Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 6, 133–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:02:39

УДК 517.518.8+517.972+517.982.256

И. Г. Царьков

Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям

В работе изучается аппроксимативная компактность множеств относительно семейства модифицированных функционалов, получаемого из некоторого фиксированного базового функционала при помощи аффинных добавок. Показано, что невыпуклость базового функционала влечет неединственность минимума в вариационной задаче для некоторого модифицированного функционала. Приведен пример применения полученных результатов к конкретному уравнению с q -лапласианом.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: аппроксимативная компактность, вариационные задачи, нелинейные дифференциальные уравнения.

§ 1. Введение

Мы будем изучать аппроксимативную компактность множеств относительно семейства функционалов $\{F_\psi = F - \psi\}$, получаемого из некоторого фиксированного базового функционала $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ при помощи функционалов ψ , пробегающих множество всех аффинных непрерывных функционалов $\mathcal{A}(X)$, заданных на пространстве X . Опираясь на различные свойства аппроксимативно компактных множеств, мы покажем, что невыпуклость аппроксимативно компактного множества E относительно семейства функционалов $\{F_\psi\}$ при некоторых условиях на функционал F влечет неодноточечность множества $P(\psi) = \arg \inf_E F_\psi$ для некоторого $\psi \in \mathcal{A}(X)$. Основными результатами в этом направлении являются теоремы 2 и 3.

Затем в работе изучается неединственность решения вариационной задачи с модифицированным функционалом в случае, когда базовый функционал является невыпуклым. Основным результатом в этом направлении является теорема 4.

Показано, что в силу теоремы 1 (об аппроксимативной компактности ограничено слабо компактного множества относительно ограничено равномерно выпуклого коэрцитивного функционала) и вышеуказанных теорем 2–4 в классе $\dot{W}_q^1(\Omega)$ задача

$$\begin{cases} \Delta_q u = \lambda_1 |u|^{p-2} u - \lambda_2 |u|^{\alpha-2} u + f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00442-а).

имеет по крайней мере три решения для некоторой бесконечно дифференцируемой функции f , некоторых p, q, α и любых чисел $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 > 0$, где $\Delta_q u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) - q$ -лапласиан функции u .

§ 2. Свойства аппроксимативно компактных множеств

Обозначим через (B) класс всех действительных банаховых пространств, а через $B(x, r)$ – шар с центром $x \in X \in (B)$ радиуса $r \geq 0$, т.е. множество $\{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$. Через X^* обозначим пространство, сопряженное с $X \in (B)$, а через $S^* = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| = 1\}$ – единичную сферу в этом пространстве. Для произвольных числа $\Delta > 0$ и точки x через $O_\Delta(x)$ обозначим Δ -окрестность точки x , а через $O_\Delta(E) = \bigcup_{x \in E} O_\Delta(x)$ – Δ -окрестность множества $E \subset X$. Пусть $\rho(x, E) = \inf\{\eta(y, x) \mid y \in E\}$ – расстояние между точкой x и множеством E из метрического пространства (Z, η) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $X \in (B)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный функционал на X . Непустое множество $E \subset X$ называется *аппроксимативно компактным относительно функционала F* , если из условия $\{x_n\} \subset E: F(x_n) \rightarrow \inf_E F$, $n \rightarrow \infty$, вытекает, что существует частичный предел $x \in E$ для этой последовательности (такая последовательность $\{x_n\}$ называется *минимизирующей*).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этом случае для любого числа $\Delta > 0$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left\{x \in E \mid F(x) \leq \inf_E F + \varepsilon\right\} \subset O_\Delta(P),$$

где $P = \{x \in X \mid F(x) = \inf_E F\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы для некоторого числа $\Delta > 0$ и для всех $\varepsilon > 0$ нашлась бы точка $x_\varepsilon \in E \setminus O_\Delta(P)$ такая, что $F(x_\varepsilon) \leq \inf_E F + \varepsilon$, то нашлась бы последовательность $\{x_n\} \in E \setminus O_\Delta(P)$ такая, что $F(x_n) \leq \inf_E F + \frac{1}{n}$, и ее частичный предел принадлежал бы P . Следовательно, в $O_\Delta(P)$ оказалось бы бесконечное число членов этой последовательности. Получаем противоречие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $X \in (B)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный функционал на X . Непустое множество $E \subset X \in (B)$ называется *аппроксимативно компактным относительно семейства функционалов $\{F_\alpha\}$* , если E – аппроксимативно компактно относительно каждого функционала F_α . Для аппроксимативно компактного множества E относительно семейства функционалов $\{F_\alpha\}$ через ϱ_α обозначим величину $\inf_E F_\alpha$, а через $P(\alpha)$ – множество $\{x \in E \mid F_\alpha(x) = \varrho_\alpha\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этом случае $P(\alpha) \neq \emptyset$ для каждого α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\{x_n\} \subset E$ такая, что $F_\alpha(x_n) \rightarrow \varrho_\alpha$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для этой последовательности существует частичный предел $x \in E$. В силу непрерывности F_α верно равенство $F_\alpha(x) = \varrho_\alpha$, т.е. $x \in P(\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если множество $E \subset X$ аппроксимативно компактно относительно семейства $\{F_\alpha\}$ и для каждой точки $x \in X$ найдется индекс α , для которого $F_\alpha(x) = \inf_X F_\alpha$, то E замкнуто в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x \in \overline{E}$ и пусть $F_\alpha(x) = \inf_X F_\alpha$ для некоторого α . Найдется последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $\varrho_\alpha \leq F_\alpha(x_n) \rightarrow F_\alpha(x) = \inf_X F_\alpha \leq \varrho_\alpha$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\{x_n\}$ – минимизирующая последовательность для F_α , т.е. $F_\alpha(x_n) \rightarrow \varrho_\alpha$, $n \rightarrow \infty$, и все ее частичные пределы равны x . Отсюда вытекает, что $x \in E$. Таким образом, $\overline{E} = E$.

ЛЕММА 1. Пусть $E \subset X \in (B)$ аппроксимативно компактно относительно семейства $\{F_\alpha\}$. Тогда для всех α множество $P(\alpha)$ компактно в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякая последовательность $\{x_n\} \subset P(\alpha)$ имеет частичный предел $x \in E$. В силу непрерывности F_α верно равенство $F_\alpha(x) = \varrho_\alpha$, т.е. $x \in P(\alpha)$. Таким образом, E – секвенциальный компакт в X , что равносильно его компактности в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что последовательность непрерывных функционалов $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится снизу при $n \rightarrow \infty$ к непрерывному функционалу на $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, если для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq N$ верно

$$\{x \in X \mid F_n(x) \leq c\} \subset \{x \in X \mid F(x) \leq c + \varepsilon\}.$$

В этом случае будем писать, что $F_n \searrow F$, $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2. Пусть $E \subset X \in (B)$ аппроксимативно компактно относительно семейства $\{F_\alpha\}$, $F_{\alpha_n} \searrow F_{\alpha_0}$, $n \rightarrow \infty$, и $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\alpha_n} \leq \varrho_{\alpha_0}$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset E$ такой, что $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (F_{\alpha_n}(x_n) - \varrho_{\alpha_n}) \leq 0$, существует частичный предел $x \in P(\alpha_0) \subset E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без потери общности можно считать, что существует $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\alpha_n} \leq \varrho_{\alpha_0}$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\varrho_{\alpha_n} \leq \varrho_{\alpha_0} + \frac{\varepsilon}{4}$ и $F_{\alpha_n}(x_n) - \varrho_{\alpha_n} < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n \geq N$. Тогда $F_{\alpha_n}(x_n) \leq \varrho_{\alpha_n} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varrho_{\alpha_0} + \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N$. Так как $F_{\alpha_n} \searrow F_{\alpha_0}$, $n \rightarrow \infty$, то найдется номер $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \geq N$, такой, что

$$\left\{x \in X \mid F_{\alpha_n}(x) \leq \varrho_{\alpha_0} + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{x \in X \mid F_{\alpha_0}(x) \leq \varrho_{\alpha_0} + \varepsilon\}$$

для всех $n \geq N_0$. Следовательно, $\{x_n\}$ – минимизирующая последовательность для F_{α_0} и в силу аппроксимативной компактности E существует ее частичный предел $x \in P(\alpha_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $E \subset X \in (B)$ аппроксимативно компактно относительно семейства $\{F_\alpha\}$, $F_{\alpha_n} \searrow F_{\alpha_0}$, $n \rightarrow \infty$, и $F_{\alpha_n}(x) \rightarrow F_{\alpha_0}(x)$, $n \rightarrow \infty$, для всех $x \in E$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset E$ такой, что $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (F_{\alpha_n}(x_n) - \varrho_{\alpha_n}) \leq 0$, существует частичный предел $x \in P(\alpha_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x_0 \in P(\alpha_0)$. Учитывая, что $F_{\alpha_n}(x_0) \rightarrow F_{\alpha_0}(x_0) = \varrho_{\alpha_0}$, $n \rightarrow \infty$, получим $\varrho_{\alpha_n} \leq F_{\alpha_n}(x_0) \rightarrow \varrho_{\alpha_0}$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\alpha_n} \leq \varrho_{\alpha_0}$ и, следовательно, из предыдущей леммы вытекает утверждение следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в условиях леммы 2 (следствия 1) предположить дополнительно, что $P(\alpha_0) = \{x_0\}$, то последовательность $\{x_n\}$ будет сходиться к точке x_0 .

§ 3. Специальный случай семейства функционалов

В дальнейшем будем рассматривать семейство функционалов

$$\{F_\varphi = F - \varphi\}_{\varphi \in \mathcal{A}},$$

где $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый непрерывный функционал, а $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ – множество всех непрерывных аффинных функционалов на X , т.е. выражений вида $x^*(x) + a$, где $x^* \in X^*$, $a \in \mathbb{R}$. Норма элемента φ в пространстве $\mathcal{A}$ определяется как величина $\|\varphi\| = \sup_{x \in B} |\varphi(x)|$, где $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар. Константа Липшица ψ не превосходит $\|\psi\|$.

Для произвольного множества $N \subset X$ и аффинного функционала $g \in \mathcal{A}$ через N_g^+ , N_g^- и N_g^0 обозначим соответственно множества $\{x \in N \mid g(x) > 0\}$, $\{x \in N \mid g(x) < 0\}$ и $\{x \in N \mid g(x) = 0\}$. В дальнейшем для каждого $\varphi \in \mathcal{A}$ будем рассматривать множества

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \{x \in X \mid F_\varphi(x) = F(x) - \varphi(x) \leq 0\}, \\ Q^\pm(\varphi, g) &= (M_\varphi)_g^\pm, \quad Q^0(\varphi, g) = (M_\varphi)_g^0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. 1) Для всех $\alpha > 0$ верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{int } Q^+(\varphi + \alpha g, g) &\supset Q^+(\varphi, g), \\ Q^-(\varphi + \alpha g, g) &\subset \text{int } Q^-(\varphi, g), \quad Q^0(\varphi + \alpha g, g) = Q^0(\varphi, g). \end{aligned}$$

2) Кроме того,

$$\bigcup_{\alpha > 0} Q^+(\varphi + \alpha g, g) = \{x \in X \mid g(x) > 0\}, \quad \bigcap_{\alpha > 0} Q^-(\varphi + \alpha g, g) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как

$$(F(x) - \varphi(x) \leq 0) \& (g(x) > 0)$$

для всех $x \in Q^+(\varphi, g)$, то

$$F(x) - (\varphi(x) + \alpha g(x)) = F(x) - \varphi(x) - \alpha g(x) < 0$$

и, следовательно, $x \in \text{int } Q^+(\varphi + \alpha g, g)$. Таким образом, $\text{int } Q^+(\varphi + \alpha g, g) \supset Q^+(\varphi, g)$. Так как

$$(F(x) - (\varphi(x) + \alpha g(x)) \leq 0) \& (g(x) < 0)$$

для всех $x \in Q^-(\varphi + \alpha g, g)$, то $F(x) - \varphi(x) \leq \alpha g(x) < 0$ и, следовательно, $x \in \text{int } Q^-(\varphi, g)$. Таким образом, $Q^-(\varphi + \alpha g, g) \subset \text{int } Q^-(\varphi, g)$. Также

$$\begin{aligned} x \in Q^0(\varphi + \alpha g, g) &\iff (F(x) - (\varphi(x) + \alpha g(x)) \leq 0) \& (g(x) = 0) \\ &\iff (F(x) - \varphi(x) \leq 0) \& (g(x) = 0) \iff x \in Q^0(\varphi, g). \end{aligned}$$

Отсюда $Q^0(\varphi + \alpha g, g) = Q^0(\varphi, g)$.

2) Для всех $x \in X$ таких, что $g(x) > 0$ найдется $\alpha > 0$ такое, что $F(x) - \varphi(x) < \alpha g(x)$. Отсюда $F(x) - (\varphi(x) + \alpha g(x)) < 0$ и, следовательно, $x \in Q^+(\varphi + \alpha g, g)$. Поэтому

$$\bigcup_{\beta > 0} Q^+(\varphi + \beta g, g) = \{x \in X \mid g(x) > 0\}.$$

Аналогично, для всех $x \in X$ таких, что $g(x) < 0$, существует $\alpha > 0$, для которого $F(x) - \varphi(x) > \alpha g(x)$, поэтому $F(x) - (\varphi(x) + \alpha g(x)) > 0$, т.е. $x \notin Q^-(\varphi + \alpha g, g)$. Следовательно,

$$\bigcap_{\beta > 0} Q^-(\varphi + \beta g, g) = \emptyset.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ называют *коэрцитивным*, если $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$. Это равносильно тому, что для всех $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid F(x) \leq c\}$ ограничено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *линейно коэрцитивным*, если для любого числа $A > 0$ множество $\{x \in X \mid F(x) \leq A\|x\|\}$ ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если отображение $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ линейно коэрцитивно, то оно коэрцитивно.

ЛЕММА 4. Пусть $E \subset X \in (B)$ аппроксимативно компактно относительно семейства $\{F_\psi\}_{\psi \in \mathcal{A}}$, где F – линейно коэрцитивный функционал, и последовательность аффинных функционалов $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{A}$ сходится к аффинному функционалу $\varphi \in \mathcal{A}$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset E$ такой, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (F_{\varphi_n}(x_n) - \varrho_{\varphi_n}) \leq 0$, существует частичный предел $x \in P(\varphi)$. Если при этом $P(\varphi) = \{x_0\}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ вытекает ее ограниченность, т.е. найдется число $A > 0$ такое, что $\|\varphi_n\| \leq A$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &\leq |\varphi_n(x) - \varphi_n(0)| + |\varphi_n(0)| \leq \|\varphi_n(\cdot) - \varphi_n(0)\| \|x\| + |\varphi_n(0)| \\ &\leq 2A\|x\| + A, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество

$$M_n = \{x \in X \mid F_{\varphi_n}(x) = F(x) - \varphi_n(x) \leq c\}$$

содержится в ограниченном множестве

$$M = B(0, 1) \cup \{x \in X \mid F(x) \leq (3A + |c|)\|x\|\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(x) - \varphi(x) &\leq F(x) - \varphi_n(x) + (\varphi_n(x) - \varphi(x)) \leq c + \sup_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow c, \\ n &\rightarrow \infty, \quad x \in M_n. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $x \in M_n$ и $n \geq N$ верно неравенство $F(x) - \varphi(x) \leq c + \varepsilon$. Таким образом, $F_{\varphi_n}(x) \searrow F_\varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $F_{\varphi_n}(x) \rightarrow F_\varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$, $x \in X$. Из следствия 1 вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклый непрерывный функционал. Тогда для любого ограниченного множества $M \subset X$ найдется число $C > 0$ такое, что $|F(x) - F(y)| \leq C\|x - y\|$ для всех $x, y \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тело $M \subset X \in (B)$ называется *равномерно выпуклым*, если

$$\inf \left\{ \rho \left(\frac{x+y}{2}, X \setminus M \right) \mid x, y \in M, \|x - y\| \geq \delta \right\} > 0$$

для всех $\delta > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функционал $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если для любых чисел $b > 0$ и $\delta > 0$ величина

$$\omega_F^b(\delta) = \inf \left\{ \frac{1}{2}(F(x) + F(y)) - F\left(\frac{x+y}{2}\right) \mid x, y \in B(0, b), \|x - y\| \geq \delta \right\}$$

положительна.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченно равномерно выпуклый функционал, то $F_\varphi = F - \varphi$, где $\varphi \in \mathcal{A}$ – также ограниченно равномерно выпуклый функционал. При этом $\omega_{F_\varphi}^b(\cdot) = \omega_F^b(\cdot)$.

ЛЕММА 5. Пусть $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченно равномерно выпуклый функционал. Тогда если $M^a = \{x \in X \mid F(x) \leq a\}$ – ограниченное тело, то оно равномерно выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется число $b > 0$ такое, что $M^a \subset B(0, b)$. Тогда для любых точек $x, y \in M^a$ таких, что $\|x - y\| \geq \delta$, верны следующие неравенства:

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(F(x) + F(y)) - \omega_F^b(\delta) \leq a - \omega_F^b(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 < a.$$

В силу равномерной непрерывности выпуклого функционала F на ограниченном множестве M^a (см. замечание 6) найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $|F(z_1) - F(z_2)| < a - a_0$ для всех $z_1, z_2 \in M^a$ таких, что $\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon$. Следовательно, $O_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset M^a$. Таким образом, M^a равномерно выпукло.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Число ε из доказательства леммы 5 зависит только от константы Липшица функционала F на шаре $B(0, b)$, числа δ и ω_F^b .

ЛЕММА 6. Пусть $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченно равномерно выпуклый функционал, тело $M^a = \{x \in X \mid F(x) \leq a\}$ содержится в шаре $B(0, b)$, $C > 0$ – константа Липшица функционала F на шаре $B(0, b)$, $\delta > 0$. Тогда для любых точек $x \in \partial M^a$ и $y \in M^a$ таких, что $\|x - y\| \geq \delta$, и произвольного линейного функционала $x^* \in S^*$ такого, что $x^*(x) = \sup_{M^a} x^*$, найдется число $\varepsilon > 0$, зависящее только от C, δ и ω_F^b , такое, что $x^*(y - x) < -\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 8 найдется число $\varepsilon > 0$, зависящее только от C, δ и ω_F^b , для которого $M^a \supset O_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Поэтому $x^*\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq x^*(x) - \varepsilon$. Отсюда $x^*\left(\frac{y-x}{2}\right) \leq -\varepsilon$ и, следовательно, $x^*(y - x) \leq -2\varepsilon < -\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E \subset X \in (B)$ – непустое ограниченно слабо компактное множество, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченно равномерно выпуклый и коэрцитивный функционал. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset E$ такой, что $F(x_n) \rightarrow c = \inf_E F$, $n \rightarrow \infty$, существует частичный предел $x \in E$ (в сильной топологии), т.е. E аппроксимативно компактно относительно F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функционал F выпуклый и коэрцитивный, то для некоторой точки $z \in E$ множество $\{x \in X \mid F(x) \leq F(z)\}$ выпукло, замкнуто и ограничено. Следовательно, оно слабо замкнуто. Отсюда следует, что множество $\{x \in X \mid F(x) \leq F(z)\} \cap E$ слабо компактно. Поэтому из слабой полунепрерывности снизу выпуклого функционала F вытекает, что он ограничен снизу на этом множестве. Отсюда получаем, что $c \in \mathbb{R}$. Так как последовательность $\{c_n = F(x_n)\}$ сходится к c , то найдется число $b > 0$ такое, что $|c_n| \leq b$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, множество $M = \{x \in X \mid F(x) \leq b\}$ выпукло, замкнуто и ограничено, а $M \cap E$ – слабо компактное множество. Пусть x – предельная точка в слабой топологии для последовательности $\{x_n\}$. Учитывая, что $x_n \in M_N = \{x \in X \mid F(x) \leq a_N\}$, $N \in \mathbb{N}$, где $a_N = \sup_{n \geq N} c_n \geq c_N$, мы получим, что $x \in M_N$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$x \in M_0 = \{x \in X \mid F(x) \leq c\} = \bigcap_N M_N.$$

Но так как $c = \inf_E F$, то

$$x \in \partial M_0 = \{x \in X \mid F(x) = c\}.$$

Докажем методом от противного, что x – частичный предел (в сильной топологии) последовательности $\{x_n\}$. Предположим, что найдутся числа $N \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такие, что $\|x_n - x\| \geq \delta$ для всех $n \geq N$. Так как

$$F\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(F(x_n) + F(x)) - \omega_F^b(\delta) \leq \frac{c_n + c}{2} - \omega_F^b(\delta) \rightarrow c - \omega_F^b(\delta) < c,$$

$$n \rightarrow \infty,$$

то множество M_0 – выпуклое замкнутое тело и, следовательно, по теореме Хана–Банаха существует $x^* \in S^*$ такой, что $x^*(x) \geq x^*(y)$, $y \in M_0$. Так как x – предельная точка в слабой топологии для последовательности $\{x_n\}$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x^*(x_{n_k}) \rightarrow x^*(x)$, $k \rightarrow \infty$, и, следовательно,

$$x^*\left(\frac{x_{n_k} + x}{2}\right) = \frac{1}{2}x^*(x_{n_k}) + \frac{1}{2}x^*(x) \rightarrow x^*(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу леммы 5 найдется $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что $M_0 \supset O_\varepsilon\left(\frac{x_{n_k} + x}{2}\right)$ для всех k . Поэтому

$$x^*(x) \geq x^*\left(\frac{x_{n_k} + x}{2}\right) + \varepsilon \rightarrow x^*(x) + \varepsilon, \quad k \rightarrow \infty,$$

чего не может быть. Таким образом, x – частичный предел $\{x_n\}$.

ЛЕММА 7. Пусть $M \subset X \in (B)$ – слабо компактное множество, $I: X \rightarrow Y \in (B)$ – линейный непрерывный оператор. Тогда множество $M^0 = I(M)$ слабо компактно и, следовательно, является замкнутым в Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную последовательность $\{t_n\} \subset M^0$. Пусть $\{x_n\} \subset M$ – такая последовательность, что $t_n = I(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы Эберлейна–Шмульяна (см. [1]) существует подпоследовательность номеров $\{n_k\}$, для которой последовательность $\{x_{n_k}\}$ слабо сходится к некоторой

точке $x \in M$. Пусть $t = Ix \in M^0$. Тогда для любого функционала $y^* \in Y^*$ верны следующие соотношения:

$$\langle t_{n_k}, y^* \rangle = \langle Ix_{n_k}, y^* \rangle = \langle x_{n_k}, I^* y^* \rangle \rightarrow \langle x, I^* y^* \rangle = \langle Ix, y^* \rangle,$$

т.е. последовательность $\{t_{n_k}\}$ слабо сходится к точке t . Отсюда вытекает слабая компактность множества M^0 .

Обозначим через (Rf) класс всех рефлексивных банаховых пространств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (Rf)$, $X_0 \in (B)$, $I: X \rightarrow X_0$ – инъективный непрерывный линейный оператор, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограничено равномерно выпуклый и линейно коэрцитивный функционал, $E \subset X$ – такое аппроксимативно компактное множество относительно семейства $\{F_\psi = F - \psi\}$, что $E_0 = I(E)$ невыпукло в X_0 . Тогда найдется аффинный функционал $\Phi \in \mathcal{A}(X_0)$ такой, что множество $M_\varphi \cap E = P(\varphi) = \partial M_\varphi \cap E$ содержит более одной точки, где $\varphi = \Phi \circ I \in \mathcal{A}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют точки $a, b \in E$ и $x_0 \in (a, b) \setminus E$ такие, что $u_0 = Ix_0 \notin E_0$, и в силу замкнутости E_0 найдется число $\delta > 0$ такое, что $B(u_0, 2\delta) \cap E_0 = \emptyset$. В силу леммы 7 множество $M^0 = I(M)$, где $M = \{x \in X \mid F(x) \leq F(x_0)\}$, является слабо компактным множеством в X_0 . Кроме того, M^0 выпукло. Так как $x_0 \in \partial M$, то $u_0 \in \partial M^0$. Поэтому найдется точка $\tau_0 \in B(u_0, \frac{\delta}{16}) \setminus M^0$. Пусть v_0 – ближайшая точка для τ_0 в множестве M^0 . Тогда

$$\|v_0 - u_0\| \leq \|v_0 - \tau_0\| + \|\tau_0 - u_0\| \leq 2\|\tau_0 - u_0\| \leq \frac{\delta}{8}.$$

По теореме Хана–Банаха существует ненулевой функционал $v_0^* \in X_0^*$, разделяющий шар $B(\tau_0, \rho(\tau_0, M^0))$ и множество M^0 , т.е. $v_0^*(v) \geq v_0^*(w)$ для всех точек $w \in B(\tau_0, \rho(\tau_0, M^0))$ и $v \in M^0$. В этом случае функционал $p_0^* = v_0^* \circ I$ является опорным к множеству M в точке $p_0 \in M$ такой, что $I p_0 = v_0$, т.е. $p^*(p_0) = \inf_M p_0^*$.

Так как F – выпуклый непрерывный функционал, то в силу теоремы Хана–Банаха найдется число $\beta \in \mathbb{R}$, для которого функционал $f(x) = \beta p^*(x - p_0) + F(p_0)$ является опорным к его графику в точке $(p_0, F(p_0))$, т.е. $F(x) \geq f(x)$, $x \in X$, и $F(p_0) = f(p_0)$. Из того, что F ограничено равномерно выпуклый функционал, следует, что $M_f = \{p_0\}$ и для любой окрестности точки p_0 найдется достаточно маленькое число $t > 0$ такое, что множество $M_{f(\cdot)+t}$ содержится в этой окрестности. Поэтому число $c = \sup\{t > 0 \mid M_{f(\cdot)+t} \cap E = \emptyset\}$ положительно и в силу аппроксимативной компактности тело $M_{f(\cdot)+c}$ пересекается с E по своей границе. Положим $\varphi_0(x) = f(x) + c$. При этом для функционала $\Phi_0(v) = \beta v_0^*(v - v_0) + F(p_0) + c$ верно равенство $\varphi_0 = \Phi_0 \circ I$. По построению тело M_{φ_0} содержит точку p_0 . Следовательно, множество $I(M_{\varphi_0})$ содержит точку v_0 .

Проведем индукционное построение.

1°. По построению $M_{\varphi_0} \cap E = \partial M_{\varphi_0} \cap E \neq \emptyset$. Предположим, что $M_{\varphi_0} \cap E = \{y_0\}$ (в противном случае утверждение теоремы доказано). Пусть $t_0 = I(y_0)$. Найдется функционал $y_0^* \in S^* \subset X_0^*$ такой, что $y_0^*(t_0) > \sup_{B(u_0, 2\delta)} y_0^*$. Пусть $c_1 = \sup_{B(u_0, \delta)} y_0^*$ и $z_0 \in B(u_0, \delta)$ такая, что $y_0^*(z_0) = c_1 - \frac{\delta}{8}$, и

$$G_0(u) = c_1 - \frac{\delta}{8} - y_0^*(u) = y_0^*(z_0 - u), \quad g_0 = G_0 \circ I, \quad u \in X_0.$$

Верна следующая оценка:

$$g_0(x_0) = G_0(u_0) = y_0^*(z_0 - u_0) = \sup_{z \in B(u_0, \delta)} y_0^*(z - u_0) - \frac{\delta}{8} = \frac{7\delta}{8}.$$

Кроме того, так как $v_0 \in B(u_0, \frac{\delta}{8})$, то

$$G_0(v_0) \geq G_0(u_0) - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4} > 0 > c_1 - y^*(t_0) > G_0(t_0).$$

Следовательно, $g_0(p_0) > 0 > g_0(y_0)$. Поэтому в силу условия $y_0, p_0 \in M_{\varphi_0}$ найдется точка $y \in [y_0, p_0] \subset M_{\varphi_0}$ такая, что $g_0(y) = 0$. В силу леммы 3, п. 2) для некоторого числа $\beta_0 > 0$ множество $Q^+(\varphi_0 + \beta_0 g_0, g_0)$ вместе с точкой x_0 содержит или точку a , или точку b . Поэтому

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha > 0 \mid Q^+(\varphi_0 + \alpha g_0, g_0) \cap E = \emptyset\} \leq \beta_0 < +\infty.$$

При этом в силу леммы 3, п. 1)

$$Q^-(\varphi_0 + \alpha_0 g_0, g_0) \cap E \subset \text{int } Q^-(\varphi_0, g_0) \cap E = \emptyset.$$

В силу аппроксимативной компактности множество

$$Q^+(\varphi_0 + \alpha_0 g_0, g_0) \cap E = M_{\varphi_0 + \alpha_0 g_0} \cap E = P(\varphi_0 + \alpha_0 g_0)$$

непусто. Положим $\varphi_1 = \varphi_0 + \alpha_0 g_0$. По построению $p_0 \in Q^+(\varphi_0 + \alpha_0 g_0, g_0) \subset M_{\varphi_1}$.

2°. Если $M_{\varphi_j} \cap E = P(\varphi_j)$ не одноточечно, то верно утверждение теоремы. Предположим, что $M_{\varphi_j} \cap E = \{y_j\}$. Дополнительно, пусть $p_0 \in M_{\varphi_j}$. В этом случае $G_{j-1}(t_j) = g_{j-1}(y_j) > 0$ для точки $t_j = Iy_j$, т.е. $y_{j-1}^*(t_j) < c_j - \frac{\delta}{8}$. Найдется линейный функционал $y_j^* \in S^* \subset X_0^*$ такой, что $y_j^*(t_j) > \sup_{B(u_0, 2\delta)} y_j^*$. Пусть $c_{j+1} = \sup_{B(u_0, \delta)} y_j^* = y_j^*(z_j) + \frac{\delta}{8}$, где $z_j \in B(u_0, \delta)$. Положим

$$G_j(u) = c_{j+1} - \frac{\delta}{8} - y_j^*(u) = y_j^*(z_j - u), \quad g_j = G_j \circ I.$$

Так же, как и ранее,

$$g_j(x_0) = G_j(u_0) = y_j^*(z_j - u_0) = \sup_{z \in B(u_0, \delta)} y_j^*(z - u_0) - \frac{\delta}{8} = \frac{7\delta}{8}.$$

Кроме того, $G_j(v_0) > 0 > G_j(t_j)$. Следовательно, $g_j(p_0) > 0 > g_j(y_j)$. Из условия $y_j, p_0 \in M_{\varphi_j}$ вытекает, что найдется точка $y \in [y_j, p_0] \subset M_{\varphi_j}$ такая, что $g_j(y) = 0$. В силу леммы 3

$$\alpha_j = \sup\{\alpha > 0 \mid Q^+(\varphi_j + \alpha_j g_j, g_j) \cap E = \emptyset\} < +\infty, \quad Q^-(\varphi_j + \alpha_j g_j, g_j) \cap E = \emptyset.$$

В силу аппроксимативной компактности множество

$$Q^+(\varphi_j + \alpha_j g_j, g_j) \cap E = M_{\varphi_j + \alpha_j g_j} \cap E = P(\varphi_j + \alpha_j g_j)$$

непусто и $p_0 \in Q^+(\varphi_j + \alpha_j g_j, g_j) \subset M_{\varphi_{j+1}}$, где $\varphi_{j+1} = \varphi_j + \alpha_j g_j$.

3°. Возможны следующие два варианта: или для какого-то номера j окажется, что $M_{\varphi_j} \cap E = P(\varphi_j)$ не одноточечно и, следовательно, верно утверждение теоремы, или будет построена последовательность положительных чисел $\{\alpha_j\}$ и последовательности $\{g_j\} \subset \mathcal{A}(X)$, $\{G_j\} \subset \mathcal{A}(X_0)$, $\{\varphi_j = \varphi_{j-1} + \alpha_{j-1}g_{j-1}\} \subset \mathcal{A}(X)$, для которых $M_{\varphi_j} \cap E = P(\varphi_j) = \{y_j\}$ одноточечно. Разберем второй вариант. Так как $g_j(x_0) = \frac{7\delta}{8}$ для всех j , то

$$\varphi_{N+1}(x_0) = \varphi_0(x_0) + \sum_{j=0}^N \alpha_j g_j(x_0) \geq \varphi_0(x_0) + \frac{7}{8} \sum_{j=0}^N \alpha_j \delta$$

для всех N . Если $\sum_j \alpha_j = +\infty$, то $\varphi_{N+1}(x_0) \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$, и, следовательно, найдется $K \in \mathbb{N}$ такое, что $|F(a)|, |F(b)| < \varphi_{K+1}(x_0)$. Учитывая, что или $\varphi_{K+1}(b) \geq \varphi_{K+1}(x_0)$, или $\varphi_{K+1}(a) \geq \varphi_{K+1}(x_0)$, получим, что или $F(b) - \varphi_{K+1}(b) < 0$, или $F(a) - \varphi_{K+1}(b) < 0$, т.е. или $b \in \text{int } M_{\varphi_{K+1}}$, или $a \in \text{int } M_{\varphi_{K+1}}$, чего не может быть, так как $\text{int } M_{\varphi_{K+1}} \cap E = \emptyset$.

Следовательно, случай $\sum_j \alpha_j = +\infty$ невозможен и $\sum_j \alpha_j < +\infty$. В этом случае последовательность $\{\Phi_n = \Phi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j G_j\}$ сходится в пространстве $\mathcal{A}(X_0)$ к некоторому функционалу $\Phi \in \mathcal{A}(X_0)$, а последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в пространстве $\mathcal{A}(X)$ к некоторому функционалу $\varphi \in \mathcal{A}(X)$. При этом $\varphi = \Phi \circ I$. Отметим, что $\text{int } M_\varphi \cap E = \emptyset$, так как иначе бы, начиная с некоторого N , $\text{int } M_{\varphi_n} \cap E \neq \emptyset$, чего не может быть по построению. Кроме того, по лемме 4 последовательность $\{y_n\} \subset E$, $y_n \in P(\varphi_n)$, имеет частичный предел $y \in P(\varphi)$. При этом так как $F_{\varphi_n}(y_n) \leq 0$ для любого n , то $F_\varphi(y) \leq 0$, т.е. $y \in M_\varphi \cap E = P(\varphi)$. Докажем, что $P(\varphi)$ не одноточечно, т.е. верно утверждение теоремы. Предположим противное. Тогда $M_\varphi \cap E = \{y\}$. В силу леммы 4 из аппроксимативной компактности E вытекает, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к точке y . Следовательно, $\{t_n\}$ сходится к точке $t = Iy$ в пространстве X_0 . По построению $g_n(y_{n+1}) = G_n(t_{n+1}) \geq 0$, $G_n(t_n) = y_n^*(z_n - t_n)$ и $\|z_n - t_n\| \geq \delta$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|t_{n+1} - t_n\| &\geq y_n^*(t_n - t_{n+1}) = G_n(t_{n+1}) - G_n(t_n) \geq -y_n^*(z_n - t_n) \\ &= y_n^*(t_n - u_0) - y_n^*(z_n - u_0) > \sup_{z \in B(u_0, 2\delta)} y_n^*(z - u_0) - \|z_n - u_0\| \\ &\geq 2\delta - \delta = \delta > 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию $\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|t_{n+1} - t\| + \|t - t_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что $P(\varphi) = M_\varphi \cap E$ содержит более одной точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. M_φ – ограниченное равномерно выпуклое тело.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathcal{X} = (X, \eta)$ – метрическое пространство, $Y \in (B)$, $\Phi: X \rightarrow 2^Y$ – полунепрерывное сверху отображение с непустыми выпуклыми и замкнутыми образами, $\mathcal{L} \subset Y$ – всюду плотное в Y выпуклое подмножество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}$, что для любой точки $x \in X$ найдутся точки $y \in X$ и $\omega \in \Phi(y)$ такие, что $\eta(x, y) + \|\varphi(x) - \omega\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полунепрерывности сверху отображения Φ для каждой точки $x \in X$ найдется число $\delta = \delta(x) \in (0, \frac{\varepsilon}{4})$ такое, что для всех

$y \in O_{2\delta}(x)$ и $z \in \Phi(y)$ выполняется неравенство $\rho(z, \Phi(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Для открытого покрытия $\{V_x = O_{\delta(x)}(x)\}_{x \in X}$ множества X найдется вписанное в него локально конечное покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, т.е. для любого $\alpha \in \mathbb{A}$ существует $x \in X$ такое, что $U_\alpha \subset V_x$, для каждого $x \in X$ найдется окрестность $O(x)$, для которой $\{\alpha \in \mathbb{A} \mid O(x) \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ конечно (см. [2]). Для каждого индекса $\alpha \in \mathbb{A}$ рассмотрим функцию $f_\alpha(x) = \rho(x, X \setminus U_\alpha) \in C(X)$. Отметим, что $f_\alpha \equiv 0$ вне U_α и $f_\alpha > 0$ на U_α , $\alpha \in \mathbb{A}$. Пусть $\varphi_\alpha(x) = f_\alpha(x) / \sum_\alpha f_\alpha(x) \in C(X)$. Нетрудно проверить, что набор $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ образует разбиение единицы, т.е. $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ на X и $\varphi_\alpha > 0$ на U_α , $\alpha \in \mathbb{A}$, $\varphi_\alpha \equiv 0$ вне U_α . Для каждого индекса $\alpha \in \mathbb{A}$ выберем точки $z_\alpha \in U_\alpha$ и $y_\alpha \in \mathcal{L}$ такие, что $\rho(y_\alpha, \Phi(z_\alpha)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Положим $\varphi(x) = \sum_\alpha y_\alpha \varphi_\alpha(x)$ и докажем, что φ – искомое отображение. Действительно, для каждой точки $x \in X$ множество $\mathcal{B}(x) = \{\beta \mid x \in U_\beta\}$ конечно и для каждого индекса $\beta \in \mathcal{B}(x)$ найдется точка $x(\beta)$, для которой $U_\beta \subset V_{x(\beta)} = O_{\delta(x(\beta))}(x(\beta))$. Для каждого индекса $\beta \in \mathcal{B}(x)$ найдется точка $w_\beta \in \Phi(z_\beta)$ такая, что $\|y_\beta - w_\beta\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть $\delta_0 = \max_{\beta \in \mathcal{B}(x)} \delta(x(\beta)) = \delta(x(\beta_0))$, тогда $U_\beta \subset O_{2\delta_0}(x(\beta_0))$ для всех $\beta \in \mathcal{B}(x)$. Поэтому $\eta(x, x(\beta_0)) < 2\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. По построению (см. начало доказательства) $\rho(w_\beta, \Phi(x(\beta_0))) < \frac{\varepsilon}{4}$ и, следовательно,

$$\rho(y_\beta, \Phi(x(\beta_0))) \leq \|y_\beta - w_\beta\| + \rho(w_\beta, \Phi(x(\beta_0))) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому найдется точка $u_\beta \in \Phi(x(\beta_0))$ такая, что $\|y_\beta - u_\beta\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\varphi(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} y_\beta \varphi_\beta(x)$, то

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} u_\beta \varphi_\beta(x) \right\| &= \left\| \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} (y_\beta - u_\beta) \varphi_\beta(x) \right\| \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} \|y_\beta - u_\beta\| \varphi_\beta(x) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} \varphi_\beta(x) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

При этом $u = \sum_{\beta \in \mathcal{B}(x)} u_\beta \varphi_\beta(x) \in \Phi(x(\beta_0))$ и $\eta(x, x(\beta_0)) + \|\varphi(x) - u\| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА А (см. [3]). Пусть K – выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве X , $\varphi: K \rightarrow 2^K$ – многозначное полунепрерывное сверху отображение такое, что для каждого $x \in K$ множество $\varphi(x)$ непусто, выпукло и компактно. Тогда φ имеет неподвижную точку $x_0 \in K$, т.е. $x_0 \in \varphi(x_0)$.

Для произвольного множества $M \subset X \in (B)$ через $\text{diam } M$ обозначим диаметр множества M , т.е. величину $\sup_{x, y \in M} \|x - y\|$.

Пусть $\mathcal{L}$ – какое-то непустое подмножество аффинных функционалов. Тогда через $\mathcal{L} + \mathbb{R}$ обозначим множество $\{f(\cdot) + c \mid f \in \mathcal{L}, c \in \mathbb{R}\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – бесконечномерное рефлексивное пространство, $X_0 \in (B)$, $I: X \rightarrow X_0$ – инъективный непрерывный линейный оператор, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограничено равномерно выпуклый и линейно коэрцитивный функционал, $E \subset X$ – такое аппроксимативно компактное множество относительно семейства $\{F_\psi = F - \psi\}_{\psi \in \mathcal{A}(X)}$, что $E_0 = \overline{I(E)}$ невыпукло в X_0 . Тогда для произвольного линейного многообразия $\mathcal{L}$, всюду плотного в $\mathcal{A}(X_0)$, найдется аффинный функционал $\Psi_0 \in \mathcal{N} = \mathcal{L} + \mathbb{R}$ такой, что множество $P(\psi_0)$ содержит более одной точки, где $\psi_0 = \Psi_0 \circ I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 найдется функционал $\Phi_0 \in \mathcal{A}(X_0)$ такой, что для $\varphi = \Phi_0 \circ I$ тело M_φ пересекается с множеством E по неодноточечному компактному множеству $R = P(\varphi) \subset \partial M_\varphi$. В силу бесконечномерности X и компактности R найдутся точка $a_0 \in \text{int } M_\varphi$ и линейный функционал $a_0^* \in X^*$, $\|a_0^*\| = 1$, для которых $\tau = \min_R a_0^* > a_0^*(a_0)$. Без потери общности будем считать, что $a_0 = 0$ и $d_0 = \text{diam } M_\varphi = 1$. В силу равномерной выпуклости тела M_φ найдется число $\theta \in (0, 1)$ такое, что для любого функционала $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \geq \frac{1}{2}$, множество $\{x \in M_\varphi \mid x^*(x) \geq \sup_{M_{\varphi(\cdot)-\theta}} x^* - 2\theta\}$ имеет диаметр меньше $\frac{d}{16}$, где $d = \text{diam } R > 0$. Будем считать, что θ настолько мало, что $0 \in \text{int } M_{\varphi(\cdot)-\theta}$. Пусть $\delta_0 \in (0, 1)$ – такое число, что $B(0, \delta_0) \subset M_{\varphi(\cdot)-\theta} \subset M_\varphi$. Из компактности R вытекает существование конечномерного пространства $L \subset X$ такого, что для множества $N = \{x \in L \cap M_\varphi \mid a_0^*(x) \geq \tau\}$ множество R лежит в окрестности $O_{\Delta/3}(N)$, где $\Delta = \frac{\delta_0^2 \theta}{16(\|I\|+1)}$. В силу замечания 1 и аппроксимативной компактности E найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $M_{\varphi(\cdot)+\varepsilon} \cap E \subset O_{\Delta/3}(R)$, $\text{diam } M_{\varphi(\cdot)+\varepsilon} \leq 2$. Положим $\varepsilon_0 = \frac{\delta_0^2 \varepsilon \theta}{16} < \varepsilon$. Найдем функционал $\Psi \in \mathcal{N}$, настолько близкий к Φ_0 , что для функционала $\psi = \Psi \circ I$ верны следующие соотношения:

$$M_{\varphi(\cdot)-\theta} \subset M_\psi \subset M_\varphi \subset M_{\psi(\cdot)+\varepsilon_0} \subset M_{\varphi(\cdot)+\varepsilon}.$$

Множество $M = I(M_{\varphi(\cdot)-\theta})$ выпукло и замкнуто в X_0 (лемма 7). Для каждой точки $x \in \partial M_\varphi \cap L \stackrel{\text{def}}{=} L_0$ точка $u = I(x)$ находится на положительном расстоянии от M . Поэтому в силу компактности L_0 найдется число $\delta > 0$, для которого минимальное расстояние от точек множества L_0 до M равно 2δ . Положим $\widetilde{M} = O_\delta(M)$. Рассмотрим множество функционалов $D(x) = \{A^* \in X_0^* \mid \sup_{\widetilde{M}} A^* \leq A^*(u) = 1\}$, которое непусто в силу теоремы Хана–Банаха. Тем самым определено полунепрерывное сверху отображение $D: L_0 \rightarrow \mathcal{A}(X_0)$. В силу леммы 8 существует непрерывное отображение $T: L_0 \rightarrow \mathcal{N}$ такое, что для всех $x \in L_0$ найдутся точка $w_0 \in L_0$ и функционал $A^* \in D(w_0)$ такие, что $\|x - w_0\| + \|T(x) - A^*\| < \Delta$. Тогда для функционала $a^* = A^* \circ I$ верны следующие соотношения: $\sup_{M_{\varphi(\cdot)-\theta}} a^* \leq a^*(w_0) = 1$. Учитывая, что $B(0, \delta_0) \subset M_{\varphi(\cdot)-\theta}$ и $\text{diam } M_\varphi = 1$, мы получим, что $1 \leq \|a^*\| \leq \frac{1}{\delta_0}$. Отсюда следует, что для функционала $t^* = t_x^* = T(x) \circ I \in \mathcal{A}(X)$ верны такие соотношения:

$$\begin{aligned} \|t^* - a^*\| &\leq \|T(x) - A^*\| \|I\| < \Delta \|I\| < \frac{\delta_0^2 \theta}{16} < \frac{\theta}{4} < \frac{1}{4}, \\ |t^*(x) - 1| &\leq |t^*(x) - a^*(x)| + |a^*(x) - a^*(w_0)| \\ &\leq \|t^* - a^*\| \text{diam } M_\varphi + \|a^*\| \|x - w_0\| \leq \frac{\delta_0^2 \theta}{16} + \frac{1}{\delta_0} \Delta < \frac{\delta_0 \theta}{8} < \frac{\theta}{8}, \\ \frac{1}{2} &\leq \|t^*\| \leq \|a^*\| + \|t^* - a^*\| < \frac{2}{\delta_0}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\|t^*(\cdot) - t^*(0)\| \geq \|a^*\| - \|t^* - a^*\| - |t^*(0) - a^*(0)| \geq 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что множество $\{w \in M_\varphi \mid t^*(w) < \sup_{M_{\varphi(\cdot)-\theta}} t^* - 2\theta\}$ пересекается с R , иначе бы $d < \frac{d}{16}$, чего не может быть. Следовательно, для функционала $g(w) = t^*(b) - t^*(w)$, где $b \in M_\psi$ такое, что $t^*(b) = \sup_{M_{\varphi(\cdot)-\theta}} t^* - \theta$,

найдется точка $x_0 \in R$ такая, что $g(x_0) > \theta$. Кроме того,

$$\begin{aligned} t^*(x) &> 1 - \frac{\theta}{8} = a^*(w_0) - \frac{\theta}{8} \geq \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} a^* - \frac{\theta}{8} \\ &\geq \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t^* - \|t^* - a^*\| \operatorname{diam} M_{\varphi} - \frac{\theta}{8} \geq \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t^* - \frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{8} > \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t^* - \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Оценим минимальное $\alpha = \alpha(x) > 0$, при котором $Q^+(\psi + \alpha g, g) \cap R \neq \emptyset$. Такое α не больше числа β , при котором $x_0 \in R$ и $F(x_0) - (\psi(x_0) + \beta g(x_0)) = 0$, т.е. $F(x_0) - \psi(x_0) = \beta g(x_0)$. Учитывая, что $M_{\psi} \subset M_{\varphi} \subset M_{\psi(\cdot) + \varepsilon_0}$, мы получим, что $0 \leq F(w) - \psi(w) \leq \varepsilon_0$ для всех $w \in R \subset M_{\varphi}$ и, следовательно,

$$\alpha \leq \beta = \frac{F(x_0) - \psi(x_0)}{g(x_0)} \leq \frac{\varepsilon_0}{g(x_0)} = \frac{\delta_0^2 \varepsilon \theta}{16g(x_0)} < \frac{\delta_0^2 \varepsilon}{16}.$$

Поэтому

$$|\alpha g(y)| \leq 2 \frac{\delta_0^2 \varepsilon}{16} \|t^*\| \operatorname{diam} M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $y \in M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon}$. Тогда $M_{\psi + \alpha g} \subset M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon/2}$. Иначе бы существовал элемент

$$y \in (M_{\psi + \alpha g} \setminus M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon/2}) \cap M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon}$$

и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} < F(y) - \varphi(y) \leq F(y) - \psi(y) \leq \alpha g(y) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

чего не может быть.

Итак, $\alpha = \alpha(x) = \sup\{\beta > 0 \mid Q^+(\psi + \beta g, g) \cap E = \emptyset\}$. Рассмотрим отображение

$$U(x) = Q^+(\psi + \alpha(x)g, g) \cap E = M_{\psi(\cdot) + \alpha(x)g} \cap E = P(\psi(\cdot) + \alpha(x)g)$$

и предположим, что $U(x)$ односточечно для всех $x \in L_0$. Так как $M_{\psi + \alpha(x)g} \subset M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon/2}$, то

$$U(x) \subset M_{\varphi(\cdot) + \varepsilon/2} \cap E \subset O_{\Delta/3}(R) \subset O_{2\Delta/3}(N).$$

Кроме того, по построению $t^*(U(x)) < t^*(b) = \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t^* - \theta$. Так как $t^*(x) \geq \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t^* - \frac{\theta}{2}$, то верны следующие неравенства:

$$\|w - U(x)\| \geq \|t^*\|^{-1} t^*(x - U(x)) \geq \frac{\delta_0}{2} \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{\delta_0 \theta}{4}.$$

В силу леммы 4 отображения $\alpha(\cdot)$ и $U(\cdot)$ непрерывны. Построим непрерывное отображение $G: N \rightarrow L_0$, положив $G(v) = \partial M_{\varphi} \cap \{vt \mid t > 0\}$. Тогда отображение $\mathcal{Q} = U \circ G: N \rightarrow E$ будет непрерывным на N . В [4] было доказано, что многозначное отображение $\mathcal{P}(y) = \{z \in N \mid \|y - z\| \leq \rho(y, N) + \frac{\Delta}{3}\}$ непрерывно и по построению $\mathcal{P}(y)$ – выпуклый компакт для каждой точки $y \in X$. Следовательно, отображение $\mathfrak{P} = \mathcal{P} \circ \mathcal{Q}: N \rightarrow 2^N$ также является многозначно непрерывным и его образы – выпуклые компакты. По построению для любой

точки $v \in N$ верно неравенство $\|w - U(w)\| \geq \frac{\delta_0 \theta}{4}$, где $w = G(v)$. Учитывая, что выпуклая оболочка шара $B(0, \delta_0)$ и точки w содержится в выпуклом множестве M_φ , мы получим, что

$$B(v, \delta_0 \|w - v\|) \subset B\left(v, \frac{\delta_0}{\|w\|} \|w - v\|\right) \subset M_\varphi.$$

Отсюда вытекает, что $\|v - U(w)\| \geq \delta_0 \|w - v\|$ для всех $v \in N$ и $w = G(v)$. В силу теоремы А отображение $\mathfrak{P}$ имеет неподвижную точку $v \in N$, т.е. $v \in \mathfrak{P}(v)$. В этом случае $\|v - U(w)\| \leq \Delta < \frac{\delta_0 \theta}{16}$ (так как $\rho(U(w), N) \leq \frac{2\Delta}{3}$). Следовательно,

$$\|w - v\| \geq \|w - U(w)\| - \|U(w) - v\| \geq \frac{\delta_0 \theta}{4} - \frac{\delta_0 \theta}{16} = \frac{3\delta_0 \theta}{16}$$

и $\delta_0 \|w - v\| \geq \frac{3\delta_0^2 \theta}{16}$. Поэтому

$$\Delta \geq \|U(w) - v\| \geq \delta_0 \|w - v\| \geq \frac{3\delta_0^2 \theta}{16} \geq 3\Delta,$$

чего не может быть. Следовательно, для некоторой точки $v \in N$ и функционала $\psi_0 = \psi + \alpha(\omega)g_0$, где $g_0 = \sup_{M_{\varphi(\cdot) - \theta}} t_\omega^* - \theta - t_\omega^*$ и $\omega = G(v)$, множество $P(\psi_0)$ не является односточечным. Из того, что $t_\omega^*, g_0 \in \mathcal{N}$, вытекает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Нетрудно видеть, что в условиях предыдущей теоремы множество $\mathcal{N}$ можно заменить на $\mathcal{L}$.

ЛЕММА 9. Пусть $X \in (B)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченный снизу, непрерывный, линейно коэрцитивный функционал, V – замыкание выпуклой оболочки надграфика $N = \{(x, t) \mid x \in X, t \geq F(x)\}$. Тогда V является надграфиком некоторой выпуклой, ограниченной снизу, линейно коэрцитивной функции $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$. При этом в случае, когда $X \in (Rf)$ и N слабо замкнуто, все экстремальные точки множества V принадлежат множеству N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности F вытекает, что N является телом. Следовательно, и V является телом. Для каждой точки $x \in X$ отрезок $\{x\} \times [c_0, F(x)]$ пересекает ∂V , где $c_0 = \inf_X F \in \mathbb{R}$. Пусть $t_x = \inf\{t \in [c_0, F(x)] \mid (x, t) \in V\}$, тогда $t_x \in \partial V$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $F(y) < F(x) + \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} a$ для всех точек $y \in B(x, \delta)$. Поэтому конус K , являющийся выпуклой оболочкой точки (x, t_x) и $B(x, \delta) \times \{a\}$, содержится в множестве V . Следовательно, $(x, t) \in \text{int } K \subset \text{int } V$ для всех $t \in (t_x, F(x)) \subset (t_x, a)$, поэтому $\{(x, t_x)\} = \{x\} \times [c_0, F(x)] \cap \partial V$. Положим $\varphi(x) = t_x$. Тогда φ является однозначной функцией на X , чей надграфик является множеством V . Следовательно, φ – выпуклая функция. Докажем, что φ – линейно коэрцитивный функционал. Допустим противное, т.е. что существует число $A_0 > 0$ такое, что множество $P = \{x \in X \mid \varphi(x) \leq A_0 \|x\|\}$ неограничено. Тогда для всех $B > 0$ и $A > A_0$ верны следующие неравенства:

$$\varphi(x) \leq A_0 \|x\| = A \|x\| + (A_0 - A) \|x\| \leq A \|x\| - B$$

для всех $x \in P$ таких, что $\|x\| \geq \frac{B}{A - A_0}$. Поэтому множество

$$\{x \in X \mid \varphi(x) \leq A \|x\| - B\}$$

содержит множество

$$\left\{ x \in X \mid \varphi(x) \leq A_0 \|x\|, \|x\| \geq \frac{B}{A - A_0} \right\}.$$

Следовательно, оно неограничено. В силу коэрцитивности F множество $\{x \in X \mid F(x) \leq A\|x\|\}$ содержится в некотором шаре $B(0, R)$. Тогда $F(x) \geq A\|x\| - AR + c_0$, $x \in X$. Следовательно, множество N содержится в выпуклом конусе $\{(x, t) \mid t \geq A\|x\| - AR + c_0\}$. Поэтому множество V содержится в том же конусе, т.е. $\varphi(x) \geq A\|x\| - AR + c_0$, $x \in X$. Получаем противоречие.

Кроме того, множество N содержится в полупространстве $\{(x, t) \mid t \geq c_0\}$. Следовательно, множество V лежит там же. Отсюда вытекает, что $\varphi(x) \geq c_0$, $x \in X$.

Докажем вторую часть утверждения. Допустим противное, т.е. что экстремальная точка $z = (x, \varphi(x))$ для V не принадлежит слабо замкнутому множеству N . В этом случае существует слабая окрестность O точки z , не пересекающаяся с N . Существует опорный линейный функционал $x^* \in X^*$ такой, что $\varphi(y) \geq x^*(y - x) + \varphi(x)$. В силу линейной коэрцитивности φ множество $Q = \{y \in X \mid \varphi(y) \leq x^*(y - x) + \varphi(x) + 1\}$ ограничено. Следовательно, ограничено и множество

$$\begin{aligned} \widehat{Q} &= \{w = (y, t) \in V \mid t \leq x^*(y - x) + \varphi(x) + 1\} \\ &= \{w = (y, t) \mid \varphi(y) \leq t \leq x^*(y - x) + \varphi(x) + 1\}. \end{aligned}$$

Кроме того, множество $\widehat{Q}$ замкнуто и выпукло. Следовательно, оно слабо компактно в пространстве $X \in (Rf)$. Найдется слабая окрестность $O_1 \subset O$ точки z , не пересекающаяся с полупространством

$$\{w = (y, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t \geq x^*(y - x) + \varphi(x) + 1\}.$$

Найдется линейный функционал $p^* \in X^* \times \mathbb{R}^*$, для которого верно включение $\{w \in \widehat{Q} \mid p^*(w) \leq p^*(z)\} \subset O_1$ (см. [5; лемма 1.2]). Следовательно, для некоторого $\delta > 0$ верно включение $\{w \in \widehat{Q} \mid p^*(w) \leq p^*(z) + \delta\} \subset O_1$. Отсюда $\{w \in V \mid p^*(w) \leq p^*(z) + \delta\} \subset O$. Следовательно, множество N лежит в полупространстве $\{w \in X \times \mathbb{R} \mid p^*(w) \geq p^*(z) + \delta\}$. Но тогда в этом же полупространстве находится и замыкание ее выпуклой оболочки, т.е. множество V , что противоречит условию $z \in V$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $X \in (Rf)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу, ограниченный на любом ограниченном множестве, линейно коэрцитивный функционал; $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}(X)$ — последовательность функционалов, сходящихся к функционалу $f_0 \in \mathcal{A}(X)$, таких, что множество

$$\left\{ x \in X \mid \inf_X (F - f_n) = F(x) - f_n(x) \right\} = \{x_n\}$$

одноточечно для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится к x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к f_0 , то она ограничена. Следовательно, существует число $A > 0$ такое, что $\|f_n\| \leq A$,

$n \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_0(x)| &\leq |(f_n(x) - f_n(0)) - (f_0(x) - f_0(0))| + |f_n(0) - f_0(0)| \\ &\leq \|(f_n(\cdot) - f_n(0)) - (f_0(\cdot) - f_0(0))\| \|x\| + \|f_n - f_0\| \\ &\leq 2\|f_n - f_0\| \|x\| + \|f_n - f_0\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

В силу линейной коэрцитивности F множество

$$B = \{x \in X \mid F(x) \leq |F(0)| + 2A\|x\|\}$$

ограничено, т.е. $B \subset B(0, R)$ для некоторого $R > 0$. Следовательно, $C = \sup\{|F(x)| \mid x \in B\} \in \mathbb{R}$. Так как $F(x_n) - f_n(x_n) \leq F(0) - f_n(0)$, то

$$F(x_n) \leq |F(0)| + |f_n(x_n) - f_n(0)| \leq |F(0)| + 2A\|x_n\|, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и, следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, т.е. $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не сходится в слабой топологии к точке x_0 , то у нее существует предельная в слабой топологии точка $z \in X$, $z \neq x_0$. При этом в силу условия $|F(x_n)| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$, существует подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что x_{n_k} слабо сходится к z и $F(x_{n_k})$ сходится к некоторому числу $t_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, последовательность $(x_{n_k}, F(x_{n_k}))$ слабо сходится к точке (z, t_0) . Учитывая, что в силу полунепрерывности снизу в слабой топологии функционала F надграфик $N = \{(x, t) \mid x \in X, t \geq F(x)\}$ слабо замкнут в $X \times \mathbb{R}$, мы получаем, что $(z, t_0) \in N$, т.е. $t_0 \geq F(z)$. Так как

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_0(x_{n_k})| &\leq 2\|f_{n_k} - f_0\|R + \|f_{n_k} - f_0\| \rightarrow 0, \\ f_0(x_{n_k}) &\rightarrow f_0(z), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то $f_{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow f_0(z)$, $k \rightarrow \infty$. Переходя к пределу в неравенстве $F(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \leq F(x_0) - f_{n_k}(x_0)$, мы получаем, что $t_0 - f_0(z) \leq F(x_0) - f_0(x_0)$. Следовательно, $F(z) - f_0(z) \leq F(x_0) - f_0(x_0)$, т.е. $\inf_X (F - f_0) = F(z) - f_0(z)$. Получаем противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится к x_0 , то так же, как и в доказательстве леммы 10, можно показать, что $f_n(x_n) \rightarrow f_0(x_0)$, $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях предыдущей леммы $\varrho_n = \inf_X (F - f_n) \rightarrow \varrho_0 = \inf_X (F - f_0)$ и $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полунепрерывности снизу функционала F верны следующие неравенства:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq F(x_0), \quad \varrho_n = F(x_n) - f_n(x_n) \leq F(x_0) - f_n(x_0)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому в силу замечания 11 имеем

$$F(x_0) - f_0(x_0) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n \leq F(x_0) - f_0(x_0),$$

т.е.

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \varrho_0.$$

Выбирая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\varrho_{n_k} \rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varrho_n$, $k \rightarrow \infty$, и повторяя для нее предыдущие рассуждения, получаем, что $\varrho_{n_k} \rightarrow \varrho_0$, $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varrho_n \rightarrow \varrho_0$, $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $F(x_n) = \varrho_n + f_n(x_n) \rightarrow \varrho_0 + f_0(x_0) = F(x_0)$, $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях предыдущей леммы дополнительно $I: X \rightarrow X_0$ – линейный непрерывный оператор из X в $X_0 \in (B)$. Тогда последовательность $\{(Ix_n, F(x_n))\}$ слабо в $X_0 \times \mathbb{R}$ сходится к точке $(Ix_0, F(x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что последовательность $\{Ix_n\}$ слабо сходится к Ix_0 . Для произвольного функционала $x^* \in X_0^*$ верны следующие соотношения: $\langle Ix_n, x^* \rangle = \langle x_n, I^*x^* \rangle \rightarrow \langle x_0, I^*x^* \rangle = \langle Ix_0, x^* \rangle$, $n \rightarrow \infty$. Итак, последовательность $\{Ix_n\}$ слабо сходится к Ix_0 .

Для непустого множества $M \subset X \in (B)$ через $\text{aff}(M)$ обозначим его аффинную оболочку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Гранью непустого выпуклого замкнутого множества $M \subset X \in (B)$ назовем непустое выпуклое множество $\mathcal{E} \subset M$ такое, что для любого отрезка $[a, b] \subset M$ условие $(a, b) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ влечет условие $[a, b] \subset \mathcal{E}$. Известно, что если $\mathcal{E}$ – грань M , то $\text{aff}(\mathcal{E}) \cap M = \mathcal{E}$. Грань $\mathcal{E} \subset M$ называется конечномерной, если $\dim \text{aff}(\mathcal{E}) < +\infty$.

Для произвольного множества E из плоскости $Y \subset X \in (B)$ через $\partial_Y E$ и $\text{int}_Y E$ будем обозначать соответственно множество его граничных и внутренних точек относительно плоскости Y . В случае, когда $Y = \text{aff}(\mathcal{E})$, будем вместо указанных обозначений использовать соответственно обозначения $\partial_0 E$ и $\text{int}_0 E$.

ЛЕММА 11. Пусть $X \in (Rf)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу, коэрцитивный функционал. Тогда отображение F ограничено снизу и инфимум F достигается в некоторой точке $x_0 \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c = \inf_X F \in \overline{\mathbb{R}}$. Для любого числа $a > c$ множество $A = \{x \in X \mid F(x) \leq a\}$ ограничено и непусто. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset A$ такова, что $F(x_n) \rightarrow c$, $n \rightarrow \infty$, и x_0 – предельная точка в слабой топологии. В силу полунепрерывности снизу отображения F верно неравенство $F(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = c$. Следовательно, $F(x_0) = c \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $X \in (Rf)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу, линейно коэрцитивный функционал. Тогда отображение $F - \psi$, где $\psi \in \mathcal{A}(X)$, ограничено снизу и инфимум $F - \psi$ достигается в некоторой точке $x_0 \in X$.

В дальнейшем нам понадобится теорема Крейна–Мильмана (см. [6]).

ТЕОРЕМА В. Всякое непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства $\mathcal{X}$ является замкнутой выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

Если $M \subset \mathcal{X}$ – такое непустое замкнутое множество, что множество $K \subset \mathcal{X}$, являющееся замыканием выпуклой оболочки M , компактно, то все экстремальные точки K принадлежат M .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X, X_0 \in (Rf)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу, ограниченный на любом ограниченном множестве, непрерывный, невыпуклый и линейно коэрцитивный функционал, $I: X \rightarrow X_0$ – инъективный непрерывный линейный оператор. Тогда для произвольного всюду плотного выпуклого множества $\mathcal{N}$ в пространстве $\mathcal{A}(X_0)$ найдется функционал $\Phi \in \mathcal{N}$, для которого множество $\{x \in X \mid \inf_X (F - \widehat{\varphi}) = F(x) - \widehat{\varphi}(x)\}$ состоит более чем из одной точки, где $\widehat{\varphi} = \Phi \circ I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу слабой полунепрерывности снизу функционала F его надграфик $N = \{(x, t) \mid x \in X, t \geq F(x)\}$ является слабо замкнутым множеством в $X \times \mathbb{R}$. Пусть V – замыкание выпуклой оболочки N , а $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция, график которой является границей тела V . В силу леммы 9 функция φ ограничена снизу и линейно коэрцитивна. Без потери общности можно считать, что $\varphi \geq 0$ на X . Так как F – невыпуклый функционал, то множество N невыпукло. Следовательно, найдется точка $(z, t_0) \in V \setminus N$. Так как $F(x) \geq \varphi(x) \geq 0$, $x \in X$, то $N, V \subset X \times [0, +\infty)$. Следовательно, существует число $t_1 \geq 0$ такое, что $(z, t_1) \in \partial V \setminus N$. По теореме Хана–Банаха существует опорный ненулевой функционал $\eta^* = (q^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}^* = X^* \times \mathbb{R}$ в точке (z, t_1) к выпуклому телу V , для которого верно равенство $\eta^*(z, t_1) = \inf_V \eta^* \stackrel{\text{def}}{=} \varrho$, т.е. $q^*(z) + ct_1 \leq q^*(x) + ct$ для всех $(x, t) \in V$. Множество

$$K = \{(x, t) \in V \mid \eta^*(x, t) = \varrho\} = \{(x, \varphi(x)) \mid \eta^*(x, \varphi(x)) = \varrho\}$$

является замкнутым и выпуклым множеством и ограничено в силу линейной коэрцитивности функции φ . Следовательно, оно является слабо компактным множеством. Из теоремы Крейна–Мильмана и леммы 9 вытекает, что $K \cap N \neq \emptyset$, а из построения следует, что $K \cap N$ невыпукло. Найдется конечномерная грань $\mathcal{E} \subset K$ множества V , для которой множество $\mathcal{E} \cap (K \cap N) = \mathcal{E} \cap N$ невыпукло, $\partial_0 \mathcal{E} \subset N$, и найдется точка $(x_0, t_0) \in \text{int}_0 \mathcal{E} \setminus N$ (см. [5; предложение 1.2]), при этом $t_0 = \varphi(x_0)$. Без потери общности будем считать, что $x_0 = 0$. В этом случае $u_0 = I(x_0) = 0$. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\widehat{I}: X \times \mathbb{R} \rightarrow X_0 \times \mathbb{R}$, задаваемый формулой $\widehat{I}(x, t) = (I(x), t)$, $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$. Рассмотрим также множество $\mathcal{E}_0 = \widehat{I}(\mathcal{E})$, являющееся гранью множества $V_0 = \widehat{I}(V)$, и $L_0 = \widehat{I}(\text{aff}(\mathcal{E})) = \text{aff}(\mathcal{E}_0)$. Без потери общности можно считать, что $\text{diam } \mathcal{E}_0 = 1$. По построению $\tau_0 = (u_0, t_0) = (0, \varphi(0)) \in \text{int}_0 \mathcal{E}_0 \setminus N_0$, где $N_0 = \widehat{I}(N)$. Следовательно, найдется число $\delta > 0$ такое, что множества $B(\tau_0, 5\delta) \cap \mathcal{E}_0$ и $A_0 = \mathcal{E}_0 \cap N_0$ не пересекаются. Кроме того, $\partial_0 \mathcal{E}_0 \subset A_0 \subset N_0$.

Пусть $l \times \mathbb{R}$ – прямое дополнение L_0 до $X_0 \times \mathbb{R}$, а $\mathcal{P}: X_0 \times \mathbb{R} \rightarrow L_0$ – проектор на L_0 параллельно $l \times \mathbb{R}$. Положим $a = \|\mathcal{P}\|$ ($a \geq 1$). Пусть

$$C = (a + 1)\|\widehat{I}\|, \quad C_0 = \left(2 \sup_{B(0,1)} \varphi + 2 \sup_{\mathcal{E}} \varphi + 1\right)\|\widehat{I}\|.$$

В силу линейной коэрцитивности φ множество

$$\{x \in X \mid \varphi(x) \leq 2(C + C_0 + 3 + F(0) + \varphi(0) + (C_0 + 1)\|x\|)\}$$

ограничено в X и, следовательно, содержится в множестве

$$\{x \in X \mid F(x) \leq C_1\} \subset \{x \in X \mid \varphi(x) \leq C_1\}$$

для некоторого $C_1 > 0$. Пусть

$$\begin{aligned} Q &= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t \leq C_1\}, \\ R_s &= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) + s \leq t \leq C_1 + s\}, \quad s \in (0, 1], \\ Q_0 &= \widehat{I}(Q), \quad R_s^0 = \widehat{I}(R_s). \end{aligned}$$

Эти множества слабо компактны в $X \times \mathbb{R}$ и $X_0 \times \mathbb{R}$ соответственно, так как они выпуклы, замкнуты и ограничены.

ЛЕММА 12. Пусть $p^* = (z^*, t^*) \in X^* \times \mathbb{R}^*$ – линейный функционал, разделяющий некоторую точку $(\widehat{x}, \widehat{t}) \in \mathcal{E}$ и множество R_s , т.е.

$$p^*(x, t) = z^*(x - \widehat{x}) + t^*(t - \widehat{t}) > 0$$

для всех $(x, t) \in R_s$ и $p^*(\widehat{x}, \widehat{t}) \leq 0$. Тогда для функционала $f(x) = -t^{*-1}z^*(x - \widehat{x}) + \widehat{t}$ выполняются следующие неравенства:

$$|f(x)| \leq \varphi(\widehat{x}) + 2C_0\|x\| + C_0, \quad x \in X$$

(из этого неравенства вытекает, что $\{(x, t) \in V \mid t \leq f(x)\} \subset Q$),

$$0 \geq \inf_X (F(x) - f(x)) > -s.$$

Кроме того, $t^* > 0$ и условия $p^*(x, t) > 0$ ($p^*(x, t) < 0$) и $t > f(x)$ ($t < f(x)$) равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в точке $(x, t) = (\widehat{x}, \widehat{t} + s)$ ($\widehat{t} = \varphi(\widehat{x})$) значение функционала p^* больше нуля, то в этой точке $p^*(x, t) = t^*s > 0$. Следовательно, $t^* > 0$. Учитывая, что $p^*(x, t) = t^*(t - f(x))$, получаем, что условия $p^*(x, t) > 0$ ($p^*(x, t) < 0$) и $t > f(x)$ ($t < f(x)$) равносильны. В частности, для точки $(x, t) = (x, \varphi(x) + s) \in R_s$ получаем, что $f(x) = -t^{*-1}z^*(x - \widehat{x}) + \widehat{t} < \varphi(x) + s$. Следовательно,

$$|-t^{*-1}z^*(x - \widehat{x})| \leq \varphi(\widehat{x}) + \sup_{B(0,1)} \varphi + s < C_0$$

на $B(0, 1)$. Поэтому $|f(x)| \leq \varphi(\widehat{x}) + 2C_0\|x\| + C_0$, $x \in X$. Учитывая, что $F(x) + s - f(x) \geq \varphi(x) + s - f(x) > 0$, получаем, что

$$\inf_X (F(x) - f(x)) \geq \min_X (\varphi(x) - f(x)) > -s.$$

Существует слабая окрестность $\widetilde{O}$ в пространстве X_0 грани $\mathcal{E}_0$, не пересекающаяся с множеством R_1^0 , для которой множество $\mathcal{P}(N_0 \cap \widetilde{O})$ содержится в $\frac{\delta}{16a}$ -окрестности множества A_0 (последнее вытекает из слабой непрерывности оператора $\mathcal{P}$).

Найдется линейный функционал $\overline{w}^* = (\overline{x}^*, \overline{t}^*) \in X_0^* \times \mathbb{R}^* = X_0^* \times \mathbb{R}$ такой, что $\overline{x}^*(u) + \overline{t}^*(t - t_0) = 0$ на L_0 и множество

$$\{(u, t) \in Q_0 \mid \overline{x}^*(u) + \overline{t}^*(t - t_0) \leq 0\} = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \overline{\psi}(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\overline{t}^{*-1}\overline{x}^*(u) + t_0\}$$

содержится в окрестности $\widetilde{O}$ (см. [5; предложение 1.2]). Найдется число $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что $D(\varepsilon_0) = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \overline{\psi}(u) + \varepsilon_0\} \subset \widetilde{O}$. Найдется функционал

$\psi_0 \in \mathcal{N}$, настолько близкий к функционалу $\bar{\psi}(u) + \frac{\varepsilon_0}{2}$, что множество $D_0 = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \psi_0(u)\}$ содержит грань $\mathcal{E}_0$ и содержится в $D(\varepsilon_0) \subset \tilde{O}$.

Каждая точка $\tau = (v, q) \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ принадлежит некоторой грани, содержащейся в $\partial_0 \mathcal{E}_0$. Поэтому замыкание выпуклой оболочки множеств R_1^0 и $Q_0 \cap \mathcal{P}^{-1}(B(\tau_0, \delta) \cap \mathcal{E}_0)$, которое совпадает с выпуклой оболочкой этих множеств, не пересекается с $\partial_0 \mathcal{E}_0$. Найдется слабая окрестность $\hat{O}$ множества $\partial_0 \mathcal{E}_0$, содержащаяся в $\tilde{O}$ и не пересекающаяся с выпуклой оболочкой множеств R_1^0 и $Q_0 \cap \mathcal{P}^{-1}(B(\tau_0, \delta) \cap \mathcal{E}_0)$. Следовательно, для каждой точки $\tau = (v, q) \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ найдется линейный функционал $p^* = p_\tau^* = (x_\tau^*, t_\tau^*) \in X_0^* \times \mathbb{R}^*$ (см. [5; предложение 1.2]) такой, что множество

$$\begin{aligned} & \{(u, t) \in Q_0 \mid x_\tau^*(u - v) + t_\tau^*(t - q) \leq 0\} \\ & = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \psi_\tau(u) \stackrel{\text{def}}{=} -t_\tau^{*-1} x_\tau^*(u) + q\} \subset \hat{O} \end{aligned}$$

содержится в $\tilde{O}$ и не пересекается с множеством $Q_0 \cap \mathcal{P}^{-1}(B(\tau_0, \delta) \cap \mathcal{E}_0)$. Нетрудно видеть, что найдется число $\delta(\tau) > 0$ такое, что множество $\{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \psi_\tau(u) + 2\delta(\tau)\}$ также содержится в окрестности $\hat{O}$. Из компактности $\partial_0 \mathcal{E}_0$ вытекает, что найдется конечный набор $\{\tau_j\}_{j=1}^M \subset \partial_0 \mathcal{E}_0$ такой, что $\partial_0 \mathcal{E}_0 \subset \bigcup_{j=1}^M D_j$, где $D_j = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \bar{\psi}_j(u) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\tau_j}(u) + \delta(\tau_j)\}$. Для каждой точки $\tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ рассмотрим множество индексов $Z(\tau) = \{j \mid \tau \in D_j\}$. Тогда отображение $\mathcal{C}: \partial_0 \mathcal{E}_0 \rightarrow 2^{\mathcal{A}(X_0)}$, сопоставляющее точке τ выпуклую оболочку $\{\bar{\psi}_j(\cdot) + \frac{\delta}{2}\}_{j \in Z(\tau)}$, где $\delta = \min_j \delta(\tau_j)$, является полунепрерывным сверху. Для всех точек $\tau = (u, t) \in Q_0 \setminus \hat{O}$ и всех индексов $j \in Z(\tau)$ выполняются следующие неравенства: $t > \psi_{\tau_j}(u) + 2\delta(\tau_j) \geq \bar{\psi}_j(u) + \delta$, поэтому выпуклая оболочка этих функционалов состоит из тех функционалов ψ , для которых верно неравенство $t > \psi(u) + \frac{\delta}{2}$ для всех точек $(u, t) \in Q_0 \setminus \hat{O}$. Отсюда следует, что для всех $\tau = (v, q) \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ и $\psi \in \mathcal{C}(\tau)$ множество $\{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \psi(u) + \frac{\delta}{2}\}$ содержится в $\hat{O}$ и $q \leq \psi(v) - \frac{\delta}{2}$. Найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $\tau, \tilde{\tau} \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ и $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}(\tilde{\tau})$, $\psi \in \mathcal{C}(\tau)$ таких, что $\|\tau - \tilde{\tau}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| < \delta_1$, верны соотношения $q \leq \psi(v) - \frac{\delta}{4}$, где $(v, q) = \tau$ и $\{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \psi(u) + \frac{\delta}{4}\} \subset \hat{O}$. В силу леммы 8 найдется непрерывное отображение $T: \partial_0 \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{N}$ такое, что для всех $\tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ найдутся $\tilde{\tau} \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ и $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}(\tilde{\tau})$ такие, что $\|\tau - \tilde{\tau}\| + \|\tilde{\psi} - T(\tau)\| < \delta_1$ и, следовательно, верны соотношения

$$q \leq T(\tau)[v] \quad ((v, q) = \tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0), \quad \left\{ (u, t) \in Q_0 \mid t \leq T(\tau)[u] + \frac{\delta}{4} \right\} \subset \hat{O}.$$

Отметим, что в силу леммы 12

$$\left\{ (u, t) \in V_0 \mid t \leq T(\tau)[u] + \frac{\delta}{4} \right\} \subset Q_0$$

(в качестве $f(x)$ рассматривается функционал $T(\tau)[Ix] + \frac{\delta}{4}$) и, следовательно,

$$\left\{ (u, t) \in V_0 \mid t \leq T(\tau)[u] + \frac{\delta}{4} \right\} = \left\{ (u, t) \in Q_0 \mid t \leq T(\tau)[u] + \frac{\delta}{4} \right\}.$$

Таким образом, $t > T(\tau)[u] + \frac{\delta}{4}$ для всех точек $(u, t) \in V_0 \setminus \hat{O}$.

Рассмотрим непрерывные отображения $G^+ : \mathcal{E}_0 \setminus \{\tau_0\} \rightarrow \partial_0 \mathcal{E}_0$ и $G^- : \mathcal{E}_0 \setminus \{\tau_0\} \rightarrow \partial_0 \mathcal{E}_0$, задаваемые следующими формулами:

$$G^+(\tau) = \{\tau_0 + \beta(\tau - \tau_0) \mid \beta > 0\} \cap \partial_0 \mathcal{E}_0, \quad G^-(\tau) = \{\tau_0 + \beta(\tau - \tau_0) \mid \beta < 0\} \cap \partial_0 \mathcal{E}_0$$

для всех точек $\tau \in \mathcal{E}_0 \setminus \{\tau_0\}$. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – такая непрерывная функция, что $\alpha \equiv 0$ на $(-\infty, \delta]$, $\alpha \equiv 1$ на $[2\delta, +\infty)$. Определим отображение $\hat{T} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{N}$, положив $\hat{T} \equiv \psi_0$ на $B(\tau_0, \delta) \cap \mathcal{E}_0$, $\hat{T}(\tau) = (1 - \alpha)\psi_0 + \alpha T \circ G^+(\tau)$ для $\tau \in \mathcal{E}_0 \setminus B(\tau_0, \delta)$ и $\alpha = \alpha(\|\tau - \tau_0\|)$. По построению $t > \hat{T}(\tau)[u] + \frac{\delta}{4}$ для всех точек $(u, t) \in Q_0 \setminus \hat{O}$. Следовательно, $\{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \hat{T}(\tau)[u] + \frac{\delta}{4}\} \subset \hat{O}$ для всех точек $\tau \in \mathcal{E}_0 \setminus B(\tau_0, 2\delta)$ (в этом случае $\hat{T}(\tau) = T \circ G^+(\tau)$) и $\{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \hat{T}(\tau)[u]\} \subset \tilde{O}$ для всех точек $\tau \in \mathcal{E}_0 \cap B(\tau_0, 2\delta)$. В силу леммы 12 имеем

$$\{(u, t) \in V_0 \mid t \leq \hat{T}(\tau)[u]\} = \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \hat{T}(\tau)[u]\}.$$

Пусть

$$\mathbb{P}(\tau) = \left\{ x \in X \mid \inf_X (F - \hat{T}(\tau) \circ I) = F(x) - \hat{T}(\tau) \circ I(x) \right\}$$

для точек $\tau \in \mathcal{E}_0$. Так как для всех точек $\tau = (u, t) \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ верно $\tau = G^+(\tau)$, то для точки такой, что $(x, F(x)) : \hat{I}(x, F(x)) = (Ix, F(x)) = \tau$, верно неравенство $F(x) \leq \hat{T}(\tau)[u] = T(G^+(\tau))[u]$. Следовательно, $F(x) - \hat{T}(\tau) \circ I(x) \leq 0$. Таким образом, инфимум $(F - \hat{T}(\tau) \circ I)$ не превосходит нуля для всех точек $\tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0$. В этом случае для всех точек $x \in \mathbb{P}(\tau)$ точка $\tilde{\tau} = (\tilde{u}, \tilde{t}) = \hat{I}(x, F(x))$ принадлежит $N_0 \cap Q_0 \cap \hat{O}$. К тому же точка τ_0 не принадлежит $\mathcal{P}([\tau, \tilde{\tau}])$. Действительно, $[\tau, \tilde{\tau}] \subset \{(u, t) \in Q_0 \mid t \leq \hat{T}(\tau)[u]\} \subset \hat{O}$. Следовательно, отрезок $[\tau, \tilde{\tau}]$ не пересекается с $Q_0 \cap \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{E}_0 \cap B(\tau_0, \delta))$.

Предположим, что для всех точек $\tau \in \mathcal{E}_0$ множество $\mathbb{P}(\tau)$ одноточечно. Определим отображение $U : \mathcal{E}_0 \rightarrow N_0 \cap \tilde{O}$, положив $U(\tau) = \hat{I}(\mathbb{P}(\tau), F(\mathbb{P}(\tau))) = (I(\mathbb{P}(\tau)), F(\mathbb{P}(\tau)))$. Так как оператор $\mathcal{P}$ переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, то в силу следствия 3 отображение $\mathcal{P} \circ U : \mathcal{E}_0 \rightarrow O_{\delta/(16a)}(A_0)$ является непрерывным. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathcal{G} = G^- \circ \mathcal{P} \circ U : \mathcal{E}_0 \rightarrow \partial_0 \mathcal{E}_0$ (непрерывность вытекает из того, что область значения проектора $\mathcal{P}$ на $N \cap \tilde{O}$ лежит в $O_{\delta/(16a)}(A_0)$ и, следовательно, не пересекается с $B(\tau_0, 4\delta)$). Учитывая, что для всех $\tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0$ отрезок $[\tau, \mathcal{P} \circ U(\tau)]$ не содержит точки τ_0 , мы получим, что $\mathcal{G}(\tau) \neq \tau$ для всех точек $\tau \in \partial_0 \mathcal{E}_0$. Таким образом, непрерывное отображение $\mathcal{G} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \partial_0 \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_0$ не имеет неподвижных точек, что противоречит теореме Брауэра. Полученное противоречие показывает, что для некоторой точки $\tau \in \mathcal{E}_0$ множество $\mathbb{P}(\tau)$ не является одноточечным, что и доказывает теорему 4 для случая $\Phi = \hat{T}(\tau) \in \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X \in (Rf)$, $F_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченно равномерно выпуклый и коэрцитивный функционал; $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу, ограниченный на любом ограниченном множестве функционал, $F = F_0 + G$ – коэрцитивный функционал. Тогда множество X является аппроксимативно компактным относительно функционала F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выпуклости F_0 вытекает его полунепрерывность снизу в слабой топологии, из коэрцитивности отсюда следует его ограниченность

снизу. Аналогично, слабо полунепрерывное снизу и коэрцитивное отображение F также ограничено снизу. Пусть $a = \inf_X F \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X: F(x_n) \rightarrow a, n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что последовательность $\{F(x_n)\}$ ограничена, т.е. существует число $A > 0$ такое, что $|F(x_n)| \leq A$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из коэрцитивности F вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Следовательно, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) \in \mathbb{R}$. Выбирая, если необходимо, подпоследовательность и обозначая ее так же, как и исходную, будем считать, что $c = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n)$. В этом случае

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0(x_n) = a - c.$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то у нее существует частичный предел в слабой топологии. Без потери общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в слабой топологии к некоторой точке $x_0 \in X$. Из полунепрерывности снизу в слабой топологии функции G вытекает, что $G(x_0) \leq c$. Отсюда следует, что $x_0 \in E = \{x \in X \mid G(x) \leq c\}$. Кроме того, множество E является ограничено слабо компактным и в силу теоремы 1 оно аппроксимативно компактно относительно функционала F_0 .

Поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in V_\varepsilon = \{x \in X \mid F_0(x) \leq \varrho + \varepsilon\}$, $n \geq N$, а множество V_ε является выпуклым и замкнутым (следовательно, и слабо замкнутым), мы получим, что $x_0 \in V_\varepsilon$ для всех ε . Поэтому $x_0 \in M^e = \{x \in X \mid F_0(x) \leq \varrho\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon$. Следовательно, $\varrho \geq \varrho_0 = \inf_E F_0$. Отсюда $a \leq \varrho_0 + c \leq \varrho + c = a$ и, следовательно, $\varrho = \varrho_0$, $F(x_0) = a$, $x_0 \in \partial M^e$. Из аппроксимативной компактности E относительно функционала F_0 вытекает, что минимизирующая последовательность $\{x_n\}$ имеет частичный предел в сильной топологии из E . Учитывая, что x_0 – слабый предел последовательности $\{x_n\}$, мы получаем, что x_0 – частичный предел последовательности $\{x_n\}$ в сильной топологии. Отсюда вытекает утверждение теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $X, X_0 \in (Rf)$, $I: X \rightarrow X_0$ – оператор компактного вложения, $G: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный функционал, $F_0: X \rightarrow \mathbb{R}$ – ограничено равномерно выпуклый, линейно коэрцитивный функционал такой, что для некоторых чисел $c \in (0, 1)$ и $A > 0$ верно неравенство $|G_0(x)| \leq c|F_0(x)|$, $x \in X \setminus B(0, A)$, где $G_0 = G \circ I$. Тогда функционал $F = F_0 + G_0$ является слабо полунепрерывным снизу и линейно коэрцитивным, а множество X является аппроксимативно компактным относительно функционала F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функционал G_0 слабо непрерывен на X . Действительно, для любой последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящейся к некоторой точке $x_0 \in X$, последовательность $\{y_n = Ix_n\} \subset X_0$ имеет частичный предел $y_0 \in X_0$ в сильной топологии. Кроме того, $\{Ix_n\}$ слабо сходится к точке Ix_0 . Отсюда вытекает, что $y_0 = Ix_0$ – это и единственный частичный предел последовательности $\{y_n\}$ в сильной топологии. Из этого следует, что $\{y_n\}$ сходится в сильной топологии к y_0 . Из непрерывности G вытекает, что $G(y_n) \rightarrow G(y_0)$, $n \rightarrow \infty$, т.е. $G_0(x_n) \rightarrow G_0(x_0)$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, G_0 – слабо непрерывный функционал на X и поэтому F слабо полунепрерывен снизу на X . Докажем, что F – линейно коэрцитивный функционал. Так как функционал F_0 линейно коэрцитивен, то для любого числа $B > 0$ множество $\left\{x \in X \mid F_0(x) \leq \frac{B}{1-c} \|x\|\right\}$

ограничено. Учитывая, что для всех $x \in X \setminus B(0, A)$ верны неравенства

$$F(x) = F_0(x) + G_0(x) \geq F_0(x) - |G_0(x)| \geq (1 - c)F_0(x),$$

мы получаем, что множество $\{x \in X \mid F(x) \leq B\|x\|\}$ содержится в множестве $\left\{x \in X \mid F_0(x) \leq \frac{B}{1-c}\|x\|\right\} \cup B(0, A)$ и, следовательно, ограничено, т.е. F – линейно коэрцитивный функционал. Отсюда следует, что F является коэрцитивным функционалом и в силу теоремы 5 множество X аппроксимативно компактно относительно F .

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Утверждение следствия останется верным, если в качестве $G_0: X \rightarrow \mathbb{R}$ взять произвольный слабо непрерывный функционал, удовлетворяющий неравенству $|G_0(x)| \leq c|F_0(x)|$, $x \in X \setminus B(0, A)$, для некоторых чисел $c \in (0, 1)$ и $A > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть для X, X_0, F_0, G_0 выполняются условия предыдущего следствия (замечания). Тогда X является аппроксимативно компактным множеством относительно семейства $\{F_\psi = F - \psi\}_{\psi \in \mathcal{A}}$, где $F = F_0 + G_0$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$. Если при этом дополнительно оператор $I: X \rightarrow X_0$ инъективен, а функционал F не является выпуклым, то для всюду плотного выпуклого множества $\mathcal{N}$ в пространстве $\mathcal{A}(X_0)$ найдется функционал $\Phi \in \mathcal{N}$, для которого множество $\{x \in X \mid \inf_X (F - \varphi) = F(x) - \varphi(x)\}$ содержит более одной точки, где $\varphi = \Phi \circ I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию найдется число $c \in (0, 1)$ такое, что $|G_0(x)| \leq c|F_0(x)|$ на $X \setminus B(0, A)$ для некоторого числа $A > 1$. Так как функционал F_0 линейно коэрцитивен, то для произвольного функционала $\psi \in \mathcal{A}(X)$ и числа $b = \frac{6\|\psi\|}{1-c} + 1 > 0$ найдется число $R > A$ такое, что $F_0(x) > b\|x\|$ на $X \setminus B(0, R)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |G_0(x) - \psi(x)| &\leq |G_0(x)| + 3\|\psi\| \|x\| \leq cF_0(x) + 3\|\psi\| \|x\| \\ &< cF_0(x) + 3\|\psi\| \frac{F_0(x)}{b} = \left(c + \frac{1-c}{2}\right)F_0(x) = \frac{1+c}{2}F_0(x) \end{aligned}$$

на $X \setminus B(0, R)$ (здесь $\frac{1+c}{2} < 1$). Таким образом, для функционала

$$F_\psi(x) = F(x) - \psi(x) = F_0(x) + (G_0(x) - \psi(x))$$

выполняется утверждения замечания 12, так как функционал $G_0(x) - \psi(x)$ слабо непрерывен. Итак, X – аппроксимативно компактно относительно F_ψ для любого функционала $\psi \in \mathcal{A}(X)$. Оставшаяся часть утверждения вытекает из теоремы 4.

§ 4. Приложение к задачам вариационного исчисления

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 , $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая положительная функция, для которой существует константа $\gamma_0 > 0$ такая, что $\gamma(\cdot) > \gamma_0$ на Ω . Рассмотрим функции $\varphi, g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию Каратеодори (т.е. они измеримы по первой переменной для всех значений второй и для почти всех значений первой переменной непрерывны по второй) и такие, что найдутся константы $C, C_0 > 0$, для которых верны

неравенства: $0 \leq \varphi(x, u) \leq C + C|u|^p$, $|g(x, u)| \leq C_0 + C_0|u|^\alpha$, $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$, где $\alpha, q > 1$, а $p \geq 1$ – любое число в случае $n \leq q$ и $1 \leq p < \frac{qn}{n-q}$ в случае $n > q$. Кроме того, пусть функция $\varphi(x, u)$ выпукла по переменной u для каждой точки $x \in \Omega$.

Через $\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)$ обозначим пространство, являющееся замыканием множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ относительно нормы

$$\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega)} = \|\gamma \nabla u\|_{L_q(\Omega)}.$$

При перечисленных выше условиях функционал

$$F_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega)}^q + \int_{\Omega} \varphi(x, u(x)) dx$$

является ограниченно равномерно выпуклым, линейно коэрцитивным, непрерывным функционалом на $X = \dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)$, ограниченным на любом ограниченном множестве из X , а функционал $G: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$G(v) = \int_{\Omega} g(x, v(x)) dx, \quad X_0 = L_\alpha(\Omega),$$

– непрерывным на X_0 . Пусть $I: X \rightarrow X_0$ – оператор компактного вложения X в X_0 ($(Iu)(x) = u(x)$). В этом случае функционал

$$G_0(u) = G \circ I(u) = \int_{\Omega} g(x, u(x)) dx$$

является слабо непрерывным на X .

ЛЕММА 13. Пусть $\alpha < q$ или найдутся числа $\theta > \alpha$ и $C_1 > 0$ такие, что $\varphi(x, u) \geq C_1|u|^\theta - C_1$, $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $A > 0$ такое, что $|G_0(u)| \leq \varepsilon|F_0(u)|$ для всех $u \in \dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega): \|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)} \geq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\alpha < q$. В силу теоремы вложения (см. [7]) найдется число $B > 0$ такое, что для всех $u \in X$ верны неравенства

$$\int_{\Omega} |u(x)|^\alpha dx \leq B\gamma_0^\alpha \|\nabla u\|_{L_q(\Omega)}^\alpha \leq B\|\nabla u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega)}^\alpha.$$

Тогда для всех $u \in \dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)$ таких, что

$$\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)} \geq \left(\frac{\text{mes } \Omega}{B}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{2BC_0}{\varepsilon}\right)^{1/(q-\alpha)},$$

верны следующие неравенства:

$$|G_0(u)| \leq BC_0\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)}^\alpha + C_0 \text{mes } \Omega \leq 2BC_0\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)}^\alpha \leq \varepsilon\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)}^q \leq \varepsilon|F_0(u)|.$$

Рассмотрим теперь второй случай, т.е. верно неравенство $\varphi(x, u) \geq C_1|u|^\theta - C_1$ для некоторых чисел $\theta > \alpha$ и $C_1 > 0$. Положим

$$A_0 = 2(1 + \text{mes } \Omega) + \left(\frac{8C_0}{\varepsilon C_1}\right)^{\alpha/(\theta-\alpha)} \text{mes } \Omega, \quad A = \frac{2C_0}{\varepsilon}(\text{mes } \Omega + A_0) + 1.$$

Допустим, что

$$u \in \dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega), \quad \|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)} \geq A, \quad |G_0(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} |F_0(u)|$$

(заметим, что $\frac{\varepsilon}{2} |F_0(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} A^q \geq \frac{\varepsilon}{2} A$). Отсюда

$$C_0 \operatorname{mes} \Omega + C_0 \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\alpha \geq |G_0(u)| \geq C_0 \operatorname{mes} \Omega + C_0 A_0.$$

Следовательно, $\|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\alpha \geq A_0$. В силу неравенства Гёльдера

$$\|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\theta (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} \leq \|u\|_{L_\theta(\Omega)}^\theta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\theta(\Omega)}^\theta &\geq A_0^{\theta/\alpha} (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} \geq (2 \operatorname{mes} \Omega)^{\theta/\alpha} (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} \\ &\geq 2^{\theta/\alpha} \operatorname{mes} \Omega \geq 2 \operatorname{mes} \Omega. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x, u(x)) dx &\geq C_1 \|u\|_{L_\theta(\Omega)}^\theta - C_1 \operatorname{mes} \Omega \geq \frac{C_1}{2} \|u\|_{L_\theta(\Omega)}^\theta = \frac{C_1}{4C_0} \|u\|_{L_\theta(\Omega)}^\theta \cdot 2C_0 \\ &\geq \frac{C_1}{4C_0} \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\theta (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} \cdot 2C_0 \\ &= \frac{C_1}{4C_0} \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^{\theta-\alpha} (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} \cdot 2C_0 \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\alpha \\ &\geq \frac{C_1}{4C_0} \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^{\theta-\alpha} (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} (C_0 \|u\|_{L_\alpha(\Omega)}^\alpha + C_0 \operatorname{mes} \Omega) \\ &\geq \frac{C_1}{4C_0} A_0^{(\theta-\alpha)/\alpha} (\operatorname{mes} \Omega)^{(\alpha-\theta)/\alpha} |G_0(u)| \geq \frac{2}{\varepsilon} |G_0(u)|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для всех $u \in \dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)$, $\|u\|_{\dot{W}_{q,\gamma}^1(\Omega)} \geq A$, верны следующие неравенства:

$$|G_0(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \varphi(x, u(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} |F_0(u)|.$$

Это завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если функционал $F = F_0 + G_0$ является невыпуклым, то в силу следствия 6 найдется функционал

$$\psi(u) = a + \int_{\Omega} f(x)u(x) dx,$$

где $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$, такой, что функционал $F - \psi$ имеет по крайней мере два абсолютных минимума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из того, что множество $C_0^\infty(\Omega) + \mathbb{R}$ порождает множество функционалов $\mathcal{N}$, являющихся выпуклым и всюду плотным в пространстве аффинных функционалов на $L_\alpha(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. То же самое верно в случае, когда f пробегает множество алгебраических многочленов.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$F(u) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^q dx + \frac{\lambda_1}{p} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx - \frac{\lambda_2}{\alpha} \int_{\Omega} |u(x)|^\alpha dx,$$

где $q > 1$, $1 < p < \frac{qn}{n-q}$ в случае $n > q$ или $p > 1$ – любое число в случае $n \leq q$, $1 < \alpha < \min\{p, q\}$, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0$. В этом случае функционал F удовлетворяет условиям следствия 7 и поэтому найдется функционал $\psi(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ (многочлен), такой, что функционал $F - \psi$ имеет по крайней мере два абсолютных минимума. На самом деле у этого функционала найдется еще одна критическая точка. Следовательно, в классе $\dot{W}_q^1(\Omega) = \dot{W}_{q,1}^1(\Omega)$ задача

$$\begin{cases} \Delta_q u = \lambda_1 |u|^{p-2} u - \lambda_2 |u|^{\alpha-2} u + f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

имеет по крайней мере три решения.

Список литературы

- [1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1984; англ. пер. 2-го изд.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [2] Дж. Кэлли, *Общая топология*, Наука, М., 1981; пер. с англ.: J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.
- [3] К. Fan, “Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 121–126.
- [4] В. И. Бердышев, “Непрерывность оператора метрического проектирования и его обобщений”, *Конструктивная теория функций* 77, Изд-во АН Болгарии, София, 1980, 29–34.
- [5] И. Г. Царьков, “Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 169–184; англ. пер.: I. G. Tsar'kov, “Compact and weakly compact Tchebycheff sets in normed linear spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 199–215.
- [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [7] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.

И. Г. Царьков (I. G. Tsar'kov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

20.01.2010 и 29.09.2010