Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мисякова, Абелевы группы с полупервичным
кольцом эндоморфизмов, *Матем. сб.*, 2011, том 202, но-
мер 5, 117–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:12:13

УДК 512.541

А. В. Мисякова

Абелевы группы с полупервичным кольцом эндоморфизмов

Рассматривается некоторый класс абелевых групп, в котором исследование смешанных абелевых групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов сводится к исследованию абелевых групп без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: абелева группа, полупервичное кольцо эндоморфизмов.

В монографии [1] сформулирована следующая проблема: свести исследование смешанных групп с нётеровыми справа полупервичными или коммутативными кольцами эндоморфизмов к исследованию групп без кручения с соответствующими кольцами эндоморфизмов. В настоящей статье поставленная задача решается для некоторого класса абелевых групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов. Заметим, что в [1] получено полное описание периодических групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов (см. [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)) и найдены некоторые необходимые условия полупервичности кольца эндоморфизмов нередуцированных групп (см. [1; гл. 3, § 18, упражнение 14)). В настоящей работе описываются нередуцированные группы с полупервичным кольцом эндоморфизмов (предложение 1). В теореме изучение смешанных редуцированных групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов из некоторого класса абелевых групп сводится к изучению редуцированных групп без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов. Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми. Понятия и обозначения, которые не поясняются, являются стандартными, их можно найти, например, в [1], [2] или [3].

Введем некоторые обозначения: $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A ; $P(R)$ – первичный радикал кольца R ; $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R ; Q – группа рациональных чисел; Q_q – группа всех рациональных чисел со знаменателем, взаимно простым с q ; $Z(p^\infty)$ – квазициклическая группа; $Z(p)$ – циклическая группа порядка p ; $o(a)$ – порядок элемента a ; P – некоторое множество различных простых чисел; $T_p(A)$ – p -компонента группы A ; $T(A)$ – периодическая часть группы A ; $r_p(A)$ – p -ранг абелевой группы A ; $h_p^*(a)$ – обобщенная p -высота элемента a .

Напомним некоторые определения и факты. Идеал F кольца R называется *первичным*, если F – собственный идеал (т.е. $F \neq R$) и для любых идеалов K и L кольца R из включения $KL \subseteq F$ следует, что либо $K \subseteq F$, либо $L \subseteq F$. Пересечение $P(R)$ всех первичных идеалов кольца R называется *первичным радикалом кольца R* . Кольцо R называется *полупервичным*, если $P(R) = 0$. Элемент $a \in R$ называется *строго нильпотентным*, если все члены любой

последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ такой, что $a_0 = a$, $a_{n+1} \in a_n R a_n$, начиная с некоторого номера равны нулю (см. [4]). Первичный радикал кольца R совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов (см. [4; гл. 3, § 3.2, предложение 1]).

Следующая конструкция (см. [5]) будет полезна в дальнейшем. Пусть R и S – кольца, ${}_R M_S$ и ${}_S N_R$ – бимодули. Допустим, что существуют бимодульные гомоморфизмы $f: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $g: N \otimes_R M \rightarrow S$, удовлетворяющие условиям ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$, где $mn = f(m \otimes n)$ и $nm = g(n \otimes m)$.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}.$$

Определим сложение матриц из K покомпонентно и умножение как

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + mn' & rm' + ms' \\ nr' + sn' & nm' + ss' \end{pmatrix}.$$

Относительно введенных операций K будет являться кольцом, называемым *кольцом обобщенных матриц* (порядка 2).

В [6] определяются следующие подбимодули бимодулей M и N соответственно:

$$P_r(M) = \{x \in M \mid xN \subseteq P(R)\}, \quad P_r(N) = \{y \in N \mid yM \subseteq P(S)\}.$$

Там же дается описание первичного радикала кольца обобщенных матриц порядка 2. Ниже приведем формулировку этого результата (лемма 2).

Пусть $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нетривиальный идемпотент кольца K . В [7] было показано, что

$$K \cong \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}.$$

Так же, как в [7], для удобства и сокращения записей будем отождествлять эти кольца. Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [7].

ЛЕММА 1. Пусть K – кольцо обобщенных матриц порядка 2. Тогда всякий идеал I кольца K представим в виде

$$I = \begin{pmatrix} eIe & eI(1-e) \\ (1-e)Ie & (1-e)I(1-e) \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Пусть K – кольцо обобщенных матриц порядка 2. Тогда

$$P(K) = \begin{pmatrix} P(R) & P_r(M) \\ P_r(N) & P(S) \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, мы можем получить кольцо обобщенных матриц в следующей ситуации. Пусть $G = A \oplus B$ – прямая сумма двух групп. Хорошо известно, что кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно кольцу матриц $\begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & E(B) \end{pmatrix}$ (см. [3; гл. XV, § 106, теорема 106.1]). Последнее кольцо, очевидно, является кольцом обобщенных матриц, которое обычно отождествляют с $E(G)$.

Следующее утверждение, сформулированное в [1; гл. 3, § 18, упражнение 13], вытекает из замечания 1, леммы 2 и определения полупервичного кольца.

СЛЕДСТВИЕ. *Кольцо эндоморфизмов прямого слагаемого группы с полупервичным кольцом эндоморфизмов само полупервично.*

ЛЕММА 3. *Пусть $G = A \oplus B$, $i: A \rightarrow G$ – естественное вложение, а $\pi: G \rightarrow A$ – естественная проекция. Тогда:*

- 1) *если $\alpha' \in P(E(A))$, то $\alpha \in P(E(G))$, где $\alpha|_A = \alpha'$ и $\alpha B = 0$;*
- 2) *если $\alpha \in P(E(G))$, то $\pi\alpha i \in P(E(A))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 1

$$E(G) = \begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & E(B) \end{pmatrix}$$

– кольцо обобщенных матриц.

1) Пусть $\alpha' \in P(E(A))$. Покажем, что $\alpha = \alpha'\pi \in P(E(G))$. Действительно, так как $\alpha' \in P(E(A))$, то по леммам 1 и 2 найдется $\beta \in P(E(G))$ такое, что $\alpha' = e\beta e$. Поскольку $P(E(G))$ – идеал в кольце $E(G)$, то $\alpha = \alpha'\pi = e\beta e\pi \in P(E(G))$.

Покажем, что $\alpha|_A = \alpha'$. Действительно, для любого элемента $a \in A$ имеем $\alpha(a) = \alpha'(\pi(a)) = \alpha'(a)$.

Покажем, что $\alpha B = 0$. Действительно, $\alpha(b) = \alpha'(\pi(b)) = \alpha'(0) = 0$ для любого $b \in B$.

2) Пусть $\alpha \in P(E(G))$ и $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Заметим, что $\pi\alpha i = \alpha_{11}$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $a \in A$; тогда

$$(\pi\alpha i)(a) = (\pi\alpha) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} \alpha_{11}(a) \\ \alpha_{21}(a) \end{pmatrix} = \alpha_{11}(a).$$

Так как a – произвольный элемент из A , то $\pi\alpha i = \alpha_{11}$. Тогда $\alpha_{11} \in P(E(A))$ по замечанию 1 и лемме 2.

В следующем утверждении описываются нередуцированные группы, имеющие полупервичное кольцо эндоморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $G = A \oplus B$ – нередуцированная группа, где A – редуцированная, B – делимая части группы G . Кольцо $E(G)$ полупервично тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) *B – группа без кручения или периодическая группа;*
- 2) *если $A \neq 0$, то A – элементарная группа, причем если B – периодическая группа, то $T_p(A) = 0$ для любого $p \in P$, где P – множество всех простых чисел p таких, что $T_p(B) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из [1; гл. 3, § 18, упражнение 14], [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)] и [4; гл. 3, § 3.2, предложение 2].

Достаточность. Если G – периодическая группа, то полупервичность кольца $E(G)$ получим из [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)] и [4; гл. 3, § 3.2, предложение 2].

Пусть $A = 0$ и $G = B$ – делимая группа без кручения. Поскольку $P(E(G)) \subseteq J(E(G)) = 0$ (см. [1; гл. 1, § 1] и [1; гл. 4, § 21]), то кольцо $E(G)$ полупервично.

Пусть $A \neq 0$ и $G = A \oplus B$, где A – элементарная группа, B – делимая группа без кручения. Для полупервичности кольца $E(G)$ согласно лемме 2 достаточно показать, что

$$P(E(G)) = \begin{pmatrix} P(E(A)) & P_r(\text{Hom}(B, A)) \\ P_r(\text{Hom}(A, B)) & P(E(B)) \end{pmatrix} = 0.$$

Из элементарности группы A следует, что $P(E(A)) = 0$ (см. [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)] и [4; гл. 3, § 3.2, предложение 2]). Поскольку B – делимая группа без кручения, то $P(E(B)) \subseteq J(E(B)) = 0$. Так как A – редуцированная, а B – делимая части группы G , то $\text{Hom}(B, A) = 0$ (см. [2; гл. VIII, § 43, свойство А), 3)]) и, следовательно, $P_r(\text{Hom}(B, A)) = 0$. Поскольку A – периодическая группа, а B – группа без кручения, то $\text{Hom}(A, B) = 0$ (см. [2; гл. VIII, § 43, свойство А), 1)]) и, следовательно, $P_r(\text{Hom}(A, B)) = 0$. Таким образом, кольцо $E(G)$ полупервично.

Далее с каждой смешанной редуцированной группой G будем связывать множество P всех простых чисел p таких, что $T_p(G) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G удовлетворяет условию конечности, если она не содержит ненулевые элементы, у которых p -высота равна бесконечности для всех $p \in P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть смешанную редуцированную группу G с бесконечным числом ненулевых p -компонент *psp-группой*, если естественное вложение $\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \rightarrow G$ продолжается до p -чистого вложения $G \rightarrow \prod_{p \in P} T_p(G)$ для каждого $p \in P$.

Если G – *psp*-группа, то, отождествляя группы $\bigoplus_{p \in P} T_p(G)$ и G с их образами при данном вложении, можно считать, что

$$\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subset G \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G)$$

и G p -чиста в $\prod_{p \in P} T_p(G)$ для всех $p \in P$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть G – редуцированная смешанная группа, причем для каждого $p \in P$ справедливо $G = T_p(G) \oplus E_p$, $pE_p = E_p$ и $\bigcap_{p \in P} E_p = 0$. Тогда G удовлетворяет условию конечности.

Действительно, пусть существует элемент $0 \neq g \in G$ такой, что $h_p(g) = \infty$ для любого $p \in P$. Так как $g \notin \bigcap_{p \in P} E_p$, то найдется такое $p \in P$, что $g \notin E_p$. Поскольку $G = T_p(G) \oplus E_p$, то $g = a_p + e_p$, где $0 \neq a_p \in T_p(G)$ и $e_p \in E_p$, причем $h_p(e_p) = \infty$ и $h_p^*(a_p) = s < \infty$. Тогда имеем

$$\infty = h_p(g) = \min\{h_p(a_p), h_p(e_p)\} = s,$$

что приводит к противоречию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – смешанная редуцированная группа с полупервичным кольцом эндоморфизмов. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $T(G)$ – элементарная группа и $G/T(G) = p(G/T(G))$ для всякого $p \in P$;

2) если $A = \{a \in G \mid h_p(a) = \infty \text{ для всех } p \in P\}$ и $A \neq 0$, то:

- (а) A является подгруппой без кручения в группе G такой, что $pA = A$ для всех $p \in P$;
- (б) факторгруппа G/A имеет полупервичное кольцо эндоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [1; гл. 3, § 18, упражнение 14] для каждого $p \in P$ следует, что $G = T_p(G) \oplus E_p$, где $T_p(G)$ – элементарная p -группа и $pE_p = E_p$. Следовательно, $T(G)$ – элементарная группа и $pB = B$ для всякого $p \in P$, где $B = \bigcap_{p \in P} E_p$. Факторгруппа $G/T(G)$ как гомоморфный образ группы $G/T_p(G)$, изоморфной E_p , также делится на p для любого $p \in P$. Условие 1) выполнено.

Так как B не содержит ненулевых элементов конечного порядка, то B – подгруппа без кручения в группе G . Рассмотрим подгруппу $A = \{a \in G \mid h_p(a) = \infty \text{ для всех } p \in P\}$ в группе G ; тогда из равенства $G = T_p(G) \oplus E_p$ для каждого $p \in P$ следует $A \subseteq B$. Поскольку $pB = B$ для всякого $p \in P$, то $B \subseteq A$. Таким образом, $A = B$, т.е. выполнен п. 2), (а).

Пусть $\pi_p: G \rightarrow T_p(G)$ и $\pi'_p: \prod_{p \in P} T_p(G) \rightarrow T_p(G)$ – канонические проекции для каждого $p \in P$. Следовательно, существует единственный гомоморфизм $\psi \in \text{Hom}(G, \prod_{p \in P} T_p(G))$ такой, что $\pi'_p \psi = \pi_p$ для каждого $p \in P$ (см. [2; гл. II, § 8, теорема 8.2]). Поскольку $\ker \psi = \bigcap_{p \in P} \ker \pi_i = \bigcap_{p \in P} E_p$, где $G = T_p(G) \oplus E_p$ для любого $p \in P$ (см. [8; гл. 2, § 6, следствие 6.2]), то, отождествляя группы $\bigoplus_{p \in P} T_p(G)$ и G/B с их образами при отображении ψ , получим включения

$$\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subseteq G/B \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G).$$

Так как $T_p(G)$ – элементарная p -группа для любого $p \in P$, то $T(\prod_{p \in P} T_p(G)) = \bigoplus_{p \in P} T_p(G)$. Тогда имеем

$$T(G/B) \subseteq T\left(\prod_{p \in P} T_p(G)\right) = \bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subseteq T(G/B),$$

т.е. $T(G/B) = \bigoplus_{p \in P} T_p(G)$ и $T(G/B)$ – элементарная группа.

Пусть $\bar{G} = G/B$ – смешанная группа. Так как $\bar{G} \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G)$, то $\bar{G}$ – редуцированная группа. Покажем, что $\bar{G}$ удовлетворяет условию конечности. Допустим противное, т.е. пусть существует элемент $0 \neq \bar{g} \in \bar{G}$ такой, что $h_p(\bar{g}) = \infty$ в группе $\bar{G}$ для каждого $p \in P$, где $\bar{g} = g + B$. Тогда для любых $k \in N$ и $p \in P$ в группе $\bar{G}$ разрешимо уравнение $p^k x = \bar{g}$, т.е. найдется $\bar{m} = m + B \in \bar{G}$ такой, что $p^k \bar{m} = \bar{g}$ для любых $k \in N$ и $p \in P$. Тогда имеем $g + B = p^k(m + B) = p^k m + B$. Следовательно, существует $b \in B$ такой, что $p^k m - g = b$. Так как $pB = B$ для любого $p \in P$, то найдется $b' \in B$ такой, что $b = p^k b'$. Тогда имеем $p^k m - g = p^k b'$ или $p^k(m - b') = g$, т.е. $h_p(g) = \infty$ в группе G для любого $p \in P$. Следовательно, $g \in B$ и $\bar{g} = 0$, что противоречит предположению для элемента $\bar{g}$.

Покажем, что факторгруппа $\bar{G}$ – p -чистая подгруппа в $\prod_{p \in P} T_p(G)$ для каждого $p \in P$. Предварительно докажем p -делимость факторгруппы $\bar{G}/T(\bar{G})$ для

каждого $p \in P$. Действительно, рассмотрим соотношение

$$\overline{G}/T(\overline{G}) \cong \frac{\overline{G}}{(T(G) + B)/B} \cong G/(T(G) + B).$$

Поскольку факторгруппа $G/(T(G) + B)$ как гомоморфный образ p -делимой группы $G/T(G)$ для каждого $p \in P$ является p -делимой группой для каждого $p \in P$, то $\overline{G}/T(\overline{G})$ – p -делимая группа для каждого $p \in P$. Пусть $H = \prod_{p \in P} T_p(G)$ и $p^k b = \bar{a}$, где $k \in N$, $\bar{a} \in \overline{G}$, $b \in H$ и $p \in P$. Так как $\overline{G}/T(\overline{G})$ p -делима для каждого $p \in P$, то найдутся $\bar{c} \in \overline{G}$ и $\bar{d} \in T(\overline{G})$ такие, что $\bar{a} = p^k \bar{c} + \bar{d}$. Отсюда $p^k b = p^k \bar{c} + \bar{d}$ и $p^k(b - \bar{c}) = \bar{d} \in T(\overline{G})$. Следовательно, $b - \bar{c} \in T(\overline{G})$ и поэтому $b \in \overline{G}$. Тогда из [1; гл. 3, § 19, упражнение 11] следует, что кольцо $E(\overline{G})$ полупервично.

Если $\overline{G}$ – периодическая группа, то $\overline{G} = T(\overline{G})$ – элементарная группа. Тогда кольцо $E(\overline{G})$ полупервично (см. [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)] и [4; гл. 3, § 3.2, предложение 2)]. Таким образом, п. 2), (b) выполнен.

Рассмотрим дополнительно класс смешанных редуцированных групп, в котором описание смешанных редуцированных групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов будет сведено к описанию редуцированных групп без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$, если $G = T_p(G) \oplus E_p$ для любого $p \in P$ и выполняется одно из следующих условий:

- 1) для любого семейства попарно неизоморфных дополнений $\{E_p\}_{p \in P}$ группы G справедливо $\bigcap_{p \in P} E_p = 0$;
- 2) (a) существует семейство попарно неизоморфных дополнений $\{E_p\}_{p \in P}$ группы G такое, что $B = \bigcap_{p \in P} E_p \neq 0$;
(b) существует B -высокая подгруппа A группы G (см. [2; гл. II, § 9]), содержащая $T(G)$, причем для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$, справедливо $qA = A$.

ЛЕММА 4. Пусть $G \in \mathbb{K}$ и из равенства $G = T_p(G) \oplus E_p$ следует, что $pE_p = E_p$ для любого $p \in P$. Тогда выполняются следующие условия:

- 1) для любого $p \in P$ дополнение E_p к подгруппе $T_p(G)$ является единственным;
- 2) если $\bigcap_{p \in P} E_p \neq 0$, то $G = A \oplus \bigcap_{p \in P} E_p$, причем $\bigcap_{p \in P} E_p$ – группа без кручения, и для любого простого числа q такого, что $q(\bigcap_{p \in P} E_p) \neq \bigcap_{p \in P} E_p$, справедливо $qA = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbb{K}$ и из равенства $G = T_p(G) \oplus E_p$ следует, что $pE_p = E_p$ для любого $p \in P$. Покажем, что выполняется условие 1). Допустим противное, т.е. пусть существует $p \in P$ такое, что дополнение E_p к подгруппе $T_p(G)$ не является единственным. Это равносильно тому, что подгруппа E_p не является вполне характеристической в группе G (см. [2; гл. II, § 9, следствие 9.7]). Следовательно, существуют $b \in E_p$ и $\alpha \in E(G)$ такие, что $\alpha(b) \notin E_p$. Тогда $\alpha(b) = a + d$, где $0 \neq a \in T_p(G)$ и $d \in E_p$. Пусть $\pi: G \rightarrow T_p(G)$ – проекция, тогда $\pi\alpha(b) = a \in T_p(G)$. Поскольку $0 \neq a \in T_p(G)$ и $T_p(G)$ – редуцированная группа, то $h_p(a) < \infty$. Так как из того, что $pT_p(G) \neq T_p(G)$, следует,

что $pE_p = E_p$, то $h_p(b) = \infty$. Таким образом, эндоморфизм $\pi\alpha \in E(G)$ понизил p -высоту элемента b в группе G , что невозможно. Таким образом, E_p – вполне характеристическая подгруппа в G и, следовательно, дополнение E_p к подгруппе $T_p(G)$ является единственным.

Покажем, что выполняется условие 2). Пусть $\bigcap_{p \in P} E_p \neq 0$; обозначим $B = \bigcap_{p \in P} E_p$. Так как $pE_p = E_p$ для любого $p \in P$, то $pB = B$ для любого $p \in P$. Поскольку подгруппа B не содержит ненулевые элементы конечного порядка, то B – группа без кручения.

Так как $G \in \mathbb{K}$, то существует B -высокая подгруппа A в группе G , содержащая $T(G)$, причем для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$, справедливо $qA = A$.

Покажем, что $G = A \oplus B$. Предварительно докажем, что если $qB \neq B$, то B – q -чистая подгруппа в G . Действительно, пусть $qB \neq B$ и в G разрешимо уравнение $q^l x = b \in B$, т.е. существует $g \in G$ такое, что $q^l g = b$. Так как $g \in G = T_p(G) \oplus E_p$ для всякого $p \in P$, то $g = g_p + e_p$ для всякого $p \in P$, где $g_p \in T_p(G)$ и $e_p \in E_p$. Тогда $q^l g_p = b - q^l e_p \in T_p(G) \cap E_p = 0$ для каждого $p \in P$. Следовательно, $b = q^l e_p$ для каждого $p \in P$. Пусть $b = q^l e_p$ и $b = q^l e_s$ для произвольных $p, s \in P$. Тогда $q^l(e_p - e_s) = 0$. Так как $qB \neq B$, то $q \notin P$ и, следовательно, $e_p - e_s = 0$, т.е. $e_p = e_s$ для произвольных $p, s \in P$. Следовательно, $e_p \in \bigcap_{p \in P} E_p = B$ и B – q -чистая подгруппа в G для всякого простого числа q такого, что $qB \neq B$.

Так как A – B -высокая подгруппа в группе G , то для доказательства равенства $G = A \oplus B$ согласно [2; гл. II, § 9, лемма 9.9] достаточно показать, что из выражения $pg = b + a$ ($g \in G$, $b \in B$, $a \in A$) непременно следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$. Если $pB = B$, то, очевидно, существует $b' \in B$ такой, что $pb' = b$. Пусть $pB \neq B$. Тогда $pA = A$, т.е. найдется элемент $a' \in A$ такой, что $pa' = a$. Следовательно, из равенства $pg = b + a$ получим $p(g - a') = b$. Так как $pB \neq B$, то B – p -чистая подгруппа в группе G . Поэтому существует $b' \in B$ такой, что $pb' = b$.

ТЕОРЕМА. Пусть $G \in \mathbb{K}$. Кольцо $E(G)$ полупервично тогда и только тогда, когда для каждого $p \in P$ в разложении $G = T_p(G) \oplus E_p$ подгруппа $T_p(G)$ является элементарной и $pE_p = E_p$, причем выполняется одно из следующих условий:

- 1) если $\bigcap_{p \in P} E_p = 0$, то G является psp -группой;
- 2) если $\bigcap_{p \in P} E_p \neq 0$, то $G = A \oplus (\bigcap_{p \in P} E_p)$, где:
 - (а) если A – смешанная группа, то A удовлетворяет условию конечности и является psp -группой;
 - (б) $qA = A$ для любого простого числа q такого, что $q(\bigcap_{p \in P} E_p) \neq \bigcap_{p \in P} E_p$;
 - (с) $\bigcap_{p \in P} E_p$ – группа без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Так как $G \in \mathbb{K}$, то для каждого $p \in P$ имеем $G = T_p(G) \oplus E_p$. Тогда $T_p(G)$ – элементарная подгруппа и $pE_p = E_p$ (см. [1; гл. 3, § 18, упражнение 14]). По условию 1) леммы 4 для любого $p \in P$ дополнение E_p к подгруппе $T_p(G)$ является единственным. Поскольку $pE_p = E_p$ для любого $p \in P$, то $pB = B$ для всякого $p \in P$, где $B = \bigcap_{p \in P} E_p$.

Если $\bigcap_{p \in P} E_p = 0$, то группа G удовлетворяет условию конечности и является psp -группой, как следует из замечания 2 и из [1; гл. 3, § 19, упражнение 11] соответственно. Следовательно, условие 1) выполнено.

Пусть $\bigcap_{p \in P} E_p \neq 0$; тогда по лемме 4 получаем, что $G = A \oplus \bigcap_{p \in P} E_p$, где $\bigcap_{p \in P} E_p$ – группа без кручения, и для любого простого числа q такого, что $q(\bigcap_{p \in P} E_p) \neq \bigcap_{p \in P} E_p$, имеем $qA = A$.

Покажем, что если A – смешанная группа, то A удовлетворяет условию конечности и является psp -группой. Докажем, что справедливо первое из этих условий. Допустим противное, т.е. пусть существует $0 \neq a \in A$ такой, что $h_p(a) = \infty$ для любого $p \in P$. Тогда $o(a) = \infty$; для любого $p \in P$ рассмотрим разложение $G = T_p(G) \oplus E_p$, т.е. $a = g_p + e_p$, где $g_p \in G_p$ и $e_p \in E_p$. Если $g_p \neq 0$, то $\infty = h_p(a) = \min\{h_p(g_p), h_p(e_p)\} < \infty$, что невозможно. Следовательно, для любого $p \in P$ имеем $a = e_p \in \bigcap_{p \in P} E_p = B$, т.е. $a \in A \cap B = 0$, что противоречит предположению для элемента a . Таким образом, A удовлетворяет условию конечности.

Покажем, что A – psp -группа. Действительно, так как $G = A \oplus B$, то по следствию 3 кольца $E(A)$ и $E(B)$ полупервичны. Поскольку A – редуцированная смешанная группа и A удовлетворяет условию конечности, то A является psp -группой (см. [1; гл. 3, § 19, упражнение 11]).

Достаточность. Пусть $T_p(G)$ – элементарная p -группа для любого $p \in P$. Так как $G \in \mathbb{K}$, то $G = T_p(G) \oplus E_p$, где $pE_p = E_p$. Если выполняется условие 1), то из замечания 2 и [1; гл. 3, § 19, упражнение 11]) вытекает полупервичность кольца $E(G)$. Если выполняется условие 2), то для $B = \bigcap_{p \in P} E_p$ имеем $pB = B$ для любого $p \in P$.

Пусть A – периодическая группа и $A = \bigoplus_{p \in P} T_p(G)$. Поскольку $T_p(G)$ – элементарная p -группа для каждого $p \in P$, то кольцо $E(A)$ полупервично (см. [1; гл. 3, § 15, упражнение 3, б)] и [4; гл. 3, § 3.2, предложение 2]).

Пусть A – смешанная группа; тогда A удовлетворяет условию конечности и является psp -группой. Следовательно, группа A имеет полупервичное кольцо эндоморфизмов (см. [1; гл. 3, § 19, упражнение 11]).

Для полупервичности кольца $E(G)$ осталось заметить (см. лемму 2), что

$$P_r(\text{Hom}(A, B)) = 0, \quad P_r(\text{Hom}(B, A)) = 0.$$

Для выполнения равенства $P_r(\text{Hom}(A, B)) = 0$ достаточно показать, что

$$\text{Hom}(A, B) = 0.$$

Допустим противное, т.е. пусть существует $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(A, B)$. Следовательно, найдутся ненулевые элементы $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $\varphi(a) = b$. Поскольку B – редуцированная группа, то существует простое число q такое, что $h_q(b) = k < \infty$. Так как из $qB \neq B$ следует $qA = A$, то $h_q(a) = \infty$. Таким образом, гомоморфизм φ понизил q -высоту элемента a , что противоречит [2; гл. VI, § 37, свойство 5]. Следовательно, $\text{Hom}(A, B) = 0$. Аналогично, для выполнения равенства $P_r(\text{Hom}(B, A)) = 0$ достаточно показать, что $\text{Hom}(B, A) = 0$. Предположим противное, т.е. пусть существует $0 \neq \psi \in \text{Hom}(B, A)$. Тогда найдутся ненулевые элементы $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $\psi(b) = a$. Так как A – редуцированная группа, то существует простое число p такое, что $h_p(a) < \infty$. Поскольку

из $pA \neq A$ следует, что $pB = B$, то $h_p(b) = \infty$. Таким образом, гомоморфизм ψ понизил p -высоту элемента b , что невозможно. Следовательно, $\text{Hom}(B, A) = 0$. В результате получили, что $P(E(G)) = 0$, т.е. $E(G)$ – полупервичное кольцо.

Далее покажем, что класс $\mathbb{K}$ является довольно широким. В частности, он содержит все смешанные редуцированные расщепляемые группы с полупервичным кольцом эндоморфизмов и все группы с полупервичным кольцом эндоморфизмов, описанные в [1; гл. 3, § 19, упражнение 11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если G – редуцированная смешанная группа с полупервичным кольцом эндоморфизмов, для которой выполняется одно из следующих условий:

- 1) G удовлетворяет условию конечности;
- 2) G – расщепляемая группа;

то $G \in \mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа G имеет полупервичное кольцо эндоморфизмов, то из [1; гл. 3, § 18, упражнение 14] для каждого $p \in P$ получаем $G = T_p(G) \oplus E_p$, где $pE_p = E_p$ и $T_p(G)$ – элементарная p -группа. Доказательство единственности дополнения E_p к подгруппе $T_p(G)$ для каждого $p \in P$ проводится, как в лемме 4. Следовательно, семейство $\{E_p\}_{p \in P}$ определяется единственным образом.

Так как в условии 1) группа G удовлетворяет условию конечности, то

$$\bigcap_{p \in P} E_p = 0$$

и, следовательно, $G \in \mathbb{K}$.

Рассмотрим условие 2). Пусть $G = A \oplus B$ – расщепляемая группа, где $A = T(G)$, B – группа без кручения. Поскольку $\bigcap_{p \in P} E_p$ – группа без кручения, то $\bigcap_{p \in P} E_p \subseteq B$. Так как $pB = B$ для любого $p \in P$ (см. предложение 2), то $B \subseteq \bigcap_{p \in P} E_p$ и, следовательно, $B = \bigcap_{p \in P} E_p$. Тогда для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$, имеем $q \notin P$, и поэтому $qA = A$. Действительно, так как $qA \subseteq A$, то достаточно показать, что $A \subseteq qA$. Пусть $a \in A$ и $o(a) = n$. Так как $q \notin P$, то $(n, q) = 1$, т.е. существуют целые числа u, v такие, что $un + vq = 1$. Тогда имеем $(un)a + (vq)a = a$, т.е. $a = q(va) \in qA$.

Группа A как прямое слагаемое группы G является B -высокой подгруппой этой группы. Поскольку $A = T(G)$, то $G \in \mathbb{K}$.

Следующий простой пример показывает, что класс $\mathbb{K}$ строго содержит классы групп с полупервичным кольцом эндоморфизмов, описанные в предложении 3.

ПРИМЕР. Пусть $G = \prod_{p \in P} Z(p) \oplus Q_q$, где $q \notin P$ и $|P| = \aleph_0$. Тогда $G \in \mathbb{K}$ и $E(G)$ – полупервичное кольцо.

Покажем, что группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$. Действительно, поскольку $pQ_q = Q_q$ для любого простого числа $p \neq q$ (см. [3; гл. XIII, § 85, пример 1]), то для каждого $p \in P$ из равенства $G = Z(p) \oplus E_p$ получаем $pE_p = E_p$. Так как $\bigcap_{p \in P} E_p = Q_q$ и $q(\prod_{p \in P} Z(p)) = \prod_{p \in P} Z(p)$, причем $\prod_{p \in P} Z(p)$ является Q_q -высокой подгруппой в группе G как прямое слагаемое этой группы, то

$G \in \mathbb{K}$. Поскольку кольцо эндоморфизмов группы Q_q порождается единицей и всеми такими числами p^{-1} , что $pQ_q = Q_q$ (см. [3; гл. XV, § 106, пример 4]), то в кольце $E(Q_q)$ только нулевой элемент является строго нильпотентным. Таким образом, кольцо $E(Q_q)$ полупервично. Группа $\prod_{p \in P} Z(p)$ удовлетворяет условию конечности. Отождествляя $\bigoplus_{p \in P} Z(p)$ и $T(\prod_{p \in P} Z(p))$, можно считать, что $\prod_{p \in P} Z(p)$ является psp -группой. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы, следовательно, кольцо $E(G)$ полупервично.

Список литературы

- [1] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Связи абелевых групп и их кольца эндоморфизмов*, ТГУ, Томск, 2002; [англ. пер.: P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev, Endomorphism rings of abelian groups, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.](#)
- [2] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974; [пер. с англ.: L. Fuchs, Infinite abelian groups, v. I, Academic Press, New York–London, 1970.](#)
- [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 2, Мир, М., 1977; [пер. с англ.: L. Fuchs, Infinite abelian groups, v. II, Academic Press, New York–London, 1973.](#)
- [4] И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, М., 1971; [пер. с англ.: J. Lambek, Lectures on rings and modules, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto–London, 1966.](#)
- [5] L. H. Rowen, *Ring theory*, v. 1, Pure Appl. Math., **127**, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [6] Е. Ю. Каравдина, “Первичный радикал кольца обобщенных матриц порядка 2”, *Международная конференция по математике и механике: Тезисы докладов*, ТГУ, Томск, 2003.
- [7] Е. Ю. Каравдина, “Радикал Джекобсона кольца обобщенных матриц порядка 2”, *Международная конференция по математике и механике: Избранные доклады*, ТГУ, Томск, 2003, 19–27.
- [8] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1974.

А. В. Мисякова (A. V. Misyakova)
Томский государственный университет
E-mail: asya_mis@mail.ru

Поступила в редакцию
11.01.2010 и 11.05.2010