Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Фредгольмовы и спектральные свойства
тёплицевых операторов в пространствах H^p над упоря-
доченными группами, *Матем. сб.*, 2011, том 202, но-
мер 5, 101–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:09:47

УДК 517.983.23+517.984.5

А. Р. Миротин

Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами

Рассматриваются тёплицевы операторы в пространствах $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, ассоциированных с компактной связной абелевой группой G , группа характеров которой упорядочена, и в случае линейного порядка доказывается теорема об индексе Фредгольма для таких операторов с непрерывным символом, обобщающая классическую теорему Гохберга–Крейна. Даются приложения полученных результатов к спектральной теории тёплицевых операторов и рассматриваются примеры явного вычисления индекса.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: тёплицев оператор, фредгольмов оператор, индекс Фредгольма, существенный спектр, упорядоченная абелева группа.

§ 1. Введение

Классическая теория тёплицевых операторов, возникшая первоначально как теория операторов в гильбертовом пространстве H^2 на группе $\mathbb{T}$ вращений окружности, была в дальнейшем перенесена на банаховы пространства H^p , $1 < p < \infty$, на $\mathbb{T}$ (см., например, [1]). Настоящая работа посвящена некоторым вопросам фредгольмовой и спектральной теории тёплицевых операторов в пространствах H^p , $1 < p < \infty$, на компактных абелевых группах.

Всюду ниже G – нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара m и (вообще говоря, частично) упорядоченной группой характеров X , T – положительный конус в X , порождающий X . Другими словами, в группе X выделена подполугруппа T , содержащая единичный характер $\mathbf{1}$ и такая, что $T \cap T^{-1} = \{\mathbf{1}\}$ и $X = T^{-1}T$. При этом полугруппа T индуцирует в X частичный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi \leq \chi := \chi\xi^{-1} \in T$. Очевидно, что T – конфинальная часть X и направленное множество относительно рассматриваемого порядка (если $\lambda_1, \lambda_2 \in T$, то $\lambda_1 \leq \lambda_1\lambda_2$, $\lambda_2 \leq \lambda_1\lambda_2$). Если дополнительно $T \cup T^{-1} = X$, то этот порядок линейен (пишем: X л.у.). Хорошо известно, что (дискретная) абелева группа X может быть линейно упорядочена тогда и только тогда, когда она не имеет кручения (см., например, [2]), что, в свою очередь, равносильно тому, что ее группа характеров G связна (см. [3]); при этом линейный порядок в X , вообще говоря, не единствен.

В описанной выше ситуации тёплицевы операторы T_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ в обобщенных пространствах Харди $H^2(G)$ были определены Дж. Мёрфи в [4]

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь (договор № 20061473).

и интенсивно изучались (см., например, [4]–[12]). В частности, было показано, что соответствующие обобщенные тёплицевы алгебры обладают рядом интересных свойств, если порядок линейен. Рассматривались обобщения и дискретных тёплицевых операторов, в том числе и с матричным символом (см. статью [13] и библиографию там; автор признателен рецензенту, обратившему его внимание на эту работу).

Ниже мы рассматриваем тёплицевы операторы в пространствах $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, и в случае линейного порядка доказываем теорему об индексе Фредгольма для таких операторов с непрерывным символом, обобщающую классическую теорему Гохберга–Крейна. Попутно установлены обобщения теорем Брауна–Халмоша и Хартмана–Винтнера. Даются приложения полученных результатов к спектральной теории тёплицевых операторов и рассмотрены примеры явного вычисления индекса. Хотя ряд результатов для общих групп G оказался аналогичен классическому случаю $G = \mathbb{T}$, обнаружились и существенные отличия. Например, если $G \neq \mathbb{T}$, то не каждый тёплицев оператор с неаннулирующимся непрерывным символом фредгольмов, существуют группы, для которых фредгольмовость соответствующих им тёплицевых операторов равносильна обратимости, существенный спектр тёплицева оператора, вообще говоря, не совпадает с множеством значений его символа и т.д. (см. теорему 4 и следствия 1–3, 5–7 и 11, а также примечание рецензента к примеру 2). Таким образом, в определенном смысле роль группы $\mathbb{T}$ в этом круге вопросов оказалась уникальной.

Отметим, что в работах [5]–[7] изучались индексы и обобщенные индексы тёплицевых операторов в пространствах $H^2(G)$ (случай архимедова порядка рассматривался ранее в [8]). В частности, в [7] получено обобщение теоремы об индексе при условии, что группа X линейно упорядочена и содержит наименьший положительный элемент. При этом использовались методы теории C^* -алгебр, не переносимые на случай банаховых пространств $H^p(G)$.

§ 2. Тёплицевы операторы над упорядоченными группами

Ниже через $\text{Pol}(G)$ (соответственно $\text{Pol}_T(G)$) будет обозначаться пространство тригонометрических полиномов (соответственно тригонометрических полиномов аналитического типа) на группе G , т.е. линейная оболочка множества X (соответственно T) в $L^p(G)$. При $1 \leq p \leq \infty$ через $H^p(G)$ обозначим подпространство таких функций $f \in L^p(G)$, преобразование Фурье $\hat{f}$ которых сосредоточено на T , с нормой, индуцированной из $L^p(G)$ (см. [14]). Легко видеть, что $\text{Pol}_T(G)$ содержится в $H^p(G)$ (кроме того, $A_T(G) \subset H^\infty(G)$, где алгебра $A_T(G)$ есть равномерное замыкание множества $\text{Pol}_T(G)$; см. лемму 2).

ЛЕММА 1. *При $1 \leq p < \infty$ пространство $H^p(G)$ инвариантно относительно преобразования $g \mapsto g^*$, где $g^*(y) = \overline{g(y^{-1})}$, и совпадает с замыканием в $L^p(G)$ множества $\text{Pol}_T(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность $H^p(G)$ относительно преобразования $g \mapsto g^*$ проверяется непосредственно с учетом инвариантности меры Хаара группы G относительно отражения. Обозначим замыкание в $L^p(G)$ множества $\text{Pol}_T(G)$ через $H_T^p(G)$. Включение $H_T^p(G) \subseteq H^p(G)$ следует из того, что $H^p(G)$ замкнуто в $L^p(G)$ и содержит $\text{Pol}_T(G)$.

Пусть F есть такой линейный непрерывный функционал на $L^p(G)$, что сужение $F|H^p(G)$ равно нулю. Тогда найдется функция $f \in L^q(G)$ (здесь и ниже $p^{-1} + q^{-1} = 1$), для которой

$$F(h) = \int_G h(x) \overline{f(x)} dm(x) = 0$$

при всех $h \in H^p(G)$. В частности, преобразование Фурье $\widehat{f}(\chi)$ равно нулю при всех $\chi \in T$. Если теперь $g \in H^p(G)$, то $\widehat{f}\widehat{g} = 0$, а тогда и свертка $f * g$ равна нулю, т.е.

$$\int_G f(xy^{-1})g(y) dm(y) = 0.$$

при почти всех $x \in G$. Отсюда следует, что $F(g^*) = 0$. Следовательно, по теореме Хана–Банаха $g^* \in H_T^p(G)$, а потому и $g \in H_T^p(G)$, поскольку последнее пространство также инвариантно относительно преобразования $g \mapsto g^*$.

ЛЕММА 2. 1) Для любого $p \in [1, \infty]$ имеет место включение

$$H^\infty(G) \cdot H^p(G) \subseteq H^p(G).$$

Более того, для каждого фиксированного $p \in [1, \infty)$

$$H^\infty(G) = \{h \in L^\infty(G) \mid hH^p(G) \subseteq H^p(G)\}. \quad (1)$$

2) Пространство $H^\infty(G)$ есть банахова алгебра относительно поточечных операций и нормы, индуцированной из $L^\infty(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $h \in H^\infty(G)$, $f \in H^p(G)$, $p \in [1, \infty)$. Тогда $hf \in L^p(G)$, и при $\chi \in X \setminus T$, $\xi \in T$ получаем $\widehat{h\xi}(\chi) = \widehat{h}(\xi^{-1}\chi) = 0$, так как $\xi^{-1}\chi \in X \setminus T$. Следовательно, $\widehat{hg}(\chi) = 0$ для любого аналитического полинома $g \in \text{Pol}_T(G)$. Выберем теперь последовательность $g_n \in \text{Pol}_T(G)$, сходящуюся к f в $L^p(G)$ (лемма 1). Если $\chi \in X \setminus T$, то по доказанному выше с учетом неравенства Гёльдера ($h\bar{\chi} \in L^q(G)$)

$$0 = \widehat{hg_n}(\chi) = \int_G h\bar{\chi}g_n dm \rightarrow \widehat{hf}(\chi), \quad n \rightarrow \infty,$$

а потому $hf \in H^p(G)$.

Если же $h \in L^\infty(G)$ и $hH^p(G) \subseteq H^p(G)$, то $h \cdot 1 \in H^p(G)$, что доказывает (1). В свою очередь, (1) влечет включение $H^\infty(G) \cdot H^\infty(G) \subseteq H^\infty(G)$.

Утверждение 2) следует из 1) и замкнутости $H^\infty(G)$ в $L^\infty(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Проектор Рисса $P_T: \text{Pol}(G) \rightarrow \text{Pol}_T(G)$ определяется равенством

$$P_T\left(\sum_{\chi \in M} c_\chi \chi\right) = \sum_{\chi \in M \cap T} c_\chi \chi.$$

Известно (см. [15], [16], а также [2; гл. 8]), что проектор P_T L^p -ограничен при $1 < p < \infty$, а потому продолжается до ограниченного проектора $P_T: L^p(G) \rightarrow H^p(G)$ (теорема Бохнера–Хелсона).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $1 < p < \infty$. Тёплицев оператор T_φ в $H^p(G)$ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ определяется следующим образом:

$$T_\varphi f = P_T(\varphi f), \quad f \in H^p(G).$$

Далее через M_φ будет обозначаться оператор умножения на измеримую функцию φ , действующий в пространстве $L^p(G)$ (или в его подпространствах).

Нижеследующее обобщение теоремы Брауна–Халмоша (классический случай см., например, в [1]) справедливо для произвольной компактной абелевой группы G с линейно упорядоченной группой характеров. Для его доказательства нам понадобится

ЛЕММА 3. Если для измеримой функции φ на G оператор умножения M_φ отображает $\text{Pol}(G)$ в $L^p(G)$ и L^p -ограничен, $1 < p < \infty$, то $\varphi \in L^\infty(G)$ и $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интерес представляет случай $M_\varphi \neq O$. Допустим, что $\varphi \notin L^\infty(G)$. Тогда найдется такое компактное $K \subset G$, что $m(K) > 0$ и $|\varphi(x)| > 2\|M_\varphi\|$ при $x \in K$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем открытое $U \supset K$, удовлетворяющее условию $m(U) < m(K) + \varepsilon$, и пусть непрерывная функция $f: G \rightarrow [0, 1]$ такова, что $f|_K = 1$, $f|(G \setminus U) = 0$ (лемма Урысона). По теореме Вейерштрасса–Стоуна существует полином $q \in \text{Pol}(G)$ такой, что $\|f - q\|_\infty < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|q(x)| \geq 1 - \varepsilon$ при $x \in K$, а потому

$$\begin{aligned} \|M_\varphi q\|_p &\geq \left(\int_K |\varphi|^p |q|^p dm \right)^{1/p} \geq (1 - \varepsilon) \left(\int_K |\varphi|^p dm \right)^{1/p} \\ &> (1 - \varepsilon) 2\|M_\varphi\| (m(K))^{1/p}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\|f - q\|_p < \varepsilon$ и, значит, $\|q\|_p < \|f\|_p + \varepsilon$. А поскольку к тому же $\|f\|_p < m(U)^{1/p}$, то

$$\|M_\varphi q\|_p \leq \|M_\varphi\|(\|f\|_p + \varepsilon) \leq \|M_\varphi\|(m(U)^{1/p} + \varepsilon) < \|M_\varphi\|((m(K) + \varepsilon)^{1/p} + \varepsilon).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$(1 - \varepsilon) 2\|M_\varphi\| m(K)^{1/p} < \|M_\varphi\|((m(K) + \varepsilon)^{1/p} + \varepsilon),$$

что невозможно. Последнее утверждение леммы хорошо известно.

Далее для $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$, $p \in (1, \infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, мы полагаем

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \bar{g} dm.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть X л.у., $1 < p < \infty$. Если ограниченный оператор $A: \text{Pol}_T(G) \rightarrow H^p(G)$ таков, что для некоторой функции $a: X \rightarrow \mathbb{C}$ при любых $\chi_1, \chi_2 \in T$ справедливо равенство $\langle A\chi_1, \chi_2 \rangle = a(\chi_1^{-1}\chi_2)$, то существует такая функция $\varphi \in L^\infty(G)$, что $A = T_\varphi$, причем ее преобразование Фурье $\hat{\varphi} = a$. Более того, $\|\varphi\|_\infty \leq \|T_\varphi\| \leq c_p \|\varphi\|_\infty$, где $c_p = \|P_T\|$. В частности, $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, если $p = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим направленность $b_\chi = \bar{\chi}A\chi \in L^p(G)$, $\chi \in T$. Так как она ограничена ($\|b_\chi\|_p \leq \|A\|$ для всех $\chi \in T$), то, переходя, если нужно, к поднаправленности, можно считать, что b_χ слабо сходится в $L^p(G)$ к элементу $\varphi \in L^p(G)$. В частности, $\lim_{\chi \in T} \langle b_\chi, \xi \rangle = \langle \varphi, \xi \rangle$ при всех $\xi \in X$. Заметим, что $\langle b_\chi, \xi \rangle = \langle A\chi, \chi\xi \rangle = a(\xi)$, если $\chi\xi \in T$. Поскольку T конфинально в X , в пределе получаем, что $\langle \varphi, \xi \rangle = a(\xi)$ при всех $\xi \in X$, т.е. $\widehat{\varphi} = a$.

Оператор M_φ , очевидно, отображает $\text{Pol}(G)$ в $L^p(G)$; покажем, что он L^p -ограничен. В силу последнего равенства при всех $f, g \in \text{Pol}(G)$ имеем

$$\langle M_\varphi f, g \rangle = \langle M_{\bar{\chi}} A M_\chi f, g \rangle,$$

так как обе части совпадают при $f, g \in X$. Поэтому с учетом неравенства Гёльдера

$$|\langle M_\varphi f, g \rangle| \leq \|M_{\bar{\chi}} A M_\chi f\|_p \|g\|_q \leq \|A\| \|f\|_p \|g\|_q$$

и, следовательно,

$$\|M_\varphi f\|_p = \sup\{|\langle M_\varphi f, g \rangle| \mid g \in \text{Pol}(G), \|g\|_q \leq 1\} \leq \|A\| \|f\|_p.$$

Таким образом, оператор M_φ L^p -ограничен, а потому $\varphi \in L^\infty(G)$ по лемме 3. Одновременно мы показали, что $\|M_\varphi\| \leq \|A\|$.

Далее, так как при $\chi_1, \chi_2 \in T$

$$\langle T_\varphi \chi_1, \chi_2 \rangle = \widehat{\varphi}(\chi_1^{-1} \chi_2) = a(\chi_1^{-1} \chi_2) = \langle A\chi_1, \chi_2 \rangle,$$

то $A = T_\varphi$.

Наконец,

$$\|\varphi\|_\infty = \|M_\varphi\| \leq \|A\| = \|T_\varphi\| = \|P_T M_\varphi\| \leq c_p \|\varphi\|_\infty,$$

и доказательство теоремы полностью завершено.

§ 3. Фредгольмовость и индекс тёплицевых операторов с непрерывным символом

Для формулировки и доказательства теоремы об индексе требуется определенная подготовка.

Прежде всего, мы определим индекс вращения для функций из некоторой подгруппы группы $C(G)^{-1}$ обратимых элементов алгебры $C(G)$. Начнем с определения индекса вращения характера группы G (ниже $\#F$ обозначает число элементов конечного множества F).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В каждом из следующих случаев определим *индекс вращения характера* $\chi \in X$ следующим образом:

- 1) $\text{ind } \chi = \#(T \setminus \chi T)$, если $\chi \in T$ и множество $T \setminus \chi T$ конечно;
- 2) $\text{ind } \chi = \text{ind } \chi_1 - \text{ind } \chi_2$, если $\chi = \chi_1 \chi_2^{-1}$, где $\chi_j \in T$, причем оба множества $T \setminus \chi_j T_j$ конечны, $j = 1, 2$.

В остальных случаях считаем, что характер не имеет индекса.

Множество характеров, имеющих индекс, обозначим X^i .

Далее нам понадобится результат Г. Бора и Е. ван Кампена, согласно которому любая функция $\varphi \in C(G)^{-1}$ представима в виде χe^g , где $g \in C(G)$, $\chi \in X$ (см. [17]). Более того, как следует из одного результата Е. А. Горина (см. замечание после доказательства теоремы 2 в [18]), характер χ в этом разложении определяется по φ однозначно (позднее этот факт был переоткрыт в [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Рассмотрим функцию $\varphi \in C(G)^{-1}$ с разложением Бора–ван Кампена $\varphi = \chi e^g$, $g \in C(G)$, $\chi \in X$. Если $\chi \in X^i$, то положим

$$\text{ind } \varphi = \text{ind } \chi.$$

В противном случае будем считать, что функция φ не имеет индекса.

Множество функций из $C(G)^{-1}$, имеющих индекс, обозначим $\Phi(G)$. Таким образом, $\Phi(G) = X^i \cdot \exp(C(G))$, причем по причине отмеченной выше единственности характера в разложении Бора–ван Кампена $X \cap \exp(C(G)) = \{1\}$.

В следующей теореме перечислены основные свойства множеств X^i , $\Phi(G)$ и отображения ind ($H^\perp$ обозначает аннулятор подмножества H группы G , а знак $\sqcup$ – дизъюнктное объединение множеств; напомним, что подгруппа Ξ упорядоченной группы X называется *выпуклой*, если отрезок $[\xi_1, \xi_2]$ содержится в Ξ , лишь только $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$).

ТЕОРЕМА 2. 1) Множество X^i есть выпуклая подгруппа группы X .

2) Отображение $\text{ind}: X^i \rightarrow \mathbb{Z}$ определено корректно и есть сохраняющий порядок гомоморфизм на группу вида $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}_+$, который, если X л.у., а X^i нетривиальна, является порядковым изоморфизмом на $\mathbb{Z}$.

3) Множество $\Phi(G)$ есть открытая подгруппа группы $C(G)^{-1}$ с открытыми компонентами связности $\chi \exp(C(G))$, где χ пробегает X^i .

4) Отображение $\text{ind}: \Phi(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ есть гомоморфизм групп и принимает постоянное значение $\text{ind } \chi$ на компоненте связности $\chi \exp(C(G))$, $\chi \in X^i$.

5) Если X л.у., то для любого непрерывного гомоморфизма $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow G$, удовлетворяющего условию $X^i \not\subseteq \gamma(\mathbb{T})^\perp$, найдется такое целое $k_\gamma \neq 0$, что при всех $\varphi \in \Phi(G)$ справедливо равенство

$$\text{ind } \varphi = k_\gamma^{-1} \text{wn}(\varphi \circ \gamma),$$

где wn обозначает классический индекс вращения функций из $C(\mathbb{T})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1), 2). Сначала заметим, что

$$T \cap X^i = \{\chi \in T \mid \#(T \setminus \chi T) < \infty\}.$$

Действительно, если $\chi \in T \cap X^i$, то $\chi = \chi_1^{-1} \chi_2$, причем $\#(T \setminus \chi_j T) < \infty$, $j = 1, 2$. Тогда $\chi_2 = \chi_1 \chi$ (т.е. $1 \leq \chi \leq \chi_2$), а потому $T \setminus \chi T \subseteq T \setminus \chi_2 T$. Отсюда следует, что $\#(T \setminus \chi T) < \infty$ и $\text{ind } \chi \leq \text{ind } \chi_2$ (заодно мы показали, что $\chi_2 \in T \cap X^i$ влечет $[1, \chi_2] \subset X^i$ и что отображение $\text{ind}: T \rightarrow \mathbb{Z}_+$ сохраняет порядок). Значит, $T \cap X^i \subseteq \{\chi \in T \mid \#(T \setminus \chi T) < \infty\}$. Обратное включение очевидно.

Установим корректность определения $\text{ind } \chi$. При $\chi_1, \chi_2 \in T$ справедливо равенство

$$T \setminus \chi_1 \chi_2 T = (T \setminus \chi_1 T) \sqcup \chi_1 (T \setminus \chi_2 T).$$

Поэтому если χ_1, χ_2 имеют индексы, то $\chi_1 \chi_2$ тоже его имеет (т.е. $T \cap X^i$ есть полугруппа) и $\text{ind}(\chi_1 \chi_2) = \text{ind } \chi_1 + \text{ind } \chi_2$. Из последнего равенства следуют корректность определения $\text{ind } \chi$ (включая совпадение двух определений $\text{ind } \chi$ в случае $\chi \in T$) и гомоморфность индекса.

Далее, $X^i = (T \cap X^i)^{-1}(T \cap X^i)$ есть подгруппа группы X , порожденная полугруппой $T \cap X^i$. Докажем ее выпуклость. Пусть $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, где $\xi_1 = \chi_1^{-1} \chi_2$, $\xi_2 = \chi_3^{-1} \chi_4$, $\chi_j \in T \cap X^i$, $j = 1, \dots, 4$. Тогда $\chi_2 \chi_3 \leq \chi_1 \chi_3 \xi \leq \chi_1 \chi_4$,

причем из первого неравенства следует, что $\chi_5 := \chi_1 \chi_3 \xi \in T$, а из второго – что $\chi_5 \in X^i$ (см. начало доказательства теоремы). Поэтому $\xi = (\chi_2 \chi_3)^{-1} \chi_5 \in X^i$.

Покажем, что отображение ind сохраняет порядок. Пусть, как выше, $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, где $\xi_1 = \chi_1^{-1} \chi_2$, $\xi_2 = \chi_3^{-1} \chi_4$, $\chi_j \in T \cap X^i$, $j = 1, \dots, 4$. Тогда $\chi := \xi_2 \xi_1^{-1} \in T \cap X^i$. Поэтому $\chi_2 \chi_3 \chi = \chi_1 \chi_4$, откуда следует, что $\text{ind } \chi_2 + \text{ind } \chi_3 \leq \text{ind } \chi_1 + \text{ind } \chi_4$, т.е. $\text{ind } \xi_1 \leq \text{ind } \xi_2$. Кроме того, $\text{ind}(X^i)$, будучи подгруппой группы $\mathbb{Z}$, имеет вид $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}_+$.

Предположим теперь, что X л.у., а X^i нетривиальна, и докажем инъективность гомоморфизма $\text{ind}: X^i \rightarrow \mathbb{Z}$, т.е. равенство $\text{Ker}(\text{ind}) = \{1\}$. Пусть $\xi = \chi_1^{-1} \chi_2$, $\chi_j \in T \cap X^i$, $j = 1, 2$, и $\text{ind } \xi = 0$, т.е. $\text{ind } \chi_1 = \text{ind } \chi_2$. Если для определенности $\chi_1 \leq \chi_2$, то $T \setminus \chi_1 T \subseteq T \setminus \chi_2 T$, а потому здесь имеет место равенство (это конечные множества с одинаковым числом элементов), откуда $\chi_1 T = \chi_2 T$. Последнее равенство влечет $\chi_1 \leq \chi_2$ и $\chi_2 \leq \chi_1$, т.е. $\chi_1 = \chi_2$. Таким образом, группа X^i порядково изоморфна $a\mathbb{Z}$, а потому $\text{ind}(X^i) = \text{ind}(a\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, поскольку $a \neq 0$.

3) Равенство $\Phi(G) = X^i \cdot \exp(C(G))$ показывает, что $\Phi(G)$ есть подгруппа группы $C(G)^{-1}$ (причем из равенства $X^i \cap \exp(C(G)) = \{1\}$ следует, что она изоморфна прямому произведению $X^i \times \exp(C(G))$). Далее, хорошо известно, что множество $\exp(C(G))$ открыто и является компонентой единицы в $C(G)^{-1}$. Следовательно, подмножества $\chi \cdot \exp(C(G)) \subset C(G)^{-1}$ открыты и связны, и осталось заметить, что при различных χ они попарно не пересекаются по причине единственности характера в разложении Бора–ван Кампена.

4) Это следует из 2) и того факта, что $\text{ind}(\exp(C(G))) = \{1\}$.

5) Так как $\text{ind}(e^g) = \text{wn}(e^{g \circ \gamma}) = 0$ при $g \in C(G)$, интерес представляет случай $\varphi \in X^i$. С учетом утверждения 2) можно, исключая тривиальный случай, считать также, что группа X^i изоморфна $\mathbb{Z}$. Поскольку у таких групп любые два гомоморфизма в $\mathbb{Z}$ пропорциональны, найдется число c_γ , для которого $\text{ind } \chi = c_\gamma \text{wn}(\chi \circ \gamma)$ при всех $\chi \in X^i$. Если в последнем равенстве положить $\chi = \chi_1$, где $\chi_1 \in X^i$, $\text{ind } \chi_1 = 1$, то получим $c_\gamma = k_\gamma^{-1}$, где $k_\gamma = \text{wn}(\chi_1 \circ \gamma)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 2) теоремы 2 показывает, что в случае линейного порядка группа X^i либо порядково изоморфна $\mathbb{Z}$, либо тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из утверждений 3) и 4) следует, что определенный выше индекс вращения функций из $\Phi(G)$ обладает свойствами классического индекса вращения и, в частности, является гомотопическим инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Характер $\chi \in T$ называется положительным конечным элементом группы X , если для любого $\xi \in T \setminus \{1\}$ найдется такое натуральное n , что $\xi^n \geq \chi$. Группа $F(X)$, порожденная всеми положительными конечными элементами, называется группой конечных элементов группы X (эта группа играет важную роль в [7]). Из теоремы 2 следует, что $X^i = F(X)$, если X^i нетривиальна. В то же время рассмотрение подгрупп $X \subseteq \mathbb{R}$ (наделенных естественным порядком и дискретной топологией) показывает, что $F(X)$ может быть нетривиальной при тривиальной X^i .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если группа X л.у. и совпадает с X^i , то G изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$.

В самом деле, так как группа X предполагается нетривиальной, это сразу следует из замечания 1.

Для случая одномерного тора известно, что все полукоммутаторы

$$[T_\varphi, T_\psi] := T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}, \quad \varphi, \psi \in C(\mathbb{T}),$$

компактны в $H^p(\mathbb{T})$. Для групп, отличных от $\mathbb{T}$, это уже не так.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть группа X л.у., $\chi \in T$. Полукоммутатор $[T_\chi, T_{\bar{\chi}}]$ компактен в $H^p(G)$ тогда и только тогда, когда $\chi \in X^i$. Следовательно, если операторы $[T_\chi, T_{\bar{\chi}}]$ компактны в $H^p(G)$ при всех $\chi \in T$, то G изоморфна одномерному тору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – единичный оператор в $H^p(G)$. Поскольку $(I - T_\chi T_{\bar{\chi}})\zeta = 0$ при $\zeta \in \chi T$ и $(I - T_\chi T_{\bar{\chi}})\zeta = \zeta$ при $\zeta \in T \setminus \chi T$, а T – линейно независимая система, порождающая пространство $H^p(G)$ (лемма 1), оператор $-[T_\chi, T_{\bar{\chi}}] = I - T_\chi T_{\bar{\chi}}$ является ограниченным проектором на подпространство $L \subset H^p(G)$, порожденное системой $T \setminus \chi T$. Компактность этого проектора равносильна конечномерности L , т.е. конечности множества $T \setminus \chi T$, что доказывает первое утверждение. Если теперь операторы $[T_\chi, T_{\bar{\chi}}]$ компактны в $H^p(G)$ при всех $\chi \in T$, то $T \subset X^i$, а потому $X = X^i$, и осталось воспользоваться следствием 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если группа $X \neq \mathbb{Z}$ линейно и архимедово упорядочена, то X^i тривиальна.

Действительно, известно, что линейно и архимедово упорядоченная группа не содержит собственных нетривиальных выпуклых подгрупп, а равенство $X = X^i$ влечет $X = \mathbb{Z}$ в силу утверждения 2) теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi, \psi \in L^\infty(G)$. Если $\bar{\varphi} \in H^\infty(G)$ или $\psi \in H^\infty(G)$, то $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \in H^\infty(G)$, то для любого $f \in H^p(G)$

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P_T(\varphi \psi f) = T_\varphi \psi f.$$

Пусть теперь $\bar{\varphi} \in H^\infty(G)$. В силу доказанного выше при любых $\chi_1, \chi_2 \in T$ справедливо равенство

$$\langle T_{\bar{\varphi}\psi} \chi_1, \chi_2 \rangle = \langle T_\psi T_{\bar{\varphi}} \chi_1, \chi_2 \rangle. \quad (2)$$

Как и в классическом случае $G = \mathbb{T}$, легко проверить, что при $f, g \in H^2(G)$, $\varphi \in L^\infty(G)$

$$\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle f, T_{\bar{\varphi}} g \rangle. \quad (3)$$

С учетом последнего равенства левая часть (2) приобретает вид $\langle \chi_1, T_{\varphi\bar{\psi}} \chi_2 \rangle$.

С другой стороны, дважды применяя равенство (3), для правой части (2) получаем выражение $\langle \chi_1, T_\varphi T_{\bar{\psi}} \chi_2 \rangle$. Следовательно, полагая $h := T_{\varphi\bar{\psi}} \chi_2 - T_\varphi T_{\bar{\psi}} \chi_2$, выводим, что

$$0 = \langle \chi_1, h \rangle = \overline{\widehat{h}(\chi_1)},$$

т.е. $\widehat{h}|_T = 0$. Но $h \in H^p(G)$, а потому $\widehat{h}|(X \setminus T) = 0$. Таким образом, $T_{\varphi\bar{\psi}} \chi_2 = T_\varphi T_{\bar{\psi}} \chi_2$ при всех $\chi_2 \in T$, т.е. $T_{\varphi\bar{\psi}}|_{\text{Pol}_T(G)} = T_\varphi T_{\bar{\psi}}|_{\text{Pol}_T(G)}$, откуда и следует утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть группа X л.у. Для любой функции $\varphi \in C(G)$ оператор T_{e^φ} обратим в $H^p(G)$, $1 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом доказательства теоремы 7.1 из [9]. По теореме Вейерштрасса–Стоуна найдется такой тригонометрический полином $q \in \text{Pol}(G)$, что $\|1 - e^{\varphi - q}\|_\infty < 1/c_p$, $c_p = \|P_T\|_p$. Пусть $q_1 = P_T q$, $q_2 = q - q_1$. Тогда $q_1, \overline{q_2} \in \text{Pol}_T(G)$ (у нас $X = T \cup T^{-1}$). Лемма 2 показывает теперь, что $e^{\pm q_1}, e^{\pm \overline{q_2}} \in H^\infty(G)$, а потому в силу предложения 1 существуют обратные операторы $(T_{e^{q_i}})^{-1} = T_{e^{-q_i}}$, $i = 1, 2$. Повторное применение предложения 1 дает $T_{e^\varphi} = T_{e^{q_2}} T_{e^{\varphi - q}} T_{e^{q_1}}$. Осталось заметить, что оператор $T_{e^{\varphi - q}}$ обратим, поскольку

$$\|I - T_{e^{\varphi - q}}\| = \|T_{1 - e^{\varphi - q}}\| \leq c_p \|1 - e^{\varphi - q}\|_\infty < 1.$$

Для обобщения теоремы Хартмана–Винтнера (классический случай см., например, в [1]) нам потребуется следующий простой факт. Ниже через $w\text{-}\lim_{\chi \in T} h_\chi$ (соответственно $s\text{-}\lim_{\chi \in T} h_\chi$) обозначается слабый (соответственно сильный) предел направленности $h: T \rightarrow LB(L^p(G))$, где $LB(L^p(G))$ обозначает алгебру линейных ограниченных операторов в $L^p(G)$.

ЛЕММА 4. Имеет место равенство $w\text{-}\lim_{\chi \in T} M_\chi = O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$, p и q – сопряженные показатели, $1 < p < \infty$. Тогда функция на X

$$\chi \mapsto \langle M_\chi f, g \rangle = \overline{\int_G \chi \bar{f} g \, dm}$$

стремится к нулю на бесконечности вместе с преобразованием Фурье функции $\bar{f}g \in L^1(G)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $F = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset X$, чтобы выполнялось $|\langle M_\chi f, g \rangle| < \varepsilon$ при $\chi \notin F$. Выберем характеры $\chi_i, \eta_i \in T$ таким образом, что $\xi_i^{-1} = \chi_i^{-1} \eta_i$, $i = 1, \dots, n$, и положим $\chi_\varepsilon = \chi_1 \cdots \chi_n$. Тогда $\chi_\varepsilon \xi_i^{-1} \in T$, т.е. $\chi_\varepsilon \geq \xi_i$ при всех $\xi_i \in F$. Поэтому из неравенства $\chi > \chi_\varepsilon$ следует, что $\chi \notin F$, а потому и $|\langle M_\chi f, g \rangle| < \varepsilon$, что и завершает доказательство леммы.

Теперь обобщение теоремы Хартмана–Винтнера доказывается по существу так же, как и в классическом случае. Приведем доказательство для полноты изложения (напомним, что для ограниченного оператора T в банаховом пространстве Y запись $T \in \Phi_+(Y)$ означает, что его образ $\text{Im } T$ замкнут, а ядро $\text{Ker } T$ конечномерно, а запись $T \in \Phi_-(Y)$ означает конечномерность факторпространства $Y/\text{Im } T$; операторы из $\Phi_-(Y) \cup \Phi_+(Y)$ называются полуфредгольмовыми, а операторы из $\Phi_-(Y) \cap \Phi_+(Y)$ – фредгольмовыми в Y).

ТЕОРЕМА 3. Если оператор T_φ полуфредгольмов в $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, то его символ φ обратим в алгебре $L^\infty(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T_\varphi \in \Phi_+(H^p(G))$, то обозначим через K проектор $H^p(G) \rightarrow \text{Ker } T_\varphi$. Тогда при некотором $\delta > 0$ и всех $f \in H^p(G)$ справедливо неравенство (см., например, [1; утверждение 1.12, (g)])

$$\|T_\varphi f\| + \|Kf\| \geq \delta \|f\|.$$

Полагая здесь $f = P_T g$, имеем

$$\|P_T M_\varphi P_T g\| + \|K P_T g\| \geq \delta \|P_T g\|.$$

Далее, $g = P_T g + Qg$, где $Q = I - P_T$. Поэтому $\|P_T g\| \geq \|g\| - \|Qg\|$. С учетом этого предыдущее неравенство влечет

$$\|P_T M_\varphi P_T g\| + \|P_T K P_T g\| \geq \delta(\|g\| - \|Qg\|),$$

т.е.

$$\|P_T M_\varphi P_T g\| + \|P_T K P_T g\| + \delta\|Qg\| \geq \delta\|g\|.$$

Заменяя тут g на $M_\chi g$, получаем в силу изометричности M_χ , что

$$\|M_{\chi^{-1}} P_T M_\varphi P_T M_\chi g\| + \|P_T K P_T M_\chi g\| + \delta\|M_{\chi^{-1}} Q M_\chi g\| \geq \delta\|g\|. \quad (4)$$

Заметим теперь, что семейство $E_\chi := M_{\chi^{-1}} P_T M_\chi$, $\chi \in T$, равномерно ограничено. Кроме того, $E_\chi \xi = \xi$ ($\xi \in X$) при $\chi \xi \in T$ (т.е. при $\chi \geq \xi^{-1}$), а потому $\lim_{\chi \in T} E_\chi q = q$ при $q \in \text{Pol}(G)$. Следовательно, $s\text{-}\lim_{\chi \in T} E_\chi = I$ и $s\text{-}\lim_{\chi \in T} M_{\chi^{-1}} Q M_\chi = O$.

В свою очередь отсюда следует, что

$$s\text{-}\lim_{\chi \in T} M_{\chi^{-1}} P_T M_\varphi P_T M_\chi = s\text{-}\lim_{\chi \in T} E_\chi M_\varphi E_\chi = M_\varphi.$$

В самом деле, так как $E_\chi \xi = \xi$ при $\chi \geq \xi^{-1}$, то направленность $E_\chi M_\varphi E_\chi \xi$ стремиться к $M_\varphi \xi$ по $\chi \in T$. По линейности это же верно при замене характера ξ любым тригонометрическим полиномом, и осталось заметить, что семейство $E_\chi M_\varphi E_\chi$, $\chi \in T$, равномерно ограничено.

Поскольку оператор $P_T K P_T$ компактен, $s\text{-}\lim_{\chi \in T} P_T K P_T M_\chi = O$ в силу леммы 4. Теперь (4) влечет $\|M_\varphi g\| \geq \delta\|g\|$, откуда $\|\varphi\|_\infty \geq \delta$.

Пусть теперь $T_\varphi \in \Phi_-(H^p(G))$. Положим $\dot{H}_-^p(G) = \text{Ker } P_T$. Тогда $L^p(G) = H^p(G) \dot{+} \dot{H}_-^p(G)$, $L^q(G) = H^q(G) \dot{+} \dot{H}_-^q(G)$ (p и q – сопряженные показатели), а потому

$$\begin{aligned} T_\varphi \in \Phi_-(H^p(G)) &\iff T_\varphi P_T + Q \in \Phi_-(L^p(G)), \\ T_{\bar{\varphi}} \in \Phi_+(H^q(G)) &\iff T_{\bar{\varphi}} P_T + Q \in \Phi_+(L^q(G)). \end{aligned}$$

Поскольку пространство $L^q(G)$ сопряжено пространству $L^p(G)$, а оператор $T_{\bar{\varphi}} P_T + Q$ сопряжен оператору $T_\varphi P_T + Q$ (см. (3)), то $T_{\bar{\varphi}} \in \Phi_+(H^q(G))$, и все свелось к случаю, рассмотренному выше.

Сейчас мы в состоянии доказать теорему об индексе.

ТЕОРЕМА 4. Пусть группа X л.у., $\varphi \in C(G)$. Оператор T_φ в пространстве $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, фредгольмов тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Phi(G)$. При этом

$$\text{Ind } T_\varphi = -\text{ind } \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если оператор T_φ фредгольмов, то $\varphi \in C(G)^{-1}$ по теореме 3. Пусть $\varphi = \chi e^g$, $g \in C(G)$, $\chi \in X$, – разложение Бора-ван Кампена. По предложению 1 $T_\varphi = T_{e^g} T_\chi$, если $\chi \in T$, и $T_\varphi = T_\chi T_{e^g}$, если $\chi \in T^{-1}$. При этом оператор T_{e^g} обратим (предложение 2), а потому фредгольмов нулевого индекса. Следовательно, оператор T_χ тоже фредгольмов, причем $\text{Ind } T_\varphi = \text{Ind } T_\chi$.

Рассмотрим вопрос о фредгольмовости и индексе оператора T_χ . Возможны два случая.

1) $\chi \in T$. Поскольку $\text{Ker } T_\chi = \{0\}$, оператор T_χ фредгольмов тогда и только тогда, когда пространство $\text{Coker } T_\chi = H^p(G)/\chi H^p(G)$ конечномерно, и при этом $\text{Ind } T_\chi = -\dim(H^p(G)/\chi H^p(G))$. Заметим, что соотношения ортогональности для характеров влекут равенство $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ при $\xi \in T \setminus \chi T$, $\eta \in \chi T$. По непрерывности $\langle \xi, f \rangle = 0$ при $\xi \in T \setminus \chi T$, $f \in \chi H^p(G)$. Поэтому характеры из $T \setminus \chi T$ попарно не эквивалентны mod $(\chi H^p(G))$. Тогда из сказанного выше следует, что если $\chi \notin X^i$, т.е. множество $T \setminus \chi T$ бесконечно, то оператор T_χ не фредгольмов. Пусть теперь $\chi \in X^i$, т.е. $T \setminus \chi T$ конечно. Тогда подпространство $\text{span}(T \setminus \chi T) \dot{+} \chi H^p(G)$ замкнуто в $H^p(G)$ (см., например, [19; гл. I, п. 3.3]). Поскольку оно содержит $\text{Pol}_T(G)$, справедливо равенство $\text{span}(T \setminus \chi T) \dot{+} \chi H^p(G) = H^p(G)$ (лемма 1), откуда $H^p(G)/\chi H^p(G) = \text{span}(T \setminus \chi T)$. Следовательно, в рассматриваемом случае T_χ фредгольмов и

$$\text{Ind } T_\chi = -\dim(H^p(G)/\chi H^p(G)) = -\text{ind } \chi = -\text{ind } \varphi.$$

2) Пусть теперь $\chi \in T^{-1}$. Далее мы неоднократно будем пользоваться равенством $I = T_\chi T_{\bar{\chi}}$, вытекающим из предложения 1. Если оператор T_χ фредгольмов, то это равенство показывает, что оператор $T_{\bar{\chi}}$ тоже фредгольмов. Тогда $\chi^{-1} \in X^i$ в силу 1), а потому и $\chi \in X^i$. Более того, из этого же равенства следует, что

$$\text{Ind } T_\chi = -\text{Ind } T_{\chi^{-1}} = -\text{ind } \chi = -\text{ind } \varphi.$$

Обратно, если $\chi \in X^i$, то и $\chi^{-1} \in X^i$, а потому оператор $T_{\bar{\chi}}$ фредгольмов. Третий раз воспользовавшись нашим равенством, получаем фредгольмовость оператора T_χ и в этом случае.

Итак, в любом случае оператор T_χ фредгольмов тогда и только тогда, когда $\chi \in X^i$. Из этого включения, в частности, следует, что $\varphi \in \Phi(G)$, и доказательство необходимости завершено. Попутно мы установили и формулу для $\text{Ind } T_\varphi$.

Достаточность. Если $\varphi \in \Phi(G)$, т.е. $\varphi = \chi e^g$, где $g \in C(G)$, $\chi \in X^i$, то оператор T_χ фредгольмов по доказанному выше. Тогда оператор T_φ тоже фредгольмов (он равен $T_{e^g} T_\chi$, если $\chi \in T$, и $T_\chi T_{e^g}$, если $\chi \in T^{-1}$), что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [7] рассматривалась обобщенная фредгольмовость и обобщенный индекс (Бройора) тёплицевых операторов в $H^2(G)$ с непрерывным символом для случая, когда группа X счетна и группа ее конечных элементов $F(X)$ нетривиальна. В частности, при этих условиях в [7; теорема 4.2] показано, что оператор T_φ фредгольмов в этом обобщенном смысле тогда и только тогда, когда характер χ из разложения Бора–ван Кампена $\varphi = \chi e^g$ принадлежит группе $F(X)$. Сравнение этого результата с теоремой 4 и замечанием 3 показывает, что в случае, когда группа X^i нетривиальна, обобщенная фредгольмовость оператора T_φ равносильна обычной.

Всюду далее предполагается, что группа X л.у.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\varphi \in C(G)$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) T_φ фредгольмов нулевого индекса;
- 2) $\varphi \in \exp(C(G))$;
- 3) T_φ обратим.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\varphi \in C(G)$, а группа $X \neq \mathbb{Z}$ линейно и архимедово упорядочена. Если оператор T_φ фредгольмов, то он обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 3 в этой ситуации имеет место равенство $\Phi(G) = \exp(C(G))$.

Справедливость следствия 5 была отмечена в [6; с. 356] (там рассматривался случай $p = 2$).

СЛЕДСТВИЕ 6. Если любой оператор T_χ , $\chi \in T$, фредгольмов, то G изоморфна $\mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T_χ фредгольмов, то $\chi \in \Phi(G) \cap T = X^i \cap T$. Поэтому из условия следствия следует, что $T \subset X^i$, откуда $X = X^i$, и осталось применить следствие 1.

Рассмотрим примеры вычисления индекса, первый из которых обобщает теоремы 3.1 и 3.2 из работы [6], где рассматривались пространства $H^2(\mathbb{T}^d)$ и символы специального вида.

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathbb{T}^d$, $d > 1$, $X = \mathbb{Z}_{\text{lex}}^d$ (индекс lex указывает, что порядок лексикографический) и $\varphi \in C(\mathbb{T}^d)$. Тогда оператор T_φ фредгольмов в $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, если и только если его символ имеет вид

$$\varphi(t_1, \dots, t_d) = t_d^{n_d} e^{g(t_1, \dots, t_d)}$$

для некоторых $n_d \in \mathbb{Z}$, $g \in C(\mathbb{T}^d)$.

При этом

$$\text{Ind } T_\varphi = -n_d.$$

В самом деле, по определению лексикографического порядка положительный конус в этом случае есть

$$T = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid n_1 > 0\} \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d \mid n_1 = 0, n_2 > 0\} \\ \sqcup \dots \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d \mid n_1 = n_2 = \dots = n_{d-1} = 0, n_d > 0\} \sqcup \{0\}.$$

Отсюда следует, что $X^i = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid n_1 = n_2 = \dots = n_{d-1} = 0\}$ (точка $(0, \dots, 0, 1)$ принадлежит X^i , и осталось воспользоваться замечанием 1 после теоремы 2). Это значит, что если отождествить точку $n \in \mathbb{Z}^d$ с характером $\chi_n(t) = t^n$ группы $\mathbb{T}^d$, то

$$\Phi(G) = \{t_d^{n_d} e^{g(t)} \mid g \in C(\mathbb{T}^d)\},$$

и утверждение следует из теоремы 4.

ПРИМЕР 2. Пусть $G = \mathbb{T}^\infty$ и $X = \mathbb{Z}_{\text{lex}}^\infty$ – аддитивная группа всех финитных последовательностей целых чисел с положительным конусом

$$T = \{0\} \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^\infty \mid n_1 > 0\} \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^\infty \mid n_1 = 0, n_2 > 0\} \sqcup \dots$$

В этом примере группа X^i тривиальна, а потому оператор T_φ с непрерывным символом фредгольмов в $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, если и только если он обратим, т.е. если его символ имеет вид¹ $\varphi = e^g$, где $g \in C(\mathbb{T}^\infty)$.

¹Если $\varphi \in C(G)$, то оператор T_φ по крайней мере односторонне обратим тогда и только тогда, когда $\varphi \in C(G)^{-1}$. При этом условии он обратим слева (справа), если и только если характер в разложении Бора–ван Кампена его символа принадлежит T^{-1} (соответственно T). Это следует из предложений 1, 2 и теоремы 3. Таким образом, в отличие от классического случая в описанной ситуации могут существовать полуфредгольмовы не фредгольмовы тёплицевы операторы с непрерывным символом. В частности, так будет в примере 2. (Это примечание принадлежит рецензенту.)

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \mathbb{T}^\infty$, $X = \mathbb{Z}^\infty$, причем линейный порядок в X задается положительным конусом T , состоящим из нуля и тех точек группы $\mathbb{Z}^\infty$, последняя ненулевая координата у которых положительна. Поскольку $(1, 0, 0, \dots) \in X^i$, группа X^i состоит из точек вида $(n_1, 0, 0, \dots)$, где $n_1 \in \mathbb{Z}$. Рассуждая, как в примере 1, получаем, что оператор T_φ , где $\varphi \in C(G)$, фредгольмов в $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда его символ имеет вид

$$\varphi(t_1, t_2, \dots) = t_1^{n_1} e^{g(t_1, t_2, \dots)}$$

для некоторых $n_1 \in \mathbb{Z}$, $g \in C(\mathbb{T}^\infty)$. Кроме того,

$$\text{Ind } T_\varphi = -n_1.$$

§ 4. Спектры и существенные спектры тёплицевых операторов

Применим полученные результаты к исследованию структуры спектров тёплицевых операторов. Всюду ниже, если не оговорено противное, группа X считается линейно упорядоченной, а символ φ – непрерывным.

В случае символа $\varphi \in C(\mathbb{T})$ известно, что существенный спектр Фредгольма $\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{T})$. Для других групп ситуация иная.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $\varphi \in L^\infty(G)$, то $\sigma_e(T_\varphi) \supseteq \sigma(\varphi)$, где $\sigma(\varphi)$ – множество существенных значений функции φ . Причем если G не изоморфна $\mathbb{T}$, для $\varphi \in C(G)^{-1} \setminus \Phi(G)$ включение строгое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение сразу следует из теоремы 3. Пусть теперь $\varphi \in C(G)^{-1} \setminus \Phi(G)$ (последнее множество не пусто по следствию 1, если G не изоморфна $\mathbb{T}$). Тогда оператор T_φ не фредгольмов (теорема 4), а потому $0 \in \sigma_e(T_\varphi)$.

Далее под дырами компактного связного множества $\varphi(G)$ подразумеваются ограниченные компоненты его дополнения $\mathbb{C} \setminus \varphi(G)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi \in C(G)$. Тогда:

- 1) существенный спектр Фредгольма $\sigma_e(T_\varphi)$ получается из множества $\varphi(G)$ присоединением тех его дыр Λ (если они существуют), для которых $\varphi - \lambda \notin \Phi(G)$ при всех (при одном) $\lambda \in \Lambda$;
- 2) спектр $\sigma(T_\varphi)$ получается из $\sigma_e(T_\varphi)$ присоединением тех дыр Λ множества $\varphi(G)$ (если они существуют), для которых $\varphi - \lambda \in \Phi(G) \setminus \exp(C(G))$ при всех (при одном) $\lambda \in \Lambda$;
- 3) существенный спектр Вейля $\sigma_w(T_\varphi) = \sigma(T_\varphi)$;
- 4) спектры $\sigma_e(T_\varphi)$ и $\sigma(T_\varphi)$ связны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Теорема Бора–ван Кампена вкупе с единственностью разложения означает, что факторгруппа $C(G)^{-1} / \exp(C(G))$ изоморфна X , поэтому далее мы будем эти группы отождествлять (значительно более общий факт установлен в [18]). Обозначим через π каноническое отображение

$$C(G)^{-1} \rightarrow C(G)^{-1} / \exp(C(G)) = X$$

и рассмотрим отображение

$$\alpha_\varphi: \mathbb{C} \setminus \varphi(G) \rightarrow X, \lambda \mapsto \pi(\varphi - \lambda).$$

Оно непрерывно, а значит, постоянно на каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \varphi(G)$ в силу дискретности X . В соответствии с теоремой 4

$$\begin{aligned}\sigma_e(T_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_{\varphi-\lambda} \notin \Phi(H^p(G))\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi - \lambda \notin \Phi(G)\} \\ &= \varphi(G) \sqcup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \varphi(G) \mid \alpha_\varphi(\lambda) \notin X^i\}.\end{aligned}\quad (5)$$

Поскольку оператор $T_{\varphi-\lambda}$ обратим при больших λ и α_φ постоянно на компонентах множества $\mathbb{C} \setminus \varphi(G)$, то неограниченная компонента этого множества не пересекается с $\sigma_e(T_\varphi)$, а потому формула (5) равносильна утверждению 1) теоремы.

2) Воспользуемся равенством

$$\sigma(T_\varphi) = \varphi(G) \sqcup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \varphi(G) \mid \alpha_\varphi(\lambda) \neq 1\}, \quad (6)$$

которое следует из того, что в силу следствия 4 $\lambda \notin \sigma(T_\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\varphi - \lambda \in \exp(C(G))$, т.е. когда $\lambda \notin \varphi(G)$ и $\alpha_\varphi(\lambda) = 1$. Осталось заметить, что с учетом формулы (5) правая часть (6) есть

$$\sigma_e(T_\varphi) \sqcup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \varphi(G) \mid \alpha_\varphi(\lambda) \in X^i \setminus \{1\}\}.$$

3) В соответствии с одним утверждением М. Шехтера из [20] (см. также [21; теорема XI.6.12]; [22; гл. 3]) $\sigma_w(T_\varphi)$ получается из $\sigma_e(T_\varphi)$ присоединением тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T_{\varphi-\lambda}$ полуфредгольмов и $\text{Ind } T_{\varphi-\lambda} \neq 0$. С учетом теоремы 4 и утверждения 2) это означает включение $\sigma(T_\varphi) \subseteq \sigma_w(T_\varphi)$, что и требовалось доказать.

4) Это следует из того, что $\sigma(T_\varphi)$ и $\sigma_e(T_\varphi)$ представимы в виде объединения связного множества $\varphi(G)$ и (возможно) некоторых его дыр.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $p = 2$ связность $\sigma(T_\varphi)$ была доказана в работе [5], а связность $\sigma_e(T_\varphi)$ – в [9] даже для случая пространств H^2 , порожденных алгебрами Дирихле.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для спектральных радиусов оператора T_φ справедливы равенства $|T_\varphi|_{\text{ess}} = |T_\varphi| = \|\varphi\|_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma(T_\varphi)$ получается из множества $\varphi(G)$ присоединением некоторых его дыр, то $|T_\varphi| = \sup |\varphi(G)|$. Первое равенство доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 9. Для любого компактного оператора K в пространстве $H^p(G)$, $1 < p < \infty$, справедливо неравенство $\|T_\varphi + K\| \geq (1/c_p)\|T_\varphi\|$, где $c_p = \|P_T\|$. В частности, если оператор T_φ компактен в $H^p(G)$, то он нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку существенный спектр Вейля инвариантен относительно компактных возмущений, имеем с учетом теоремы 5, следствия 8 и теоремы 1

$$\|T_\varphi + K\| \geq |T_\varphi + K| \geq |T_\varphi| = \|\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{c_p}\|T_\varphi\|.$$

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $p = 2$. Если A есть замкнутая симметричная подалгебра алгебры $C(G)$, обладающая тем свойством, что при любых $\varphi, \psi \in A$ полукоммутаторы $[T_\varphi, T_\psi]$ компактны в $H^2(G)$, то $\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(G)$ при $\varphi \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение j из A в алгебру Калкина $\mathcal{C}(H^2(G))$, ставящее в соответствие каждой функции $\varphi \in A$ класс смежности $T_\varphi + K(H^2(G))$, является $*$ -гомоморфизмом алгебр, который изометричен в силу теоремы 1 и следствия 9. Остается заметить, что алгебра $j(A)$, будучи C^* -подалгеброй алгебры Калкина, наполнена в ней.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Примером алгебры A , удовлетворяющей условиям следствия 10, может служить C^* -подалгебра алгебры $C(G)$, порожденная характером $\chi \in X^i$, поскольку компактность полукоммутаторов $[T_{\chi^k}, T_{\chi^j}]$, $k, j \in \mathbb{Z}$, следует из предложения 1 и следствия 2. Следовательно, в этом случае $\sigma_e(T_\chi) = \chi(G)$. На самом деле, как показывает следствие 11, последнее равенство верно для любого $p \in (1, \infty)$ (ниже $\mathbb{D}$ обозначает открытый единичный круг в $\mathbb{C}$).

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $\chi \in X$, $\chi \neq 1$. Тогда:

- 1) спектр $\sigma(T_\chi)$ совпадает с замкнутым единичным кругом $\overline{\mathbb{D}}$;
- 2) при $\chi \in X^i$ существенный спектр Фредгольма $\sigma_e(T_\chi) = \chi(G) = \mathbb{T}$;
- 3) при $\chi \notin X^i$ существенный спектр Фредгольма $\sigma_e(T_\chi) = \overline{\mathbb{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство $\chi(G) = \mathbb{T}$ следует из того, что $\chi(G)$ – нетривиальная связная подгруппа окружности. При этом для единственной ограниченной компоненты $\mathbb{D}$ дополнения $\mathbb{C} \setminus \chi(G)$, используя обозначения из доказательства предыдущей теоремы, имеем $\alpha_\chi|_{\mathbb{D}} = \alpha_\chi(0) \neq 1$, поскольку $\chi \notin \exp(C(G))$ в силу единственности разложения Бора–ван Кампена. Теперь равенство $\sigma(T_\chi) = \overline{\mathbb{D}}$ следует из формулы (6).

2) Это вытекает из теоремы 5 и того факта, что в рассматриваемом случае для единственной дыры $\mathbb{D}$ множества $\chi(G)$ имеем $\mathbb{D} \cap \sigma_e(T_\chi) = \emptyset$, так как $\chi - 0 \in \Phi(G)$.

3) Поскольку теперь $\chi - 0 \notin \Phi(G)$, то $\sigma_e(T_\chi) = \mathbb{T} \cup \mathbb{D}$ по теореме 5.

Автор благодарен рецензенту за интересные замечания и советы, способствовавшие улучшению изложения.

Список литературы

- [1] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 2006.
- [2] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Publ., New York–London, 1962.
- [3] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 2-е изд., ГИТТЛ, М., 1954; англ. пер. 1-го изд.: L. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton Math. Ser., **2**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1939.
- [4] G. J. Murphy, “Ordered groups and Toeplitz algebras”, *J. Operator Theory*, **18**:2 (1987), 303–326.
- [5] G. J. Murphy, “Spectral and index theory for Toeplitz operators”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **91**:1 (1991), 1–6.
- [6] G. J. Murphy, “Toeplitz operators and algebras”, *Math. Z.*, **208**:1 (1991), 355–362.
- [7] G. J. Murphy, “An index theorem for Toeplitz operators”, *J. Operator Theory*, **29**:1 (1993), 97–114.
- [8] L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer, I. M. Singer, “ C^* -algebras of operators on a half-space. II: Index theory”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 69–79.

- [9] G. J. Murphy, “Toeplitz operators on generalised H^2 spaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **15**:5 (1992), 825–852.
- [10] G. J. Murphy, “Toeplitz operators associated to unimodular algebras”, *Integral Equations Operator Theory*, **46**:3 (2003), 363–375.
- [11] M. Pavone, “Toeplitz operators on discrete groups”, *J. Operator Theory*, **27**:2 (1992), 359–384.
- [12] Q. Xu, X. Chen, “A note on Toeplitz operators on discrete groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:12 (1998), 3625–3631.
- [13] T. Ehrhardt, C. van der Mee, L. Rodman, I. M. Spitkovsky, “Factorization in weighted Wiener matrix algebras on linearly ordered Abelian groups”, *Integral Equations Operator Theory*, **58**:1 (2007), 65–86.
- [14] H. Helson, D. Lowdenslager, “Prediction theory and Fourier series in several variables”, *Acta Math.*, **99**:1 (1958), 165–202.
- [15] S. Bochner, “Generalized conjugate and analytic functions without expansions”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45**:6 (1959), 855–857.
- [16] H. Helson, “Conjugate series and a theorem of Paley”, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 437–446.
- [17] E. R. van Kampen, “On almost periodic functions of constant absolute value”, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 3–6.
- [18] Е. А. Горин, “Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора–ван Кампена”, *Матем. сб.*, **82(124)**:2(6) (1970), 260–272; англ. пер.: E. A. Gorin, “A functional-algebra variant of a theorem of Bohr–van Kampen”, *Math. USSR-Sb.*, **11**:2 (1970), 233–243.
- [19] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York–London, 1966.
- [20] M. Schechter, “Invariance of the essential spectrum”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 365–367.
- [21] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, **96**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [22] В. А. Еровенко, *Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов*, БГУ, Минск, 2002.

А. Р. Миротин (A. R. Mirotin)
 Гомельский государственный университет
 им. Ф. Скорины, Беларусь
 E-mail: amirotin@yandex.ru

Поступила в редакцию
 15.12.2009 и 29.06.2010