Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ал. И. Буфетов, Давление и равновесные меры для действия аменабельных групп на пространстве конфигураций, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 3, 37–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:57:35

УДК 519.248.23

Ал. И. Буфетов

Давление и равновесные меры для действия аменабельных групп на пространстве конфигураций

Изучается модель статистической физики на счетной аменабельной группе G . Для естественного действия G на пространстве конфигураций S^G , $|S| < \infty$, и для произвольного замкнутого инвариантного множества $X \subset S^G$ доказывается, что давление, соответствующее потенциалу с конечной нормой на X , существует как предел по любой фёльнеровской последовательности множеств в G . Устанавливается существование равновесной меры.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: аменабельная группа, термодинамический формализм, давление, равновесная мера.

§ 1. Введение

Пусть S – конечное множество с дискретной топологией и G – счетная аменабельная группа. Последовательность конечных множеств $T_n \subset G$ называется фёльнеровской, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|gT_n \Delta T_n|}{|T_n|} = 0, \quad g \in G.$$

Обозначим символом e единицу группы G . Пусть S^G – множество отображений из G в S , снабженное топологией прямого произведения. При $V \subseteq G$ назовем $x \in S^V$ *конфигурацией* на V . Для любых $V \subseteq G$ и $g \in G$ определим отображение $\sigma_V^g: S^V \rightarrow S^{Vg^{-1}}$ формулой

$$(\sigma_V^g x)(g_1) = x(g_1 g), \quad g_1 \in Vg^{-1}, \quad x \in S^V.$$

Вместо σ_G^g будем писать σ^g .

Зафиксируем непустое замкнутое множество $X \subseteq S^G$, инвариантное относительно всех σ^g , и будем называть его *множеством допустимых конфигураций*. Обозначим через x_V ограничение x на V , и пусть $X_V := \{x_V : x \in X\}$.

В [1] был предложен подход к определению давления, отвечающего заданной фёльнеровской последовательности (точнее, к доказательству его независимости от этой последовательности), который требует предварительного обоснования вариационного принципа для давления (заметим, что в [1] рассматривается в определенном смысле более общая ситуация, чем здесь). Прямое доказательство дано в [2], где, однако, накладываются некоторые ограничения как на G , так и на класс фёльнеровских последовательностей. Заметим также, что для

частного случая $X = S^G$ доказательство, не связанное с вариационным принципом, имеется в [3] и [4] (используемые при $X = S^G$ методы не работают в случае произвольного X).

Основное отличие настоящей работы от всех предыдущих, относящихся к данной тематике, состоит в том, что существование предела в определении давления (для произвольного X и произвольной фёльнеровской последовательности) доказывается здесь непосредственно, вне связи с вариационным принципом, который затем рассматривается отдельно. Такой порядок действий представляется более естественным и позволяет получить некоторые новые обобщения (см. замечание 2). Этот подход является, по-видимому, новым даже для случая решетки $\mathbb{Z}^d$ (ср. [5]). В нем используется следствие одной леммы из [6], применявшейся там при доказательстве эргодической теоремы Биркгофа и теоремы Бреймана для действий аменабельной группы.

Напомним основные понятия термодинамического формализма, приспособленные к рассматриваемому случаю (см. [2], [5], [1]).

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ – семейство всех конечных подмножеств G .

Назовем *потенциалом* семейство U функций

$$U_V: X_V \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \in \mathcal{V},$$

такое, что

$$U_{Vg}(x) = U_V(\sigma_{Vg}^g x), \quad g \in G, \quad V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_{Vg}. \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что

$$\|U\| := \sum_{V: e \in V \in \mathcal{V}} \max_{X_V \ni x} |U_V(x)| < \infty.$$

Сумма

$$E(V, x) = \sum_{V' \subset V} U_{V'}(x_{V'}), \quad V' \in \mathcal{V}, \quad V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_V,$$

называется *энергией конфигурации* $x \in X_V$, а выражение

$$Z(V) = \sum_{x \in X_V} \exp[-E(V, x)], \quad V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_V,$$

называется *статистической суммой на V* (при этом естественно считать, что $E(\emptyset, x) \equiv 0$ и $Z(\emptyset) = 1$). Если предел

$$P(U, \{T_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \ln Z(T_n)$$

существует, то $P(U, \{T_n\})$ называется *давлением*, соответствующим U и $\{T_n\}$. Основным результатом этой статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой фёльнеровской последовательности $\{T_n\}$ существует давление $P(U, \{T_n\})$, которое не зависит от $\{T_n\}$.*

Для любого $V \in \mathcal{V}$ и любой вероятностной меры λ на X_V определим *энтропию* $H(V, \lambda)$ равенством

$$H(V, \lambda) = - \sum_{x \in X_V} \lambda(x) \ln \lambda(x).$$

Пусть $\mathcal{M}_0$ – множество вероятностных мер на X , инвариантных относительно всех σ^g . Для $\mu \in \mathcal{M}_0$ будем писать $\mu(f)$ вместо $\int f d\mu$. Для любых множеств $V \subseteq G$ и $W \subseteq V$ введем естественную проекцию $\pi_W^V: S^V \rightarrow S^W$. Для всякой меры ν на S^V обозначим через ν_W^V ее образ под действием π_W^V . Вместо ν_W^G будем писать ν_W .

Хорошо известно (см., например, [7] и [4]), что если $\mu \in \mathcal{M}_0$ и $\{T_n\}$ – фёльнеровская последовательность, то существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} H(T_n, \mu_{T_n}) &=: h(\mu), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \sum_{x \in X_{T_n}} E(T_n, x) \mu_{T_n}(x) &= \mu(\hat{f}_{(U)}), \end{aligned}$$

где

$$\hat{f}_{(U)}(x) = \sum_{V: e \in V \in \mathcal{V}} |V|^{-1} U_V(x_V), \quad x \in X.$$

Известно также (см. лемму 3.2 из [2]), что если $P(U, \{T_n\})$ существует, то для всех $\mu \in \mathcal{M}_0$

$$h(\mu) \leq P(U, \{T_n\}) + \mu(\hat{f}_{(U)}) \quad (1.2)$$

(вариационный принцип). Мера $\mu \in \mathcal{M}_0$ называется *равновесной*, если

$$h(\mu) = P(U) + \mu(\hat{f}_{(U)}).$$

С помощью теоремы 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого потенциала U с $\|U\| < \infty$ существует равновесная мера.*

В § 2 будет доказана теорема 1, § 3 посвящен доказательству теоремы 2; там же сделаны замечания, касающиеся гиббсовского свойства равновесной меры и аналогичных задач в более общей ситуации.

Б. М. Гуревич поставил данную задачу и предложил использовать метод из [6]; автор глубоко признателен ему за это. Автор благодарен М. Л. Бланку за замечания, способствовавшие улучшению текста, и А. М. Стёпину за внимание к работе.

§ 2. Существование давления: доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на возможности “почти разбить” любой элемент фёльнеровской последовательности с достаточно большим номером на множества, полученные с помощью сдвигов из нескольких начальных элементов этой последовательности. Рассуждения распадаются на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство и, как и раньше, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ – совокупность конечных подмножеств группы G . Будем называть *случайным множеством* всякое измеримое отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{V}$. Как обычно, интеграл по мере P (математическое ожидание) будет обозначаться E .

Для конечного набора $\mathcal{C}$ множеств $C \subset G$ назовем *кратностью покрытия* функцию

$$\Lambda_{\mathcal{C}}(g) := \sum_{C \in \mathcal{C}} I_C(g), \quad g \in G. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l = l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что если заданы $F_1, F_2, \dots, F_l \in \mathcal{V}$, $A_1, A_2, \dots, A_l \in \mathcal{V}$ и $F \in \mathcal{V}$, удовлетворяющие условиям*

$$\left| \bigcup_{j=1}^k F_j^{-1} F_{k+1} \right| < (1 + \varepsilon) |F_{k+1}|, \quad k = 1, \dots, l-1, \quad (2.2)$$

$$F_k A_k \subseteq F, \quad |A_k| > (1 - \varepsilon) |F|, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.3)$$

то существуют случайные множества $B(i, a)$, $i = 1, \dots, l$, $a \in A_i$, такие, что

$$B(i, a) = F_i a \quad \text{или} \quad B(i, a) = \emptyset, \quad (2.4)$$

$$E \sum_{i,a} |B(i, a)| > (1 - 2\varepsilon) |F|, \quad (2.5)$$

и для всякой точки $g \in F$ выполняется неравенство

$$E(\Lambda_{\{B(i,a)\}}(g) | \Lambda_{\{B(i,a)\}}(g) > 0) < 1 + \varepsilon. \quad (2.6)$$

Эта лемма непосредственно вытекает из леммы 2.4 работы [6] (в которой следует положить $N_i = 1$, $D = \{e\}$, где e – единичный элемент группы G).

Шаг 2. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Если $D \in \mathcal{V}$ и $\{T_n\}$ – фёльнеровская последовательность, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} |\{v \in T_n : Dv \subseteq T_n\}| = 1. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$\begin{aligned} \{v \in T_n : Dv \not\subseteq T_n\} &= \{v \in T_n : \text{существует такое } d \in D, \text{ что } dv \notin T_n\} \\ &= \bigcup_{d \in D} \{v \in T_n : dv \notin T_n\} = \bigcup_{d \in D} \{v \in T_n : v \notin d^{-1}T_n\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\{v \in T_n : Dv \subseteq T_n\}| \geq |T_n| - \sum_{d \in D} |T_n \Delta d^{-1}T_n|,$$

откуда следует (2.7), так как $\{T_n\}$ – фёльнеровская последовательность и $|D| < \infty$.

Шаг 3. Сначала предположим, что U – потенциал конечного радиуса, т.е. что существует $\Gamma \in \mathcal{V}$ со следующим свойством: если $Vg^{-1} \not\subseteq \Gamma$ для всех $g \in G$, то $U_V(x) = 0$. Для всякого $V \subseteq G$ введем множество

$$N(V) = \{v \in V : v_0v \in G \setminus V \text{ для какого-нибудь } v_0 \in \Gamma\},$$

которое можно понимать как границу V по отношению к Γ . Непосредственно проверяется, что если $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, то

$$Z(V_1 \cup V_2) \leq Z(V_1)|S|^{|V_2|} \exp(\|U\| \cdot |V_2|), \quad (2.8)$$

$$Z(V_1 \cup V_2) \leq Z(V_1)Z(V_2) \exp(\|U\| \cdot |N(V_1)| + \|U\| \cdot |V_1 \cap V_2|). \quad (2.9)$$

Пусть $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}$. Из (2.9) по индукции получаем

$$Z\left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right) \leq \prod_{i=1}^m Z(V_i) \exp\left[\|U\| \sum_{i=1}^m |N(V_i)| + \|U\| \sum_{g \in \bigcup_{i=1}^m V_i} (\Lambda_{\{V_i\}}(g) - 1)\right]. \quad (2.10)$$

Шаг 4. Положим

$$P = \liminf_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \ln Z(T_n), \quad (2.11)$$

где $\{T_n\}$ – заданная фёльнеровская последовательность. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $l = l(\varepsilon)$ из леммы 1.

ЛЕММА 3. *Найдутся такие $i_1 < \dots < i_l < i_{l+1}$, что:*
при $k = 1, \dots, l$

$$|T_{i_k}|^{-1} |N(T_{i_k})| < \varepsilon, \quad (2.12)$$

$$|T_{i_k}|^{-1} \ln Z(T_{i_k}) < P + \varepsilon; \quad (2.13)$$

при $k = 1, \dots, l - 1$

$$\left| \bigcup_{s=1}^k T_{i_s}^{-1} T_{i_{k+1}} \right| < (1 + \varepsilon) |T_{i_{k+1}}|; \quad (2.14)$$

при $k = 1, \dots, l$ и всяком $n \geq i_{l+1}$

$$|\{g \in G : T_{i_k} g \subseteq T_n\}| > (1 - \varepsilon) |T_n|. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать по индукции. Выберем i_1 так, чтобы при $k = 1$ выполнялись неравенства (2.12) и (2.13); поскольку $|N(T_r)| = |T_r \setminus \{v \in T_r : \Gamma v \subset T_r\}| = o(|T_r|)$ при фиксированном Γ и $r \rightarrow \infty$ (по лемме 2), то (2.12) выполняется для всех достаточно больших i_1 , а из определения P видно, что (2.13) выполняется для бесконечно многих i_1 . Если уже выбраны $i_1 < \dots < i_m$, $1 \leq m \leq l - 1$, для которых при $1 \leq k \leq m$ выполняются неравенства (2.12) и (2.13), а при $1 \leq k \leq m - 1$ – неравенство (2.14), то, аналогично предыдущему, существует бесконечное множество натуральных чисел, каждое из которых можно взять в качестве i_{m+1} ; тогда при $k = m + 1$ будут выполняться (2.12) и (2.13), а при $k = m$ будет выполняться (2.14), так как

$$\left| \bigcup_{s=1}^k T_{i_s}^{-1} T_r \right| \leq \left| \bigcup_{s=1}^k T_{i_s}^{-1} T_r \Delta T_r \right| + |T_r| = (1 + o(1)) |T_r|$$

при фиксированных $i_1, \dots, i_k$ и $r \rightarrow \infty$. Зафиксируем одно из таких i_{m+1} . В итоге мы определим $i_1, \dots, i_l$. Остается выбрать i_{l+1} . Лемма 2 показывает, что если в качестве i_{l+1} взять любое достаточно большое число, то при $1 \leq k \leq l$ и всяком $n \geq i_{l+1}$ будет выполняться (2.15).

Шаг 5. Положив в лемме 1

$$F_k := T_{i_k}, \quad F = T_n, \quad A_k := \{g \in G : T_{i_k}g \subseteq T_i\}, \quad 1 \leq k \leq l, \quad n \geq i_{l+1}, \quad (2.16)$$

убеждаемся, что выполняются условия (2.2) и (2.3). Пусть $B(i, a)$, $1 \leq i \leq l$, $a \in A_i$, – случайные множества из этой леммы. Для краткости будем писать $\Lambda(g)$ вместо $\Lambda_{\{B(i, a)\}}$. Введем обозначение

$$Q = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \bigcup_{a \in A_i} B(i, a).$$

Из (2.8) следует, что

$$Z(F) \leq Z(Q) |S|^{|F \setminus Q|} \exp(\|U\| \cdot |F \setminus Q|).$$

Отсюда, применяя (2.10) и беря математическое ожидание, получаем

$$\begin{aligned} \ln Z(F) &\leq \|U\| \left(\mathbb{E} \sum_{i, a} |N(B(i, a))| + \mathbb{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) + \mathbb{E} |F \setminus Q| \right) \\ &\quad + (\ln |S|) \mathbb{E} |F \setminus Q| + \mathbb{E} \sum_{i, a} \ln Z(B(i, a)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Оценим все математические ожидания в правой части (2.17). В силу (2.6)

$$\mathbb{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) \leq |F| \cdot \mathbb{E} (\Lambda(g) - 1 | \Lambda(g) > 0) \leq \varepsilon |F|. \quad (2.18)$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\sum_{g \in Q} \Lambda(g) = \sum_{i, a} |B(i, a)| \quad (2.19)$$

(см. определение кратности покрытия в (2.1)). Из (2.18) и (2.19) получим

$$\mathbb{E} \sum_{i, a} |B(i, a)| \leq |F| + \mathbb{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) \leq (1 + \varepsilon) |F|. \quad (2.20)$$

Из (2.4) и (2.12) видно, что $N(B(i, a)) \leq \varepsilon |B(i, a)|$ при всех i, a . Вместе с (2.20) это дает

$$\mathbb{E} \sum_{i, a} |N(B(i, a))| \leq \varepsilon \mathbb{E} \sum_{i, a} |B(i, a)| \leq \varepsilon (1 + \varepsilon) |F|. \quad (2.21)$$

Далее, в силу (2.18)–(2.20)

$$\mathbb{E} |Q| = \mathbb{E} \sum_{i, a} |B(i, a)| - \mathbb{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) \geq (1 - 3\varepsilon) |F|$$

и, значит,

$$\mathbb{E}|F \setminus Q| \leq 3\varepsilon|F|. \quad (2.22)$$

Наконец, из (2.4), инвариантности потенциала U (см. (1.1)) и неравенства (2.13) следует, что при всех i, a

$$\ln Z(B(i, a)) \leq |B(i, a)|(P + \varepsilon).$$

Поэтому (см. (2.20))

$$\mathbb{E} \sum_{i,a} \ln Z(B(i, a)) \leq (P + \varepsilon) \mathbb{E} \sum_{i,a} |B(i, a)| \leq (P + \varepsilon)(1 + \varepsilon)|F|. \quad (2.23)$$

Подставив (2.18), (2.21)–(2.23) в (2.17) и вспомнив, что в качестве F можно взять T_n при любом $n \geq i_{l+1}$ (см. (2.16)), получим

$$\frac{\ln Z(T_n)}{|T_n|} \leq P + \varepsilon \cdot \text{const}, \quad n \geq i_{l+1}.$$

Отсюда следует, что в (2.11) существует настоящий предел. Таким образом, доказано, что давление $P(U, \{T_n\})$ существует для всякого потенциала конечного радиуса. Используя стандартную аппроксимацию, заключаем, что $P(U, \{T_n\})$ существует для всякого U с $\|U\| < \infty$.

Из существования предела сразу следует, что $P(U, \{T_n\})$ не зависит от $\{T_n\}$, так как объединение двух фёльнеровских последовательностей есть тоже фёльнеровская последовательность.

§ 3. Существование равновесной меры

ЛЕММА 4. Пусть $\{T_n\}$ – фёльнеровская последовательность, $D \in \mathcal{V}(G)$ и

$$W_n := \{g \in T_n : |\{h \in G : g \in Dh \subset T_n\}| = |D|\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|W_n|}{|T_n|} = 1. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $DD^{-1}g \subset T_n$, то $g \in W_n$. Поэтому утверждение следует из леммы 2.

При доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся одним общим утверждением из теории множеств. Для всякого семейства $\mathcal{B}$ подмножеств (не обязательно различных) конечного множества B введем операцию замены любых двух множеств $B', B'' \in \mathcal{B}$ двумя другими множествами: $B' \cap B''$ и $B' \cup B''$. Скажем, что к $\mathcal{B}$ и (B', B'') применена операция $\star$, и обозначим полученное семейство множеств через $\star(B', B'')\mathcal{B}$.

Пусть $\Lambda_{\mathcal{B}}(g)$ – кратность покрытия (см. (2.1)). Заметим, что для любых $B', B'' \in \mathcal{B}$ и $b \in B$

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(b) = \Lambda_{\star(B', B'')\mathcal{B}}(b).$$

Зафиксировав $k \in \mathbb{Z}_+$, положим $E := \{b \in B : \Lambda_{\mathcal{B}}(b) = k\}$.

ЛЕММА 5. В результате последовательного применения к $\mathcal{B}$ нескольких операций $\star$ можно получить семейство, в котором имеется k множеств, содержащих E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, очевидно, можно считать, что $E \neq \emptyset$. Пусть $E = \{b_1, \dots, b_r\}$. По определению при каждом i найдется такое $B_i \in \mathcal{B}$, что $b_i \in B_i$.

Пусть $\mathcal{B}_1 = \star(B_1, B_2)\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_2 = \star(B_1 \cup B_2, B_3)\mathcal{B}_1$ и т.д., на последнем шаге $\mathcal{B}_{r-1} = \star(B_1 \cup \dots \cup B_{r-1}, B_r)\mathcal{B}_{r-2}$. В полученном таким образом наборе множеств $\mathcal{B}_{r-1}$ появилось множество $B_1 \cup \dots \cup B_r$, содержащее E . Выбросив его, заметим, что каждый элемент $b \in E$ входит ровно в $k - 1$ множеств из оставшихся в наборе. Поэтому можно применить те же рассуждения еще $k - 1$ раз и получить в итоге k множеств, содержащих E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для любого $V \in \mathcal{V}$ определим вероятностную меру γ^V на X_V по формуле Гиббса:

$$\gamma^V(x) = (Z(V))^{-1} \exp(-E(V, x)), \quad x \in X_V.$$

В [2; формулы (3.13)–(3.16)] построена такая мера $\gamma \in \mathcal{M}_0$, что

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \lim_{k \rightarrow \infty} |T_k|^{-1} H(T_k, \gamma_{T_k}) \\ &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_k|^{-1} |T_n|^{-1} \sum_{g: T_k g \subset T_n} H(T_k g, \pi_{T_k g}^{T_n} \gamma^{T_n}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть $B_{n,k} = \{b \in G : T_k b \subset T_n\}$, $\mathcal{A}_{n,k}$ – семейство множеств $T_k b$, $b \in B_{n,k}$, и $W_{n,k} = \{g \in T_n : \Lambda_{\mathcal{A}_{n,k}}(g) = |T_k|\}$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 4 $|W_{n,k}| \geq (1 - \varepsilon)|T_n|$, если k фиксировано и n достаточно велико. Сумма энтропий в правой части (3.2) имеет вид $\sum_{A \in \mathcal{A}_{n,k}} H(A, \pi_A^{T_n} \gamma^{T_n})$. Известно, что для любых множеств $C_1, C_2 \in \mathcal{V}(G)$ и любой меры $\alpha \in \mathcal{M}_0$

$$H(C_1, \alpha) + H(C_2, \alpha) \geq H(C_1 \cup C_2, \alpha) + H(C_1 \cap C_2, \alpha) \quad (3.3)$$

(см., например, [5; §3.8]) Значит, при замене набора множеств $\mathcal{A}_{n,k}$ на $\star \mathcal{A}_{n,k}$ сумма энтропий не увеличится. По лемме 5 последовательностью таких замен можно получить набор, в котором не менее $|T_k|$ множеств, содержащих $W_{n,k}$. Отсюда с учетом неотрицательности энтропии получаем

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_k|^{-1} |T_n|^{-1} \sum_{g: T_k g \subset T_n} H(T_k g, \pi_{T_k g}^{T_n} \gamma^{T_n}) \\ &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_k|^{-1} |T_n|^{-1} (|T_k| H(W_{n,k}, \pi_{W_{n,k}}^{T_n} \gamma^{T_n})) \\ &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} (H(T_n, \gamma^{T_n}) - \varepsilon |T_n| \log(|S|)) \\ &\geq -\varepsilon \cdot \log(|S|) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \log(Z(T_n)) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \sum_{x \in X_{T_n}} \gamma^{T_n}(x) E(T_n, x). \end{aligned}$$

По теореме 1 второе слагаемое в последней сумме равно $P(U)$, а третье равно $\gamma(f(U))$ (см. [2]). Значит,

$$P(U) \leq h(\gamma) - \gamma(f(U)).$$

Вместе с обратным неравенством (1.2) это приводит к утверждению теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Действуя аналогично доказательству теоремы 4.2 из [5] и используя теорему 2 (вместо теоремы 3.12 из [5]), можно показать, что всякая равновесная мера является гиббсовской, а при выполнении условия (D) из [5] всякая инвариантная гиббсовская мера является равновесной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Изложенное в § 2 доказательство теоремы 1 применимо и в более общем случае, когда множество состояний S является произвольным измеримым пространством с конечной мерой μ , а в качестве X берется произвольное подмножество прямого произведения S^G , инвариантное относительно всех преобразований σ^g (см. § 1) и такое, что X_V измеримо в S^V при всяком $V \in \mathcal{V}$. Для $V = \{g_1, \dots, g_n\}$ обозначим через μ^V меру на S^V , равную прямому произведению $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$, где $\mu_i = \mu$ при всех i . Предположим, что $\mu^V(X_V) > 0$ для всех $V \in \mathcal{V}$. Потенциал $U = \{U_V(x), V \in \mathcal{V}, x \in X_V\}$ предполагается измеримой (для каждого $V \in \mathcal{V}$) функцией с

$$\|U\| := \sum_{V \in \mathcal{V}} \sup_{x \in X_V} |U_V(x)| < \infty,$$

удовлетворяющей условию инвариантности (1.1), а статистическая сумма определяется равенством

$$Z(V) = \int_{x \in X_V} \exp[-E(V, x)] \mu^V(dx), \quad V \in \mathcal{V}.$$

Остальные понятия, участвующие в формулировке и доказательстве теоремы 1, определяются так же, как в § 1 (ср. [8]). Изменения в доказательстве касаются лишь шагов 3 и 5, так как шаги 1, 2 и 4 связаны только с группой G . Шаг 3 состоит в установлении неравенств (2.8) и (2.9), в первом из которых в новой ситуации надо заменить $|S|$ на $\mu(S)$, а они в свою очередь вытекают из непосредственно проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} E(V_1 \cup V_2, x) &= E(V_1, x_{V_1}) + R_1, \\ E(V_1 \cup V_2, x) &= E(V_1, x_{V_1}) + E(V_2 \setminus V_1, x_{V_2 \setminus V_1}) + R_2, \\ E(V_2, x) &= E(V_2 \setminus V_1, x_{V_2 \setminus V_1}) + R_3, \end{aligned}$$

где $x \in X_{V_1 \cup V_2}$ и

$$|R_1| < \|U\| \cdot |V_2|, \quad |R_2| < \|U\| \cdot N(V_1), \quad |R_3| < \|U\| \cdot |V_1 \cap V_2|.$$

Наконец, шаг 5 использует лишь результаты предыдущих шагов. В итоге мы приходим к утверждению теоремы 1 для потенциалов конечного радиуса. По-видимому, переход к потенциалам общего вида, основанный на аппроксимации, здесь также возможен.

Список литературы

- [1] А. М. Степин, А. Т. Таги-Заде, “Вариационный принцип для аменабельных групп преобразований”, *Докл. АН СССР*, **254**:3 (1980), 545–549; англ. пер.: А. М. Stepin, А. Т. Tagi-Zade, “A variational characterization of the topological pressure of amenable transformation groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **22**:2 (1980), 405–409.
- [2] В. М. Gurevich, А. А. Tempelman, “Hausdorff dimension and pressure in the DLR thermodynamic formalism”, *On Dobrushin’s way. From probability theory to statistical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **198**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 91–107.
- [3] А. А. Tempelman, “Specific characteristics and variational principle for homogeneous random fields”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **65**:3 (1984), 341–365.
- [4] А. А. Темпельман, *Эргодические теоремы на группах*, Мокслас, Вильнюс, 1986; англ. пер.: А. А. Tempelman, *Ergodic theorems for group actions*, Math. Appl., **78**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [5] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium. Statistical mechanics*, Encyclopedia Math. Appl., **5**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1978.
- [6] E. Lindenstrauss, “Pointwise theorems for amenable groups”, *Invent. Math.*, **146**:2 (2001), 259–295.
- [7] D. S. Ornstein, B. Weiss, “Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups”, *J. Analyse Math.*, **48**:1 (1987), 1–141.
- [8] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, М., Мир, 1992; пер. с англ.: Н.-О. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, de Gruyter Stud. Math., **9**, de Gruyter, Berlin, 1988.

Ал. И. Буфетов (Al. I. Bufetov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: a_bufetov@mail.ru

Поступила в редакцию

29.12.2009 и 04.05.2010