет уравнению

$$xz - yw + xf_2 + yg_2 + F = 0, \quad (11.3)$$

где f_2 и g_2 – однородные квадратичные полиномы от (x, y, z, w) , а F – однородный полином степени четыре. Плоскости из одного семейства плоскостей, лежащих на квадрике $xz - yw = 0$, задаются уравнениями

$$\begin{cases} x - \alpha w = 0, \\ y - \alpha z = 0, \end{cases}$$

а из другого – уравнениями

$$\begin{cases} x - \beta y = 0, \\ w - \alpha z = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость (т.е. при конкретном α , причем $\alpha \neq 0$, так как плоскость отлична от P) из первого семейства. Выполним следующую замену координат:

$$x' = x - \alpha w, \quad y' = y - \alpha z.$$

Рассмотрим общую гиперплоскость $x' = ay'$, проходящую через эту плоскость. Тогда уравнение гиперплоского сечения будет иметь следующий вид:

$$(a - 1)y'z + (ay' + \alpha w)f_2 + (y' + \alpha z)g_2 + F = 0,$$

и теперь очевидно, что коэффициент при z^2 всегда можно выбрать так, чтобы это уравнение определяло особенность типа A_2 .

Теперь рассмотрим плоскость из другого семейства (при конкретном β , возможно, нулевом). Сделаем следующую замену координат:

$$x' = x - \beta y, \quad w' = w - \alpha z.$$

Рассмотрим общую гиперплоскость $x' = bz'$. Сечение квартики X этой гиперплоскостью будет иметь особую точку, определяемую уравнением

$$w'(bz - y) + (bw' + \beta y)f_2 + yg_2 = 0.$$

Подставляя в это уравнение $y' = bz - y$, получаем

$$w'y' + (bw' + \beta bz - \beta y')f_2 + (bz - y')g_2 = 0.$$

Теперь понятно, что подбором коэффициента при z^2 полинома g_2 и числа b всегда можно добиться того, что определяемая уравнением особенность имеет тип A_2 .

Итак, мы доказали условия общности положения, тем самым завершив доказательство теоремы 2.1.

Список литературы

- [1] В. А. Исковских, Ю. А. Манин, “Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, J. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
- [2] A. Corti, M. Mella, “Birational geometry of terminal quartic 3-folds, I”, *Amer. J. Math.*, **126**:4 (2004), 739–761.
- [3] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.
- [4] M. Kawakita, “Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points”, *Invent. Math.*, **145**:1 (2001), 105–119.
- [5] М. М. Гриненко, “Новые структуры Мори на двойном пространстве индекса 2”, *УМН*, **59**:3 (2004), 163–164; англ. пер.: M. M. Grinenko, “New Mori structures on a double space of index 2”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 573–574.
- [6] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.

- [7] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces”, *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 115–155.
- [8] Yu. Kawamata, “Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities”, *Higher dimensional complex varieties* (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 241–246.
- [9] A. V. Pukhlikov, “Essentials of the method of maximal singularities”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 73–100.
- [10] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной кваттики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135(177)**:4 (1988), 472–496; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a three-dimensional quartic with a quadratic singularity”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 457–482.

М. М. Гриненко (M. M. Grinenko)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: grin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

15.12.2009 и 19.07.2010