Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Ахунжанов, О векторах заданного диофантова типа II, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:18:24

УДК 511.36+511.9

Р. К. Ахунжанов

О векторах заданного диофантова типа II

Доказывается существование континуального семейства векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$, допускающих бесконечно много совместных $\frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p))$ -приближений, но не допускающих ни одного совместного $\frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p))$ -приближения.

Доказывается, что при $0 < t \leq T$ на отрезке $[t, t(1 + 16B \cdot t^{1+1/s})]$ содержится элемент s -мерного спектра Лагранжа. Здесь A , B и T – некоторые положительные константы, зависящие только от размерности s , а φ – положительная невозрастающая функция натурального аргумента такая, что $\varphi(1) \leq A$.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: совместные диофантовы приближения, спектр Лагранжа, евклидово пространство, совместное ψ -приближение.

DOI: 10.4213/sm7675

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются совместные диофантовы приближения. Хорошо известна следующая

ТЕОРЕМА ГУРВИЦА. 1) Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ неравенство $\|q\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q}$ имеет бесконечно много решений $q \in \mathbb{N}$.

2) Существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $\|q\alpha\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon\right) \frac{1}{q}$ имеет лишь конечное число решений $q \in \mathbb{N}$.

Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Из теоремы Гурвица следует, что число $\frac{1}{\sqrt{5}}$ принадлежит спектру Лагранжа.

Напомним определение спектра Лагранжа. *Спектром Лагранжа* называется множество

$$\mathbf{L} = \left\{ \lambda \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : \liminf_{q \rightarrow \infty} q \|q\alpha\| = \lambda \right\}.$$

Более подробно, число λ является элементом спектра Лагранжа $\mathbf{L}$, если существует число α такое, что для любого положительного числа ε

1) неравенство $\|q\alpha\| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{q}$ имеет бесконечно много решений $q \in \mathbb{N}$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00681-а и мол_а_вед № 12-01-33080).

2) неравенство $\|q\alpha\| \leq \frac{\lambda - \varepsilon}{q}$ имеет лишь конечное число решений $q \in \mathbb{N}$.

Хорошо известно, что дискретная часть спектра Лагранжа содержит последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}, \frac{13}{\sqrt{1517}}, \dots,$$

которая сходится к $\frac{1}{3}$. Также известно, что спектр Лагранжа содержит некоторый отрезок $[0, \lambda^*]$, который называют лучом Холла (в работе [1] Холл первый доказал, что $\lambda^* > 0$). Эти и многие другие результаты, связанные со спектром Лагранжа можно найти в книге [2] и обзоре [3].

Ярник в работе [4] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть φ и λ – положительные невозрастающие, убывающие к нулю функции натурального аргумента такие, что

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^s(n)}{n} \text{ сходится.}$$

Тогда найдется континуальное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что:

- 1) для любого $p \in \mathbb{N}$ $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \geq \lambda(p) \cdot \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}$;
- 2) неравенство $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}$ имеет бесконечно много решений $p \in \mathbb{N}$.

В работе [5] доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть φ – невозрастающая функция натурального аргумента и $\varphi(1) \leq A$. Тогда найдется континуальное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что:

- 1) для любого $p \in \mathbb{N}$ $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \geq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi(p))$;
- 2) неравенство $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 + B \cdot \varphi(p))$ имеет бесконечно много решений $p \in \mathbb{N}$.

Здесь A и B – некоторые положительные константы, зависящие только от размерности s .

Определим многомерный спектр Лагранжа

$$\mathbf{L}_s = \left\{ \lambda \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s \liminf_{q \rightarrow \infty} q^{1/s} \max_{1 \leq i \leq s} \|qv_i\| = \lambda \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. При $0 < x \leq X$ на отрезке $[x, x(1 + Kx)]$ содержится элемент s -мерного спектра Лагранжа $\mathbf{L}_s$. Здесь X и K – некоторые положительные константы, зависящие от размерности s .

Натуральное число p называется совместным ψ -приближением к вектору $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$, если $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \leq \psi(p)$.

Настоящая работа является продолжением работы [5] и содержит более сильные результаты. А поскольку в работе [5] не все вспомогательные утверждения доказывались, то автор счел нужным восполнить их доказательства в настоящей работе.

§ 2. Формулировка основного результата

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^s$ задана норма F над полем $\mathbb{R}$. То есть при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

- 1) $F(\mathbf{x}) \geq 0$, причем $F(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0$;
- 2) $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ (неравенство треугольника);
- 3) $F(\lambda \mathbf{x}) = |\lambda|F(\mathbf{x})$.

Здесь и далее $|\cdot|$ обозначает евклидову норму.

Введем следующие обозначения:

$V(s)$ – объем s -мерного шара единичного радиуса в евклидовой метрике,

$$R = \max_{F(\mathbf{y}) \leq 1} |\mathbf{y}|, \quad (1)$$

$$C(s) = \frac{2(s+1)^{1/(2s)}}{(V(s))^{1/s}} > 1, \quad (2)$$

$$B = 2(2s+3)(R \cdot C(s)(2s+3))^{1+1/s}. \quad (3)$$

Пусть

$$\varphi: \mathbb{R} \mapsto (0, \infty) \text{ – монотонная невозрастающая положительная функция} \quad (4)$$

такая, что

$$\varphi(x) = \varphi(1) \quad \text{при} \quad x \in (0, 1], \quad (5)$$

$$0 < \varphi(1) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^s \cdot R \cdot C(s)(2s+3)}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. *Найдется непрерывное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что:*

- 1) $\forall p \in \mathbb{N} \quad \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\mathbf{v} - \mathbf{a}) \geq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p));$
- 2) *неравенство $\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\mathbf{v} - \mathbf{a}) \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p))$ имеет бесконечно много решений $p \in \mathbb{N}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [5] доказан аналогичный результат, но в правой части неравенств стоит $\frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 \pm B \cdot \varphi(p))$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Найдется непрерывное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что:*

- 1) $\forall p \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \geq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p));$
- 2) *неравенство $\max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1/s}}(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p))$ имеет бесконечно много решений $p \in \mathbb{N}$.*

Для доказательства достаточно положить $F(\mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq s} |y_i|$ и применить теорему 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < c \leq \frac{1}{3 \cdot 4^s \cdot \sqrt{s} \cdot C(s)(2s+3)}$. Тогда найдется континуальное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что:

$$1) \forall p \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \geq \frac{c}{p^{1/s}}(1 - Bc^{1+1/s});$$

$$2) \text{ неравенство } \max_{1 \leq i \leq s} \|pv_i\| \leq \frac{c}{p^{1/s}}(1 + Bc^{1+1/s}) \\ \text{имеет бесконечно много решений } p \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства достаточно положить $F(\mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq s} |y_i|$, $\varphi(p) = c$ и применить теорему 1.

Дадим обобщение многомерного спектра Лагранжа на произвольную норму F :

$$\mathbf{L}_s(F) = \left\{ \lambda \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s \liminf_{q \rightarrow \infty} q^{1/s} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(q\mathbf{v} - \mathbf{a}) = \lambda \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При $0 < t \leq \frac{1}{6 \cdot 4^s \cdot R \cdot C(s)(2s+3)}$ на отрезке $[t, t(1 + 16B \cdot t^{1+1/s})]$ содержится элемент s -мерного спектра Лагранжа $\mathbf{L}_s(F)$.

Доказательство этого следствия будет дано в следующем параграфе.

§ 3. Вспомогательные определения и леммы

Заметим, что в силу (1)

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s : \quad |\mathbf{y}| \leq R \cdot F(\mathbf{y}). \quad (7)$$

Положим

$$M(x) = \frac{1}{\varphi(x) \cdot R \cdot C(s)(2s+3)}. \quad (8)$$

Тогда в силу (3) выполнено равенство

$$\frac{2(2s+3)}{M^{1+1/s}(x)} = B \cdot \varphi^{1+1/s}(x). \quad (9)$$

В силу (4)–(6) и (8)

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^s \cdot R \cdot C(s)(2s+3)} = \frac{\varphi(x) \cdot M(x)}{3 \cdot 4^s},$$

откуда получаем

$$M(x) \geq 3 \cdot 4^s \geq 2 \cdot 4^s + \frac{1}{2} > 1. \quad (10)$$

Далее, в силу (9) и (10)

$$B \cdot \varphi^{1+1/s}(x) = \frac{2(2s+3)}{M^{1+1/s}(x)} < \frac{16s}{(3 \cdot 4^s)^{1+1/s}} < \frac{s}{3 \cdot 4^{s-1}} < \frac{1}{2s} \leq 1 - \frac{1}{2^{1/s}} < 1. \quad (11)$$

Отсюда получаем, что

$$1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x) > \frac{1}{2^{1/s}}, \quad (12)$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) - \text{убывающая функция.} \quad (13)$$

Эти замечания и соотношения в дальнейшем нам пригодятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Положим $\varphi(p) = c$ и применим теорему 1. Из теоремы 1 следует, что найдется континуальное семейство векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ таких, что неравенство

$$c(1 - B \cdot c^{1+1/s}) \leq q^{1/s} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(q\mathbf{v} - \mathbf{a}) \leq c(1 + B \cdot c^{1+1/s})$$

имеет бесконечно много решений $q \in \mathbb{N}$. Тогда

$$c(1 - B \cdot c^{1+1/s}) \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} q^{1/s} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(q\mathbf{v} - \mathbf{a}) \leq c(1 + B \cdot c^{1+1/s}).$$

Положим $t = c(1 - B \cdot c^{1+1/s})$, тогда $c(1 + B \cdot c^{1+1/s}) \leq t(1 + 16B \cdot t^{1+1/s})$, откуда получаем

$$t \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} q^{1/s} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s} F(q\mathbf{v} - \mathbf{a}) \leq t(1 + 16B \cdot t^{1+1/s}).$$

Доказательство завершено.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{s+1}$, отнесенное к декартовым координатам $(x, y_1, \dots, y_s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{z} = (x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$, тогда положим $x(\mathbf{z}) = x \in \mathbb{R}$, $y(\mathbf{z}) = \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{n}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{x(\mathbf{z})} = \left(1, \frac{y_1}{x}, \dots, \frac{y_s}{x}\right) \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$, где $x(\mathbf{z}) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем нам понадобятся следующие очевидные свойства определенных выше функций:

$$|y(\mathbf{x}) - y(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{при } x(\mathbf{x}) = x(\mathbf{y}); \quad (14)$$

$$y(\mathbf{z}), x(\mathbf{z}) - \text{линейные функции.} \quad (15)$$

Зададим в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$ “частично определенную метрику” ρ_F , согласованную с нормой F следующим образом:

$$\forall \mathbf{z}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^{s+1} \quad \rho_F(\mathbf{z}, \mathbf{m}) = \begin{cases} F(y(\mathbf{z}) - y(\mathbf{m})), & x(\mathbf{z}) = x(\mathbf{m}), \\ \text{не определено} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (16)$$

Теперь теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Найдется континуальное семейство векторов $\mathbf{n} \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$ таких, что

$$1) \forall \mathbf{w} \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s \quad \rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{n}(\mathbf{w})) \geq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p)), \quad \text{где } p = x(\mathbf{w}); \quad (17)$$

$$2) \text{ неравенство } \rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{n}(\mathbf{w})) \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p)) \quad (18)$$

имеет бесконечно много решений $\mathbf{w} \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$.

Пусть π – гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$ и $\pi \nparallel \{0\} \times \mathbb{R}^s$, тогда определим расстояние от точки до гиперплоскости π в метрике ρ_F следующим образом:

$$\rho_F(\mathbf{z}, \pi) = \min\{\rho_F(\mathbf{z}, \mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in \pi, x(\mathbf{m}) = x(\mathbf{z})\}. \quad (19)$$

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{s+1}$, тогда через $\pi_{\mathbf{x}}$ будем обозначать гиперплоскость, параллельную гиперплоскости π и проходящую через точку $\mathbf{x}$.

В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, которые мы сформулируем в виде лемм.

ЛЕММА 1. Пусть π – гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$, $\pi \neq \{0\} \times \mathbb{R}^s$, $\mathbf{0} \in \pi$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{s+1}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда “частично определенная метрика” ρ_F обладает следующими свойствами:

- 1) $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, причем $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено);
- 2) $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho_F(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (неравенство треугольника) (при условии, что выражение в правой части неравенства определено);
- 3) $\rho_F(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено);
- 4) $\rho_F(\lambda \mathbf{x}, \pi) = |\lambda| \rho_F(\mathbf{x}, \pi)$;
- 5) $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{R}$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено);
- 6) $\rho_F(\mathbf{x}, \pi_{\mathbf{y}}) \leq \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено);
- 7) $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_F(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено);
- 8) $\rho_F(\mathbf{x}, \pi) \leq \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho_F(\mathbf{y}, \pi)$ (при условии, что выражение $\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определено).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2), 3), 4), 6) и 7) выполнены в силу (15), (16) и (19).

Докажем свойство 5). Действительно, в силу (7), (14) и (16) получаем

$$\rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(y(\mathbf{x}) - y(\mathbf{y})) \geq \frac{|y(\mathbf{x}) - y(\mathbf{y})|}{R} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{R}.$$

Тем самым свойство 5) доказано.

Докажем свойство 8). Выберем вектор $\mathbf{z} \in \pi$ из соотношения $\rho_F(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \rho_F(\mathbf{y}, \pi)$. В силу свойств 2) и 6) получаем

$$\rho_F(\mathbf{x}, \pi) \leq \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho_F(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \rho_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho_F(\mathbf{y}, \pi).$$

Тем самым свойство 8) доказано.

Доказательство завершено.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{z}_0 = (z_{0,0}, z_{0,1}, \dots, z_{0,s}) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, и пусть $\max(|z_{0,0}|, |z_{0,1}|, \dots, |z_{0,s}|) = p > 0$. Тогда существует семейство параллельных вполне рациональных гиперплоскостей $\pi^{(i)} = \pi^{(i)}(\mathbf{z}_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, с вектором нормали $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}(\mathbf{z}_0) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ такое, что:

- 1) $\mathbf{0}, \mathbf{z}_0 \in \pi = \pi^{(0)}$;
- 2) $\mathbb{Z}^{s+1} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi^{(i)}$;
- 3) $\mathbf{z} \in \pi^{(i)} \iff \langle \mathbf{z}, \mathbf{m}_0 \rangle = i$ (здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение);
- 4) решетка $\Gamma = \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi$ имеет определитель $\det \Gamma = |\mathbf{m}_0| \leq C(s)p^{1/s}$;
- 5) евклидово расстояние h между соседними параллельными гиперплоскостями $\pi^{(i)}$ и $\pi^{(i+1)}$ удовлетворяет неравенству $h \geq \frac{1}{C(s)p^{1/s}}$;
- 6) пусть $\mathbf{z} \in \pi^{(i)}$, $\mathbf{m} \in \pi^{(j)}$, тогда $|\mathbf{z} - \mathbf{m}| \geq |j - i|h$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее мы будем пользоваться введенными обозначениями $\pi^{(i)}(\mathbf{w})$, $\pi(\mathbf{w}) = \pi^{(0)}(\mathbf{w})$ и $\mathbf{m}(\mathbf{w})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим s -мерную решетку целых чисел

$$\Lambda = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{s+1} \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{z}_0 \rangle = 0\}.$$

Определитель этой решетки равен $\det \Lambda = |\mathbf{z}_0|$ (не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{z}_0$ – примитивный вектор). В силу теоремы Минковского о выпуклом теле существует целочисленный вектор $\mathbf{m}_0 \in \Lambda$ такой, что $0 < |\mathbf{m}_0| \leq \frac{2}{(V(s))^{1/s}} |\mathbf{z}_0|^{1/s} \leq C(s)p^{1/s}$ (не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{m}_0$ – примитивный вектор). Рассмотрим семейство параллельных вполне рациональных гиперплоскостей

$$\pi^{(i)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{s+1} \mid \langle \mathbf{m}_0, \mathbf{z} \rangle = i\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Построение семейства параллельных вполне рациональных гиперплоскостей завершено. Покажем, что выполняются все свойства.

Свойства 1), 2) и 3) выполнены по построению.

Докажем, что выполнены свойства 4) и 5). Решетка Γ имеет определитель

$$\det \Gamma = |\mathbf{m}_0| \leq C(s)p^{1/s},$$

а между соседними параллельными гиперплоскостями $\pi^{(i)}$ и $\pi^{(i+1)}$ евклидово расстояние

$$h = \frac{1}{\det \Gamma} \geq \frac{1}{C(s)p^{1/s}}.$$

Таким образом выполнены свойства 4) и 5).

Свойство 6) является непосредственным следствием свойства 5).

Доказательство завершено.

ЛЕММА 3. Пусть $r > 0$, π – гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$ с вектором нормали $\mathbf{m}$, $\mathbf{0} \in \pi$, $\pi \neq \{0\} \times \mathbb{R}^s$ и $\mathbf{n} \in (\{1\} \times \mathbb{R}^s) \cap \pi$. Тогда найдутся $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+(\mathbf{n}, \pi, r)$, $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^-(\mathbf{n}, \pi, r) \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $\langle \mathbf{n}^-, \mathbf{m} \rangle < 0 < \langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle$;
- 2) $\rho_F(\mathbf{n}^-, \mathbf{n}) = \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}) = r$;
- 3) $\rho_F(\mathbf{n}^-, \pi) = \rho_F(\mathbf{n}^+, \pi) = r$;
- 4) $\begin{cases} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}') < r & \implies \langle \mathbf{n}', \mathbf{m} \rangle > 0; \\ \rho_F(\mathbf{n}^-, \mathbf{n}') < r & \implies \langle \mathbf{n}', \mathbf{m} \rangle < 0. \end{cases}$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее мы будем пользоваться введенными в лемме 3 обозначениями $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+(\mathbf{n}, \pi, r)$ и $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^-(\mathbf{n}, \pi, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем векторы $\mathbf{n}^+$ и $\mathbf{n}^-$ из соотношений

$$\max_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle > 0, \quad \min_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{n}^-, \mathbf{m} \rangle < 0.$$

Свойства 1) и 2) для вектора $\mathbf{n}^+$ выполнены по построению.

Теперь докажем, что выполнено свойство 3) для вектора $\mathbf{n}^+$. В силу леммы 1 получаем

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \pi) \leq \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}) = r$$

и, далее,

$$\theta r = \rho_F(\mathbf{n}^+, \pi) = \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{z}_0) = \rho_F(\mathbf{n} + \mathbf{n}^+ - \mathbf{z}_0, \mathbf{n}),$$

где $0 < \theta \leq 1$ и $\mathbf{z}_0 \in \pi$. Далее,

$$\langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle = \max_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle = \frac{1}{\theta} \max_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=\theta r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle \geq \frac{1}{\theta} \langle \mathbf{n} + \mathbf{n}^+ - \mathbf{z}_0, \mathbf{m} \rangle = \frac{1}{\theta} \langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle.$$

Отсюда следует, что единственное возможное значение $\theta = 1$ и тем самым выполнено свойство 3) для вектора $\mathbf{n}^+$.

Теперь докажем, что выполнено свойство 4) для вектора $\mathbf{n}^+$. В силу леммы 1

$$\rho_F(\mathbf{n} + \mathbf{n}^+ - \mathbf{n}', \mathbf{n}) = \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}') = \theta r,$$

где $0 \leq \theta < 1$. Далее,

$$\theta \langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle = \theta \max_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle = \max_{\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{r})=\theta r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{m} \rangle \geq \langle \mathbf{n} + \mathbf{n}^+ - \mathbf{n}', \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{n}^+ - \mathbf{n}', \mathbf{m} \rangle.$$

Отсюда получаем $\langle \mathbf{n}', \mathbf{m} \rangle \geq (1 - \theta) \langle \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle > 0$ и тем самым выполнено свойство 4) для вектора $\mathbf{n}^+$.

Для вектора $\mathbf{n}^-$ доказательство проводится аналогично.

Доказательство завершено.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbf{w} = (p, a_1, \dots, a_s) = (p, \mathbf{a})$, $\mathbf{w}_1 = (1, 0, \dots, 0) = (1, \mathbf{0}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$ и $\rho_F(\mathbf{n}(\mathbf{w}), \mathbf{w}_1) \leq \frac{1}{R}$. Тогда $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что выполнено неравенство

$$\max(|a_1|, \dots, |a_s|) \leq p.$$

Действительно, в силу (7)

$$\begin{aligned} \max(|a_1|, \dots, |a_s|) &= p \cdot \max\left(\frac{|a_1|}{p}, \dots, \frac{|a_s|}{p}\right) \leq p \cdot \left|\frac{\mathbf{a}}{p}\right| \\ &\leq p \cdot R \cdot F\left(\frac{\mathbf{a}}{p}\right) = p \cdot R \cdot F\left(\frac{\mathbf{a}}{p} - \mathbf{0}\right) = p \cdot R \cdot \rho_F(\mathbf{n}(\mathbf{w}), \mathbf{w}_1) \leq p. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{w} = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$, $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{w})$, $p = x(\mathbf{w})$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{w}' \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s) \cap \pi^{(i)}(\mathbf{w})$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}(\mathbf{w}')$, $p' = x(\mathbf{w}')$, $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+\left(\mathbf{n}, \pi(\mathbf{w}), \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right)$, $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^-\left(\mathbf{n}, \pi(\mathbf{w}), \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right)$ и

$$\begin{cases} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}') \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} 2(s+1), & i > 0; \\ \rho_F(\mathbf{n}^-, \mathbf{n}') \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} 2(s+1), & i < 0. \end{cases}$$

Тогда $\frac{p'}{p} \geq |i| \cdot M(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i > 0$. В силу (8) и лемм 1–3

$$\begin{aligned}
 \frac{p'}{p} &= p' \cdot \frac{\varphi(p) \cdot (2s+3)}{p^{1+1/s}} \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \\
 &= p' \cdot \left(\frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} 2(s+1) \right) \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \\
 &\geq p' \cdot (\rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{n}^+) + \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}')) \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \geq p' \cdot \rho_F(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \\
 &= \rho_F(p'\mathbf{n}, p'\mathbf{n}') \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \geq \frac{|p'\mathbf{n} - p'\mathbf{n}'|}{R} \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \\
 &= \frac{|p'\mathbf{w}/p - \mathbf{w}'|}{R} \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \geq \frac{|i| \cdot h}{R} \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} \\
 &\geq \frac{|i|}{R \cdot C(s)p^{1/s}} \cdot \frac{p^{1/s}}{\varphi(p) \cdot (2s+3)} = |i| \cdot \frac{1}{\varphi(p) \cdot R \cdot C(s)(2s+3)} = |i| \cdot M(p).
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. В случае $i < 0$ доказательство проводится аналогично. Доказательство завершено.

Пусть заданы вектор $\mathbf{n} \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$, множество $X \subset \mathbb{R}$ и функция $\psi: X \mapsto [0, \infty)$. Мы будем рассматривать множества вида

$$\Pi = \Pi(\mathbf{n}, X, \psi) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{s+1} \mid x = x(\mathbf{z}) \in X, \rho_F(x\mathbf{n}, \mathbf{z}) \leq \psi(x)\}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbf{w} = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$, $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{w})$, $p = x(\mathbf{w})$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{w}' \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s) \cap \pi^{(i)}(\mathbf{w})$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}(\mathbf{w}')$, $p' = x(\mathbf{w}')$, $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+\left(\mathbf{n}, \pi(\mathbf{w}), \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right)$, $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^-\left(\mathbf{n}, \pi(\mathbf{w}), \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right)$,

$$\begin{cases} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}') \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} B \cdot \varphi^{1+1/s}(p), & i > 0, \\ \rho_F(\mathbf{n}^-, \mathbf{n}') \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} B \cdot \varphi^{1+1/s}(p), & i < 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\Pi\left(\mathbf{n}, (0, p), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset. \quad (21)$$

Тогда

$$\Pi\left(\mathbf{n}', [p, p'], \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi^{(i)}(\mathbf{w}) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i > 0$. В силу (11)

$$\rho_F(\mathbf{n}', \mathbf{n}^+) \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} B \cdot \varphi^{1+1/s}(p) \leq \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} 2(s+1),$$

и тем самым получаем, что выполнены условия леммы 5. В силу (10) и леммы 5 получаем

$$\frac{p'}{p} \geq i \cdot M(p) \geq M(p) \geq 2 \cdot 4^s + \frac{1}{2} > 2. \quad (22)$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2^{1/s}} \geq \frac{4}{(p'/p - 1/2)^{1/s}}.$$

В силу (12) для любых $x, t \in (0, \infty)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) &> \frac{2}{(p'/p - 1/2)^{1/s}}, \\ \frac{1}{2}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) + \frac{1}{2}(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) &= 1 < 2^{1/s}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(t)). \end{aligned} \quad (23)$$

Наконец, для произвольных $x, t \in (0, \infty)$ получаем следующее неравенство:

$$\frac{2}{(p'/p - 1/2)^{1/s}} + \frac{1}{2}(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) < 2^{1/s}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(t)). \quad (24)$$

Очевидно, что

$$\Pi\left(\mathbf{n}, \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \subset \Pi\left(\mathbf{n}, (0, p), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right). \quad (25)$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} &\Pi\left(\mathbf{n}, \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{\varphi(p/2)}{(p/2)^{1/s}}\left(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}\left(\frac{p}{2}\right)\right)\right) \\ &\subset \Pi\left(\mathbf{n}, \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Это следует из того, что при $x \in (0, p/2]$ в силу (13) выполнено неравенство

$$\frac{\varphi(p/2)}{(p/2)^{1/s}}\left(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}\left(\frac{p}{2}\right)\right) \leq \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)).$$

Далее, покажем, что

$$\Pi\left(\mathbf{n}', \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{2\varphi(p' - p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}}\right) \subset \Pi\left(\mathbf{n}, \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{\varphi(p/2)}{(p/2)^{1/s}}\left(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}\left(\frac{p}{2}\right)\right)\right). \quad (27)$$

Для этого достаточно показать, что если для $x \in (0, p/2]$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{s+1}$ выполнено неравенство

$$\rho_F(\mathbf{n}'x, \mathbf{y}) \leq \frac{2\varphi(p' - p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}},$$

то выполнено также и неравенство

$$\rho_F(\mathbf{n}x, \mathbf{y}) \leq \frac{\varphi(p/2)}{(p/2)^{1/s}}\left(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}\left(\frac{p}{2}\right)\right).$$

Действительно, в силу (4), (20), (22), (24), лемм 1 и 3

$$\begin{aligned}
 \rho_F(\mathbf{n}x, \mathbf{y}) &\leq \rho_F(\mathbf{n}'x, \mathbf{y}) + \rho_F(\mathbf{n}'x, \mathbf{n}^+x) + \rho_F(\mathbf{n}^+x, \mathbf{n}x) \\
 &\leq \frac{2\varphi(p' - p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}} + x \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p)) \\
 &\leq \frac{2\varphi(p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}} + \frac{1}{2} \frac{\varphi(p/2)}{p^{1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p)) \\
 &\leq \frac{\varphi(p/2)}{(p/2)^{1/s}} \left(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}\left(\frac{p}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Тем самым (27) доказано. Теперь покажем, что

$$\Pi\left(\mathbf{n}', \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}\right) \subset \Pi\left(\mathbf{n}', \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{2\varphi(p' - p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}}\right). \quad (28)$$

Это следует из того, что при $x \in (0, p/2]$ в силу (4) выполнено неравенство

$$\frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}} \leq \frac{2\varphi(p' - p/2)}{(p' - p/2)^{1/s}}.$$

В силу (21), (25)–(28) получаем

$$\Pi\left(\mathbf{n}', \left(0, \frac{p}{2}\right], \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset. \quad (29)$$

Покажем, что

$$\Pi\left(\mathbf{n}', \left(\frac{p}{2}, p' - p\right], \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}\right) \cap \pi(\mathbf{w}) = \emptyset. \quad (30)$$

Для этого достаточно показать, что при $x \in [p/2, p' - p]$ выполнено неравенство

$$\rho_F(x\mathbf{n}', \pi(\mathbf{w})) > \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x(p' - x)^{1/s}$ на отрезке $x \in [p/2, p' - p]$. При $s \geq 1$ и $x < p'$ выполнено неравенство $f''(x) < 0$. Значит, эта функция выпукла вверх и достигает своего минимума на концах отрезка $[p/2, p' - p]$. При $p'/p \geq 2$ (а это неравенство выполнено согласно (22)) выполнено неравенство $f(p/2) \leq f(p' - p)$. В силу (23) получаем

$$\begin{aligned}
 f(x) = x(p' - x)^{1/s} &\geq \min\left\{f\left(\frac{p}{2}\right), f(p' - p)\right\} = f\left(\frac{p}{2}\right) \\
 &= \frac{p}{2} \left(p' - \frac{p}{2}\right)^{1/s} = \frac{p^{1+1/s}}{2} \left(\frac{p'}{p} - \frac{1}{2}\right)^{1/s} > \frac{2p^{1+1/s}}{(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p))}.
 \end{aligned}$$

Теперь в силу (4), (20), лемм 1 и 3 получаем

$$\begin{aligned}
 \rho_F(x\mathbf{n}', \pi(\mathbf{w})) &\geq \rho_F(x\mathbf{n}^+, \pi(\mathbf{w})) - \rho_F(x\mathbf{n}', x\mathbf{n}^+) \\
 &\geq x \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p)) > \frac{2\varphi(p)}{(p' - x)^{1/s}} \geq \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}.
 \end{aligned}$$

Тем самым (30) доказано. В силу (29) и (30) получаем

$$\Pi\left(\mathbf{n}', (0, p' - p], \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi(\mathbf{w}) = \emptyset.$$

Далее, отражая множество $\Pi\left(\mathbf{n}', (0, p' - p], \frac{2\varphi(p' - x)}{(p' - x)^{1/s}}\right)$ центрально симметрично относительно $\mathbf{0}$, получаем

$$\Pi\left(\mathbf{n}', [-(p' - p), 0), \frac{2\varphi(p' + x)}{(p' + x)^{1/s}}\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi(\mathbf{w}) = \emptyset.$$

Используя сдвиг на вектор $\mathbf{w}' \in \mathbb{Z}^{s+1}$ и учитывая, что $\pi_{\mathbf{w}'} = \pi^{(i)}(\mathbf{w})$, получаем

$$\Pi\left(\mathbf{n}', [p, p'), \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi^{(i)}(\mathbf{w}) = \emptyset.$$

Что и требовалось доказать. В случае $i < 0$ доказательство проводится аналогично. Доказательство леммы 6 завершено.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathbf{w} = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$, $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{w})$, $p = x(\mathbf{w})$ и

$$\Pi\left(\mathbf{n}, (0, p), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset. \quad (31)$$

Тогда найдется конечная последовательность векторов

$$\mathcal{Z}(\mathbf{w}) : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_t \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s,$$

обладающих следующими свойствами:

- (i) $(\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset$, $1 \leq k \leq t$;
- (ii) $\mathbf{w}_k \in (\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1}$, $1 \leq k \leq t$;
- (iii) $p_k = \min\{x(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in (\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1}\}$, $1 \leq k \leq t$;
- (iv) $\rho_F(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) \leq \frac{2\varphi(p_k)}{p_k^{1+1/s}}$, $1 < k \leq t$;
- (v) $i_k > 0$, $1 \leq k \leq t$;
- (vi) $i_{k-1} > i_k$, $1 < k \leq t$;
- (vii) $\frac{p_k}{p} \geq i_k \cdot M$, $1 \leq k \leq t$;
- (viii) $\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_k) < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}}$, $1 \leq k \leq t$;
- (ix) $\begin{cases} (\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset, & 1 \leq k < t, \\ (\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset, & k = t. \end{cases}$

Здесь для простоты изложения введены вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \pi &= \pi(\mathbf{w}), & \mathbf{n}^+ &= \mathbf{n}^+\left(\mathbf{n}, \pi, \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right), \\ M &= M(p), & \varepsilon &= \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1/s}}, \end{aligned}$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана,

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi(\mathbf{n}^+, [p, \infty), \varepsilon), & \mathbf{m} &= \mathbf{m}(\mathbf{w}), & \mathbf{n}_k &= \mathbf{n}(\mathbf{w}_k), \\ p_k &= x(\mathbf{w}_k), & i_k &= \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{m} \rangle, & \Pi_k &= \Pi\left(\mathbf{n}_k, [p, p_k), \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим последовательность векторов $\mathcal{Z}(\mathbf{w})$ индуктивным образом (индукция по k).

1) Базис индукции: $k = 1$.

Докажем, что выполнено свойство (i). Так как при $x > 1$ получаем

$$\frac{1}{x-1} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} < \zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x} < 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

то, положив $x = 1 + 1/s$, получаем

$$s < \zeta\left(1 + \frac{1}{s}\right) < s + 1. \quad (32)$$

Откуда следует, что $\varepsilon > 0$ и тем самым множество Π_0 определено корректно. В силу теоремы Минковского о выпуклом теле множество Π_0 содержит бесконечно много целых точек, а пересечение $\Pi_0 \cap \pi$ образует ограниченное множество. Таким образом, множество $\Pi_0 \setminus \pi$ содержит бесконечно много целых точек и свойство (i) выполнено.

Определим теперь вектор $\mathbf{w}_1$, так чтобы выполнялись свойства (ii) и (iii). Таким образом, свойства (ii) и (iii) выполнены по построению.

Свойство (iv) очевидно выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (v). По построению выполнено неравенство $i_1 \neq 0$. В силу (4), (6), (10), (32) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} i_1 &= \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{w}_1 - p_1 \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle + \langle p_1 \mathbf{n}^+, \mathbf{m} \rangle > -|\mathbf{w}_1 - p_1 \mathbf{n}^+| \cdot |\mathbf{m}| \\ &\geq -\varepsilon \cdot R \cdot C(s) \cdot p^{1/s} = -\frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1/s}} \cdot R \cdot C(s) \cdot p^{1/s} \\ &> -2\varphi(1) \cdot R \cdot C(s) \geq -\frac{2}{3 \cdot 4^s(2s+3)} > -1, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$i_1 > 0. \quad (33)$$

Свойство (v) выполнено.

Свойство (vi) очевидно выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (vii). По построению получаем следующее неравенство:

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) \leq \frac{\varepsilon}{p_1}. \quad (34)$$

Так как по построению $p_1 \geq p$, то в силу (10)

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) &\leq \frac{\varepsilon}{p_1} \leq \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1/s}} \cdot \frac{1}{p} < \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{p^{1+1/s}} \\ &< \frac{2\varphi(p)(s+1)}{p^{1+1/s}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{p^{1+1/s}}. \quad (35)$$

Положив $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1$, учитывая (33) и (35), по лемме 5 получаем

$$\frac{p_1}{p} \geq i_1 \cdot M \geq M. \quad (36)$$

Свойство (vii) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (viii). В силу (36) получаем

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) \leq \frac{\varepsilon}{p_1} \leq \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1+1/s}} < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}}.$$

Свойство (viii) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (ix). Если $(\Pi_1 \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$, то определим $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_1$ и тем самым построение последовательности векторов $\mathcal{Z}(\mathbf{w})$ завершено. Если же $(\Pi_1 \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset$, то построение последовательности векторов $\mathcal{Z}(\mathbf{w})$ продолжается. Свойство (ix) выполнено.

2) Предположение индукции: пусть уже имеется последовательность векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k-1}$ такая, что свойства (i)–(ix) выполнены и

$$(\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset.$$

3) Индуктивный шаг: построим вектор $\mathbf{w}_k$ и докажем, что свойства (i)–(ix) для него выполнены.

Свойство (i) выполнено в силу индуктивного предположения.

Определим вектор $\mathbf{w}_k$ таким образом, чтобы выполнялись свойства (ii) и (iii). Таким образом, свойства (ii) и (iii) выполнены по построению.

Свойство (iv) также выполняется по построению.

Докажем, что выполнено свойство (v). По предположению индукции

$$i_{k-1} > 0. \quad (37)$$

По построению выполнено неравенство $i_k \neq 0$. В силу (4), (6), (37) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} i_k &= \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle + \frac{p_k}{p_{k-1}} \langle \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle + \frac{p_k}{p_{k-1}} i_{k-1} > -|\mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}| \cdot |\mathbf{m}| \\ &\geq -\frac{2\varphi(p)}{p^{1/s}} \cdot R \cdot C(s) \cdot p^{1/s} \geq -2\varphi(1) \cdot R \cdot C(s) \geq -\frac{2}{3 \cdot 4^s (2s+3)} > -1, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$i_k > 0. \quad (38)$$

Свойство (v) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (vi). В силу (9)

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_{k-1}) < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}} < \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}} B \cdot \varphi^{1+1/s}(p). \quad (39)$$

Положив $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_{k-1}$, учитывая (31), (37) и (39), по лемме 6 получаем

$$\Pi_{k-1} \cap \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi^{(i_{k-1})}(\mathbf{w}) = \emptyset,$$

откуда следует, что

$$i_{k-1} \neq i_k.$$

Далее, в силу (4), (6), (37) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} i_k &= \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle + \frac{p_k}{p_{k-1}} \langle \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{m} \rangle + \frac{p_k}{p_{k-1}} i_{k-1} < |\mathbf{w}_k - p_k \mathbf{n}_{k-1}| \cdot |\mathbf{m}| + i_{k-1} \\ &\leq \frac{2\varphi(p)}{p^{1/s}} \cdot R \cdot C(s) \cdot p^{1/s} + i_{k-1} \leq 2\varphi(1) \cdot R \cdot C(s) + i_{k-1} \\ &\leq \frac{2}{3 \cdot 4^s (2s+3)} + i_{k-1} < 1 + i_{k-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$i_{k-1} > i_k.$$

Свойство (vi) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (vii). По предположению индукции

$$i_1 > i_2 > \dots > i_{k-1} > 0.$$

Откуда при $j = 1, \dots, k-1$

$$i_j \geq k-j, \quad \frac{p_j}{p} \geq i_j \cdot M \geq (k-j) \cdot M.$$

Так как по построению $p_k \geq p$, то в силу уже доказанного, предположения индукции, (4), (10), (34) и леммы 1

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_k) &\leq \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) + \sum_{j=1}^{k-1} \rho_F(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_{j+1}) \leq \frac{\varepsilon}{p_1} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{2\varphi(p_{j+1})}{p_{j+1}^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p_k)}{p_k^{1+1/s}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-2} \frac{2\varphi(p)}{((k-1-j)Mp)^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} \\ &= \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{(k-1-j)^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} \\ &= \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} \\ &< \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1+1/s}} \cdot \frac{Mp}{p_1} \\ &\leq \frac{2\varphi(p)\zeta(1+1/s)}{(Mp)^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1+1/s}} \\ &= \frac{2\varphi(p)}{p^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}} < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{p^{1+1/s}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_k) < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{p^{1+1/s}}. \quad (40)$$

Положив $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_k$, учитывая (38) и (40), по лемме 5 получаем

$$\frac{p_k}{p} \geq i_k \cdot M.$$

Свойство (vii) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (viii). В силу уже доказанного и предположения индукции

$$i_1 > i_2 > \dots > i_k > 0.$$

Откуда при $j = 1, \dots, k$

$$i_j \geq k + 1 - j, \quad \frac{p_j}{p} \geq i_j \cdot M \geq (k + 1 - j) \cdot M.$$

Далее, в силу уже доказанного, предположения индукции, (4), (34) и леммы 1

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_k) &\leq \rho_F(\mathbf{n}^+, \mathbf{n}_1) + \sum_{j=1}^{k-1} \rho_F(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_{j+1}) \leq \frac{\varepsilon}{p_1} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2\varphi(p_{j+1})}{p_{j+1}^{1+1/s}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2\varphi(p)}{((k-j)Mp)^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} = \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(k-j)^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} \\ &= \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^{1+1/s}} + \frac{\varepsilon}{p_1} \\ &< \frac{2\varphi(p)}{(Mp)^{1+1/s}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1+1/s}} \cdot \frac{Mp}{p_1} \\ &\leq \frac{2\varphi(p)\zeta(1+1/s)}{(Mp)^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p)(s+1-\zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1+1/s}} = \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}}. \end{aligned}$$

Свойство (viii) выполнено.

Докажем, что выполнено свойство (ix). Если $(\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$, то определим $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_k$ и тем самым построение последовательности векторов $\mathcal{Z}(\mathbf{w})$ завершено. Если же $(\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset$, то построение последовательности векторов $\mathcal{Z}(\mathbf{w})$ продолжается. Свойство (ix) выполнено.

Заметим, что индуктивный процесс рано или поздно остановится, так как последовательность натуральных чисел p_k убывает.

Доказательство завершено.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathbf{w} = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$, $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{w})$, $p = x(\mathbf{w})$ и

$$\Pi\left(\mathbf{n}, (0, p), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset. \quad (41)$$

Тогда найдется конечная последовательность векторов

$$\mathcal{Z}(\mathbf{w}) : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_t \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s,$$

обладающих следующими свойствами:

- (i) $(\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (ii) $\mathbf{w}_k \in (\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1}, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (iii) $p_k = \min\{x(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in (\Pi_{k-1} \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1}\}, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (iv) $\rho_F(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1}) \leq \frac{2\varphi(p_k)}{p_k^{1+1/s}}, \quad 1 < k \leq t;$
- (v) $i_k < 0, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (vi) $i_{k-1} < i_k, \quad 1 < k \leq t;$
- (vii) $\frac{p_k}{p} \geq |i_k| \cdot M, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (viii) $\rho_F(\mathbf{n}^-, \mathbf{n}_k) < \frac{2\varphi(p)(s+1)}{(Mp)^{1+1/s}}, \quad 1 \leq k \leq t;$
- (ix) $\begin{cases} (\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} \neq \emptyset, & 1 \leq k < t, \\ (\Pi_k \setminus \pi) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset, & k = t. \end{cases}$

Здесь для простоты изложения введены вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \pi &= \pi(\mathbf{w}), \quad \mathbf{n}^- = \mathbf{n}^-\left(\mathbf{n}, \pi, \frac{\varphi(p)}{p^{1+1/s}}\right), \\ M &= M(p), \quad \varepsilon = \frac{2\varphi(p)(s+1 - \zeta(1+1/s))}{(Mp)^{1/s}}, \end{aligned}$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана,

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi(\mathbf{n}^-, [p, \infty), \varepsilon), \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{n}_k = \mathbf{n}(\mathbf{w}_k), \\ p_k &= x(\mathbf{w}_k), \quad i_k = \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{m} \rangle, \quad \Pi_k = \Pi\left(\mathbf{n}_k, [p, p_k), \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 8 проводится аналогично доказательству леммы 7.

§ 4. Специальная последовательность векторов

В этом параграфе мы построим специальную последовательность векторов $\mathcal{Z}$, которая позволит нам установить существование векторов $\mathbf{n} \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$, удовлетворяющих условию теоремы 2.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Для всякой последовательности “знаков” $*_\nu \in \{+, -\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, найдется последовательность векторов

$$\mathcal{Z} : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\nu, \dots, \quad \mathbf{w}_\nu = (p_\nu, a_{1,\nu}, \dots, a_{s,\nu}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s,$$

обладающих следующими свойствами:

- I. $\frac{p_\nu}{p_{\nu-1}} \geq M_{\nu-1}, \quad \nu > 1;$
- II. $(\Pi_\nu \setminus \pi_{\nu-1}) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset, \quad \nu \geq 1;$

- III. $\rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*}, \mathbf{n}_\nu) \leq \frac{2\varphi(p_{\nu-1})(s+1)}{(M_{\nu-1}p_{\nu-1})^{1+1/s}}, \quad \nu > 1;$
- IV. $\rho_F(\mathbf{n}_\nu, \mathbf{n}_{\nu-1}) \leq \frac{\varphi(p_{\nu-1})}{p_{\nu-1}^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_{\nu-1}^{1+1/s}}\right), \quad \nu > 1;$
- V. $\rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_\nu) \leq \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_i)), \quad 1 \leq i \leq \nu;$
- VI. $\max(p_\nu, |a_{1,\nu}|, \dots, |a_{s,\nu}|) = p_\nu, \quad \nu \geq 1;$
- VII. $\Pi\left(\mathbf{n}_\nu, (0, p_\nu), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} (\Pi_i \setminus \pi_{i-1}), \quad \nu \geq 1;$
- VIII. $\Pi\left(\mathbf{n}_\nu, (0, p_\nu), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset, \quad \nu \geq 1.$

Здесь для простоты изложения введены вспомогательные обозначения: $p_0 = 0$, $\pi_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^s$, при $\nu \geq 1$ положим

$$p_\nu = x(\mathbf{w}_\nu), \quad \mathbf{n}_\nu = \mathbf{n}(\mathbf{w}_\nu), \quad \pi_\nu^{(i)} = \pi^{(i)}(\mathbf{w}_\nu), \quad \pi_\nu = \pi_\nu^{(0)}, \quad \mathbf{m}_\nu = \mathbf{m}(\mathbf{w}_\nu),$$

$$\mathbf{n}_\nu^+ = \mathbf{n}^+\left(\mathbf{n}_\nu, \pi_\nu, \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}}\right), \quad \mathbf{n}_\nu^- = \mathbf{n}^-\left(\mathbf{n}_\nu, \pi_\nu, \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}}\right),$$

$$\Pi_\nu = \Pi\left(\mathbf{n}_\nu, [p_{\nu-1}, p_\nu], \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}\right), \quad M_\nu = M(p_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим последовательность векторов $\mathcal{Z}$ индуктивным образом (индукция по ν).

1) Базис индукции: $\nu = 1$.

Определим вектор $\mathbf{w}_1$ так: $p_1 = 1$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}^s$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что для вектора $\mathbf{w}_1$ все свойства I–VIII выполняются.

2) Предположение индукции: пусть уже имеется последовательность векторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{\nu-1}$ такая, что свойства I–VIII выполнены.

3) Индуктивный шаг: построим вектор $\mathbf{w}_\nu$ и докажем, что свойства I–VIII для него выполнены.

В силу индуктивного предположения и леммы 2 существует вполне рациональная гиперплоскость $\pi_{\nu-1}$ с вектором нормали $\mathbf{m}_{\nu-1}$ такая, что $\mathbf{0}, \mathbf{w}_{\nu-1} \in \pi_{\nu-1}$ и евклидово расстояние $h_{\nu-1}$ между соседними гиперплоскостями удовлетворяет неравенству

$$h_{\nu-1} \geq \frac{1}{C(s)p_{\nu-1}^{1/s}}.$$

Согласно лемме 3 найдется вектор $\mathbf{n}_{\nu-1}^{*}$ такой, что

$$\rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*}, \pi_{\nu-1}) = \rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*}, \mathbf{n}_{\nu-1}) = \frac{\varphi(p_{\nu-1})}{p_{\nu-1}^{1+1/s}}.$$

Положим $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\nu-1}$. В силу индуктивного предположения по лемме 7 (если $*_{\nu-1} = +$) или же по лемме 8 (если $*_{\nu-1} = -$) получаем, что найдется конечная

последовательность векторов

$$\mathcal{Z}(\mathbf{w}) = \mathcal{Z}(\mathbf{w}_{\nu-1}) : \mathbf{w}_{\nu-1,1}, \mathbf{w}_{\nu-1,2}, \dots, \mathbf{w}_{\nu-1,t} \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s,$$

обладающих указанными в лемме 7 (в лемме 8) свойствами. Положим $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_{\nu-1,t}$.

Итак, построение вектора $\mathbf{w}_\nu$ завершено. Докажем теперь, что свойства I–VIII для него выполнены.

Свойства I и II выполняются в силу леммы 7 (леммы 8) по построению.

Докажем, что выполнены свойства III и IV. Действительно, в силу лемм 1, 3 и леммы 7 (леммы 8) получаем

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*\nu-1}, \mathbf{n}_\nu) &\leq \frac{2\varphi(p_{\nu-1})(s+1)}{(M_{\nu-1}p_{\nu-1})^{1+1/s}}, \\ \rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}, \mathbf{n}_\nu) &\leq \rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*\nu-1}, \mathbf{n}_\nu) + \rho_F(\mathbf{n}_{\nu-1}^{*\nu-1}, \mathbf{n}_{\nu-1}) \leq \frac{\varphi(p_{\nu-1})}{p_{\nu-1}^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_{\nu-1}^{1+1/s}}\right). \end{aligned}$$

Тем самым свойства III и IV выполнены.

Докажем, что выполнено свойство V, т.е. что

$$\rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_\nu) \leq \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_i)), \quad 1 \leq i \leq \nu. \quad (42)$$

При $i = \nu$ это неравенство очевидно выполняется, а при $1 \leq i < \nu$ в силу уже доказанного, предположения индукции, (4), (9), (10) и леммы 1

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_\nu) &\leq \sum_{j=i}^{\nu-1} \rho_F(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_{j+1}) \leq \sum_{j=i}^{\nu-1} \frac{\varphi(p_j)}{p_j^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_j^{1+1/s}}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_i^{1+1/s}}\right) \sum_{j=i}^{\nu-1} \frac{\varphi(p_i)}{(M_i^{j-i} p_i)^{1+1/s}} = \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_i^{1+1/s}}\right) \sum_{j=i}^{\nu-1} \frac{1}{(M_i^{1+1/s})^{j-i}} \\ &< \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_i^{1+1/s}}\right) \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(M_i^{1+1/s})^{j-i}} = \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} \left(1 + \frac{2(s+1)}{M_i^{1+1/s}}\right) \frac{1}{1 - M_i^{-(1+1/s)}} \\ &\leq \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_i)). \end{aligned}$$

Тем самым свойство V выполнено.

Докажем, что выполнено свойство VI. В силу (2), (4), (6), (11) и (42) получаем

$$\rho_F(\mathbf{n}_\nu, \mathbf{n}_1) \leq \varphi(p_1)(1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_1)) \leq 2\varphi(1) \leq \frac{1}{R}.$$

Положив $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\nu$, это неравенство можно переписать в виде

$$\rho_F(\mathbf{n}(\mathbf{w}), \mathbf{w}_1) \leq \frac{1}{R},$$

и в силу леммы 4 выполняется свойство VI.

Докажем, что выполнено свойство VII. Сначала докажем следующее:

$$\Pi\left(\mathbf{n}_\nu, (0, p_\nu), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}}(1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} \Pi_i.$$

Для этого достаточно показать, что если для $x \in (0, p_\nu)$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{s+1}$ выполнено неравенство

$$\rho_F(\mathbf{n}_\nu x, \mathbf{y}) \leq \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)),$$

то для $i \in \{1, \dots, \nu\}$ такого, что $x \in [p_{i-1}, p_i)$ справедливо неравенство

$$\rho_F(\mathbf{n}_i x, \mathbf{y}) \leq \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}.$$

Действительно, в силу (4), (42) и леммы 1 при $x \in [p_{i-1}, p_i)$ получаем

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}_i x, \mathbf{y}) &\leq \rho_F(\mathbf{n}_i x, \mathbf{n}_\nu x) + \rho_F(\mathbf{n}_\nu x, \mathbf{y}) \leq x \rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_\nu) + \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) \\ &\leq x \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_i)) + \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi(x)^{1+1/s}) \\ &\leq \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 + B \cdot \varphi(x)^{1+1/s}) + \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi(x)^{1+1/s}) = \frac{2\varphi(x)}{x^{1/s}}. \end{aligned}$$

Чтобы показать, что свойство VII выполнено, осталось доказать, что

$$\begin{aligned} \Pi\left(\mathbf{n}_\nu, (p_0, p_1), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \pi_0 &= \emptyset \text{ (это очевидно выполнено),} \\ \Pi\left(\mathbf{n}_\nu, [p_{i-1}, p_i), \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x))\right) \cap \pi_{i-1} &= \emptyset, \quad 1 < i \leq \nu. \end{aligned}$$

Для этого достаточно показать, что для $x \in [p_{i-1}, p_i)$ выполнено неравенство

$$\rho_F(x \mathbf{n}_\nu, \pi_{i-1}) > \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)).$$

Действительно, в силу доказанного ранее, предположения индукции, (4), (11), (13), (42), лемм 1 и 3 при $x \in [p_{i-1}, p_i)$ получаем

$$\begin{aligned} \rho_F(x \mathbf{n}_\nu, \pi_{i-1}) &\geq \rho_F(\pi_{i-1}, \mathbf{n}_{i-1}^{*i-1} x) - \rho_F(\mathbf{n}_{i-1}^{*i-1} x, \mathbf{n}_\nu x) \\ &\geq \rho_F(\pi_{i-1}, \mathbf{n}_{i-1}^{*i-1} x) - \rho_F(\mathbf{n}_{i-1}^{*i-1} x, \mathbf{n}_i x) - \rho_F(\mathbf{n}_i x, \mathbf{n}_\nu x) \\ &= x (\rho_F(\pi_{i-1}, \mathbf{n}_{i-1}^{*i-1}) - \rho_F(\mathbf{n}_{i-1}^{*i-1}, \mathbf{n}_i) - \rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_\nu)) \\ &\geq x \left(\frac{\varphi(p_{i-1})}{p_{i-1}^{1+1/s}} - \frac{2\varphi(p_{i-1})(s+1)}{(M_{i-1} p_{i-1})^{1+1/s}} - \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi(p_i)^{1+1/s}) \right) \\ &\geq x \left(\frac{\varphi(p_{i-1})}{p_{i-1}^{1+1/s}} - \frac{2\varphi(p_{i-1})(s+1)}{(M_{i-1} p_{i-1})^{1+1/s}} - \frac{2\varphi(p_{i-1})}{(M_{i-1} p_{i-1})^{1+1/s}} \right) \\ &\geq x \frac{\varphi(p_{i-1})}{p_{i-1}^{1+1/s}} \left(1 - \frac{2(s+2)}{M_{i-1}^{1+1/s}} \right) > x \frac{\varphi(p_{i-1})}{p_{i-1}^{1+1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_{i-1})) \\ &\geq \frac{\varphi(x)}{x^{1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)). \end{aligned}$$

Тем самым свойство VII выполнено.

Свойство VIII является непосредственным следствием свойств II и VII.

Доказательство основной леммы завершено.

§ 5. Доказательство основного результата

В этом параграфе мы, опираясь на основную лемму из предыдущего параграфа, докажем теорему 2.

В силу основной леммы и критерия Коши сходимости последовательности получаем, что

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{n}_i = \mathbf{n}. \quad (43)$$

Докажем, что выполнено утверждение (17). Действительно, в силу основной леммы и (43) получаем

$$\text{int} \left(\Pi \left(\mathbf{n}, (0, \infty), \frac{\varphi(x)}{x^{1+1/s}} (1 - B \cdot \varphi^{1+1/s}(x)) \right) \right) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset,$$

откуда и следует утверждение (17).

Докажем, что выполнено утверждение (18). Действительно, в силу основной леммы и (43) получаем

$$\rho_F(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}) \leq \frac{\varphi(p_i)}{p_i^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_i)), \quad i \geq 1, \quad (44)$$

откуда следует утверждение (18).

Континуальность множества векторов $\mathbf{n} \in \{1\} \times \mathbb{R}^s$ обеспечивается в силу произвольности выбора последовательности “знаков” $*_\nu$. Таких последовательностей континуальное множество.

Осталось доказать, что различным последовательностям “знаков” будут соответствовать различные векторы $\mathbf{n}$.

Для любых двух фиксированных различных последовательностей “знаков” рассмотрим индекс ν такой, что эти последовательности при индексе ν различаются, а до него совпадают.

Докажем, что

$$\rho_F(\mathbf{n}_\nu^+, \mathbf{n}) < \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}} \quad (45)$$

либо

$$\rho_F(\mathbf{n}_\nu^-, \mathbf{n}) < \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}} \quad (46)$$

в зависимости от того, какой вектор ($\mathbf{n}_\nu^+$ или $\mathbf{n}_\nu^-$) используется при построении $\mathbf{w}_{\nu+1}$.

Действительно, в силу леммы 1, основной леммы, (4), (11) и (44)

$$\begin{aligned} \rho_F(\mathbf{n}_\nu^+, \mathbf{n}) &\leq \rho_F(\mathbf{n}_\nu^+, \mathbf{n}_{\nu+1}) + \rho_F(\mathbf{n}_{\nu+1}, \mathbf{n}) \\ &\leq \frac{2\varphi(p_\nu)(s+1)}{(M_\nu p_\nu)^{1+1/s}} + \frac{\varphi(p_{\nu+1})}{p_{\nu+1}^{1+1/s}} (1 + B \cdot \varphi^{1+1/s}(p_{\nu+1})) \\ &< \frac{2\varphi(p_\nu)(s+1)}{(M_\nu p_\nu)^{1+1/s}} + \frac{2\varphi(p_\nu)}{(M_\nu p_\nu)^{1+1/s}} = \frac{2\varphi(p_\nu)(s+2)}{(M_\nu p_\nu)^{1+1/s}} \\ &< \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}} \left(\frac{2(s+2)}{3 \cdot 4^s} \right) < \frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu^{1+1/s}}. \end{aligned}$$

Доказательство неравенства (46) проводится аналогично.

В силу леммы 3 при выборе вектора $\mathbf{n}_\nu^+$ в силу (45) получаем $\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}_\nu \rangle > 0$, а при выборе вектора $\mathbf{n}_\nu^-$ в силу (46) получаем $\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}_\nu \rangle < 0$.

Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Список литературы

- [1] M. Hall, jr., “On the sum and product of continued fractions”, *Ann. of Math.* (2), **48**:4 (1948), 966–993.
- [2] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [3] А. В. Малышев, “Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)”, *Исследования по теории чисел*. 4, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **67**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1977, 5–38; англ. пер.: A. V. Malyshev, “Markov and Lagrange spectra (survey of the literature)”, *J. Soviet Math.*, **16**:1 (1981), 767–788.
- [4] V. Jarnik, “Über die simultanen diophantischen Approximationen”, *Math. Z.*, **33**:1 (1931), 505–543.
- [5] Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин, “О векторах заданного диофантова типа”, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 328–338; англ. пер.: R. K. Akhundzhanov, N. G. Moshchevitin, “Vectors of given Diophantine type”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 318–328.

Р. К. Ахунжанов (R. K. Akhundzhanov)
 Астраханский государственный университет
 E-mail: akhunzha@mail.ru

Поступила в редакцию
 24.12.2009 и 29.08.2012