Общероссийский математический портал

И. И. Скрыпник, Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 9, 91–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:39:12

УДК 517.946

И. И. Скрыпник

Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях

Найдено точное условие устранимости особенности на гладком многообразии для решений нелинейных дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Условие сформулировано в форме зависимости поточечного поведения решения от расстояния до особого многообразия. Полученное условие ослабляет известное достаточное условие Дж. Серрина для устранимости особенности на многообразии.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

В данной работе изучаются условия, обеспечивающие устранимость особенности на гладком многообразии Γ решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma. \quad (1.1)$$

Хорошо известен результат Дж. Серрина [1] об устранимости особенности решения уравнения (1.1) на многообразии Γ размерности s при выполнении условий $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega \setminus \Gamma)$

$$u(x) = o\left((d(x, \Gamma))^{(p+s-N)/(p-1)+\delta}\right), \quad \delta > 0, \quad (1.2)$$

где $d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до многообразия Γ , N – размерность области Ω , $p > 1$, $N - p - s > 0$. Аналогичный результат доказан в [1] при $N - p - s = 0$ в терминах $\ln d(x, \Gamma)$.

В данной работе установлено точное условие на поведение $u(x)$ в окрестности Γ , обеспечивающее устранимость особенности на Γ для решения уравнения (1.1). Это условие имеет вид равенства (1.2) с $\delta = 0$, и, тем самым, усиливается результат Дж. Серрина. Доказательство принципиально отличается от доказательства в работе [1] и основано на новых поточечных оценках сингулярных решений. В случае изолированной особенности ($s = 0$) аналогичное усиление результата Дж. Серрина получено в [2]. Неулучшаемость результатов данной работы следует из просто конструируемых решений с особенностями для уравнения p -Лапласа. Полученный

результат является новым даже для линейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами (см. [3]). Отметим, что наш подход продолжает исследования И. В. Скрыпника по поточечным оценкам нелинейных емкостных потенциалов (см., например, [4], [5]).

Проблеме изучения сингулярностей решений нелинейных эллиптических уравнений посвящена обширная литература, однако в большинстве работ изучаются уравнения специальной формы с операторами Лапласа или p -Лапласа в главной части. Обзор этих результатов имеется в монографии Л. Верона [6]. В частности, решения с точечной особенностью изучались в [7].

§ 2. Формулировка основных результатов

Далее s – натуральное число, не превышающее $N - 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Будем предполагать, что функции $a_j(x, u, \xi)$, $j = 0, 1, \dots, N$, удовлетворяют следующим условиям:

- а₁) $a_j(x, u, \xi)$ определены для $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, являются измеримыми функциями x для всех $(u, \xi) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$ и непрерывными функциями u, ξ для почти всех $x \in \Omega$;
- а₂) существуют числа $p \in (1, N - s]$, $\nu_1, \nu_2 > 0$ такие, что для всех значений x, u, ξ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_j(x, u, \xi) \xi_j &\geq \nu_1 |\xi|^p - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \\ |a_j(x, u, \xi)| &\leq \nu_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \quad j = 1, \dots, n, \\ |a_0(x, u, \xi)| &\leq \nu_3(x) |\xi|^{p-1} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\nu_3(x), g_i(x), f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, – неотрицательные функции такие, что

$$\begin{aligned} \nu_3^p(x) &\in L^{p_1}(\Omega), \quad f_i(x), g_i(x) \in L^{p_i}(\Omega), \quad i = 1, 2, 3, \\ p_1 = p_3 &= \frac{(p-1)}{p} p_2 = \frac{N}{p-\delta}, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2} \min\{p-1, 1\}\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что Γ – многообразие класса C^1 без края размерности s , содержащееся в Ω . Будем говорить, что $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$, если для произвольной функции $\psi(x) \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$, равной нулю вблизи $\partial\Omega \cup \Gamma$, имеет место включение $u(x)\psi(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ и выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\psi) dx + \int_{\Omega} a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi\psi dx = 0 \quad (2.3)$$

для любой функции $\varphi(x) \in W_p^1(\Omega)$.

Обозначим $r_0 = \min\{d(\Gamma, \partial\Omega), 1\}$, где $d(\Gamma, \partial\Omega)$ – расстояние между Γ и $\partial\Omega$. Для $0 < r \leq r_0$ определим

$$M(r) = \max_{r \leq d(x, \Gamma) \leq r_0} |u(x)|. \quad (2.4)$$

Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (1.1) *имеет устранимую особенность на многообразии* Γ , если можно продолжить $u(x)$ на Γ таким образом, чтобы полученное продолжение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ удовлетворяло уравнению (1.1) в Ω и $\tilde{u}(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$.

Будем говорить, что функция $\omega(r)$ является *наилучшей для устранимости особенности* $u(x)$ на многообразии Γ , если из условия

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r)\omega(r) = 0 \quad (2.5)$$

следует устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения (1.1) и если не существует иной функции $\bar{\omega}(r)$ такой, что условие

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r)\bar{\omega}(r) = 0$$

обеспечивает устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения вида (1.1) и $\lim_{r \rightarrow 0} (\bar{\omega}(r)/\omega(r)) = 0$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть при $1 < p < N - s$, $1 \leq s \leq N - 2$ выполнены условия $a_1)$, $a_2)$, и пусть $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим также, что

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r)r^{(N-p-s)/(p-1)} = 0. \quad (2.6)$$

Тогда особенность $u(x)$ на Γ устранима, причем функция $r^{(N-p-s)/(p-1)}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть при $p = N - s$, $1 \leq s \leq N - 2$ выполнены условия $a_1)$, $a_2)$, и пусть $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим, что

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r)|\ln r|^{-1} = 0. \quad (2.7)$$

Тогда особенность на многообразии Γ устранима и функция $|\ln r|^{-1}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условия на коэффициенты уравнения (1.1) можно писать с более сильным ростом относительно u , чем это предполагается в неравенстве (2.1). Достаточно для этого включить в $g_i(x)$ некоторые степени $u(x)$ аналогично тому, как это сделано в разделе 6 работы [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из доказательства теоремы 2.1 легко видеть, что можно заменить условие (2.6) следующими условиями:

$$\begin{aligned} \sup_{0 < r \leq r_0} M(r)r^{(N-p-s)/(p-1)} &< \infty, \\ \liminf_{r \rightarrow 0} M(r)r^{(N-p-s)/(p-1)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

которые также обеспечивают устранимость особенности решения уравнения (1.1) на многообразии Γ .

Доказательство теоремы 2.1 подробно проведено в данной работе. Доказательство теоремы 2.2 будет изложено в другой нашей статье.

Теорема 2.1 следует из теоремы Серрина и следующей поточечной оценки:

$$M(\rho) \leq K \rho^{-(N-p-s)/(p-1)} \times \left((\tilde{\varkappa}(r))^{\lambda/(p+\lambda-1)} (M^{p-1}(r) r^{N-s-p})^{1/(p+\lambda-1)} + \tilde{\varkappa}(r) \left(\rho^{\tau_1} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\tau_2} \right) \right), \quad (2.9)$$

доказанной в теореме 5.1 для $0 < r < \tilde{\theta}\rho \leq r_0$ с некоторыми положительными постоянными $K, \lambda, \tilde{\theta}, \tau_1, \tau_2$ и функцией

$$\tilde{\varkappa}(r) = \max_{r \leq t \leq r_0} M(t) t^{(N-s-p)/(p-1)}. \quad (2.10)$$

Доказательству оценки (2.9) фактически посвящена основная часть статьи. Оценке (2.9) предшествуют интегральные оценки для градиента решения (в §3) и для решения уравнения (1.1) (в §4). Оценка (2.9) доказана в §5, доказательство теоремы 2.1 содержится в §6.

§3. Интегральные оценки градиента решения для $1 < p < N - s$

Зафиксируем покрытие многообразия Γ локальными окрестностями $U^{(i)}$, $i = 1, \dots, I$, так, чтобы в локальных координатах $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, \dots, y_N^{(i)})$, соответствующих окрестности $U^{(i)}$, выполнялось включение

$$\Gamma \cap C^{(i)}(R_0, H_0) \subset \{y_1^{(i)} = \dots = y_{N-s}^{(i)} = 0\},$$

где $C^{(i)}(R_0, H_0) = \{y^{(i)} : |[y^{(i)}]'| \leq R_0, |[y^{(i)}]''| \leq H_0\}$, $[y^{(i)}]' = (y_1^{(i)}, \dots, y_{N-s}^{(i)})$, $[y^{(i)}]'' = (y_{N-s+1}^{(i)}, \dots, y_N^{(i)})$. Мы можем предполагать, что R_0, H_0 не зависят от i и таковы, что

$$C^{(i)}(R_0, H_0) \subset \Omega, \quad \bigcup_{i=1}^I C^{(i)}\left(R_0, \frac{H_0}{2}\right) \supset \Gamma.$$

Для решения $u(x)$ уравнения (1.1), записанного в виде $u^{(i)}(y^{(i)})$ в координатах $y^{(i)}$, определим

$$m^{(i)}(r) = \max_{y^{(i)} \in C^{(i)}(R_0, H_0/2) \setminus C^{(i)}(r, H_0/2)} \{|u^{(i)}(y^{(i)})|\}$$

и обозначим

$$m(r) = \max_{i=1, \dots, I} \{m^{(i)}(r)\}. \quad (3.1)$$

Наши рассуждения будут вестись дальше в локальных координатах. Для простоты обозначений будем опускать у них индекс i . Мы также можем обозначать их через x вместо y . Тем самым, достаточно ограничиться рассмотрением случая

$$C(R_0, H_0) \cap \Gamma \subset \{x_1 = \dots = x_{N-s} = 0\}, \quad (3.2)$$

где $C(R_0, H_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x'| < R_0, |x''| < H_0\}$ и $x' = (x_1, \dots, x_{N-s}), x'' = (x_{N-s+1}, \dots, x_N)$. Можем также предполагать, что при $0 < r \leq R_0$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in \overline{C(R_0, H_0)} \setminus C(r, H_0)} |u(x)| \leq m(C_0 r) \quad (3.3)$$

с некоторой фиксированной постоянной C_0 и функцией $m(r)$, определенной равенством (3.1).

Обозначим при $0 < r \leq R_0$

$$E(r) = \{x \in C(R_0, H_0) : u(x) > m(r)\} \quad (3.4)$$

и заметим, что (3.3) влечет включение $E(r) \subset C(r/C_0, H_0)$. Определим функцию

$$u_r(x) = \max\{u(x) - m(r), 0\}, \quad x \in C(R_0, H_0) \setminus \Gamma. \quad (3.5)$$

Зафиксируем некоторую функцию $\tau: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такую, что

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 0, \quad t \leq 1, \quad \tau(t) = 1, \quad t \geq 2, \\ 0 &\leq \frac{d\tau(t)}{dt} \leq 2, \quad t \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Определим при $r > 0, h > 0$ следующие функции:

$$\psi_r(x) = \tau\left(\frac{|x'|}{r}\right), \quad \chi_h(x) = 1 - \tau\left(\frac{|x'' - \xi''|}{h}\right), \quad (3.6)$$

где $\xi'' = (\xi_{N-s+1}, \dots, \xi_N)$ — некоторая фиксированная точка такая, что $|\xi''| \leq H/2$. Определим также при $0 < t \leq R_0$ функцию $\varkappa(t)$ равенством

$$\varkappa^{p-1}(t) = \max_{t \leq r \leq R_0} m^{p-1}(r) r^{N-p-s}. \quad (3.7)$$

Ограниченность функции $\varkappa(t)$ следует из условия (2.6), которое в дальнейшем предполагается выполненным.

Постоянные $\nu_1, \nu_2, N, p, \delta, s, R_0, H_0, C_0$, нормы функций $\nu_3(x), f_i(x), g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, в соответствующих пространствах будем считать известными параметрами.

На протяжении всей работы через $C_j, j = 1, 2, \dots$, обозначаются постоянные, зависящие лишь от известных параметров.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_1, R_1 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при

$$0 < r < \rho \leq R_1, \quad 0 < h \leq \frac{H_0}{2}, \quad \rho \leq h, \quad (3.8)$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ & \leq K_1 \left(m^p(C_0 r) r^{N-p-s} h^s + m^p(\rho) (\rho^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\rho}{h} \right)^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \right) \quad (3.9) \end{aligned}$$

с функциями $\psi_r(x), \chi_h(x)$, определенными равенствами (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Серрина [1] об устранимости особенности при выполнении условия (1.2) теорему 2.1 нужно доказывать только в случае, если $m(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому можем считать, что для R_1 выполнены условия

$$R_1 \leq R_0, \quad m(R_1) \geq 1. \quad (3.10)$$

Подставим в интегральное тождество (2.3) следующие функции:

$$\varphi(x) = u_\rho(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x), \quad \psi(x) = \psi_{r/2}(x) \chi_{2h}(x),$$

предполагая, что $0 < r < \rho < R_0/2$, $0 < h \leq H_0/2$. Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq C_1 \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E(\rho)} h_1(x) u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ I_2 &= \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \\ I_3 &= \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx, \\ I_4 &= \int_{E(\rho) \cap K(r)} u^p(x) (f_2(x) + g_2(x))^{p/(p-1)} \chi_h^p(x) dx, \\ I_5 &= m^p(\rho) \int_{E(\rho)} h_2(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ h_1(x) &= f_1(x) + g_1(x) + (f_2(x) + g_2(x))^{p/(p-1)} + f_3(x) + g_3(x) + \nu_3^p(x), \\ h_2(x) &= f_1(x) + g_1(x) + (f_2(x) + g_2(x))^{p/(p-1)} + f_3(x) + g_3(x), \\ K(r) &= \{x \in \mathbb{R}^N : r \leq |x'| \leq 2r\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее будем оценивать слагаемые правой части (3.11). Используя условия (2.2), неравенство Гёльдера и теорему вложения, получаем

$$I_1 \leq C_2 (\text{mes } E(\rho))^{\delta/N} \left(\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx + m^p(C_0 r) r^{N-p-s} h^s + I_3 \right). \quad (3.14)$$

Непосредственно из определения $m(r)$ следует оценка

$$I_2 \leq C_3 m^p(C_0 r) r^{N-p-s} h^s. \quad (3.15)$$

Интеграл I_3 представим в виде

$$I_3 = \int_{E(\rho) \cap K(r)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx + \int_{E(\rho) \setminus K(r)} u_\rho^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx. \quad (3.16)$$

Оценивая в первом интеграле в (3.16) $u_\rho(x)$ через $m(C_0 r)$ и оценивая второй интеграл по неравенству Пуанкаре (по переменной x'), получаем

$$I_3 \leq C_4 \left(m^p(C_0 r) r^{N-s} h^{s-p} + \left(\frac{\rho}{h} \right)^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \right). \quad (3.17)$$

Интеграл I_4 оценим, мажорируя $u_\rho(x)$ через $m(C_0 r)$ и применяя неравенство Гёльдера. В результате имеем следующее неравенство

$$I_4 \leq C_5 m^p(C_0 r) (r^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N}. \quad (3.18)$$

Наконец, в силу (2.2) и неравенства Гёльдера имеем

$$I_5 \leq C_6 m^p(\rho) (\rho^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N}. \quad (3.19)$$

Пусть R_1 дополнительно удовлетворяет условию

$$C_2 \left(\text{mes } C \left(\frac{R_1}{C_0}, H_0 \right) \right)^{\delta/N} < \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

Поскольку при $\rho \leq R_1$ имеет место включение $E(\rho) \subset C(R_1/C_0, H_0)$, из (3.11)–(3.19) получаем оценку (3.9), что и завершает доказательство леммы 3.1.

Нам понадобится глобальный аналог оценок (3.9). Можно построить функцию $\tilde{d}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$ класса C^1 такую, что для $x \in \overline{\Omega}$ выполнено неравенство

$$k_1 d(x, \Gamma) \leq \tilde{d}(x) \leq k_2 d(x, \Gamma) \quad (3.21)$$

с неотрицательными постоянными k_1, k_2 , которые тоже будем включать в множество известных параметров. При этом для функции $\tilde{d}$ можно добиться выполнения условия $\tilde{d}(x) = |x'|$ при $x \in C(R_0, H_0)$.

Определим

$$\begin{aligned} \tilde{C}(r) &= \{x \in \overline{\Omega} : \tilde{d}(x) < r\}, \\ \tilde{m}(r) &= \max_{x \in \overline{\Omega} \setminus \tilde{C}(r)} |u(x)|, \\ \tilde{u}_r(x) &= \max\{u(x) - \tilde{m}(r), 0\}, \quad \tilde{\psi}_r(x) = \tau \left(\frac{\tilde{d}(x)}{r} \right), \\ \tilde{E}(r) &= \{x \in \overline{\Omega} : u(x) > \tilde{m}(r)\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где τ – функция, используемая в (3.6).

Подставляя в (2.3) функции

$$\varphi(x) = \tilde{u}_\rho(x) \tilde{\psi}_r^{p-1}(x), \quad \psi(x) = \tilde{\psi}_r(x)$$

и оценивая возникающие интегралы подобно оценкам в доказательстве леммы 3.1, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_2 , R_2 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при $0 < \tilde{r} < \tilde{\rho} \leq R_2$ выполнена оценка*

$$\int_{\tilde{E}(\tilde{\rho})} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \tilde{\psi}_{\tilde{r}}^p(x) dx \leq K_2 (\tilde{m}^p(\tilde{r}) \tilde{r}^{N-p-s} + \tilde{m}^p(\tilde{\rho}) \tilde{\rho}^{(N-s)(N-p+\delta)/N}). \quad (3.23)$$

Заметим, что с некоторыми положительными постоянными k_3 , k_4 выполнено неравенство

$$\tilde{m}(k_3 r) \leq m(r) \leq \tilde{m}(k_4 r) \quad (3.24)$$

при $0 < r \leq R_0$.

ЛЕММА 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_3 , R_3 , γ_1 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при*

$$0 < r < \rho \leq R_3, \quad 0 < h \leq \frac{H_0}{2}, \quad \rho \leq \gamma_1 h \quad (3.25)$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ & \leq K_3 (m^p(C_0 r) r^{N-p-s} h^s + m^p(\rho) (\rho^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (3.23) с $\tilde{r} = k_3 r$, $\tilde{\rho} = k_3 \rho$ и (3.24) следует при $0 < r < \rho \leq R_2/k_3$ оценка

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{H_0/2}^p(x) dx \\ & \leq C_7 (m^p(C_0 r) r^{N-p-s} + m^p(\rho) \rho^{(N-s)(N-p+\delta)/N}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

и, тем самым, (3.26) справедливо при $h = H_0/2$ (с постоянной $K_3(H_0/2)$, зависящей от H_0).

Далее доказываем (3.26) индукцией по j для $h = h_j = H_0/2^j$. Предположим, что неравенство (3.26) справедливо при некотором $j \geq 1$ с постоянной $K_3(h_j)$, и установим это неравенство для $j+1$. Из (3.9) с $h = h_{j+1}$ и (3.26) с $h = h_j$ получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{h_{j+1}}^p(x) dx \\ & \leq 2^s K_1 \left(1 + \left(\frac{\rho}{h_{j+1}} \right)^p K_3(h_j) \right) \\ & \quad \times (m^p(C_0 r) r^{N-p-s} h_{j+1}^s + m^p(\rho) (\rho^{N-s} h_{j+1}^s)^{(N-p+\delta)/N}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Таким образом, получаем неравенство вида (3.26) для $h = h_{j+1}$ с

$$K_3(h_{j+1}) = 2^s K_1 \left(1 + \left(\frac{\rho}{h_{j+1}} \right)^p K_3(h_j) \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Для завершения доказательства леммы достаточно проверить, что за счет выбора числа γ_1 можно добиться выполнения оценки $K_3(h_j) \leq C_8$ для $j = 1, 2, \dots, J$, где J определяется из условия

$$\rho \leq \gamma_1 \frac{H_0}{2^{J-1}}, \quad \rho > \gamma_1 \frac{H_0}{2^J}.$$

Из (3.29) немедленно получаем, что требуемая равномерная оценка $K_3(h_j)$ будет выполнена при γ_1 , для которого

$$2^s K_1 \gamma_1^p = \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Таким образом, устанавливаем оценку (3.26) при полученном значении γ_1 и $R_3 = \min\{R_1, R_2/K_3\}$. Доказательство леммы 3.3 закончено.

При $0 < \rho' < \rho \leq R_0/2$ определим множество

$$E(\rho', \rho) = \{x \in E(\rho) : u(x) < m(\rho')\} \quad (3.31)$$

и при $\rho > 0$ – функцию

$$u^{(\rho)}(x) = \min\{u(x), m(\rho)\}, \quad x \in C(R_0, H_0). \quad (3.32)$$

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что выполнено условие теоремы 2.1, и пусть $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, $\lambda \in (0, 1)$ – некоторые числа, зависящие лишь от известных параметров. Тогда существуют положительные постоянные K_3 , R_3 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при $\rho \leq R_3$,*

$$0 < r < \frac{\theta \rho}{2} < \rho' \leq \theta \rho, \quad \rho \leq h \quad (3.33)$$

выполнена оценка

$$\int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq K_3 (J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + R^{(1)}(C_0 r, \rho', h)), \quad (3.34)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J^{(1)} &= (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho))^{p/(p-1)} \\
&\quad \times \int_{E(\rho')} (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^{-p/(p-1)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\
J^{(2)} &= \frac{1}{h^p} \int_{E(\rho)} (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^p (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx, \\
J^{(3)} &= \int_{E(\rho')} (u(x))^{p+\lambda-1} h_1(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\
R^{(1)}(r, \rho, h) &= m^\lambda(\rho) m^{p-1}(r) r^{N-p-s} h^s + m^{p+\lambda-1}(\rho) \\
&\quad \times ((\rho^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N} + (r^{1/p} \rho^{(p-1)/p})^{N-s-p} h^s),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

функция $h_1(x)$ определена в (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.3) функции $\psi(x) = \psi_{r/2}(x) \chi_{2h}(x)$,

$$\varphi(x) = \max\{(u^{\rho'}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho), 0\} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) (1 - \psi_\rho(x)),$$

предполагая выполнение условий (3.33) и $2\rho \leq \min\{R_1, R_2\}$.

Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq C_9 \sum_{i=6}^{11} I_i, \tag{3.36}$$

где

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{E(\rho', \rho)} h_1(x) u^{p+\lambda-1}(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\
I_7 &= \int_{E(\rho', \rho)} u^{p+\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \\
I_8 &= \int_{E(\rho', \rho)} (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^p (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx, \\
I_9 &= (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)) \\
&\quad \times \int_{E(\rho')} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \left(\left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right| \chi_h^{p-1}(x) + \nu_3(x) \chi_h^p(x) \right) \psi_r^p(x) dx, \\
I_{10} &= (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)) \\
&\quad \times \int_{E(\rho')} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} + (f_2 + g_2) u^{p-1} \right) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| \psi_r^{p-1}(x) \chi_h^p(x) dx, \\
I_{11} &= (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)) \\
&\quad \times \int_{E(\rho')} u^{p-1}(x) \left((f_2 + g_2) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right| \chi_h^{p-1}(x) + (f_3 + g_3) \chi_h^p(x) \right) \psi_r^p(x) dx,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

где $h_1(x)$ определена в (3.13).

Будем оценивать слагаемые из правой части (3.36). Используя условия (2.2), неравенство Гёльдера и теорему вложения, получаем

$$\begin{aligned} I_6 &\leq C_{10} \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) (u_\rho^p + m^p(\rho)) h_1(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ &\leq C_{11} (\rho^{N-s} h^s)^{\delta/N} \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial}{\partial x} (F^{(1)}(u) \psi_r(x) \chi_h(x)) \right|^p dx \\ &\quad + C_{11} (\rho^{N-s} h^s)^{(N-p+\delta)/N} (m(\rho))^{p+\lambda-1}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где

$$F^{(1)}(u(x)) = (u^{(\rho')}(x))^{(\lambda-1)/p} [u^{(\rho')}(x) - m(\rho)]_+,$$

где $[\cdot]_+$ означает взятие положительной части функции.

Оценим далее интеграл из правой части (3.38) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial}{\partial x} (F^{(1)}(u) \psi_r(x) \chi_h(x)) \right|^p dx \\ &\leq C_{12} \left((m(\rho'))^{p+\lambda-1} (\rho^{N-s} h^{s-p} + r^{N-s-p} h^s) \right. \\ &\quad \left. + \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Оценка I_7 получается непосредственно из определения множества $E(\rho', \rho)$:

$$I_7 \leq C_{13} (m(\rho'))^{p+\lambda-1} r^{N-s-p} h^s. \quad (3.40)$$

Следующая оценка получается просто применением неравенства Юнга

$$I_8 + I_{11} \leq C_{14} (J^{(2)} + J^{(3)}), \quad (3.41)$$

где $J^{(2)}, J^{(3)}$ — те же, что и в (3.34).

Так же, применением неравенства Юнга, оцениваем I_9 и получаем

$$I_9 \leq C_{15} (J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)}). \quad (3.42)$$

Наконец, оценим I_{10} , используя условие (2.2), неравенство Гёльдера и лемму 3.3. В итоге получаем

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq C_{16} (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)) \\ &\quad \times \left(\left(\int_{E(\rho')} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \right)^{(p-1)/p} (r^{N-s-p} h^s)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^{p-1}(C_0 r)}{r} (r^{N-s} h^s)^{(N-p+1+\delta)/N} \right) \\ &\leq C_{17} (m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho)) \\ &\quad \times (m^{p-1}(C_0 r) r^{N-s-p} h^s \\ &\quad + m^{p-1}(\rho') r^{(N-s-p)/p} \rho^{(N-s-p)(p-1)/p} h^s). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Выбирая R_3 достаточно малым, получаем оценку (3.34) из неравенств (3.36), (3.38)–(3.43) и, следовательно, доказательство леммы 3.4 закончено.

Дальнейшие оценки будем устанавливать в предположении, что для рассматриваемых значений ρ' , ρ выполнено условие

$$m(\rho') - m(\rho) > 0. \quad (3.44)$$

ЛЕММА 3.5. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4 и неравенство (3.44). Тогда существует положительная постоянная K_4 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что справедлива оценка*

$$J^{(1)} \leq K_4 \left(m^\lambda(\rho') (m^{p-1}(C_0 r) r^{N-s-p} h^s + m^{p-1}(\rho') (r^{1/p} \rho^{(p-1)/p})^{N-s-p} h^s \right) + J^{(2)} + J^{(3)}, \quad (3.45)$$

где $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$ определены в (3.35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.3) функции $\psi(x) = \psi_{r/2}(x) \chi_{2h}(x)$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \left((m^\lambda(\rho') - m^\lambda(\rho))^{-1/(p-1)} \right. \\ & \left. - ((u_{\rho'}(x) + m(\rho'))^\lambda - m^\lambda(\rho))^{-1/(p-1)} \right) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x). \end{aligned}$$

Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$J^{(1)} \leq C_{18} (J^{(2)} + J^{(3)} + I_{10}), \quad (3.46)$$

где $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, I_{10} определены в (3.35), (3.37). Теперь оценка (3.45) следует немедленно из неравенств (3.46), (3.43), и доказательство леммы 3.5 закончено.

Введем обозначение

$$F_\rho(u(x)) = (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^p (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \quad (3.47)$$

для $x \in E(\rho)$ и ρ, λ , удовлетворяющих условиям леммы 3.4.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Предположим, что r , ρ , ρ' , h , λ удовлетворяют условиям леммы 3.4. Тогда существует положительная постоянная K_5 , зависящая только от известных параметров, такая, что выполнена оценка*

$$\begin{aligned} & \int_{E(\rho', \rho)} u^{\lambda-1}(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \\ & \leq K_5 \left(R^{(1)}(C_0 r, \rho', h) + \int_{E(\rho)} F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) \left(h_1(x) \chi_h^p(x) + \frac{1}{h^p} \chi_{2h}^p(x) \right) dx \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

где $h_1(x)$ — функция, определенная в (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что выполнено условие (3.44), так как в противном случае неравенство (3.48) очевидно. Оценка слагаемого $J^{(1)}$ в правой части неравенства (3.34) дана в лемме 3.5. Оценку $J^{(3)}$ получаем, используя неравенство

$$u^{p+\lambda-1}(x) \leq C_{19}(F_\rho(u(x)) + (m(\rho))^{p+\lambda-1}), \quad x \in E(\rho),$$

и неравенство Юнга. Используя получаемую таким образом оценку $J^{(3)}$, устанавливаем неравенство (3.48) из (3.34), (3.45). Тем самым, теорема 3.1 доказана.

§ 4. Интегральная оценка решения для $1 < p < N - s$

Введем обозначения

$$I(\rho, h) = \left(\int_{E(\rho)} (F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x))^{N/(N-p+\delta)} dx \right)^{(N-p+\delta)/N} (\rho^{N-s} h^s)^{(p-\delta)/N}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\lambda \frac{N-s-p}{p-1} + p \frac{N-s}{N}, & \beta_1 &= s + \frac{sp}{N}, \\ \alpha_2 &= -\lambda \frac{N-s-p}{p-1} + p + \delta \frac{N-s}{N}, & \beta_2 &= s + \frac{\delta s}{N}, \\ \alpha_3 &= -\lambda \frac{N-s-p}{p-1} + \left(p - \frac{\delta}{2} \right) \frac{N-s}{N}, & \beta_3 &= s + \frac{sp}{N}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $F_\rho(u(x))$ определено в (3.47).

Мы можем считать δ достаточно малым. В частности, можем предполагать выполненным неравенство $(N-s-p)/p > \delta(N-s)/(2N)$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4. Тогда существуют постоянные K_6 , R_4 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что $R_4 \leq R_3$ и при $\rho \leq R_4$ справедлива оценка*

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N} I(\theta\rho, h) + K_6 \left(\frac{\rho}{h} \right)^{(N-s)p/N} I(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} R^{(2)}(r, \rho, h) &= K_6 \left(\rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} (\varkappa(C_0 r))^\lambda m^{p-1}(C_0 r) r^{N-p-s} \right. \\ &\quad \left. + (\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} r^{\delta(N-s)/(2N)}) (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} \right) \end{aligned}$$

и функция $\varkappa(r)$ определена в (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\chi(E(\theta\rho, \rho))$, $\chi(E(\theta\rho))$ обозначим характеристические функции множеств $E(\theta\rho, \rho)$, $E(\theta\rho)$ соответственно. Займемся оценкой $I(\rho, h)$ и будем использовать для этого следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^p &\leq (u^\lambda(x) - m^\lambda(\rho))^p \chi(E(\theta\rho, \rho)) \\ &\quad + 2^{p-1}((u^\lambda(x) - m^\lambda(\theta\rho))^p + (m^\lambda(\theta\rho) - m^\lambda(\rho))^p) \chi(E(\theta\rho)) \\ &\leq 2^{p-1}(u^\lambda(x) - m^\lambda(\theta\rho))^p \chi(E(\theta\rho)) \\ &\quad + 2^{p-1}((u^{(\theta\rho)}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho))^p, \quad x \in E(\rho). \end{aligned}$$

Получаем, таким образом, следующую оценку:

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N} I(\theta\rho, h) + 2^{p-1} (\rho^{N-s} h^s)^{p/N} I_{12}, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} I_{12} = & \left(\int_{E(\rho)} ((u^{(\theta\rho)}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho))^p \right. \\ & \left. \times (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) \right)^{N/(N-p)} dx. \end{aligned}$$

Оценивая последний интеграл по теореме вложения, имеем

$$I_{12} \leq C_{22}(I_{13} + I_{14} + I_{15}), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_{E(\theta\rho, \rho)} (u(x))^{\lambda-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ I_{14} &= m^{\lambda\rho}(\theta\rho) \int_{E(\rho) \cap K(r)} (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \\ I_{15} &= \int_{E(\rho)} ((u^{(\theta\rho)}(x))^\lambda - m^\lambda(\rho))^p (u(x))^{(1-\lambda)(p-1)} \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Продолжим оценку полученных в (4.6) интегралов. Интеграл I_{13} оценим по теореме 3.1 с последующим применением неравенства Гёльдера. Получим

$$I_{13} \leq C_{23} \left(R^{(1)}(C_0 r, \theta\rho, h) + I(\rho, h) (\rho^{N-s} h^s)^{(\delta-p)/N} + \frac{1}{h^p} I(\rho, 2h) \right). \quad (4.7)$$

При оценке I_{14} мажорируем $u(x)$ на $E(\rho) \cap K(r)$ посредством $m(C_0 r)$ с постоянной C_0 , введенной в неравенстве (3.3). В результате имеем оценку

$$I_{14} \leq C_{24} m^{\lambda p}(\theta\rho) (m(C_0 r))^{(1-\lambda)(p-1)} r^{N-p-s} h^s. \quad (4.8)$$

Интеграл I_{15} оцениваем по неравенству Гёльдера, получаем

$$I_{15} \leq \frac{C_{25}}{h^p} \int_{E(\rho)} F_\rho(u(x)) \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \leq \frac{C_{26}}{h^p} I(\rho, 2h). \quad (4.9)$$

Наконец, используя (3.7), можем оценить

$$m^{p-1}(C_0 t) \leq \varkappa^{p-1}(C_0 r) (C_0 t)^{-(N-p-s)} \quad (4.10)$$

при $r \leq t \leq R_0$ и получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & R^{(1)}(C_0 r, \theta \rho, h) (\rho^{N-s} h^s)^{p/N} \\ & \leq C_{27} \left(\rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} (\varkappa(C_0 r))^\lambda (m(C_0 r))^{p-1} r^{N-p-s} \right. \\ & \quad \left. + (\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} r^{\delta(N-s)/(2N)}) (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где α_i, β_i определены в (4.2).

Теперь оценка (4.3) следует из неравенств (4.4)–(4.11) при достаточно малом ρ , что и завершает доказательство леммы 4.1.

Определим далее числа λ, θ, γ равенствами

$$\begin{aligned} \lambda &= \min \left\{ \frac{\delta(N-s)}{4N}, \frac{p-1}{N-s-p} \right\}, \\ \ln \frac{1}{\theta} &= \frac{4pN}{\delta(N-s)} \ln 2, \quad K_6 \gamma^{(N-s)p/N} = 2^{-2(N+1)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где K_6 – постоянная из неравенства (4.3).

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4. Пусть λ, θ, γ определяются условиями (4.12). Тогда существует постоянная K_7 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при $\rho \leq R_4, \rho \leq \gamma h$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} I(\rho, h) & \leq K_7 \left(\rho^{N-s} h^s \left(m(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{(N-s-p)/(p-1)} \right)^{p+\lambda-1} \right. \\ & \quad \left. + h^N \rho^{p-\lambda(N-p-s)/(p-1)} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} + R^{(2)}(r, \rho, h) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $I(\rho, h)$, $R^{(2)}(r, \rho, h)$ и число R_4 определены в (4.1), (4.3) и лемме 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем числа r, ρ, h , удовлетворяющие условиям теоремы, определим

$$A = 2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N}, \quad B = K_6 \gamma^{(N-s)p/N} \quad (4.14)$$

и целые числа M_1, M_2 , удовлетворяющие условиям

$$2r < \rho \theta^{M_1} \leq \frac{2r}{\theta}, \quad \frac{H_0}{2} \leq 2^{M_2} h < H_0. \quad (4.15)$$

С учетом этих обозначений неравенство (4.3) переписывается в виде

$$I(\rho, h) \leq A I(\theta \rho, h) + B I(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h). \quad (4.16)$$

Итерируя последнее неравенство и применяя индукцию по числу итераций, получаем оценку

$$\begin{aligned} I(\rho, h) &\leq \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I(2r, 2^m h) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{M_1-1} 2^{M_2+n} A^n B^{M_2} I(\theta^n \rho, H_0) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} A^n B^m R^{(2)}(r, \theta^n \rho, 2^m h). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Оценим далее значения $I(2r, 2^m h)$, $I(\theta^n \rho, H_0)$ и первые две суммы в (4.17). Используя определение функции $\psi_r(x)$ и неравенство (3.3), имеем оценку

$$I(2r, 2^m h) \leq C_{28} 2^{ms} (m(C_0 r))^{p+\lambda-1} r^{N-s} h^s. \quad (4.18)$$

Из этой оценки, определений A, B и условий (4.12) получаем следующую оценку для первого слагаемого правой части (4.17):

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I(2r, 2^m h) \\ &\leq C_{29} (m(C_0 r))^{p+\lambda-1} r^{N-s} h^s (\theta^{-M_1})^{(N-s)(p-\delta)/N-p \ln 2 / \ln \theta} \sum_{m=0}^{M_2-1} (2^{s+1} B)^m \\ &\leq C_{30} (m(C_0 r))^{p+\lambda-1} r^{N-s} h^s \\ &\quad \times \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(N-s)(p-\delta)/N-p \ln 2 / \ln \theta} \sum_{m=0}^{M_2-1} (2^{s+1} K_6 \gamma^{(N-s)p/N})^m \\ &\leq C_{31} \rho^{N-s} h^s \left(m(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{(N-s-p)/(p-1)} \right)^{p+\lambda-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Используя оценку (4.10) и определение числа λ равенством (4.12), имеем следующее неравенство

$$\begin{aligned} I(\theta^n \rho, H_0) &\leq C_{32} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} (\theta^n \rho)^{(N-s)(p-\delta)/N} \\ &\times \left(\int_r^{\theta^n \rho / C_0} t^{-N(N-p-s)(p+\lambda-1)/((p-1)(N-p+\delta))+N-s-1} dt \right)^{(N-p+\delta)/N} \\ &\leq C_{33} (\theta^n \rho)^{p-\lambda(N-p-s)/(p-1)} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Применяя оценку, полученную в (4.20), и учитывая значения λ , θ , γ , получаем следующую оценку второй суммы в (4.17):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{M_1-1} 2^{M_2+n} A^n B^{M_2} I(\theta^n \rho, H_0) \\ &\leq C_{34} (2K_6 \gamma^{(N-s)p/N})^{M_2} \\ &\times \sum_{n=0}^{M_1-1} (2^p \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N+p-\lambda(N-p-s)/(p-1)})^n \\ &\times \rho^{p-\lambda(N-p-s)/(p-1)} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} \\ &\leq C_{35} \rho^{p-\lambda(N-p-s)/(p-1)} h^N (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Далее оцениваем третью сумму в (4.17)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} A^n B^m R^{(2)}(C_0 r, \theta^n \rho, 2^m h) \\ &\leq C_{36} (\varkappa(C_0 r))^\lambda m^{p-1} (C_0 r) r^{N-p-s} \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} \\ &\times \sum_{n=0}^{M_1-1} (2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N+\alpha_1})^n \sum_{m=0}^{M_2-1} (2^{\beta_1} K_6 \gamma^{(N-s)p/N})^m \\ &+ C_{36} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} \rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} \\ &\times \sum_{n=0}^{M_1-1} (2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N+\alpha_2})^n \sum_{m=0}^{M_2-1} (2^{\beta_2} K_6 \gamma^{(N-s)p/N})^m \\ &+ C_{36} (\varkappa(C_0 r))^{p+\lambda-1} r^{\delta(N-s)/(2N)} \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} \\ &\times \sum_{n=0}^{M_1-1} (2^{p-1} \theta^{-(N-s)(p-\delta)/N+\alpha_3})^n \sum_{m=0}^{M_2-1} (2^{\beta_3} K_6 \gamma^{(N-s)p/N})^m \\ &\leq C_{37} R^{(2)}(r, \rho, h). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Теперь оценка (4.13) непосредственно следует из неравенств (4.17), (4.19), (4.22), (4.23) и доказательство теоремы 4.1 закончено.

§ 5. Поточечная оценка решения

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_8 , $\tilde{\theta}$, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при произвольных r , ρ , удовлетворяющих условию $0 < r < \tilde{\theta}\rho \leq \min\{d(\Gamma, \partial\Omega), 1\}$, выполнена оценка*

$$M(\rho) \leq K_8 \rho^{-(N-p-s)/(p-1)} \left((\tilde{\varkappa}(r))^{\lambda/(p+\lambda-1)} (M^{p-1}(r) r^{N-s-p})^{1/(p+\lambda-1)} + \tilde{\varkappa}(r) \left(\rho^{\tau_1} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\tau_2} \right) \right), \quad (5.1)$$

где

$$\tau_1 = \min \left\{ \delta, \frac{1}{2}(N-p-s), \frac{N-p-s}{p(p-1)} \right\}, \quad \tau_2 = \frac{\delta(N-s)}{2N(p+\lambda-1)}.$$

Здесь λ , $M(r)$, $\tilde{\varkappa}(r)$ — число и функции, определенные равенствами (4.12), (2.4), (2.10) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем считать, что $\rho \leq R_4$, $4r \leq \theta\rho$, где числа R_4, θ определяются в лемме 4.1 и в (4.12). В случае невыполнения двух последних неравенств оценка (5.1) очевидна. В силу эквивалентности поведения при малых ρ функций $M(\rho)$ и $m(\rho)$, последняя из которых определена равенством (3.1), доказательство оценки (5.1) сводится к доказательству оценки в локальной системе координат, рассматриваемой в предыдущих параграфах. При этом можем считать, что для рассматриваемого значения ρ выполнено равенство

$$m(\rho) = u(\xi), \quad |\xi'| = \rho, \quad |\xi''| \leq \frac{H}{2}, \quad (5.2)$$

где ξ — некоторая точка и $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{N-s})$, $\xi'' = (\xi_{N-s+1}, \dots, \xi_N)$. Равенство (5.2) можно обеспечить, переходя, если понадобится, от функции $u(x)$ к функции $-u(x)$, и это изменение абсолютно не затрагивает всех наших рассуждений.

Зафиксируем некоторую функцию $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, равную единице на отрезке $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, нулю — вне отрезка $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и удовлетворяющую неравенству $0 \leq \omega(t) \leq 1$ при $t \in \mathbb{R}^1$. Определим функцию

$$\eta(x) = \eta_1(x) \eta_2(x), \quad \eta_1(x) = \omega\left(\frac{|x'|}{\rho}\right), \quad \eta_2(x) = \omega\left(\frac{\gamma|x'' - \xi''|}{\rho}\right). \quad (5.3)$$

Здесь γ — число, определенное в (4.12). Через G обозначим множество точек, где $\eta(x)$ равно единице.

Подставим в интегральное тождество (2.3) функции

$$\varphi(x) = u^k(x) u_{2\rho}(x) \eta^{l+1}(x), \quad \psi(x) = \eta^{p-1}(x), \quad (5.4)$$

где k, l – произвольные неотрицательные числа. Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_{E(2\rho)} u^k(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta^{l+p}(x) dx \\ & \leq C_{38} (k + l + 1)^p \int_{E(2\rho)} (u^{k+p}(x) h_1(x) \eta^{l+p}(x) + \rho^{-p} u^{k+p}(x) \eta^l(x)) dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

с функцией $h_1(x)$, определенной в (3.13).

Оценим интегралы в правой части (5.5) по неравенству Гёльдера. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{E(2\rho)} u^{k+p}(x) h_1(x) \eta^{l+p}(x) dx \\ & \leq C_{39} \left(\int_{E(2\rho)} (u^{k+p}(x) \eta^{l+p}(x))^{N/(N-p+\delta)} dx \right)^{(N-p+\delta)/N}, \\ & \int_{E(2\rho)} u^{k+p}(x) \eta^l(x) dx \\ & \leq C_{40} \rho^{p-\delta} \left(\int_{E(2\rho)} (u^{k+p}(x) \eta^l(x))^{N/(N-p+\delta)} dx \right)^{(N-p+\delta)/N}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из неравенств (5.5), (5.6) следует оценка

$$\begin{aligned} & \int_{E(2\rho)} u^k(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \eta^{l+p}(x) dx \\ & \leq C_{41} (k + l + 1)^p \rho^{-\delta} \left(\int_{E(2\rho)} (u^{k+p}(x) \eta^l(x))^{N/(N-p+\delta)} dx \right)^{(N-p+\delta)/N}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Полученное неравенство дает возможность оценить $\max\{u(x) : x \in G\}$, применяя итерационный метод Мозера. Опуская стандартные для этого процесса рассуждения (см., например, [5; гл. 8, § 1]), придем к оценке

$$\max_{x \in G} (u(x))^{p+\lambda-1} \leq C_{42} \rho^{-N} \int_{E(2\rho)} (u(x))^{p+\lambda-1} \eta^p(x) dx. \quad (5.8)$$

И, следовательно, в силу (5.2) получаем неравенство

$$(m(\rho))^{p+\lambda-1} \leq C_{42} \rho^{-N} \int_{E(2\rho)} (u(x))^{p+\lambda-1} \eta^p(x) dx. \quad (5.9)$$

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что выполнено неравенство

$$m(2\rho) - m(4\rho) \geq \mu m(2\rho) \quad (5.10)$$

с постоянной μ , определенной равенством

$$\mu = 1 - 2^{-(N-p-s)/p}. \quad (5.11)$$

В этом случае имеем оценку

$$u(x) \geq \frac{1}{1-\mu} m(4\rho), \quad x \in E(2\rho),$$

и поэтому получаем неравенство

$$\int_{E(2\rho)} (u(x))^{p+\lambda-1} \eta^p(x) dx \leq C_{43} \int_{E(4\rho)} (u(x) - m(4\rho))^{p+\lambda-1} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \quad (5.12)$$

с функциями $\psi_r(x)$, $\chi_h(x)$, определенными в (3.6) при $h = 4\rho/\gamma$.

Применяя неравенства Гёльдера и (4.13), получаем из (5.9), (5.12) следующую оценку:

$$\begin{aligned} (m(\rho))^{p+\lambda-1} \leq C_{44} & \left(\left(\frac{\varkappa^{p-1}(C_0 r)}{\rho^{N-p-s}} \right)^{\lambda/(p-1)} m^{p-1}(C_0 r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{N-s-p} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\varkappa^{p-1}(C_0 r)}{\rho^{N-p-s}} \right)^{(p+\lambda-1)/(p-1)} \left(\rho^\delta + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\delta(N-s)/(2N)} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

которая доказана в предположении, что выполнено неравенство (5.10).

Если же (5.10) не выполняется, то

$$m(2\rho) \leq \frac{1}{1-\mu} m(4\rho), \quad (5.14)$$

и из (5.13), (5.14) получаем следующую оценку (которая справедлива независимо от того выполнено или нет неравенство (5.10)):

$$\begin{aligned} m(2\rho) \leq C_{45} \rho^{-(N-p-s)/(p-1)} & \left((\varkappa(C_0 r))^{\lambda/(p+\lambda-1)} (m^{p-1}(C_0 r) r^{N-s-p})^{1/(p+\lambda-1)} \right. \\ & \left. + \varkappa(C_0 r) \left(\rho^{\delta'/(p+\lambda-1)} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\delta(N-s)/(2N(p+\lambda-1))} \right) \right) + \frac{1}{1-\mu} m(4\rho), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $\delta' = \min\{\frac{1}{2}(N-p-s), \delta\}$. Определим целое число $I(\rho)$ из условия $R_0/2 \leq 2^{I(\rho)}\rho < R_0$. Итерируя неравенство (5.15), получаем оценку

$$m(2\rho) \leq C_{46} \sum_{i=0}^{I(\rho)} 2^{-i(N-p-s-\delta')/(p-1)} R^{(3)}(r, \rho) + \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{I(\rho)-1} m(2^{I(\rho)}\rho), \quad (5.16)$$

где

$$R^{(3)}(r, \rho) = \rho^{-(N-p-s)/(p-1)} \left((\varkappa(C_0 r))^{\lambda/(p+\lambda-1)} (m^{p-1}(C_0 r) r^{N-s-p})^{1/(p+\lambda-1)} + \varkappa(C_0 r) \left(\rho^{\delta'/(p+\lambda-1)} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\delta(N-s)/(2N(p+\lambda-1))} \right) \right). \quad (5.17)$$

В силу выбора числа μ имеем

$$\left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{I(\rho)} = (2^{I(\rho)})^{-\ln(1-\mu)/\ln 2} = 2^{I(\rho)(N-p-s)/p} \leq \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^{(N-p-s)/p}.$$

Из последнего неравенства и (5.16) следует оценка

$$m(2\rho) \leq C_{47} \left(R^{(3)}(r, \rho) + \rho^{-(N-p-s)/p} m\left(\frac{R_0}{2} \right) \right). \quad (5.18)$$

В силу произвольности ρ неравенство (5.18) обеспечивает выполнение оценки (5.1) и, тем самым, доказательство теоремы 5.1 закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Оценка (5.1) характеризует поточечное поведение решения в терминах $d(x, \Gamma)$, так как из (2.4) непосредственно следует неравенство

$$|u(x)| \leq M(d(x, \Gamma)), \quad 0 < d(x, \Gamma) \leq r_0. \quad (5.19)$$

§ 6. Доказательство теоремы 2.1

Доказанная в теореме 5.1 поточечная оценка позволяет немедленно установить утверждение теоремы 2.1. Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (5.1) и используя условие (2.6), получаем

$$M(\rho) \leq K_8 \rho^{-(N-p-s)/(p-1)+\tau_1} \max_{0 < r \leq R_0} \varkappa(r).$$

Следовательно, для решения $u(x)$ выполнено условие (1.2) теоремы Серрина [1], что обеспечивает устранимость особенности на многообразии Γ . Неулучшаемость функции $r^{(N-p-s)/(p-1)}$ в условии (2.6) следует из возможности построения решения уравнения p -Лапласа, имеющего неустранимую особенность на Γ порядка $(N-p-s)/(p-1)$. Тем самым, доказательство теоремы 2.1 закончено.

Список литературы

1. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasilinear equations // *Acta Math.* 1964. V. 111. P. 247–302.
2. *Nicolosi F., Skrypnik I. V., Skrypnik I. I.* Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // *Comm. Partial Differential Equations.* (to appear).
3. *Gilbarg D., Serrin J.* On isolated singularities of second order elliptic differential equations // *J. Anal. Math.* 1955–1956. V. 4. P. 309–340.
4. *Скрыпник И. В.* О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // *Общая теория граничных задач.* Киев: Наукова думка, 1983. С. 198–206.
5. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1991.
6. *Veron L.* Singularities of solutions of second order quasilinear equations. Harlow: Longman, 1996.
7. *Serrin J.* Isolated singularities of solutions of quasilinear equations // *Acta Math.* 1965. V. 113. P. 219–240.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, г. Донецк

Поступила в редакцию
24.01.2003