Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:08:49

УДК 517.53

В. Н. Сорокин

О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера

Изучаются два примера многочленов совместной ортогональности, обобщающих ортогональные многочлены дискретной переменной, а именно, многочлены Мейкснера. Один пример связан с дискретной системой Никишина. Другой пример приводит к существенно новым эффектам. Получено предельное распределение нулей многочленов в терминах равновесных логарифмических потенциалов и в терминах алгебраических кривых.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: многочлены Мейкснера, системы Никишина, римановы поверхности и алгебраические функции, равновесные логарифмические потенциалы.

§ 1. Введение

Многочленами Мейкснера (см. [1]) называются многочлены $Q_n(x)$ степени n , ортогональные относительно некоторой дискретной меры μ , т.е. удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\int Q_n(x)x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.1)$$

Носителем меры $\mu(x) = \mu(c, \beta; x)$ является множество целых неотрицательных чисел. В точку $m \in \mathbb{Z}_+$ помещается масса величины

$$j_m = j_m(c, \beta) = c^m \frac{(\beta)_m}{m!}, \quad (1.2)$$

где $(\beta)_m = \beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)$ – символ Похгаммера. Эта мера зависит от двух параметров c и β таких, что $0 < c < 1$, $\beta > 0$. В частности, при $\beta = 1$ получаем геометрическое распределение вероятности $j_m = c^m$ (с точностью до вероятностной нормировки). В некотором смысле многочлены Мейкснера служат дискретным аналогом классических многочленов Лагерра. Из общих свойств ортогональных многочленов следует, что соотношения ортогональности (1.1) определяют многочлен $Q_n(x)$ единственным образом (с точностью до нормировки), все нули этого многочлена лежат на промежутке $(0, +\infty)$ и по

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317, № 09-01-12160-офи-м, № 10-01-00682) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8033.2010.1).

теореме Чебышёва–Маркова–Стилтьеса (см. [2]) разделены целыми неотрицательными точками. Это означает, что на любом отрезке $[m, m+1]$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, лежит не более одного нуля многочлена.

Для многочленов Мейкснера хорошо известен дискретный аналог формулы Родрига. А именно, определим функцию

$$G(c, \beta; x) = c^x \frac{\Gamma(\beta + x)}{\Gamma(1 + x)}, \quad (1.3)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Значения функции (1.3) в целых неотрицательных точках с точностью до константы совпадают с величинами масс (1.2). Справедлива следующая формула:

$$Q_n(x) = \frac{1}{G(c, \beta; x)} \frac{1}{n!} \Delta^n G(c, \beta + n; x), \quad (1.4)$$

где Δ – разностный оператор вида

$$(\Delta f)(x) = f(x) - f(x-1) \quad (1.5)$$

(см. [1]). Написав формулу (1.4), мы тем самым зафиксировали некоторую стандартную нормировку многочленов $Q_n(x)$.

Целью настоящей работы является изучение двух классов так называемых многочленов совместной ортогональности, связанных с весами Мейкснера. Нас интересует вопрос о слабой асимптотике масштабированных многочленов. Мера μ имеет неограниченный носитель, и при этом массы (1.2) экспоненциально убывают. Поэтому, как заметил Е. А. Рахманов (см. [3]), для получения качественной картины распределения нулей ортогональных многочленов необходимо сделать следующее масштабирование:

$$Q_n^*(x) = C_n Q_n(nx), \quad (1.6)$$

где C_n – нормировочная постоянная, для определенности такая, что старший коэффициент многочлена Q_n^* равен единице. Под слабой асимптотикой многочленов Q_n^* понимается предел корня n -й степени из модуля многочлена или, что то же самое, следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \log |Q_n^*(x)| = V(x), \quad (1.7)$$

если он, конечно, существует. В случае существования этот предел равен логарифмическому потенциалу некоторой положительной меры λ с носителем $S(\lambda)$ и с величиной (полной вариацией) единица: $\|\lambda\| = 1$. А именно (см. [4]),

$$V(x) = V^\lambda(x) = \int \log \frac{1}{|x-t|} d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{C} \setminus S(\lambda).$$

Мера λ является предельным распределением нулей многочленов Q_n^* . Это означает следующее. Пусть ν_n – дискретная мера, полученная помещением массы $1/n$ в каждый нуль многочлена Q_n^* . Это – мера, считающая нули. Тогда

$$\nu_n \xrightarrow{*} \lambda, \quad n \rightarrow \infty.$$

Имеется в виду сходимость в $*$ -слабой топологии. Таким образом, задача о нахождении слабой асимптотики равносильна задаче о нахождении предельного распределения нулей.

Свойства многочленов Мейкснера хорошо известны. Тем не менее, в § 2 мы докажем существование предела (1.7), найдем явный вид меры λ , обсудим полученный результат – проинтерпретируем его в терминах задачи равновесия теории логарифмического потенциала. В дальнейшем это позволит лучше понять основные результаты работы и сократить технические детали их доказательств.

В § 3 мы изучаем многочлены, совместно ортогональные относительно двух мер Мейкснера (для двух различных значений параметра β). Эти меры образуют дискретную систему Никишина. В работе [5] была разработана схема изучения систем Никишина для непрерывных мер на компактных отрезках вещественной оси. Мы покажем, что полученные в [5] результаты с соответствующими изменениями переносятся и на случай дискретных неограниченных мер, хотя общей теории для этого случая пока не существует. Некоторые новые результаты в этом направлении получены в работах [6], [7].

В § 4 рассмотрен другой пример, который не укладывается ни в одну из известных схем изучения многочленов совместной ортогональности. В этом случае возникают существенно новые эффекты. Половина нулей многочленов уходит с вещественной оси в комплексную плоскость.

§ 2. Асимптотика многочленов Мейкснера

Докажем существование предела (1.7) и вычислим его. Сначала проведем необходимые рассуждения, после чего сформулируем и обсудим полученные результаты. Идея доказательства простая. Мы перепишем формулу (1.4) по интегральной формуле Коши и применим классический метод перевала.

Итак, имеем

$$Q_n(x)c^x \frac{\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_l c^t \frac{\Gamma(\beta+n+t)}{\Gamma(1+t)} \frac{dt}{(t-x)(t-x+1)\cdots(t-x+n)},$$

где l – любой контур (простой замкнутый спрямляемый), обходящий точки $x, x-1, \dots, x-n$ и не содержащий внутри себя полюсов гамма-функции $\Gamma(\beta+n+t)$. После масштабирования (1.6) получим

$$\begin{aligned} Q_n(nx)c^{nx} \frac{\Gamma(\beta+nx)}{\Gamma(1+nx)} \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n^n} \int_{l^*} c^{nt} \frac{\Gamma(\beta+n+nt)}{\Gamma(1+nt)} \frac{dt}{(t-x)(t-x+1/n)\cdots(t-x+1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где l^* – произвольный контур, обходящий отрезок $[x-1, x]$ и лежащий в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$. Соответственно, точку x фиксируем в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Найдем слабую асимптотику подинтегральной функции. По формуле Стирлинга

$$\frac{1}{n} \log \frac{\Gamma(\beta+n+nt)}{\Gamma(1+nt)} - \log \frac{n}{e} \longrightarrow (1+t) \log(1+t) - t \log t, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно на контуре l^* . При $t > 0$ берутся главные ветви логарифмов. Далее,

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \log \left| \prod_{k=0}^n \left(z + \frac{k}{n}\right) \right| \longrightarrow V^\chi(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$. При этом χ – классическая мера Лебега на отрезке $[-1, 0]$. Комплексный потенциал этой меры равен

$$\mathcal{V}^\chi(z) = z \log z - (z + 1) \log(z + 1) + 1.$$

В соответствии с этим определим функцию

$$\begin{aligned} S(t, x) = & t \log c + (1 + t) \log(1 + t) - t \log t \\ & + (t - x) \log(t - x) - (t - x + 1) \log(t - x + 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_{l^*} e^{nS(t, x)} dt. \quad (2.3)$$

Функция $S(t, x)$ – многозначная на контуре l^* , но ее экспонента и производная – функции однозначные. Несложно обосновать, что слабая асимптотика интеграла в (2.1) с точностью до нормировочной постоянной совпадает со слабой асимптотикой интеграла (2.3). Найдем эту асимптотику методом перевала.

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, x) = \log \frac{c(1+t)(t-x)}{t(t-x+1)}.$$

Уравнение на критические точки $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ равносильно следующему квадратному уравнению:

$$t^2 + (1 - x)t + \gamma x = 0, \quad \gamma = \frac{c}{1 - c}. \quad (2.4)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$x^2 - 2 \frac{1 + c}{1 - c} x + 1.$$

Он имеет два положительных корня

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}, \quad x_+ = \frac{1 + \sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}.$$

Это – точки ветвления второго порядка алгебраической функции $t(x)$. Вне отрезка $E = [x_-, x_+]$ выделим однозначную ветвь этой функции условием

$$t_0(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Другую ветвь обозначим через $t_1(x)$. Тогда

$$t_1(x) \longrightarrow \gamma, \quad x \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что для $x \in \mathbb{C} \setminus E$ основной вклад в асимптотику интеграла (2.3) дает критическая точка $t_0(x)$. Если $x \in E$, то в асимптотику входят обе критические точки и интеграл (2.3) быстро осциллирует. То же самое происходит в случае, когда $x \in [0, x_-]$, так как для таких x функция

$$S_0(x) = S(t_0(x), x)$$

принимает мнимые значения.

Согласно (1.4) старший коэффициент многочлена Q_n равен

$$\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^n.$$

Тогда из (2.1) следует, что предел (1.7) существует и

$$V^\lambda(x) + \varphi(x) = c_0 - \operatorname{Re} S_0(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus [0, x_+], \quad (2.5)$$

где

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} x \log \frac{1}{c}$$

– так называемое внешнее поле, а c_0 – нормировочная постоянная,

$$c_0 = 1 + \log \frac{1-c}{c}.$$

Таким образом, мы получили явный вид асимптотики (1.7). Достаточно подставить в (2.2) формулу для корня квадратного уравнения (2.4). В равенстве (2.1) мы использовали техническое ограничение $x \notin (-\infty, 0)$, которое, очевидно, пропадает в окончательной формуле (2.5). Упростим ответ. Предъявим меру λ или, что то же самое, ее марковскую функцию (преобразование Коши):

$$h(x) = \hat{\lambda}(x) = \int \frac{d\lambda(t)}{x-t}, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\lambda).$$

Напомним, что мера λ – это предельное распределение нулей многочленов Q_n^* . Носитель этой меры совпадает с отрезком $[0, x_+]$. Если функция $h(x)$ известна, то мера λ восстанавливается по формуле Сохоцкого

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h(x - i \cdot 0), \quad 0 < x < x_+. \quad (2.6)$$

Мера λ абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега и λ' – ее плотность.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, которая получается склеиванием двух экземпляров сферы Римана $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_1$, разрезанных вдоль отрезка $E = [x_-, x_+]$. На поверхности $\mathfrak{R}$ определим мероморфную функцию $\theta: \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Она однозначно определена своим дивизором и условием нормировки. Эта функция имеет простой нуль в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_0$ и простой полюс в той же точке на листе $\mathfrak{R}_1$. Таким образом, функция θ осуществляет конформное отображение римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу Римана. Условие нормировки следующее: $\theta = 1$ в точке $x = \infty$ на листе $\mathfrak{R}_0$. Обозначим через θ_j однозначную ветвь функции θ на проекции листа $\mathfrak{R}_j$, где $j = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование Коши предельной меры распределения нулей масштабированных многочленов Мейкснера равно*

$$h(x) = \log \theta_0(x), \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, x_+],$$

при этом $h(\infty) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$h(x) = -\partial_x V^\lambda(x), \quad (2.7)$$

где ∂_x – удвоенная формальная комплексная производная. Из (2.5) следует, что

$$h(x) = \log \frac{1}{c} + \frac{d}{dx} S_0(x),$$

или $h(x) = \log \theta(x)$, где

$$\theta = \frac{t - x + 1}{c(t - x)}. \quad (2.8)$$

Из (2.4) получаем следующее квадратное уравнение для алгебраической функции $\theta(x)$:

$$cx\theta^2 + ((1 - c) - (1 + c)x)\theta + x = 0.$$

Эта функция удовлетворяет всем указанным выше условиям. Более того,

$$\theta_0(x) \approx 1 + \frac{1}{x}, \quad \theta_1(x) \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\theta_0(x) \sim -\frac{1}{1 - c}x, \quad \theta_1(x) \sim -\frac{1 - c}{c} \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0.$$

На рис. 1 показан график функции θ на вещественной оси.

(Все рисунки схематичны. Они отражают лишь топологию кривых, но не показывают истинные размеры и углы между кривыми.)

В (2.8) берем $t = t_0(x)$, что приводит к ветви $\theta_0(x)$. Из формулы Сохоцкого (2.6) видно, что λ – положительная мера. Так как

$$h(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то λ – единичная мера.

Теорема 1 доказана.

Вопрос об асимптотике многочленов Q_n^* может быть также решен с помощью некоторой задачи равновесия теории логарифмического потенциала.

ЗАДАЧА 1. Требуется найти положительную меру λ такую, что

1) носитель этой меры лежит на положительной полуоси, т.е.

$$S(\lambda) \subset \Delta = [0, +\infty);$$

2) полная вариация меры равна единице, т.е. $\|\lambda\| = 1$;

Рис. 1. График функции θ на вещественной оси

3) выполняется следующее ограничение (констрейн):

$$\lambda \leq \chi_{\Delta}, \quad (2.9)$$

где χ_{Δ} – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

4) с некоторой постоянной w справедливы неравенства Рахманова

$$W = 2V^{\lambda} + \varphi \begin{cases} \leq w & \text{на } S(\lambda), \\ \geq w & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda) \setminus S(\chi_{\Delta} - \lambda)), \end{cases} \quad (2.10)$$

где внешнее поле φ определено формулой

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} x \log \frac{1}{c}. \quad (2.11)$$

Неравенство (2.9) означает, что разность двух мер $\chi_{\Delta} - \lambda$ также является положительной мерой. Это ограничение связано с теоремой о разделении нулей. Внешнее поле (2.11) возникает из-за масштабирования (1.6) и учитывает экспоненциальный характер убывания весов (1.2) на бесконечности. Неравенства (2.10) представляют собой обобщенное условие равновесия с учетом внешнего поля и наличием ограничения на меру. В частности, суммарный потенциал W постоянен на той части носителя, где мера не достигает ограничителя. В дальнейшем для краткости условия типа (2.10) будем называть условиями равновесия Рахманова. Из результатов А. А. Гончара и Е. А. Рахманова (см. [3], [8], [9]) следует, что задача 1 имеет единственное решение, которое служит предельным распределением нулей многочленов Q_n^* . Мы уже нашли это распределение. Докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Предельная мера распределения нулей масштабированных многочленов Мейкснера является решением задачи 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия 1) и 2), очевидно, выполнены. Проверим условие 3). Если $x \in (0, x_-)$, то $\theta_0(x) < 0$ и в соответствии с выбором ветви логарифма $\arg \theta_0(x) = \pi$. Если $x \in (x_-, x_+)$, то $\arg \theta_0(x - i \cdot 0)$ убывает от π до нуля. Следовательно, по формуле Сохоцкого (2.6) имеем

$$\lambda'(x) \begin{cases} = 1, & \text{если } 0 < x < x_-, \\ < 1, & \text{если } x_- < x < x_+. \end{cases}$$

Таким образом, неравенство (2.9) выполнено. В частности, мера λ достигает ограничитель на отрезке $[0, x_-]$.

Проверим условие равновесия (2.10). Вычислим производную функции W вдоль вещественной оси. Учитывая (2.7), имеем

$$\begin{aligned} W'(x) &= -\operatorname{Re}\{2h(x - i \cdot 0) + \log c\} = -\operatorname{Re}\{\log(c\theta_0^2)\} \\ &= -\operatorname{Re} \log \frac{c\theta_0^2\theta_1}{\theta_1} = -\operatorname{Re} \log \frac{\theta_0}{\theta_1} = \log \left| \frac{\theta_1}{\theta_0} \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая. Пусть $0 < x < x_-$, тогда $|\theta_1/\theta_0| > 1$ и $W' > 0$. На этом интервале функция W возрастает. Пусть $x_- < x < x_+$, тогда числа θ_0 и θ_1 комплексно сопряженные, $|\theta_1/\theta_0| = 1$ и $W' = 0$. На этом интервале функция W постоянна. Пусть $x_+ < x < +\infty$, тогда $|\theta_1/\theta_0| > 1$ и $W' > 0$. На этом промежутке функция W снова возрастает. Эта функция непрерывна. Таким образом, неравенства (2.10) доказаны.

Теорема 2 доказана.

Задача 1 допускает наглядную электростатическую интерпретацию. Будем рассматривать нули многочленов Q_n^* как положительные заряды величины $1/n$. Речь идет о плоских зарядах, которые взаимодействуют не с ньютоновым потенциалом, а с логарифмическим. В пределе λ — это непрерывное распределение зарядов полной величины единица. Заряды не могут покидать проводник Δ . Они отталкивают друг друга, но справа на них действует внешнее поле φ , которое растет быстрее логарифма. В результате электростатическое распределение зарядов имеет компактный носитель. Поле φ выпукло, поэтому носителем будет некоторый отрезок, а именно, $[0, x_+]$. Большая часть зарядов собирается в окрестности нуля. Но здесь действует дополнительное ограничение (2.9) на их расположение. Поэтому на некотором отрезке $[0, x_-]$ они распределены равномерно. На системе зарядов функция W есть суммарный потенциал описанной физической системы. Он складывается из потенциала взаимодействия самих зарядов $2V^\lambda$ и внешнего поля φ . На той части носителя зарядов $[x_-, x_+]$, где не достигается ограничитель, этот потенциал постоянен, т.е. действующая на заряды сила равна нулю и заряды находятся в неподвижном состоянии. На отрезке $[0, x_-]$ потенциал не постоянен, но заряды неподвижны в силу дополнительного ограничения. Эта интерпретация имеет следующее объяснение. Ортогональные многочлены решают экстремальную задачу о минимизации L_2 -нормы. В пределе она переходит в задачу о минимизации полной энергии описанной системы, т.е. к состоянию статического равновесия.

В предельном случае, когда $c \rightarrow 1$, т.е. внешнее поле исчезает, имеем $x_- \rightarrow 0$, $x_+ \rightarrow \infty$. Это означает, что констрейн пропадает, а заряды уходят на бесконечность. В другом предельном случае, когда $c \rightarrow 0$, т.е. внешнее поле сильное, имеем $x_- \rightarrow 1$, $x_+ \rightarrow 1$. Другими словами, заряды равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, на котором они достигают ограничитель.

§ 3. Совместные многочлены Мейкснера

В теории аппроксимаций Эрмита–Паде (см. [2]) центральную роль играет распределение нулей многочленов совместной ортогональности. Рассмотрим пример таких многочленов для двух мер Мейкснера [1], образующих систему Никишина.

Зафиксируем параметры

$$0 < c < 1, \quad 0 < \beta_2 < \beta_1 < \beta_2 + 1.$$

Определим две меры μ_j , помещая в точку $x \in \mathbb{Z}_+$ массу величины $G(c, \beta_j; x)$ соответственно, где $j = 1, 2$. Функция G определена формулой (1.3). Меры μ_1 и μ_2 образуют систему Никишина. Это означает следующее. Во-первых, мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 , т.е. существует отношение мер – производная Радона–Никодима

$$u(x) = \frac{d\mu_2(x)}{d\mu_1(x)} = \frac{\Gamma(\beta_2 + x)}{\Gamma(\beta_1 + x)}. \quad (3.1)$$

Функция $u(x)$, изначально определенная лишь на множестве целых неотрицательных точек, формулой (3.1) продолжается на всю комплексную плоскость как мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках

$$x_k = -\beta_2 - k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

с вычетами

$$\nu_k = \frac{1}{\Gamma(\beta_1 - \beta_2)} \frac{(\beta_2 - \beta_1 + 1)_k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

соответственно. Во-вторых, функция $u(x)$ есть преобразование Коши некоторой положительной меры с носителем на промежутке $F = (-\infty, 0]$, не пересекающимся с промежутком $\Delta = [0, +\infty)$. Действительно, справедливо следующее разложение Миттаг-Лефлера в сумму главных лорановских частей:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{x - x_k}. \quad (3.3)$$

Определим дискретную меру ν , помещая массу ν_k в точку x_k , где $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда разложение (3.3) можно переписать как преобразование Коши:

$$u(x) = \int \frac{d\nu(t)}{x - t}.$$

Мера ν – дискретная, бесконечная, имеющая неограниченный носитель. Тем не менее, пара мер $\{\mu_1, \mu_2\}$ образует систему Никишина.

Поставим следующую задачу.

ЗАДАЧА 2. Для каждого целого неотрицательного числа n требуется найти многочлен Q_n такой, что

- 1) $Q_n \not\equiv 0$;
- 2) $\deg Q_n \leq 2n$;
- 3) выполняются следующие соотношения ортогональности:

$$\int Q_n(x) x^m d\mu_j(x) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2. \quad (3.4)$$

В этом параграфе через Q_n мы обозначаем многочлены совместной ортогональности, а именно, решения задачи 2. Назовем их *совместными многочленами Мейкснера*. В работе [5] была разработана общая схема изучения многочленов совместной ортогональности для систем Никишина в случае мер с положительной плотностью (относительно классической меры Лебега) на конечных отрезках. Покажем, что результаты этой работы с соответствующими изменениями справедливы и в данной ситуации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Задача 2 имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Степень многочлена Q_n в точности равна $2n$. Все нули этого многочлена простые, лежат на промежутке $(0, +\infty)$ и разделены целыми неотрицательными точками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения очевидно, поскольку задача 2 сводится к нахождению нетривиального решения системы $2n$ линейных однородных уравнений (3.4) относительно $2n+1$ неизвестного коэффициента многочлена Q_n .

Единственность решения (с точностью до нормировки) является нетривиальным фактом, вытекающим из свойств систем Никишина. Приведем соответствующие рассуждения из работы [5]. Пусть $Q_n(x)$ – любое решение задачи 2. Без ограничения общности многочлен Q_n имеет вещественные коэффициенты. Определим функции второго рода

$$R_{n,j}(x) = \int \frac{Q_n(t)}{x-t} d\mu_j(t), \quad j = 1, 2.$$

В силу соотношений ортогональности (3.4) имеем

$$R_{n,j}(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

в смысле асимптотического разложения. Рассмотрим следующую линейную комбинацию функций второго рода:

$$R_n(x) = R_{n,1}(x)u(x) - R_{n,2}(x).$$

Тогда по теореме Фубини

$$R_n(x) = \int \frac{R_{n,1}(t)}{x-t} d\nu(t).$$

При этом

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, справедливы следующие соотношения ортогональности:

$$\int R_{n,1}(t)t^m d\nu(t) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (3.5)$$

Мы получили соотношения ортогональности с положительной мерой, имеющей бесконечный носитель. Поэтому функция $R_{n,1}(t)$ имеет по крайней мере n перемен знака на промежутке $(-\infty, 0)$. Пусть $P_n(t)$ – произвольный многочлен с вещественными коэффициентами степени $N \geq n$, все нули которого лежат среди нулей функции $R_{n,1}(t)$ на промежутке $(-\infty, 0)$. Тогда отношение $R_{n,1}(x)/P_n(x)$ будет функцией, голоморфной вне промежутка Δ , и по формуле Коши

$$\frac{R_{n,1}(x)}{P_n(x)} = \int \frac{Q_n(t)}{x-t} \frac{d\mu_1(t)}{P_n(t)}. \quad (3.6)$$

Эта функция ведет себя как $O(1/x^{n+N+1})$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, выполняются соотношения ортогональности

$$\int Q_n(t)t^m \frac{d\mu_1(t)}{P_n(t)} = 0, \quad m = 0, \dots, n+N-1. \quad (3.7)$$

Мы снова получили соотношения ортогональности с положительной невырожденной мерой. Поэтому многочлен Q_n имеет, по крайней мере, $n+N$ перемен знака на промежутке $(0, +\infty)$. Но поскольку степень многочлена не превосходит $2n$, то $N = n$. Степень многочлена Q_n с необходимостью равна $2n$. Тем самым он определен единственным образом (с точностью до нормировки). При этом справедлива теорема о разделении нулей. Таким образом, предложение 1 доказано.

Дополнительно отметим, что соотношения ортогональности (3.5) можно переписать следующим образом:

$$\int P_n(t)t^m \frac{R_{n,1}(t)}{P_n(t)} d\nu(t) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (3.8)$$

Функция $R_{n,1}$ (или, что то же самое, многочлен P_n) имеет ровно n простых нулей на промежутке $(-\infty, 0)$. Они называются дополнительными точками интерполяции. Соотношения (3.8) представляют собой соотношения ортогональности с положительной мерой. Нули многочлена P_n разделены точками (3.2). Далее, из соотношений ортогональности (3.7) следует, что равенство (3.6) можно переписать в таком виде:

$$\frac{R_{n,1}(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{Q_n(x)} \int \frac{Q_n^2(t)}{x-t} \frac{d\mu_1(t)}{P_n(t)}. \quad (3.9)$$

Укажем явный вид многочленов Q_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедлив следующий аналог формулы Родрига:*

$$Q_n(x) = \mathcal{D}^{(n)}(c, \beta_2; x) \mathcal{D}^{(n)}(c, \beta_1; x) 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\mathcal{D}^{(n)}$ – оператор (умножения на функции и взятия разностного оператора), задаваемый так:

$$\mathcal{D}^{(n)}(c, \beta; x) = \frac{1}{G(c, \beta; x)} \Delta^n G(c, \beta + n; x).$$

При этом функция G определена формулой (1.3), а Δ – оператор левой конечной разности (1.5).

Это предложение доказывается преобразованием Абеля – суммированием по частям. Операторы $\mathcal{D}^{(n)}(c, \beta_j; x)$ коммутируют.

Докажем, что существует предельная мера λ_Δ распределения нулей масштабированных формулой (1.6) многочленов Q_n^* , и найдем ее явный вид. Также будет доказано существование предельной меры λ_F дополнительных точек интерполяции. Почти дословно повторяя рассуждения § 2, приходим к следующему кубическому уравнению:

$$x^2 \theta^3 - ((2x^2 - 2x - 1)\gamma + (x + 1)^2)\theta^2 + \gamma x((x - 2)\gamma + 2(x + 1))\theta - x^2 \gamma^2 = 0,$$

где $\gamma = 1/c$. Дискриминант этого уравнения равен

$$x^3 - \frac{3(5\gamma + 4)}{4(\gamma - 1)}x^2 + 3x + 1.$$

Из исследования поведения этого кубического многочлена на вещественной оси легко видеть, что при всех $\gamma > 1$ этот многочлен имеет один отрицательный и два положительных корня. Обозначим эти корни через x_0 , x_- , x_+ соответственно,

$$-\infty < x_0 < 0 < x_- < x_+ < +\infty.$$

Риманова поверхность $\mathfrak{R}$ алгебраической функции $\theta(x)$ есть трехлистное накрытие сферы Римана, которое может быть получено склейкой следующих листов:

$$\mathfrak{R}_F = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, x_0], \quad \mathfrak{R}_* = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-\infty, x_0] \cup [x_-, x_+]), \quad \mathfrak{R}_\Delta = \overline{\mathbb{C}} \setminus [x_-, x_+].$$

Обозначения F и Δ связаны с носителями мер λ_F и λ_Δ . Точки ∞ , x_0 , x_- , x_+ являются точками ветвления второго порядка. Функция θ мероморфна на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и имеет следующий дивизор. У нее есть простые нули в точке $x = 0$ на листах $\mathfrak{R}_F$ и $\mathfrak{R}_\Delta$ и полюс второго порядка в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_*$. Обозначим через θ_j однозначную ветвь функции θ на проекции листа $\mathfrak{R}_j$, где $j = F, *, \Delta$.

Укажем поведение функции θ на бесконечности:

$$\begin{aligned} \theta_\Delta(x) &\approx 1 + \frac{2}{x}, & x \rightarrow \infty, \\ \theta_j(x) &\approx \gamma \left(1 - \frac{1}{x}\right), & x \rightarrow \infty, \quad j = F, *. \end{aligned}$$

Укажем поведение функции θ в нуле:

$$\theta_{\Delta}(x) \sim a_-x, \quad \theta_F(x) \sim a_+x, \quad x \rightarrow 0,$$

где

$$a_{\pm} = \gamma \left(1 \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right), \quad \theta_*(x) \sim -\frac{\gamma-1}{x^2}, \quad x \rightarrow 0.$$

На рис. 2 показан график функции θ на вещественной оси.

Рис. 2. График функции θ на вещественной оси

Определим функцию

$$h_{\Delta}(x) = \log \theta_{\Delta}(x).$$

Она голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0, x_+]$. В бесконечности берем главную ветвь логарифма такую, что

$$h_{\Delta}(x) \sim \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Рассуждая, как и в § 2, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3. *Функция h_{Δ} является преобразованием Коши меры λ_{Δ} – предельной меры распределения нулей масштабированных совместных многочленов Мейкснера.*

Дадим теоретико-потенциальную интерпретацию полученного результата. Учитывая соотношения (3.7)–(3.9), приходим к следующей задаче равновесия.

ЗАДАЧА 3. Требуется найти две положительные меры λ_{Δ} и λ_F такие, что

- 1) $S(\lambda_{\Delta}) \subset \Delta = [0, +\infty)$, $S(\lambda_F) \subset F = (-\infty, 0]$;
- 2) $\|\lambda_{\Delta}\| = 2$, $\|\lambda_F\| = 1$;

3) выполняются следующие ограничения:

$$\lambda_\Delta \leq \chi_\Delta, \quad \lambda_F \leq \chi_F,$$

где χ_Δ и χ_F – классические меры Лебега на промежутках Δ и F соответственно;

4) с некоторыми постоянными w_Δ и w_F справедливы условия равновесия Рахманова–Никишина

$$W_\Delta = 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_F} + \varphi \begin{cases} \leq w_\Delta & \text{на } S(\lambda_\Delta), \\ \geq w_\Delta & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda_\Delta) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda_\Delta)), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$W_F = 2V^{\lambda_F} - V^{\lambda_\Delta} \begin{cases} \leq w_F & \text{на } S(\lambda_F), \\ \geq w_F & \text{на } F \setminus (S(\lambda_F) \setminus S(\chi_F - \lambda_F)), \end{cases} \quad (3.11)$$

где внешнее поле φ определено формулой (2.11).

Задача 3 имеет единственное решение. Мера λ_Δ является предельным распределением нулей масштабированных многочленов Q_n^* , а мера λ_F является предельным распределением масштабированных дополнительных точек интерполяции. Нули многочленов и дополнительные точки интерполяции суть заряды разного знака. В соответствии с (3.10) и (3.11) они притягиваются.

Определим функцию

$$h_F(x) = -\log(c\theta_F(x)).$$

Она голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus F$. Берем такую ветвь логарифма, что

$$h_F(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus F, \quad x \rightarrow \infty.$$

По формуле Сохоцкого функция h_F есть преобразование Коши некоторой единичной меры λ_F на промежутке F .

ТЕОРЕМА 4. *Пара мер λ_Δ и λ_F , определенных функциями h_Δ и h_F соответственно, есть решение задачи 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что меры λ_Δ и λ_F положительны, а также условия 1), 2), 3) задачи 3, очевидно, следуют из формулы Сохоцкого. В частности, мера λ_Δ достигает ограничитель на отрезке $[0, x_-]$, а мера λ_F – на отрезке $[x_0, 0]$. Действительно, для $x \in (0, x_-)$ функция $\theta_\Delta(x) < 0$ и в соответствии с выбором ветви логарифма $\arg \theta_\Delta(x) = \pi$. Следовательно, $\lambda'_\Delta(x) = 1$ на интервале $(0, x_-)$. Аналогично, для $x \in (x_0, 0)$ функция $\theta_F(x) < 0$ и $\arg \theta_F(x) = \pi$. Следовательно, $\lambda'_F(x) = 1$ на интервале $(x_0, 0)$.

Проверим условия равновесия (3.10). Вычислим производную функции W_Δ вдоль вещественной оси. Имеем

$$\begin{aligned} W'_\Delta &= -\operatorname{Re}\{2h_\Delta - h_F + \log c\} = -\operatorname{Re} \log(c^2 \theta_\Delta^2 \theta_F) \\ &= -\operatorname{Re} \log \frac{c^2 \theta_\Delta^2 \theta_F \theta_*}{\theta_*} = \log \left| \frac{\theta_*}{\theta_\Delta} \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая. Пусть $x \in (0, x_-)$. Тогда $|\theta_*/\theta_\Delta| > 1$ и $W'_\Delta > 0$. На этом интервале функция W_Δ возрастает. Пусть $x \in (x_-, x_+)$. Тогда числа

$\theta_*(x-i\cdot 0)$ и $\theta_\Delta(x-i\cdot 0)$ комплексно сопряженные, $|\theta_*/\theta_\Delta| = 1$ и $W'_\Delta = 0$. На этом интервале функция W_Δ постоянна. Пусть $x \in (x_+, +\infty)$. Тогда $|\theta_*/\theta_\Delta| > 1$ и $W'_\Delta > 0$. На этом промежутке функция W_Δ снова возрастает. Функция W_Δ непрерывна. Следовательно, неравенства (3.10) справедливы.

Проверим условия равновесия (3.11). Вычислим производную функции W_F вдоль вещественной оси. Имеем

$$W'_F = -\operatorname{Re}\{2h_F - h_\Delta\} = \operatorname{Re} \log(c^2 \theta_F^2 \theta_\Delta) = \operatorname{Re} \log \frac{c^2 \theta_F^2 \theta_\Delta \theta_*}{\theta_*} = \log \left| \frac{\theta_F}{\theta_*} \right|.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $x \in (-\infty, x_0)$. Тогда числа $\theta_F(x-i\cdot 0)$ и $\theta_*(x-i\cdot 0)$ комплексно-сопряженные, $|\theta_F/\theta_*| = 1$ и $W'_F = 0$. На этом промежутке функция W_F постоянна. Пусть $x \in (x_0, 0)$. Тогда $|\theta_F/\theta_*| < 1$ и $W'_F < 0$. На этом интервале функция W_F убывает. Функция W_F непрерывна. Следовательно, неравенства (3.11) справедливы.

Теорема 4 доказана.

В предельном случае, когда $c \rightarrow 1$, т.е. внешнее поле исчезает, имеем $x_+ \rightarrow \infty$, $x_- \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow 0$. В этом случае заряды λ_Δ уходят на бесконечность. Поэтому пропадают отрезки, на которых заряды λ_Δ и λ_F достигают ограничителей. В другом предельном случае, когда $c \rightarrow 0$, т.е. внешнее поле сильное, имеем $x_+ \rightarrow 2$, $x_- \rightarrow 2$, $x_0 \rightarrow -1/4$. В этом случае заряды λ_Δ равномерно распределены на отрезке $[0, 2]$, на котором они достигают ограничитель. Заряд λ_F достигает ограничитель на максимальном отрезке $[-1/4, 0]$.

§ 4. Обобщенные многочлены Мейкснера

Зафиксируем параметр c такой, что $0 < c < 1$, параметры $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$, а также параметры $0 \leq \gamma_1 < 1$ и $0 \leq \gamma_2 < 1$ такие, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Потребуем, чтобы

$$\beta_1 + \gamma_2 - \gamma_1 > 0, \quad \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_2 > 0. \quad (4.1)$$

Определим функцию

$$G(x) = G(c, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2; x) = c^x \frac{\Gamma(\beta_1 + x - \gamma_1)}{\Gamma(1 + x - \gamma_1)} \frac{\Gamma(\beta_2 + x - \gamma_2)}{\Gamma(1 + x - \gamma_2)}.$$

Построим две дискретные меры μ_j , где $j = 1, 2$, помещая в точку $x = \gamma_j + k$ массу величины $G(x)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Мы получили некоторое обобщение мер Мейкснера. Поставим задачу о многочленах, совместно ортогональных относительно этих мер, а именно, задачу 2.

Меры μ_1 и μ_2 не образуют систему Никишина, поскольку они взаимно сингулярны и их носители не пересекаются. Также они не образуют систему Анжелеско, так как выпуклые оболочки носителей пересекаются. В настоящее время нет никакой общей теории для многочленов, совместно ортогональных относительно таких систем.

Решение задачи 2 существует, поскольку она сводится к системе $2n$ линейных однородных уравнений относительно $2n + 1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q_n . В то же время у нас нет простого доказательства единственности

решения (с точностью до нормировки). Единственность может быть установлена методами линейной алгебры с применением теории специальных функций. В настоящей работе мы не будем останавливаться на этом доказательстве. Ниже мы предъявим некоторые, а фактически единственные, решения задачи 2 и именно их будем изучать. Назовем эти многочлены *обобщенными многочленами Мейкснера*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Решения задачи 2 могут быть определены следующим аналогом формулы Родрига:*

$$Q_n(x)G(c, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2; x) = \frac{1}{n!} \Delta^n G(c, \beta_1 + n, \beta_2 + n, \gamma_1, \gamma_2; x), \quad (4.2)$$

где Δ – оператор левой разности (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо установить два факта. Во-первых, что функция $Q_n(x)$, определенная формулой (4.2), является многочленом степени $2n$. Во-вторых, что этот многочлен удовлетворяет соотношениям ортогональности (3.4).

Докажем первое утверждение. Определим функции $Q_n^{(m)}(x)$ следующим образом:

$$Q_n^{(m)}(x)G(c, \beta_1 + n - m, \beta_2 + n - m, \gamma_1, \gamma_2; x) = \Delta^m G(c, \beta_1 + n, \beta_2 + n, \gamma_1, \gamma_2; x),$$

где $m = 0, \dots, n$. Докажем, что $Q_n^{(m)}$ – многочлен степени $2m$. Применим индукцию по m . При $m = 0$ имеем $Q_n^{(0)} = 1$. Проведем шаг индукции:

$$\begin{aligned} Q_n^{(m+1)}(x)G(c, \beta_1 + n - m - 1, \beta_2 + n - m - 1, \gamma_1, \gamma_2; x) \\ = \Delta \{ Q_n^{(m)}(x)G(c, \beta_1 + n - m, \beta_2 + n - m, \gamma_1, \gamma_2; x) \}. \end{aligned}$$

Вычисляя левую разность, получим рекуррентные соотношения вида

$$\begin{aligned} Q_n^{(m+1)}(x) &= (x + \beta_1 + n - m - 1 - \gamma_1)(x + \beta_2 + n - m - 1 - \gamma_2)Q_n^{(m)}(x) \\ &\quad - \frac{1}{c}(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)Q_n^{(m)}(x - 1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $m = 0, \dots, n - 1$. Из (4.3) следует, что если $Q_n^{(m)}$ – многочлен степени $2m$, то $Q_n^{(m+1)}$ – многочлен степени $2(m + 1)$. Обозначим через $q_n^{(m)}$ старшие коэффициенты этих многочленов,

$$Q_n^{(m)}(x) = q_n^{(m)}x^{2m} + \dots$$

Из (4.3) получим

$$q_n^{(m+1)} = \left(1 - \frac{1}{c}\right)q_n^{(m)}, \quad m = 0, \dots, n - 1.$$

В частности,

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!}Q_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^n x^{2n} + \dots$$

– многочлен степени $2n$.

Теперь проверим соотношения ортогональности (3.4). Так как параметры m входят в них симметричным образом, то достаточно проверить эти соотношения, например, для меры μ_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \int Q_n(x) x^m d\mu_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_n(x) x^m G(x) \Big|_{x=\gamma_1+k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^n G(c, \beta_1 + n, \beta_2 + n, \gamma_1, \gamma_2; x) \cdot x^m \Big|_{x=\gamma_1+k}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в целых точках $x = k \geq -n$. Воспользуемся преобразованием Абеля – формулой суммирования по частям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=k} = -g(0)f(-1) - \sum_{k=0}^{\infty} f(x) \cdot \Delta Tg(x) \Big|_{x=k},$$

где

$$Tg(x) = g(x+1)$$

– оператор правого сдвига. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=k} \\ = (g(1) - 2g(0))f(-1) + g(0)f(-2) + \sum_{k=0}^{\infty} f(x) \cdot \Delta^2 T^2 g(x) \Big|_{x=k} \end{aligned}$$

и т.д. по индукции. Применим эти формулы к функциям

$$f(x) = G(c, \beta_1 + n, \beta_2 + n, \gamma_1, \gamma_2; x + \gamma_1), \quad g(x) = (x + \gamma_1)^m.$$

Мы хотим доказать, что сумма (4.4) равна нулю. Если $m \leq n-1$, то $\Delta^n g \equiv 0$. Остается доказать, что “внеинтегральные члены” равны нулю, т.е.

$$f(-1) = f(-2) = \dots = f(-n) = 0.$$

Имеем

$$f(x) = c^{x+\gamma_1} \frac{\Gamma(\beta_1 + n + x)}{\Gamma(1 + x)} \frac{\Gamma(\beta_2 + n + \gamma_1 - \gamma_2 + x)}{\Gamma(1 + \gamma_1 - \gamma_2 + x)}.$$

В точках $x = -k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, функция $\Gamma(1 + x)$ имеет полюс первого порядка. Соответственно, функция $1/\Gamma(1 + x)$ имеет нуль первого порядка. Надо доказать, что эти нули не сокращаются, когда $k = 1, \dots, n$. Так как $\gamma_1 - \gamma_2$ не является целым числом, то функция $\Gamma(1 + \gamma_1 - \gamma_2 + x)$ голоморфна в этих точках. Так как $\beta_1 + n - k > 0$ при $k = 1, \dots, n$, то функция $\Gamma(\beta_1 + n + x)$ голоморфна в указанных точках. Далее, $\beta_2 + n - k + \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ при $k = 1, \dots, n$ в силу условий (4.1). Поэтому функция $\Gamma(\beta_2 + n + \gamma_1 - \gamma_2 + x)$ также голоморфна в соответствующих точках.

Предложение 3 доказано.

В этом параграфе нас снова интересует мера λ – предельное распределение нулей обобщенных многочленов Мейкснера Q_n^* , масштабированных формулой (1.6). Из соотношений ортогональности (3.4) следует, что по крайней мере n нулей многочлена Q_n лежат на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$ и разделены точками $\gamma_j + k$. Численные расчеты показывают, что на этом промежутке лежат ровно n нулей, а остальные n нулей лежат в комплексной плоскости. Мы не можем доказать это утверждение для каждого n , но докажем его в пределе при $n \rightarrow \infty$. В итоге будет предьявлена слабая асимптотика многочленов Q_n^* , из которой следует, что число таких нулей может быть оценено как $n(1 + o(1))$, хотя предложенный метод позволяет доказать, что их ровно n .

Рассуждая так же, как в § 2, приходим к интегралу (2.3), где

$$S(t, x) = t \log c + 2((1+t) \log(1+t) - t \log t) + ((t-x) \log(t-x) - (t-x+1) \log(t-x+1)) \quad (4.5)$$

и контур интегрирования такой же, как раньше. Потенциал меры λ определен формулой

$$V^\lambda + \varphi = \varkappa - \operatorname{Re} S_*, \quad (4.6)$$

где φ – внешнее поле (2.11),

$$\varkappa = 2 + \log \frac{1-c}{c}$$

– нормировочная постоянная, а S_* – некоторое критическое значение функции S . Остается выяснить, какую из ветвей многозначной функции S_* следует брать в формуле (4.6) и вне каких разрезов. Этот анализ делается методом перевала.

Найдем критические точки функции S . Вычислим производную:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \log \frac{c(1+t)^2(t-x)}{t^2(t-x+1)}.$$

Таким образом, уравнение для критических точек равносильно кубическому уравнению

$$(1-c)t^3 + ((1-2c) - (1-c)x)t^2 - c(1-2x)t + cx = 0. \quad (4.7)$$

Окончательный ответ на вопрос о распределении нулей мы дадим в терминах преобразования Коши $h = \hat{\lambda}$. Применяя к обеим частям равенства (4.6) оператор формальной комплексной производной ∂_x , получаем

$$h(x) = \log \theta(x),$$

где

$$\theta = \frac{t-x+1}{c(t-x)},$$

при этом t есть соответствующая ветвь алгебраической функции $t(x)$. Из уравнения (4.7) получим уравнение для алгебраической функции θ , а именно:

$$c^2 x^2 \theta^3 + (-c^2 + 2c(1-c)x - c(2+c)x^2) \theta^2 + (1 - 2(1-c)x + (1+2c)x^2) \theta - x^2 = 0. \quad (4.8)$$

Построим риманову поверхность алгебраической функции θ . Исследуем ее поведение на бесконечности. Один из корней (обозначим его через θ_*) ведет себя следующим образом:

$$\theta_*(x) = 1 + \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Для двух других корней имеем

$$\theta_{\pm}(x) = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{a_{\pm}}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$a_+ = \frac{\sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}, \quad a_- = -\frac{\sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}.$$

Таким образом, в окрестности бесконечности мы выделили три голоморфные ветви функции θ . Исследуем поведение этой функции в нуле. Три корня уравнения (4.8) при $x \rightarrow 0$ ведут себя следующим образом:

$$\theta_1 \rightarrow \frac{1}{c^2}, \quad \theta_2 \sim x^2, \quad \theta_3 \sim \frac{1}{x^2}.$$

Вычислим дискриминант уравнения (4.8). Он равен

$$4(1-c)^2x^4 - 12(1-c^2)x^3 + 4(3-5c+3c^2)x^2 - 4(1-c^2)x + c.$$

Из анализа поведения этого многочлена на вещественной оси следует, что при всех $c \in (0, 1)$ дискриминант имеет два положительных корня a и b ,

$$0 < a < b < +\infty,$$

и два комплексно-сопряженных корня $\zeta_{\pm}$. Пусть ζ_+ лежит в верхней полуплоскости, а ζ_- – в нижней. Эти четыре точки являются ветвлениями второго порядка. Соединим точки a и b прямолинейным разрезом $E = [a, b]$, а точки ζ_+ и ζ_- соединим с нулем аналитическими жордановыми дугами Γ_+ и Γ_- (пока произвольными), лежащими в соответствующих полуплоскостях и симметричными относительно вещественной оси. Обозначим $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (см. рис. 3).

Риманова поверхность $\mathfrak{R}$ алгебраической функции θ представляет собой трехлистное накрытие сферы Римана, которое может быть получено склейкой следующих листов:

$$\mathfrak{R}_+ = \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad \mathfrak{R}_* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup \Gamma), \quad \mathfrak{R}_- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma.$$

На рис. 4 изображен график функции θ на вещественной оси.

Укажем дивизор функции θ . Она имеет нуль второго порядка в точке $x = 0$ на одном из листов и полюс второго порядка в той же точке на другом листе. Оба эти листа отличны от $\mathfrak{R}_+$. Функция нормирована условием $\theta = 1$ в точке $x = \infty$ на листе $\mathfrak{R}_*$.

Функция θ_+ голоморфна вне отрезка E . Определим функцию

$$h_E(x) = -\log(c\theta_+(x)).$$

Рис. 3. Точки a, b, ζ_-, ζ_+ и дуги Γ_-, Γ_+

Рис. 4. График функции θ на вещественной оси

Она также голоморфна вне E , поскольку θ_+ не имеет в этой области ни нулей, ни полюсов. Берем главную ветвь логарифма такую, что

$$h_E(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty. \tag{4.9}$$

По формуле Коши

$$h_E(x) = \int_a^b \frac{\omega_E(s)}{x-s} ds, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E,$$

где

$$\omega_E(s) = -\frac{1}{2\pi i} \{h_E(s+i \cdot 0) - h_E(s-i \cdot 0)\}, \quad a < s < b.$$

На вещественной оси (вне E) функция h_E принимает вещественные значения. Следовательно, числа $h_E(s \pm i \cdot 0)$ комплексно-сопряженные. Поэтому

$$\omega_E(s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_E(s - i \cdot 0)$$

– вещественнозначная функция. На отрезке E определим меру λ_E , абсолютно непрерывную относительно классической меры Лебега с плотностью ω_E . Полная величина этой меры в силу (4.9) равна единице. Покажем, что эта мера знакопостоянная и, следовательно, положительная. Действительно, функция

$$\operatorname{Im} \log \theta_+ = \arg \theta_+$$

не меняет знак на отрезке E . Если она обращается в нуль в некоторой точке $s_0 \in (a, b)$, то $\theta_+(s_0)$ – вещественное число. Следовательно, $\theta_+(s_0) = \theta_*(s_0)$ и поэтому дискриминант уравнения (4.8) должен обращаться в нуль в точке s_0 . Но это не так.

Функция θ_- голоморфна вне кривой Γ . Определим функцию

$$h_\Gamma(x) = -\log(c\theta_-(x)).$$

Она также голоморфна вне Γ , поскольку θ_- не имеет ни нулей, ни полюсов в этой области. Полагаем

$$h_\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

По формуле Коши

$$h_\Gamma(x) = \int_\Gamma \frac{\omega_\Gamma(\zeta)\tau(\zeta)}{x - \zeta} ds.$$

Здесь s – натуральный параметр кривой, $\tau(\zeta)$ – комплексное число, по модулю равное единице, соответствующее единичному касательному вектору к кривой Γ . Далее,

$$\omega_\Gamma(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \{h_\Gamma(\zeta+) - h_\Gamma(\zeta-)\}.$$

На рис. 3 показано направление обхода кривой Γ и обозначены ее берега. Определим на Γ меру λ_Γ , абсолютно непрерывную относительно классической меры Лебега, соответствующей натуральному параметру s , имеющую плотность $\omega_\Gamma(\zeta(s))\tau(\zeta(s))$. Полная величина этой меры равна единице. Мера λ_Γ , вообще говоря, комплексная. Выясним, когда она будет положительной. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\operatorname{Re} \left\{ \tau(\zeta) \log \frac{\theta_-(\zeta)}{\theta_*(\zeta)} \right\} = 0, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (4.10)$$

Значения функций берутся на одном из двух берегов. Условие (4.10) служит определением кривой Γ . Простой анализ уравнения (4.10) показывает, что такая кривая (соединяющая точки ζ_+ и ζ_-) существует и единственна. Методом перевала доказывается

ТЕОРЕМА 5. Мера $\lambda = \lambda_E + \lambda_\Gamma$ является предельным распределением нулей масштабированных обобщенных многочленов Мейкснера.

Далее, справедлива

ТЕОРЕМА 6. Меры λ_E и λ_Γ являются решением следующей задачи равновесия Рахманова–Анжеселеско:

$$W_E = 2V^{\lambda_E} + V^{\lambda_\Gamma} + \varphi \begin{cases} \leq w_E & \text{на } E, \\ \geq w_E & \text{на } \Delta, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$W_\Gamma = 2V^{\lambda_\Gamma} + V^{\lambda_E} + \varphi = w_\Gamma \quad \text{на } \Gamma, \quad (4.12)$$

где w_E и w_Γ – некоторые постоянные равновесия, а внешнее поле φ определено формулой (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественнозначная функция W_E непрерывна на промежутке Δ (и даже во всей комплексной плоскости). На Δ она имеет вещественную производную (кроме точек a , b). Эта функция гармоническая в $\mathbb{C} \setminus (E \cup \Gamma)$ и супергармоническая в $\mathbb{C}$. Найдем интервалы монотонности функции W_E на Δ . Рассмотрим комплексификацию этой функции, а производную вдоль вещественной оси запишем как вещественную часть граничных значений комплексной производной. Получим

$$\begin{aligned} W'_E &= \operatorname{Re} \left\{ -2h_E - h_\Gamma + \log \frac{1}{c} \right\} = \operatorname{Re} \{ 2 \log(c\theta_+) + \log(c\theta_-) - \log c \} \\ &= \operatorname{Re} \log(c^2 \theta_+^2 \theta_-) = \operatorname{Re} \log \frac{c^2 \theta_+^2 \theta_- \theta_*}{\theta_*} = \log \left| \frac{\theta_+}{\theta_*} \right|. \end{aligned}$$

Если $0 < x < a$, то $0 < \theta_+ < \theta_*$ (см. рис. 4) и, следовательно, $W'_E < 0$. На этом интервале функция W_E убывает. Если $a < x < b$, то числа θ_+ и θ_* комплексно-сопряженные. Таким образом, $|\theta_+/\theta_*| = 1$ и, следовательно, $W'_E = 0$. На этом интервале функция W_E постоянна. Если $b < x < +\infty$, то $0 < \theta_* < \theta_+$ и, следовательно, $W'_E > 0$. На этом интервале функция W_E возрастает. Таким образом, условия равновесия (4.11) доказаны.

Свойства функции W_Γ аналогичны свойствам функции W_E . Рассмотрим эту функцию на кривой Γ как функцию натурального параметра на отрезке $[0, |\Gamma|]$, где $|\Gamma|$ – длина кривой. Докажем, что эта функция постоянна. Проверим, что ее производная, которая априори может не существовать в точках 0 , $|\Gamma|/2$, $|\Gamma|$, тождественно равна нулю. Как и выше, переходя к комплексификации $\mathscr{W}_\Gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} W_\Gamma &= \operatorname{Re} \frac{d}{ds} \mathscr{W}_\Gamma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \mathscr{W}_\Gamma \cdot \tau \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left(-2h_\Gamma - h_E + \log \frac{1}{c} \right) \tau \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ (2 \log(c\theta_-) + \log(c\theta_+) - \log c) \tau \} = \operatorname{Re} \{ \log(c^2 \theta_-^2 \theta_+) \tau \} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \log \frac{\theta_-}{\theta_*} \cdot \tau \right\} = 0 \end{aligned}$$

в силу условия (4.10). Таким образом, условия равновесия (4.12) доказаны.

Теорема 6 доказана.

Итак, в рассмотренной задаче закон векторного взаимодействия зарядов задается матрицей Анжелеско. При этом половина всех зарядов остается на промежутке Δ , а другая половина сталкивается в комплексную плоскость на некоторую кривую Γ . В этой ситуации ограничители зарядами λ_E и λ_Γ не достигаются, что объясняется эффектом сталкивания зарядов.

В предельном случае, когда $c \rightarrow 1$, т.е. внешнее поле исчезает, имеем

$$a \rightarrow \infty, \quad b \rightarrow \infty, \quad \zeta_{\pm} \rightarrow \pm \frac{i}{2}.$$

В этом случае носитель E зарядов λ_E уходит на бесконечность, а кривая Γ приближается к отрезку, соединяющему точки $\pm i/2$. В другом предельном случае, когда $c \rightarrow 0$, т.е. внешнее поле сильное, имеем

$$a \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 1, \quad \zeta_{\pm} \rightarrow 1.$$

В этом случае носитель зарядов λ_E совпадает с отрезком $[0, 1]$ (и тем самым в пределе достигается констрейн), а кривые $\Gamma_{\pm}$ также в пределе ложатся на этот отрезок.

Список литературы

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. т.2, Наука, М., 1966; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*. v. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [2] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [3] Е. А. Рахманов, “Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **119(161)**:2(10) (1982), 163–203; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 155–193.
- [4] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [6] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [7] А. А. Кандаян, В. Н. Сорокин, “Многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде бета-функций”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 217–232; англ. пер.: A. A. Kandayan, V. N. Sorokin, “Multipoint Hermite–Padé approximations for beta functions”, *Math. Notes*, **87**:1–2 (2010), 204–217.

- [8] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1213–1228.
- [9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.

В. Н. Сорокин (V. N. Sorokin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vnsormm@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

21.12.2009 и 12.04.2010