Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Ханмамедов, Обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма–Лиувилля на оси, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:11:48

УДК 517.984.64

А. Х. Ханмамедов

Обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма–Лиувилля на оси

Изучена обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма–Лиувилля на всей оси со стабилизирующимися в одну сторону к нулю коэффициентами. Получены необходимое и достаточное условия на данные рассеяния для однозначной разрешимости обратной задачи.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, операторы Якоби, задача рассеяния, функция Вейля.

§ 1. Введение и основные результаты

Рассмотрим дискретное уравнение Штурма–Лиувилля на оси

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

с вещественными коэффициентами $a_n > 0$, b_n . В случае коэффициентов a_n , b_n , обеспечивающих существование рассеяния в обе стороны, обратная задача рассеяния для уравнения (1.1) в различных контекстах изучалась многими авторами (см. [1]–[8] и библиографию в них). Отметим, что в последнее время изучению прямой и обратной спектральных задач для операторов Якоби уделяется большое внимание (см. [9]–[14]). Вместе с тем в случае, когда рассеяние существует лишь в одну сторону, обратная задача рассеяния для (1.1) почти не изучалась.

В настоящей работе исследуется обратная задача рассеяния для уравнения (1.1), коэффициенты которого удовлетворяют требованиям

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1.2)$$

$$\sum_{n < 0} |n| \{|a_n - 1| + |b_n|\} < \infty. \quad (1.3)$$

Заметим, что в случае неограниченных коэффициентов обратная задача по спектральной матрице уравнения (1.1) изучалась в монографии [15]. Однако развитая в [15] методика, вообще говоря, не позволяет решить обратную задачу в классе (1.2), (1.3). Отметим также работу [16], в которой для уравнения (1.1)

Работа выполнена при поддержке Бакинского государственного университета (грант 50+50).

с ограниченными коэффициентами и двукратным непрерывным спектром исследуется обратная задача по правой и левой функциям Вейля и по известному коэффициенту a_{-1} .

В настоящей работе получены условия на данные рассеяния, которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовали единственные коэффициенты $a_n > 0$, b_n из класса (1.2), (1.3). Для решения задачи рассеяния вместо привязанного к $+\infty$ решения Йоста используется решение Вейля. Это обстоятельство и отсутствие основного уравнения типа Марченко на правом конце потребовали значительной модификации некоторых классических рассуждений.

Отметим, что для уравнения Штурма–Лиувилля в случае, когда рассеяние существует лишь на правом конце, обратная задача рассматривалась в работе [17]. Как следует из [17], в этом случае налагаемые на данные рассеяния условия не позволяют сделать вывод о росте построенного потенциала на $-\infty$. Отличительной чертой нашего случая является отсутствие такого недостатка.

Результаты настоящей работы были анонсированы в [18].

Сформулируем основные результаты работы.

Пространства $\ell_2[N, \infty)$, $\ell_2(-\infty, N)$, $\ell_2(-\infty, \infty)$ с соответствующими скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [15]). Через L_0 обозначим оператор, порожденный в $\ell_2[0, \infty)$ уравнением (1.1) при $n \geq 0$ и граничным условием $y_1 = 0$. Из условия (1.2) следует, что L_0 является вполне непрерывным самосопряженным оператором. Так как собственные значения оператора L_0 простые (см. [2], [15]), то его спектр в силу вполне непрерывности состоит из простых собственных значений λ_n , $n = 1, 2, \dots$, где $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и из точки $\lambda = 0$. Последнее является либо простым собственным значением оператора L_0 , либо единственной точкой его непрерывного спектра. Известно, что (см., например, [19; гл. 7, § 4]) собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора образуют ортогональный базис в соответствующем пространстве. Следовательно, спектральная функция оператора L_0 , которую будем обозначать через $\rho(\lambda)$, является функцией скачков, сосредоточенной в точках λ_n , $n = 1, 2, \dots$.

Ради простоты всюду в дальнейшем будем считать, что спектр оператора L_0 лежит в интервале $(-2, 2)$. Обозначим через $P_n(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$ решения уравнения (1.1) с условиями $P_{-1}(\lambda) = Q_0(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $Q_1(\lambda) = a_0^{-1}$.

Рассмотрим спектральную функцию

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n},$$

где

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(\lambda_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 1.$$

Следуя [13], [15], вводим функцию Вейля $m(\lambda) = \langle R_\lambda \delta, \delta \rangle$ оператора L_0 , где R_λ – резольвента оператора L_0 и $\delta = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2[0, \infty)$. Функция Вейля и

спектральная функция связаны (см. [8], [14]) равенством

$$m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\tau)}{\tau - \lambda}, \quad (1.4)$$

из которого следует, что

$$m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(\lambda_n - \lambda)}. \quad (1.5)$$

Заметим, что по функции Вейля $m(\lambda)$ можно восстановить спектральную функцию $\rho(\lambda)$. В самом деле, в силу формулы Стильтьеса–Перрона (см. [20; гл. 3, § 4]) при $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-2}^{\lambda} \operatorname{Im} m(\tau + i\varepsilon) d\tau. \quad (1.6)$$

В точках λ_n , $n = 1, 2, \dots$, функцию определим по непрерывности слева, т.е. по формуле

$$\rho(\lambda_n) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n - 0} \rho(\lambda). \quad (1.7)$$

Вводим также решение Вейля

$$\psi_n(\lambda) = Q_n(\lambda) + m(\lambda)P_n(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

уравнения (1.1). Согласно (1.5), (1.8) решение Вейля является аналитической функцией во всей комплексной λ -плоскости, за исключением простых полюсов λ_k , $k = 1, 2, \dots$ (точка $\lambda = 0$ служит неизолированной особой точкой решения Вейля). Кроме того, известно, что (см., например, [13], [15]) для $n \geq 0$ верно равенство $\psi_n(\lambda) = (R_\lambda \delta)_n$. Откуда следует, что решение Вейля при каждом $N > -\infty$ принадлежит $\ell_2[N, \infty)$ по переменной n . В силу хорошо известного равенства $\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2$ последним свойством обладает также $\frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda)$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) с параметром $\lambda = z + z^{-1}$, где $|z| \leq 1$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\lambda_n = z_n + z_n^{-1}$, где $|z_n| = 1$, $\operatorname{Im} z_n > 0$, $z_n \rightarrow i$ при $n \rightarrow \infty$. Введем обозначения

$$M(z) = m(z + z^{-1}), \quad (1.9)$$

$$\Psi_n(z) = \psi_n(z + z^{-1}). \quad (1.10)$$

Пусть теперь выполняется условие (1.3). Тогда уравнение (1.1) с параметром $\lambda = z + \frac{1}{z}$ имеет решение Йоста $f_n(z)$ (см., например, [2], [6]), представимое в виде

$$f_n(z) = \sum_{m \leq n} K(n, m) z^{-m}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

где ядро $K(n, m)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} K(n, n) > 0, \quad K(n, n) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow -\infty, \\ K(n, m) = O\left(\sum_{r < [(n+m)/2]} \{|a_r - 1| + |b_r|\}\right) \quad \text{при} \quad n + m \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (1.12)$$

здесь $[\cdot]$ означает целую часть. Рассмотрим решение задачи рассеяния

$$\Psi_n(z) = a(z)\overline{f_n(z)} + \overline{a(z)}f_n(z), \quad |z| = 1, \quad z^2 \neq \pm 1, \quad z \neq z_n^{\pm 1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

где

$$a(z) = \frac{f_0(z) + a_{-1}M(z)f_{-1}(z)}{z - z^{-1}}. \quad (1.14)$$

Функцию $t(z) = a^{-1}(z)$ назовем *коэффициентом прохождения*. Нам понадобятся некоторые свойства коэффициента прохождения. Перепишем их в виде условия.

УСЛОВИЕ I. Функция $t(z) = a^{-1}(z)$ непрерывна при $|z| = 1$, $z^2 \neq -1$, за исключением, быть может, точек $z = \pm 1$. В точках $z = \pm i$ она не имеет предела. Справедливы соотношения

$$\overline{t(z)} = t\left(\frac{1}{z}\right), \quad t(z_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{где } z_n \rightarrow i, \quad n \rightarrow \infty.$$

Функция $t(z)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|z| < 1$, за исключением простого полюса $z = 0$ и, быть может, конечного числа простых вещественных полюсов $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p$, причем $zt(z) \rightarrow d > 0$ при $z \rightarrow 0$ и функция $zt(z) \prod_{n=1}^p \frac{z - \chi_n}{1 - \overline{\chi_n}z}$ ограничена в круге $|z| < 1$.

Введем обозначения

$$m_k^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^2(\chi_k), \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.15)$$

Набор величин

$$\{t(z) = a^{-1}(z), |z| = 1; \chi_k, 0 < \chi_k^2 < 1; m_k > 0, k = 1, \dots, p\}$$

назовем *данными рассеяния уравнения (1.1)*. Обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма–Лиувилля (1.1) состоит в восстановлении коэффициентов a_n, b_n по данным рассеяния.

При решении обратной задачи особую роль играет так называемое основное уравнение типа Марченко.

Пусть

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{a(z)}}{a(z)} z^{-n-1} dz + \sum_{k=1}^p m_k^2 \chi_k^{-n}. \quad (1.16)$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место соотношения*

$$F(n+m) + \frac{K(n,m)}{K(n,n)} + \sum_{r < n} \frac{K(n,r)}{K(n,n)} F(r+m) = 0, \quad m < n \leq 0, \quad (1.17)$$

$$K^{-2}(n,n) = 1 + F(2n) + \sum_{r < n} \frac{K(n,r)}{K(n,n)} F(r+n), \quad n \leq 0. \quad (1.18)$$

Известные методы исследования уравнения (1.17) типа Марченко позволяют (см. [2], [6]) получить следующее необходимое условие на данные рассеяния.

УСЛОВИЕ II. Имеет место оценка

$$\sum_{n \leq -1} |n| |F(n+2) - F(n)| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия I, II. Тогда при каждом n , $n \leq 0$, уравнение (1.17) имеет единственное решение в $\ell_p(-\infty, n-1]$, $p = 1, 2$.

Теоремы 1, 2 позволяют выделить еще одно свойство данных рассеяния.

УСЛОВИЕ III. Определяемая по формулам (1.9), (1.14) функция $m(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов $\lambda_n = z_n + z_n^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, и вещественна на вещественной оси. При этом функция $\rho(\lambda)$, определенная формулами (1.6), (1.7), является спектральной функцией некоторого самосопряженного дискретного оператора Штурма–Лиувилля L_0 на положительной полуоси с граничным условием $y_{-1} = 0$.

Оказывается, что после некоторой переформулировки перечисленные необходимые условия становятся и достаточными для того, чтобы обладающий ими набор величин $\{t(z) = a^{-1}(z), |z| = 1; \chi_k, 0 < \chi_k^2 < 1; m_k > 0, k = 1, \dots, p\}$ являлся данными рассеяния для некоторого дискретного уравнения Штурма–Лиувилля (1.1) с коэффициентами, удовлетворяющими требованиям (1.2), (1.3).

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы набор величин

$$\{t(z) = a^{-1}(z), |z| = 1; \chi_k, 0 < \chi_k^2 < 1; m_k > 0, k = 1, \dots, p\}$$

был данными рассеяния некоторого уравнения вида (1.1) с коэффициентами, удовлетворяющими требованиям (1.2), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия I–III.

§ 2. Прямая задача рассеяния

Рассмотрим решение Йоста $f_n(z)$. Согласно (1.11), (1.12) решение $f_n(z)$ при всех n – аналитическая функция от z в круге $|z| < 1$, непрерывная вплоть до его границы. Для всех z , где $|z| = 1$, $z^2 \neq 1$, решения $f_n(z)$ и $\overline{f_n(z)} = f_n(\frac{1}{z})$ линейно независимы, поскольку их вронскиан $W[f_n, \overline{f_n}] = a_n(f_n \overline{f_{n+1}} - f_{n+1} \overline{f_n})$ равен $z - z^{-1}$ (см. [2], [6]). Следовательно, решение $\Psi_n(z)$ может быть представлено в виде их линейной комбинации. С другой стороны, в силу (1.5), (1.8)–(1.10) решение $\Psi_n(z)$ принимает действительные значения при $|z| = 1$, $z^2 \neq -1$, $z \neq z_n^{\pm 1}$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому верно тождество (1.13). Полагая в (1.13) $n = -1$ и $n = 0$, получаем (1.14).

Изучим свойства коэффициента удаления $t(z) = a^{-1}(z)$. Сначала рассмотрим функцию $M(z)$. В силу (1.5), (1.9) имеем

$$M(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{\alpha_n(z - z_n)(1 - zz_n)}, \quad (2.1)$$

откуда вытекает, что функция $M(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$. Принимая во внимание, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 1$, из (2.1) найдем, что

$$M(z)z^{-1} \rightarrow -1 \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Используя теперь (1.14), (2.1), найдем, что функция $a(z)$ непрерывна при $|z| = 1$, $z^2 \neq -1$. Далее, полагая в тождестве (1.13) $n = -1$, получим уравнение

$$-\frac{1}{a_{-1}} = a(z)\overline{f_{-1}(z)} + \overline{a(z)}f_{-1}(z),$$

согласно которому $a(z) \neq 0$ при $|z| = 1$, $z^2 \neq -1$, $z \neq z_n^{\pm 1}$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда и из (1.14) следует, что коэффициент прохождения $t(z)$ – непрерывная функция при $|z| = 1$, $z^2 \neq -1$, за исключением, быть может, точек $z = \pm 1$.

Докажем, что в точках $z = \pm i$ функция $t(z)$ не имеет предела. Известно (см. [20]), что между двумя полюсами функции Вейля $m(\lambda)$ лежит ровно один нуль этой же функции. Следовательно, существует последовательность $\tilde{z}_n$ такая, что $|\tilde{z}_n| = 1$, $\tilde{z}_n \rightarrow i$ при $n \rightarrow \infty$ и $t(\tilde{z}_n) \rightarrow \frac{2i}{f_0(i)}$ при $n \rightarrow \infty$. При этом $f_0(i) \neq 0$. В самом деле, так как $f_n(i)$ и $\overline{f_n(i)}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.1) при $\lambda = i$, то $p_n(i)$ представляется в виде их нетривиальной линейной комбинации. Откуда в силу условия $p_0(i) = 1$ получаем $f_0(i) \neq 0$.

С другой стороны, $t(z_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{z \rightarrow i} t(z)$ и, тем самым, $\lim_{z \rightarrow -i} t(z)$ существует.

Рассмотрим формулу (1.14). В силу установленных выше свойств функций $f_n(z)$ и $M(z)$ функция $a(z)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|z| < 1$. Следовательно, функция $t(z)$ аналитична в тех точках круга $|z| < 1$, где $a(z)$ отлична от нуля.

Кроме того, в силу (1.11), (1.12), (1.14) имеет место асимптотическая формула

$$zt(z) \rightarrow K^{-1}(0, 0) \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Далее, в круге $|z| < 1$ функция $t(z)$, согласно (1.11), вообще говоря, может обладать и другими полюсами. Исследуем характер этих полюсов.

ЛЕММА. *Функция $a(z)$ может иметь в круге $|z| < 1$ только конечное число нулей. Все эти нули действительные и простые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что нули функции $a(z)$ служат собственными значениями оператора, порожденного в $\ell_2(-\infty, \infty)$ уравнением (1.1). В силу (1.2), (1.3) последний оператор самосопряжен. Следовательно, нули функции $a(z)$ действительны.

Обозначим через r точную нижнюю границу расстояний между соседними нулями функции $a(z)$ и покажем, что $r > 0$. Допуская противное, можно было бы выделить такие последовательности нулей $\hat{\chi}_k, \chi_k$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\chi}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = \chi_0,$$

где $-1 \leq \chi_0 \leq 1$. Согласно (1.14) функция $a(z)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|z| < 1$. Поэтому если $-1 < \chi_0 < 1$, то по теореме единственности аналитических функций получим $a(z) \equiv 0$, что невозможно. Пусть теперь, например, $\chi_0 = 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $\hat{\chi}_k > \chi_k > \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \dots$. На основании соотношений (1.3), (1.11), (1.12) выберем число $N > 0$ так, чтобы при всех $n \leq -N$ выполнялось неравенство $f_n(z) > \frac{1}{2}z^{-n}$. Тогда будем иметь

$$\sum_{n \leq -N} f_n(\chi_k) f_n(\hat{\chi}_k) > \frac{1}{4} \sum_{n \leq -N} \chi_k^{-2n} = \frac{1}{4} \frac{\chi_k^{2N}}{1 - \chi_k^2} > \frac{1}{4^{N+1}}.$$

Из ортогональности собственных функций дискретного спектра и очевидных равенств

$$f_n(\chi_k) = c(\chi_k) \Psi_n(\chi_k), \quad f_n(\hat{\chi}_k) = c(\hat{\chi}_k) \Psi_n(\hat{\chi}_k)$$

следует

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\chi_k) f_n(\hat{\chi}_k) &= \sum_{n \leq -N} f_n(\chi_k) f_n(\hat{\chi}_k) + \sum_{n=1-N}^{-1} f_n(\chi_k) f_n(\hat{\chi}_k) \\ &\quad + c(\chi_k) c(\hat{\chi}_k) \sum_{n \geq 0} \Psi_n(\chi_k) \Psi_n(\hat{\chi}_k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(\hat{\chi}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(\chi_k) = f_n(1),$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c(\chi_k) c(\hat{\chi}_k) &= f_{-1}^2(1) \Psi_{-1}^2(1) \geq 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1-N}^{-1} f_n(\chi_k) f_n(\hat{\chi}_k) &= \sum_{n=1-N}^{-1} f_n^2(1) > 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} \Psi_n(\chi_k) \Psi_n(\hat{\chi}_k) &= \|R_\lambda \delta\|^2|_{\lambda=1} > 0. \end{aligned}$$

Поэтому, перейдя в обеих частях равенств (2.4) к пределу при $k \rightarrow 0$, получим абсурдное неравенство $0 > 4^{-N-1}$, показывающее, что сделанное предположение ($r = 0$) неверно и функция $a(z)$ может иметь лишь конечное число нулей $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p$.

Докажем, что эти нули простые. Пусть

$$f_n(\chi_k) = c_k \Psi_n(\chi_k), \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.5)$$

Рассмотрим соотношения

$$(1 - z^{-2})u_n \vartheta_n = W[\dot{u}_{n-1}, \vartheta_{n-1}] - W[\dot{u}_n, \vartheta_n] = W[\dot{\vartheta}_{n-1}, u_{n-1}] - W[\dot{\vartheta}_n, u_n],$$

где

$$W[u_n, \vartheta_n] = a_n[u_n \vartheta_{n+1} - u_{n+1} \vartheta_n],$$

а точкой сверху обозначается производная по z . Суммируя эти равенства при $u_n = \Psi_n(z)$, $\vartheta_n = f_n(z)$, $z = \chi_k$ и используя (2.5), получаем

$$W[\dot{\Psi}_n(\chi_k), f_n(\chi_k)] = (1 - \chi_k^{-2})c_k^{-1} \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m(\chi_k)|^2,$$

$$W[\Psi_n(\chi_k), \dot{f}_n(\chi_k)] = (1 - \chi_k^{-2})c_k^{-1} \sum_{m=-\infty}^n |f_m(\chi_k)|^2.$$

Следовательно,

$$\left. \frac{dW[\Psi_n(z), f_n(z)]}{dz} \right|_{z=\chi_k} = (1 - \chi_k^{-2})c_k^{-1}m_k^{-2}.$$

С другой стороны, из (1.1) вытекает, что

$$a(z) = \frac{W[\psi_n(z), f_n(z)]}{z^{-1} - z}.$$

Так как $a(\chi_k) = 0$, то из последних двух равенств имеем

$$\chi_k \frac{da(\chi_k)}{dz} = -c_k^{-1}m_k^{-2}, \quad (2.6)$$

откуда следует простота нулей функции $a(z)$.

Из леммы следует, что функция $t(z) = a^{-1}(z)$ может иметь в круге $|z| < 1$ лишь конечное число простых вещественных полюсов χ_k , $k = 1, \dots, p$.

С другой стороны, если мы рассмотрим граничную задачу

$$a_{n-1}^{(N)}y_{n-1} + b_n^{(N)}y_n + a_n^{(N)}y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \leq N, \quad y_{N+1} = 0,$$

где

$$a_n^{(N)} = \begin{cases} a_n & \text{при } |n| \leq N, \\ 1 & \text{при } n < -N, \end{cases} \quad b_n^{(N)} = \begin{cases} b_n & \text{при } |n| \leq N, \\ 1 & \text{при } n < -N, \end{cases}$$

и, следуя принятым выше обозначениям, положим

$$m^{(N)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(\lambda_k^{(N)} - \lambda) \sum_{j=1}^N p_j^2(\lambda_k^{(N)})},$$

где $p_{N+1}(\lambda_k^{(N)}) = 0$, $k = 1, \dots, N+1$, и

$$M^{(N)}(z) = m^{(N)}(z + z^{-1}), \quad a^{(N)}(z) = \frac{f_0^{(N)}(z) + a_{-1}M^{(N)}(z)f_{-1}^{(N)}(z)}{z - z^{-1}},$$

то получим $M^{(N)}(z) \rightarrow M(z)$ (см. [15]) и $f_n^{(N)}(z) \rightarrow f_n(z)$ (см. [2]) при $N \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $a^{(N)}(z) \rightarrow a(z)$ при $N \rightarrow \infty$. Легко убедиться, что функция $\frac{1}{a^{(N)}(z)}$ ограничена вблизи точек $z = \pm 1$. Тогда с помощью предельного перехода устанавливаем, что функция $t(z) = a^{-1}(z)$ тоже ограничена вблизи точек $z = \pm 1$. Следовательно, функция $za^{-1}(z) \prod_{k=1}^p \frac{z - \chi_k}{1 - \chi_k z}$ ограничена в круге $|z| < 1$.

Тем самым, условие I установлено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим тождество (1.13) при $n \leq 0$. Подставим в него представление (1.11), умножим на $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a(z)} z^{-(m+1)}$, $m \leq n$, и проинтегрируем по окружности $|z| = 1$. Используя формулы (1.14)–(1.16), (2.5), (2.6) а также учитывая вытекающую из (1.5), (1.8)–(1.10), (2.1), (2.2) формулу

$$\Psi_n(z) z^{-(n+1)} \rightarrow h_n \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

где

$$h_n = \begin{cases} -1 & \text{при } n = 0, \\ -\frac{1}{a_n \cdots a_{-1}} & \text{при } n \leq -1, \end{cases}$$

по теореме о вычетах получаем соотношения (1.17), (1.18). Теорема 1 доказана.

Используя основное уравнение (1.17), как и в [2], [6], выводим условие II.

§ 3. Обратная задача рассеяния

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим прежде всего, что в силу условия II уравнение (1.17) порождается вполне непрерывным оператором в $\ell_p(-\infty, n-1]$, $p = 1, 2$. Поэтому согласно альтернативе Фредгольма уравнение (1.17) имеет единственное решение из $\ell_p(-\infty, n-1]$, если у однородного уравнения отсутствуют нетривиальные решения из $\ell_p(-\infty, n-1]$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$h_m + \sum_{r < n} F(m+r) h_r = 0, \quad m < n \leq 0. \quad (3.1)$$

В силу вещественности $F(n)$ можно считать, что все h_m вещественны. Кроме того, поскольку каждое решение уравнения (3.1) из $\ell_1(-\infty, n-1]$ принадлежит и $\ell_2(-\infty, n-1]$, достаточно доказать, что (3.1) имеет в $\ell_2(-\infty, n-1]$ только нулевое решение.

Пусть h_m есть решение (3.1) из $\ell_2(-\infty, n-1]$. Вводим функцию

$$g(z) = \sum_{r < n} h_r z^{-r}, \quad |z| < 1. \quad (3.2)$$

Функция $g(z)$, очевидно, принадлежит классу H_2 (см. [21; гл. 2, §§ 4, 5]).

Умножая теперь обе части уравнения (3.1) на h_m и суммируя по m в пределах от $-\infty$ до $n-1$, как и в [2], [6], устанавливаем, что функция

$$g_0(z) = ig(z) \quad (3.3)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\overline{g_0(z)}}{a(z)} = \frac{g_0(z)}{a(z)} \quad \text{при почти всех } z, \quad |z| = 1, \quad (3.4)$$

$$g_0(\chi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Отсюда в силу обобщенного принципа симметрии (см., например, [22; гл. 3, § 2]) функция

$$g_1(z) = \frac{g_0(z)}{a(z)} \quad (3.5)$$

аналитична во всей комплексной плоскости, причем

$$g_1(z) = \overline{g_1\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \text{при } |z| > 1. \quad (3.6)$$

Тогда из (3.2)–(3.6) с учетом условия I следует, что

$$g_1(z) \rightarrow -idh_{n-1}\delta_{0n} \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $d > 0$, δ_{0n} – символ Кронекера. По теореме Лиувилля имеем тождество

$$g_1(z) \equiv -idh_{n-1}\delta_{0n},$$

согласно которому $g_1(z) \equiv 0$ при $n < 0$. Более того, если $n = 0$ и $h_{-1} \neq 0$, то получим $g_1(z) \equiv -idh_{n-1}$. Последнее тождество противоречит (3.4). Следовательно, $h_{-1} = 0$.

Таким образом, $g_1(z) \equiv 0$ и, следовательно $h_m \equiv 0$ при $m < n$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что из вещественности $F(m)$ и однозначной разрешимости уравнения (1.17) следует, что $K(n, m)$ вещественны. Кроме того, как и в [2], [5], [6], доказывается, что построенная по формуле (1.11) функция $f_n(z)$ удовлетворяет при $n < 0$ уравнению вида (1.1) с параметром $\lambda = z + \frac{1}{z}$ и коэффициентами

$$a_n = \frac{K(n, n)}{K(n+1, n+1)}, \quad b_n = \frac{K(n, n-1)}{K(n, n)} - \frac{K(n+1, n)}{K(n+1, n+1)}, \quad (3.7)$$

причем в силу условия II выполняется (см., например, [2], [6]) оценка (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Необходимость условий I–III была доказана в § 2. Пусть теперь условия I–III выполняются. Тогда уравнение (1.17) при каждом $n \leq 0$ имеет единственное решение $K(n, m)$. По решению $K(n, m)$ находим a_n, b_n при $n \leq -1$ по формулам (3.7). Согласно (1.11), (1.17), (1.18) строим $f_0(z)$, $f_{-1}(z)$ и с их помощью по формулам (1.9), (1.14) определим функцию $m(\lambda)$. В качестве третьего необходимого условия потребуем, чтобы построенная по формулам (1.6), (1.7) функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией дискретного оператора Штурма–Лиувилля L_0 на полуоси. Тогда коэффициенты a_n, b_n при $n \geq 0$ восстанавливаются по спектральной мере $d\rho(\lambda)$, как и в монографии [15]. Докажем, что при этом верно условие (1.2).

Пусть $\Gamma_\varepsilon^{(j)}$ – прямоугольник с вершинами в точках $(-1)^j 2 \pm i\varepsilon$, $\lambda \pm i\varepsilon$, где $j = 1, 2$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Поскольку $m(\lambda)$ вещественна при вещественных $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $m(\tau + i\varepsilon) = \overline{m(\tau - i\varepsilon)}$, то из (1.6), (1.7)

получим, что

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\varepsilon^1} m(\xi) d\xi, & -2 < \lambda < 0, \\ \rho(\lambda) &= 1 - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\varepsilon^2} m(\xi) d\xi, & 0 < \lambda < 2,\end{aligned}$$

где замкнутый контур $\Gamma_\varepsilon^{(j)}$ ориентирован по часовой стрелке. Воспользовавшись теоремой о вычетах, из последней формулы с учетом (1.7) получим

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_n < \lambda} \beta_n, & -2 < \lambda \leq 0, \\ 1 - \sum_{\lambda_n \geq \lambda} \beta_n, & 0 < \lambda \leq 2, \end{cases} \quad (3.8)$$

где $\beta_n = -\operatorname{res}_{\lambda=\lambda_n} m(\lambda)$. Заметим, что

$$\rho(+0) = 1 - \sum_{\lambda_n > 0} \beta_n. \quad (3.9)$$

Положим

$$\beta_0 = \rho(+0) - \rho(0). \quad (3.10)$$

Так как спектральная функция $\rho(\lambda)$ не убывает, то имеем $\beta_0 \geq 0$. При этом случай $\beta_0 > 0$ характеризуется тем, что число $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L_0 , а случай $\beta_0 = 0$ – тем, что это число принадлежит непрерывному спектру. Из (3.8)–(3.10) следует, что

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \beta_n,$$

причем $\lambda_0 = 0$ используется в сумме лишь тогда, когда $\beta_0 > 0$.

Следовательно, спектральная функция $\rho(\lambda)$ есть функция скачков, сосредоточенная в точках λ_n , $n = 0, 1, \dots$. Так как $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то самосопряженный оператор L_0 вполне непрерывен (см., например, [23; гл. 4, § 13]), согласно чему множество $\{x : x = L_0 y, \|y\| \leq 1\}$ компактно в пространстве $\ell_2[0, \infty)$. Воспользовавшись критерием компактности в $\ell_2[0, \infty)$ (см. [19; гл. 5, § 2]), получаем, что $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Таким образом, построенные коэффициенты a_n , b_n удовлетворяют требованиям (1.2), (1.3) и, следовательно, для построенного уравнения вида (1.1) существуют и единственны функция Вейля, решение Вейля и коэффициент прохождения. Обозначим через

$$\{\tilde{t}(z) = \tilde{a}^{-1}(z), \tilde{\chi}_n, \tilde{m}_k, k = 1, \dots, \tilde{p}\}$$

данные рассеяния построенного уравнения. В силу однозначной связи коэффициента прохождения и функции Вейля получим

$$\tilde{t}(z) = t(z), \quad \tilde{p} = p, \quad \tilde{\chi}_k = \chi_k, \quad k = 1, \dots, p.$$

Положим

$$\tilde{F}(n) = \sum_{k=1}^p \tilde{m}_k^2 \chi_k^{-n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{a(z)}}{a(z)} z^{-n-1} dz.$$

Мы знаем, что имеет место уравнение

$$\tilde{F}(n+m) + \frac{K(n,m)}{K(n,n)} + \sum_{r < n} \frac{K(n,r)}{K(n,n)} \tilde{F}(r+m) = 0, \quad m < n \leq 0.$$

Поэтому

$$\tilde{F}(n,m) - F(n,m) + \sum_{r < n} \frac{K(n,r)}{K(n,n)} [\tilde{F}(r+m) - F(r+m)] = 0.$$

При достаточно большом отрицательном n оператор Φ , действующий в пространстве ограниченных последовательностей $y = \{y_m\}_{-\infty}^{n-1}$ по формуле

$$(\Phi y)_m = \sum_{r < n} \frac{K(n,r)}{K(n,n)} y_{r+m},$$

есть оператор сжатия. Поэтому для достаточно больших отрицательных n имеем

$$\tilde{F}(n) - F(n) = \sum_{k=1}^p [\tilde{m}_k^2 - m_k^2] \chi_k^{-n} \equiv 0,$$

откуда следует, что $\tilde{m}_k \equiv m_k$, $k = 1, \dots, p$, и, тем самым, доказательство теоремы 3 завершено.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, которые способствовали улучшению содержания работы.

Список литературы

- [1] Н. Flaschka, "On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution", *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [2] Г. Ш. Гусейнов, *Обратные задачи рассеяния для самосопряженных разностных операторов второго порядка*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1976.
- [3] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, "Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля", *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358; англ. пер.: А. И. Aptekarev, Е. М. Nikishin, "The scattering problem for a discrete Sturm–Liouville operator", *Math. USSR-Sb.*, **49**:2 (1984), 325–355.
- [4] Е. М. Никишин, "Разностный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые вопросы теории функций", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **10**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 3–77; англ. пер.: Е. М. Nikishin, "Discrete Sturm–Liouville operators and some problems of function theory", *J. Math. Sci.*, **35**:2 (1986), 2679–2744.
- [5] И. М. Гусейнов, А. Х. Ханмамедов, "Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки", *ТМФ*, **119**:3 (1999), 429–440; англ. пер.: I. M. Guseinov, A. Kh. Khanmamedov, "The $t \rightarrow \infty$ asymptotic regime of the Cauchy problem solution for the Toda chain with threshold-type initial data", *Theoret. and Math. Phys.*, **119**:3 (1999), 739–749.

- [6] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Math. Surveys Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [7] Аг. Х. Ханмамедов, “Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла”, *Матем. сб.*, **196**:10 (2005), 137–160; англ. пер.: A. Kh. Khanmamedov, “Direct and inverse scattering problems for the perturbed Hill difference equation”, *Sb. Math.*, **196**:10 (2005), 1529–1552.
- [8] I. Egorova, “The scattering problem for step-like Jacobi operator”, *Матем. физ., анал., геом.*, **9**:2 (2002), 188–205.
- [9] A. Boutet de Monvel, I. Egorova, G. Teschl, “Inverse scattering theory for one-dimensional Schrödinger operators with steplike finite-gap potentials”, *J. Anal. Math.*, **106**:1 (2008), 271–316.
- [10] I. Egorova, J. Michor, G. Teschl, “Inverse scattering transform for the Toda hierarchy with steplike finite-gap backgrounds”, *J. Math. Phys.*, **50**:10 (2009).
- [11] E. Korotyaev, A. Lantchenko, *Periodic Jacobi operator with finitely supported perturbations*, arXiv: 1006.1538.
- [12] С. П. Суетин, “О формулах следов для некоторого класса операторов Якоби”, *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 107–138; англ. пер.: S. P. Suetin, “Trace formulae for a class of Jacobi operators”, *Sb. Math.*, **198**:6 (2007), 857–885.
- [13] С. П. Суетин, “Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **61**:2 (2006), 171–172; англ. пер.: S. P. Suetin, “Spectral properties of a class of discrete Sturm–Liouville operators”, *Russian Math. Surveys*, **61**:2 (2006), 365–367.
- [14] В. А. Калягин, А. А. Кононова, “О компактных возмущениях предельно-периодического оператора Якоби”, *Матем. заметки*, **86**:6 (2009), 845–858; англ. пер.: V. A. Kalyagin, A. A. Kononova, “On compact perturbations of the limit-periodic Jacobi operator”, *Math. Notes*, **86**:6 (2009), 789–800.
- [15] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965; англ. пер.: Yu. M. Berezans’kii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [16] M. Kudryavtsev, *On an inverse problem for finite-difference operators of second order*, arXiv: math.SP/0110276.
- [17] П. П. Кулиш, “Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на оси”, *Матем. заметки*, **4**:6 (1968), 677–684; англ. пер.: P. P. Kulish, “Inverse scattering problem for the Schroedinger equation on the axis”, *Math. Notes*, **4**:6 (1968), 895–899.
- [18] Ag. Kh. Khanmamedov, “Inverse scattering problem for the Schrödinger equation on the axis”, *Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries*, Kazak Universiteti, Almaty, 2009, 115.
- [19] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965; англ. пер.: L. A. Lusternik, V. J. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Hindustan Publ., Delhi, 1971.
- [20] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner Publ., New York, 1965.
- [21] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [22] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: P. Koosis, *Introduction to H^p spaces with an appendix on Wolff’s proof of the corona theorem*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **40**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.

- [23] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969; пер. с нем.: М. А. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

А. Х. Ханмамедов (A. Kh. Khanmamedov)

Бакинский государственный университет;

Институт математики и механики НАН Азербайджана,

г. Баку

E-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Поступила в редакцию

24.12.2009 и 30.03.2011