Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Долгобородов, Е. А. Севастьянов, Экстремальные свойства подпоследовательностей нулей аналитических функций из пространств со смешанной нормой, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:00:22

УДК 517.53

А. А. Долгобородов, Е. А. Севастьянов

Экстремальные свойства последовательностей нулей аналитических функций из пространств со смешанной нормой

В пространствах Бергмана со степенным весом и в более общих пространствах со смешанной нормой построены функции, у которых последовательности модулей их нулей обладают определенными экстремальными свойствами. Эти свойства выражаются в терминах некоторых необходимых и достаточных условий на подпоследовательности номеров указанных последовательностей. В частности, они позволяют различать нулевые множества рассматриваемых пространств в случаях, ранее не изученных, и выявляют существенную роль, которую играют подпоследовательности нулевых последовательностей при решении задач вышеуказанного типа.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: пространства Бергмана, нули аналитических функций.

§ 1. Введение

1.1. Обозначим через $\Phi_{q,\gamma}$ множество неотрицательных убывающих на $(0, 1)$ функций $\varphi(t)$, для которых

$$\|\varphi\|_{q,\gamma} := \left(\int_0^1 (\varphi(t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty, \quad 0 < \gamma < \infty, \quad 0 < q < \infty;$$

при $q = \infty$ положим

$$\|\varphi\|_{\infty,\gamma} := \sup_{0 < t < 1} \{\varphi(t)t^\gamma\}.$$

Пусть $A(\mathbb{D})$ – пространство аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $p \in (0, \infty]$,

$$M_p(f; r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < r < 1,$$

$$M_\infty(f; r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad 0 < r < 1,$$

$$L(f; r) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}, \quad 0 < r < 1,$$

$H_{q,\gamma}^p$ – пространство функций $f \in A(\mathbb{D})$ таких, что $M_p(f; 1-t) \in \Phi_{q,\gamma}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Заменяя здесь $M_p(f; \cdot)$ на $L(f; \cdot)$, определим пространство функций, которое обозначим через $H_{q,\gamma}^{\log}$. При $q = \infty$ используем для него обозначение $H_\gamma^{\log}$, так что $f \in H_\gamma^{\log}$, если

$$L(f; r) = O((1-r)^{-\gamma}), \quad r \rightarrow 1-0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225).

Нетрудно видеть, что при $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$, $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$ имеют место вложения

$$H_{q_1, \gamma}^p \subset H_{q_2, \gamma}^p, \quad H_{q, \gamma}^{\log} \supset H_{q, \gamma}^{p_1} \supset H_{q, \gamma}^{p_2}, \quad H_{q, \gamma_1}^p \subset H_{q, \gamma_2}^p.$$

По определению $H_{q, \gamma}^p$, $p \in [0, \infty]$, – семейство, в котором $H_{q, \gamma}^0 := H_{q, \gamma}^{\log}$.

В литературе пространство $A_{q, \alpha}^p := H_{q, (\alpha+1)/q}^p$, $\alpha > -1$, иногда называют пространством со смешанной нормой (см., например, [1]). При $q = p$ оно совпадает с пространством Бергмана–Джрбашяна A_α^p со степенным весом t^α , $\alpha > -1$, $0 < p < \infty$.

1.2. Обозначим через $Z(f) = \{z_k(f)\}_{k=1}^\infty$ последовательность нулей функции $f \in A(\mathbb{D})$, упорядоченных по возрастанию их модулей с учетом их кратностей. Через $Z(H)$ обозначим нулевое множество функционального класса $H \subset A(\mathbb{D})$, т.е. $Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}$.

Известно, что если $f \in A_\alpha^p$, то

$$1 - |z_n(f)| \leq \gamma \frac{\log(C(f)n)}{n}, \quad \gamma = \frac{\alpha + 1}{p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

(см. [2], [3]). Точность постоянной γ в этом неравенстве в случае $\alpha = 0$ установлена Е. Беллером в [3], а в случае любого $\alpha > -1$ – А. М. Седлецким в [4], [5]: для любых $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ была построена такая функция $f_\varepsilon \in A_\alpha^p$, что для некоторой последовательности номеров $n_k \rightarrow \infty$ справедливо неравенство

$$1 - |z_{n_k}(f_\varepsilon)| \geq (1 - \varepsilon) \gamma \frac{\log n_k}{n_k}, \quad \gamma = \frac{\alpha + 1}{p}.$$

Из (1) и примера Седлецкого следует, что нулевые множества двух пространств $A_{\alpha_1}^{p_1}$ и $A_{\alpha_2}^{p_2}$ различны, если $(\alpha_1 + 1)/p_1 \neq (\alpha_2 + 1)/p_2$. Ранее этот результат был получен Ч. Горовицем в [2] при оценке произведений

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|}.$$

В настоящей работе найдены неуплощаемые условия на подпоследовательности номеров $\{n_k\}$, для которых существуют такие функции $f \in H_{q, \gamma}^p$ с уклонениями $1 - |z_n(f)| \leq b_n$, где $\{b_n\}$ – некоторая заданная мажоранта, что $1 - |z_{n_k}(f)| = b_{n_k}$, $k > k(f)$. Это позволяет установить различие нулевых множеств пространств $H_{q_1, \gamma}^{p_1}$ и $H_{q_2, \gamma}^{p_2}$ при $q_1 \neq q_2$ и любых $p_1, p_2 \in [0, \infty]$. Более того, это различие имеет место и в условиях ограничения $1 - |z_n(f)| \leq b_n$, причем в достаточно широком диапазоне мажорант $\{b_n\}$. Таким образом, различны при том же ограничении (и без него) нулевые множества пространств Бергмана–Джрбашяна $A_{\alpha_1}^{p_1}$ и $A_{\alpha_2}^{p_2}$ в случае, когда $(\alpha_1 + 1)/p_1 = (\alpha_2 + 1)/p_2$, но $(\alpha_1, p_1) \neq (\alpha_2, p_2)$, $p_i > 0$, $\alpha_i > -1$. Этот случай как проблемный упоминается в монографии [6] (см. п. 4.9), в которой имеется также обширная библиография по пространствам Бергмана (в связи с этим см. также работы [7], [8]).

1.3. Рассмотрение пространств $H_{q, \gamma}^p$ не имеет целью лишь обобщение тех или иных утверждений для пространств A_α^p в смысле переноса результатов с пространств без веса A_0^p на пространства A_α^p , что в идейном плане зачастую ничего не дает. Появившаяся дополнительная свобода и возникающие вместе

с ней вопросы о роли параметров p, q, γ в устанавливаемых соотношениях и зависимостях в $H_{q,\gamma}^p$ соответствующим образом проецируются и на пространства A_α^p . В частности, вполне естественным становится вопрос: совпадают ли нулевые множества пространства A_α^p и его подпространства $A_{p,\alpha}^\infty$? Возможно, что ряд вопросов для пространств A_α^p целесообразно изучать именно в рамках пространств $H_{q,\gamma}^p$.

§ 2. Основная теорема

2.1. Получим оценку уклонений $1 - |z_n(f)|$ сверху.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любых $q > 0, \gamma > 0$ и любой функции $f \in H_{q,\gamma}^{\log}$ выполняется неравенство

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{\gamma}{n} \log(\varepsilon_n(f)n), \quad (2)$$

где $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если $f \in H_{q,\gamma}^{\log}$, $f(0) = 1$, то при всех достаточно больших n

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq (\varepsilon_n(f)n)^\gamma \quad (3)$$

(тогда, логарифмируя неравенство (3) и заменяя его левую часть на $n(1 - |z_n(f)|)$, получим (2)).

Если $f(0) = 1$, то в силу формулы Иенсена

$$L(f; r) = \exp \int_0^r \frac{n(t; f)}{t} dt = \prod_{k=1}^{n(r; f)} \frac{r}{|z_k(f)|}, \quad (4)$$

где $n(t; f)$ – число нулей $z_k(f)$ функции f , попавших в круг $|z| < t$. Положим $r_1 = |z_1(f)|$,

$$\pi(r; f) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r \leq r_1, \\ \prod_{k=1}^{[1/(1-r)]} \frac{1}{|z_k(f)|} & \text{при } r_1 < r < 1. \end{cases}$$

Если в правой части равенства (4) заменить $n(r; f)$ (при $r_1 < r < 1$) на любое натуральное число, то правая часть может лишь уменьшиться. Поэтому, заменив $n(r; f)$ на $[1/(1-r)]$, при $r_1 < r < 1$ получаем

$$\begin{aligned} \pi(r; f) &\leq \left(\frac{1}{r}\right)^{[1/(1-r)]} L(f; r) \leq \max\left\{\frac{1}{r_1}, 4\right\} L(f; r), \\ \|\pi(\cdot; f)\|_{q,\gamma} &\leq c(r_1) \|L(f; \cdot)\|_{q,\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что если $\varphi \in \Phi_{q,\gamma}$, то $\varphi(t) = o(t^{-\gamma})$, $t \rightarrow +0$. Поэтому при $f \in H_{q,\gamma}^{\log}$ из (5) следует, что

$$\pi(r; f) = o((1-r)^{-\gamma}), \quad r \rightarrow 1-0.$$

Положив здесь $r = 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем (3). Утверждение 1 доказано.

Пусть $\varepsilon(t)$ – положительная неубывающая на $(0, 1)$ функция, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t)/t \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$. Пусть E – множество всех указанных функций $\varepsilon(t)$. Обозначим через $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ множество функций $f \in H_{q,\gamma}^p$ таких, что

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{1}{m} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m} \right) m \right), \quad m = \frac{n}{\gamma}, \quad (6)$$

при всех достаточно больших n , $n > n(f)$ (в том числе и функций, не имеющих нулей).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При любых $q > 0$, $\gamma > 0$, $p \in [0, \infty]$ имеем

$$H_{q,\gamma}^p = \bigcup_{\varepsilon(t)} H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p,$$

где объединение берется по всем функциям $\varepsilon(t) \in E$.

Утверждение 2 следует из утверждения 1, поскольку всегда можно указать функцию $\varepsilon(t) \in E$ такую, что $\varepsilon_n(f) < \frac{1}{\gamma} \varepsilon(\frac{\gamma}{n})$ при всех достаточно больших n .

2.2. Сформулируем основную теорему.

Пусть $\varepsilon(t) \in E$, $\gamma > 0$ и

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{\varepsilon(t)} \right)^\gamma \frac{dt}{t} < \infty. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\varepsilon(t) \in E$, выполняется условие (7), $q > 0$ и $\{m_k\}$ – положительная возрастающая последовательность, для которой члены ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m_{k-1}}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) \quad (8)$$

ограничены, а ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon \left(\frac{1}{m_j} \right) m_j \right)^{\gamma q} \quad (9)$$

сходится, то в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^{\infty}$ найдется функция f такая, что при всех достаточно больших k выполнено следующее неравенство:

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right), \quad k > k(f). \quad (10)$$

Если же ряд (9) расходится, ряд (8) сходится, а $\{\eta_k\}$ – произвольная положительная последовательность такая, что $\sum \eta_k < \infty$, то (независимо от условия (7)) в $H_{q,\gamma}^{\log}$ не существует функции f , удовлетворяющей при достаточно больших k условию

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} \left(\log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) - \eta_k \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\varepsilon(t) \geq ct^{1-\varepsilon}$, $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, то условие

$$\frac{m_{k-1}}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) \leq a = \text{const} \quad (11)$$

следует из сходимости ряда (9) и является лишним. В общем случае (7) условие (11) можно заменить, например, на более сильное условие ограниченности отношения последующего члена ряда (9) к предыдущему его члену:

$$\frac{m_{k-1}}{m_k} \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) \leq a.$$

Это позволит ограничиться лишь свойствами ряда (9), но сузит множество последовательностей $\{m_k\}$, для которых имеет место (10).

Доказательству теоремы 1 предпошем леммы.

2.3. Сформулируем и докажем ряд лемм о функциях типа считающих.

ЛЕММА 1. Пусть даны возрастающие последовательности положительных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, $r_k \rightarrow 1 - 0$. Определим на $[0, 1]$ функцию $n(r)$, положив $n(r) = 0$ при $0 \leq r \leq r_1$, $n(r) = m_k$ при $r_k < r \leq r_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Положим

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ и любом $r \in (r_k, r_{k+1}]$ имеем

$$\exp N(r) = A_k \left(\frac{r}{r_k} \right)^{m_k},$$

где

$$A_k = \prod_{j=1}^k \left(\frac{r_k}{r_j} \right)^{\mu_j}, \quad \mu_j = m_j - m_{j-1}, \quad m_0 = 0. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразование Абеля, при $r \in (r_k, r_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$, получаем, что

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_{r_1}^r \frac{n(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{m_j}{t} dt + \int_{r_k}^r \frac{m_k}{t} dt \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} m_j (\log r_{j+1} - \log r_j) + m_k \log \frac{r}{r_k} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (m_j - m_{j-1}) (\log r_k - \log r_j) + m_k \log \frac{r}{r_k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N(r) = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \log \frac{r_k}{r_j} + m_k \log \frac{r}{r_k},$$

что равносильно утверждению леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\varepsilon(t) \in E$, $\{\varkappa_k\}$ – последовательность действительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty, \quad (13)$$

$\{m_k\}$ – последовательность положительных чисел, $m_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$,

$$t_k = \frac{1}{m_k} \left(\log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) + \varkappa_k \right), \quad 1 > t_1 > t_2 > \dots, \quad (14)$$

$$n(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r \leq 1 - t_1, \\ m_k & \text{при } 1 - t_k < r \leq 1 - t_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad r \in (0, 1), \quad \delta_k = \varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon \left(\frac{1}{m_j} \right) m_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда при любом $\lambda > 0$ и при условии сходимости ряда (8) выполняется левое из неравенств

$$c_1 \delta_k^\lambda \leq \int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp N(1 - \tau) \tau)^\lambda \frac{d\tau}{\tau} \leq c_2 \delta_k^\lambda, \quad (15)$$

а при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} \log^2 \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) < \infty \quad (16)$$

– правое из неравенств (15), где c_1 и c_2 положительны и не зависят от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если ряд (8) сходится, то последовательность $\{m_k\}$ растет быстрее геометрической прогрессии и поэтому выполняется и условие (16).

В силу леммы 1 имеем

$$\exp N(1 - \tau) = A_k Q(\tau; t_k) = (1 - \tau)^{m_k} \prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-\mu_j}, \quad \tau \in (t_{k+1}, t_k], \quad (17)$$

где

$$Q(\tau; t_k) = \left(\frac{1 - \tau}{1 - t_k} \right)^{m_k}, \quad A_k = \prod_{j=1}^k \left(\frac{1 - t_k}{1 - t_j} \right)^{\mu_j},$$

$$\mu_j = m_j - m_{j-1}, \quad m_0 = 0.$$

Неравенства (15) в силу (17) принимают следующий вид:

$$c_1^{1/\lambda} \delta_k \leq \left(\int_{t_{k+1}}^{t_k} (1 - \tau)^{\lambda m_k} \tau^{\lambda-1} d\tau \right)^{1/\lambda} \cdot \prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-(m_j - m_{j-1})} \leq c_2^{1/\lambda} \delta_k. \quad (18)$$

Покажем, что при некоторых положительных c_3 и c_4 , не зависящих от k , имеют место следующие неравенства:

$$c_3 \prod_{j=1}^k \varepsilon_j m_j \leq \prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-(m_j - m_{j-1})} \leq c_4 \prod_{j=1}^k \varepsilon_j m_j, \quad \varepsilon_j = \varepsilon \left(\frac{1}{m_j} \right), \quad (19)$$

где левое неравенство имеет место при сходимости ряда (8), а правое – при более общем условии (16).

Поскольку

$$\log \frac{1}{1 - t_j} = t_j + O(t_j^2) = \frac{1}{m_j} \left(\log(\varepsilon_j m_j) + \varkappa_j + O\left(\frac{\log^2(\varepsilon_j m_j)}{m_j} \right) \right), \quad j \rightarrow \infty,$$

то

$$\begin{aligned} (m_j - m_{j-1}) \log \frac{1}{1 - t_j} &= \left(1 - \frac{m_{j-1}}{m_j}\right) \left(\log(\varepsilon_j m_j) + \varkappa_j + O\left(\frac{\log^2(\varepsilon_j m_j)}{m_j}\right)\right) \\ &= \log(\varepsilon_j m_j) - \frac{m_{j-1}}{m_j} \log(\varepsilon_j m_j) + O\left(\varkappa_j + \frac{\log^2(\varepsilon_j m_j)}{m_j}\right), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при условии (13) и сходимости ряда (8) выполняется левое из неравенств

$$\sum_{j=1}^k \log(\varepsilon_j m_j) + \log c_3 \leq \sum_{j=1}^k (m_j - m_{j-1}) \log \frac{1}{1 - t_j} \leq \sum_{j=1}^k \log(\varepsilon_j m_j) + \log c_4, \quad (20)$$

а при условиях (13) и (16) – правое из этих неравенств. Из (20) следует (19).

Положим строчкой ниже $m = \lambda m_k$. Тогда при достаточно больших k получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_{k+1}}^{t_k} (1 - \tau)^{\lambda m_k} \tau^{\lambda-1} d\tau &\leq \int_0^1 (1 - \tau)^{m_k} \tau^{\lambda-1} d\tau \\ &= \Gamma(\lambda) \frac{\Gamma(m_k + 1)}{\Gamma(m_k + \lambda + 1)} < \Gamma(\lambda) e^{\lambda} m_k^{-\lambda} = c_1(\lambda) m_k^{-\lambda} \end{aligned} \quad (21)$$

(здесь не были использованы сходимость ряда (8) или условие (16)).

С другой стороны, при достаточно больших k имеем $(\lambda m_k)^{-1} < t_k$ (см. (14); напомним, что $\varepsilon_k m_k \uparrow \infty$) и, кроме того, $t_{k+1} = o(m_k^{-1})$, так как из сходимости ряда (8) следует, что

$$m_k t_{k+1} = \frac{m_k}{m_{k+1}} (\log(\varepsilon_{k+1} m_{k+1}) + \varkappa_k) = o(1).$$

Поэтому при достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_{k+1}}^{t_k} (1 - \tau)^{\lambda m_k} \tau^{\lambda-1} d\tau &\geq \int_{t_{k+1}}^{(\lambda m_k)^{-1}} (1 - \tau)^{\lambda m_k} \tau^{\lambda-1} d\tau \\ &\geq \frac{1}{3} \int_{t_{k+1}}^{(\lambda m_k)^{-1}} \tau^{\lambda-1} d\tau \geq c_2(\lambda) m_k^{-\lambda}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $c_2(\lambda) > 0$ и зависит только от λ .

Из (22) (соответственно из (21)) и левого (правого) из неравенств (19) следует левое (соответственно правое) из неравенств (18). Лемма доказана.

2.4. Сформулируем и докажем лемму о бесконечном произведении.

ЛЕММА 3. Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{n_k - n_{k-1}}\right), \quad (23)$$

где $r_k = 1 - t_k$, $1/2 > t_1 > \dots > t_k \rightarrow 0$, $n_0 = 0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда если

$$n_k - n_{k-1} \uparrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$n_k t_{k+1} \leq a = \text{const}, \quad (25)$$

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-n_k t_k\} < \infty, \quad (26)$$

то для любых $q > 0$ и $\gamma > 0$ существует такая постоянная $c = c(q, \gamma, \sigma, a)$, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ и любом натуральном $k > m$ выполняется неравенство

$$\int_{2t_k}^{2t_m} (M_\infty(f; 1-t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t} \leq c \int_{2t_k}^{2t_m} (L(f; 1-t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t}. \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как здесь $f(0) = 1$, то в силу формулы Иенсена $L(f; r) = \exp N(r; f)$, $0 < r < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Очевидно, что произведение (23) сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и его нули – это нули множителей, образующих произведение, и только они. При $r \in (0, 1)$ положим

$$m(r) = \min\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad M(r) = M_\infty(f; r).$$

Заметим, что

$$m(r) = |f(r)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\nu_k} \right|, \quad (28)$$

$$M(r) \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\nu_k} \right). \quad (29)$$

Из условий леммы следует, что $t_{k+1}/t_k \leq a/(n_k t_k)$, $n_k t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, так что $t_{k+1} < t_k/8$ при достаточно больших $k \geq m$.

Покажем, что при $1-r \in [2t_{s+1}, t_s/2]$, $s \geq m$, выполнено

$$M(r) \leq c(\sigma, a)m(r), \quad (30)$$

где $c(\sigma, a)$ зависит лишь от σ и a . Из (28) и (29) получаем, что

$$\log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^s \log \frac{r^{\nu_k} + r_k^{\nu_k}}{r^{\nu_k} - r_k^{\nu_k}} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \log \frac{r_k^{\nu_k} + r^{\nu_k}}{r_k^{\nu_k} - r^{\nu_k}}, \quad (31)$$

$1-r \in [2t_{s+1}, t_s/2]$. Так как $\log((1+t)/(1-t)) < 3t$ при $0 < t < 1/2$, а $r_s < 1 - t_s/2 \leq r \leq 1 - 2t_{s+1} < r_{s+1}$, то из (31) следует, что

$$\frac{1}{3} \log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} + \left(\frac{r_s}{1-t_s/2} \right)^{\nu_s} + \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}} \right)^{\nu_{s+1}} + \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)^{\nu_k}.$$

Отсюда, учитывая, что $r_k < r_{k+1}$, $\nu_k < \nu_{k+1}$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{3} \log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} + \max_{s \geq m} \left\{ \left(\frac{r_s}{1-t_s/2} \right)^{\nu_s} + \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}} \right)^{\nu_{s+1}} \right\}. \quad (32)$$

Заметим теперь, что правая часть последнего неравенства конечна и ограничена сверху величиной, зависящей лишь от σ и a . Действительно, во-первых,

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} &= r_k^{n_k} (r_{k+1})^{-n_k} \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{n_{k-1}} \\ &= \exp\{n_k \log(1-t_k)\} \exp\{-n_k \log(1-t_{k+1})\} \exp\left\{n_{k-1} \log \frac{1-t_{k+1}}{1-t_k}\right\} \\ &\leq \exp\{-n_k t_k\} (\exp\{2a\})^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где последнее неравенство следует (при $t_k < 1/2$) из условия $n_k t_{k+1} \leq a$. Во-вторых, в силу неравенства $\log((1-2t)/(1-t)) < -t$ (при $0 < t < 1/2$) и условия $n_s t_{s+1} \leq a$ имеем

$$\left(\frac{r_s}{1-t_s/2}\right)^{\nu_s} = \exp\left\{\nu_s \log \frac{1-t_s}{1-t_s/2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\nu_s t_s\right\} \leq \exp \frac{a}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}n_s t_s\right\}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}}\right)^{\nu_{s+1}} &= \exp\left\{\nu_{s+1} \log \frac{1-2t_{s+1}}{1-t_{s+1}}\right\} \\ &\leq \exp\{-\nu_{s+1} t_{s+1}\} \leq \exp a \cdot \exp\{-n_{s+1} t_{s+1}\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Итак, правая часть неравенства (32) не превосходит (см. (26), (33)–(35)) величины $\sigma(\exp\{2a\})^2 + \exp\{a/2\} + \exp a$, откуда следует (30), а следовательно, и неравенство

$$M_\infty(f; r) \leq c(\sigma, a)L(f; r), \quad r \in \left[1 - \frac{t_s}{2}, 1 - 2t_{s+1}\right]. \quad (36)$$

Так как функция $M_\infty(f; r)$ возрастает на $(0, 1)$, а длина отрезка $[1 - 2t_s, 1 - t_s/2]$ не более, чем в шесть раз превосходит длину отрезка $[1 - t_s/2, 1 - 2t_{s+1}]$ (напомним, что $t_{s+1} < t_s/8$), то при $\alpha = \gamma q - 1 \in (-1, 0]$, когда не убывает и множитель $(1-r)^\alpha$, имеем

$$\int_{1-2t_s}^{1-t_s/2} (M_\infty(f; r)(1-r)^\gamma)^q \frac{dr}{1-r} \leq 6 \int_{1-t_s/2}^{1-2t_{s+1}} (M_\infty(f; r)(1-r)^\gamma)^q \frac{dr}{1-r}.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$ это неравенство сохранится, если множитель “6” в его правой части заменить на множитель

$$\frac{\int_{t_s/2}^{2t_s} t^\alpha dt}{\int_{t_s/4}^{t_s/2} t^\alpha dt} = c(\alpha) < \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{1-2t_s}^{1-2t_{s+1}} (M_\infty(f; r)(1-r)^\gamma)^q \frac{dr}{1-r} \\ &\leq (1 + c(\alpha)) \int_{1-t_s/2}^{1-2t_{s+1}} (M_\infty(f; r)(1-r)^\gamma)^q \frac{dr}{1-r}, \quad s \geq m. \end{aligned} \quad (37)$$

Суммируя почленно неравенства (37) по s от m до произвольного $k > m$ и учитывая (36), получаем (27). Лемма доказана.

2.5. Докажем теперь теорему 1.

Положим $\varepsilon_k = \varepsilon(1/m_k)$. Определим считающую функцию $n(r)$ равенствами

$$n(1-t) = n_k = [\gamma m_k], \quad t \in [t_{k+1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где

$$t_k = \frac{1}{m_k}(\log(\varepsilon_k m_k) + \kappa_k), \quad \sum |\kappa_k| < \infty. \quad (39)$$

Для функции f , определенной формулой (23), имеем $n(r; f) = n(r)$. Последовательность $\{n_k\}$ при всех достаточно больших k удовлетворяет условиям (24)–(26) леммы 3.

Действительно, (24) и (25) следуют непосредственно из (11) (напомним, что $\varepsilon_k m_k \uparrow \infty$). Далее заметим, что

$$\exp\{-n_k t_k\} \sim \exp\{-\gamma m_k t_k\} \sim \exp\{-\gamma \log(\varepsilon_k m_k)\} = (\varepsilon_k m_k)^{-\gamma},$$

а последовательность $\{m_k\}$ в силу (11) растет быстрее любой геометрической прогрессии. Поэтому из (7) следует (26): действительно, из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon(2^{-k}) \cdot 2^k)^{-\gamma} < \infty,$$

откуда, учитывая условие $\varepsilon(t)/t \uparrow$ при $t \rightarrow +0$, и получаем (26).

В силу леммы 3 при некотором m и любых $k > m$, $m, k \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\int_{2t_k}^{2t_m} (M_{\infty}(f; 1-t)t^{\gamma})^q \frac{dt}{t} \leq c \int_{2t_k}^{2t_m} (\exp N(1-t; f)t^{\gamma})^q \frac{dt}{t}. \quad (40)$$

Пусть функции $\tilde{n}(r)$ и $\tilde{N}(r)$ определены формулами

$$\tilde{n}(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r \leq 1 - t_1, \\ m_k & \text{при } 1 - t_k < r \leq t_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (41)$$

$$\tilde{N}(r) = \int_0^r \frac{\tilde{n}(t)}{t} dt, \quad r \in (0, 1). \quad (42)$$

Так как $\gamma \tilde{n}(r) - 1 \leq n(r; f) \leq \gamma \tilde{n}(r)$, $N(r; f) \leq \gamma \tilde{N}(r)$, то из (40) в силу правого из неравенств (15) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2t_m} (M_{\infty}(f; 1-t)t^{\gamma})^q \frac{dt}{t} &\leq c \int_0^{2t_m} (\exp \tilde{N}(1-t)t)^{\gamma q} \frac{dt}{t} \\ &\leq c \cdot c_2 \sum_{k=m-1}^{\infty} \left(\varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j m_j \right)^{\gamma q} \end{aligned}$$

(условие (16), при котором было установлено правое из неравенств (15), следует из (11)).

Таким образом, если ряд (9) сходится, то $f \in H_{q, \gamma}^{\infty}$. Из определения (38), (39) считающей функции $n(r; f) = n(r)$ следует неравенство

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} \left(\log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) + \varkappa_k \right), \quad (43)$$

которое в случае $\varkappa_k \equiv 0$ совпадает с (10). В этом случае при $n_k < n \leq n_{k+1}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned} 1 - |z_n(f)| &= 1 - |z_{n_{k+1}}(f)| = t_{k+1} = \frac{1}{m_{k+1}} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_{k+1}} \right) m_{k+1} \right) \\ &\leq \frac{\gamma}{n_{k+1}} \log \left(\varepsilon \left(\frac{\gamma}{n_{k+1}} \right) \frac{n_{k+1}}{\gamma} \right) \leq \frac{\gamma}{n} \log \left(\varepsilon \left(\frac{\gamma}{n} \right) \frac{n}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

(здесь мы учли то, что $m_{k+1} \geq n_{k+1}/\gamma$ и функция $t \log(\varepsilon(t)/t)$ растет в правой полуокрестности нуля). Итак, $f \in H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^\infty$.

С другой стороны, пусть для функции $f \in A(\mathbb{D})$ при всех достаточно больших $k > k^*$ выполняется неравенство

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq t_k, \quad n_k = [\gamma m_k],$$

где

$$t_k = \frac{1}{m_k} (\log(\varepsilon_k m_k) - \eta_k).$$

Тогда $n(1-t; f) \geq n_k = [\gamma m_k]$, $t \in [t_{k+1}, t_k]$, $k > k^*$, так что $n(r; f) \geq \gamma \tilde{n}(r) - 1$, $r \in (r^*, 1)$, $0 < r^* < 1$. Поэтому

$$N(r; f) = \int_{r_1}^r \frac{n(t; f)}{t} dt \geq \int_{r^*}^r \frac{\gamma \tilde{n}(t) - 1}{t} dt = \gamma \tilde{N}(r) - \gamma \int_{r_1}^{r^*} \frac{\tilde{n}(t)}{t} dt - \log \frac{r}{r^*},$$

откуда

$$\exp N(r; f) \geq \tilde{c} \exp\{\gamma \tilde{N}(r)\}, \quad r \in (r^*, 1), \quad (44)$$

где

$$\tilde{c} = r^* \exp\left\{-\gamma \int_{r_1}^{r^*} \frac{\tilde{n}(t)}{t} dt\right\}.$$

Из (44) и левого неравенства (15) получаем при всех достаточно больших k , что

$$\begin{aligned} \int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp N(1-\tau; f) \tau^\gamma)^q \frac{d\tau}{\tau} &\geq \tilde{c}^q \int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp\{\gamma \tilde{N}(1-\tau)\} \tau^\gamma)^q \frac{d\tau}{\tau} \\ &\geq \tilde{c}^q \cdot c_1 \left(\varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j m_j \right)^{\gamma q}. \end{aligned}$$

Отсюда при условии расходимости ряда (9) следует расходимость интеграла

$$\int_0^{t_1} (\exp N(1-\tau; f) \tau^\gamma)^q \frac{d\tau}{\tau},$$

что в силу формулы Иенсена означает, что $f \notin H_{q,\gamma}^{\log}$. Теорема 1 доказана.

2.6. Вторую часть теоремы 1 сформулируем в виде, удобном для дальнейшего.

ЛЕММА 4. Если $f \in H_{q,\gamma}^{\log}$, $\varepsilon(t) \in E$, $\sum \eta_k < \infty$, $\eta_k > 0$, и для некоторой последовательности $\{m_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{k-1}}{m_k} \log\left(\varepsilon\left(\frac{1}{m_k}\right) m_k\right) < \infty,$$

выполняется неравенство

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} \left(\log\left(\varepsilon\left(\frac{1}{m_k}\right) m_k\right) - \eta_k \right), \quad k > k(f), \quad (45)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\varepsilon\left(\frac{1}{m_k}\right) \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon\left(\frac{1}{m_j}\right) m_j \right)^\lambda < \infty, \quad \lambda = \gamma q. \quad (46)$$

Действительно, если допустить, что условие (46) не выполняется, то в силу второй части теоремы 1 получим, что f не удовлетворяет неравенству (45) при всех достаточно больших k .

§ 3. Следствия

3.1. Определим экстремаль в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$.

Пусть $\varepsilon(t) \in E$, $\lambda > 0$. Возрастающую последовательность положительных чисел $\{m_k\}$ назовем $(\varepsilon(t), \lambda)$ -разреженной, если

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon \left(\frac{1}{m_j} \right) m_j \right)^{\lambda} < \infty, \quad (47)$$

члены ряда убывают и условие (47) перестает выполняться при замене λ на любое $\lambda' < \lambda$.

Функцию $f \in H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ назовем *экстремалью* в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$, если для некоторой $(\varepsilon(t), \gamma q)$ -разреженной последовательности $\{m_k\}$ при всех достаточно больших k выполняется равенство

$$1 - |z_{n_k}(f)| = \frac{1}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right), \quad (48)$$

где $n_k = \gamma m_k \in \mathbb{N}$ (ср. с (6)).

Эквивалентное определение экстремали получим, заменив равенство (48) на неравенство

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right). \quad (49)$$

Это следует из того, что условие (47) остается в силе, если в нем m_k , $k = 1, 2, \dots$, заменить на $m_k - c_k$, где $0 \leq c_k \leq 1/\gamma$, так, чтобы γm_k стало натуральным числом (если не было таковым). При такой замене общий член получившегося ряда слабо эквивалентен общему члену ряда (47). Действительно, так как

$$\log \frac{\varepsilon(t + \Delta t)}{\varepsilon(t)} \leq \frac{\varepsilon(t + \Delta t) - \varepsilon(t)}{\varepsilon(t)} \leq \frac{\Delta t}{t}$$

при $\Delta t > 0$ ($\varepsilon(t)/t \uparrow$ при $t \rightarrow +0$), то

$$0 \leq \log \frac{\varepsilon(1/(m_k - c_k))}{\varepsilon(1/m_k)} \leq \frac{c_k}{m_k - c_k}$$

(при $t = 1/m_k$, $t + \Delta t = 1/(m_k - c_k)$). Поэтому логарифм отношения k -х членов нового и исходного рядов не меньше, чем

$$\lambda \sum_{j=1}^{k-1} \log \left(1 - \frac{c_j}{m_j} \right),$$

и не больше, чем

$$\lambda \left(\sum_{j=1}^k \frac{c_j}{m_j - c_j} + \sum_{j=1}^{k-1} \log \left(1 - \frac{c_j}{m_j} \right) \right).$$

Осталось вспомнить, что $\{m_k\}$ растет достаточно быстро (из убывания членов ряда (47) следует, что $m_k \geq A_k m_{k-1}$, где $A_k = \varepsilon_k m_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$).

3.2. Существование экстремали в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ при условии (7) на $\varepsilon(t)$ и $p = \infty$ (и, следовательно, при любом $p \in [0, +\infty]$) следует из первой части теоремы. Вторая ее часть показывает, что для любой менее разреженной последовательности $\{m_k\}$, для которой ряд (8) сходится, условие (48) для экстремали f в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ (каким бы ни было $p \in [0, \infty]$) уже не выполняется.

Пусть выполняется условие

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{\varepsilon(t)} \log \frac{\varepsilon(t)}{t} \right) \frac{dt}{t} < \infty \quad (50)$$

(которое является более ограничительным, чем условие (7), только при $\gamma \geq 1$). Заметим, что из условия (50) и из условия убывания членов ряда (47) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{k-1}}{m_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) < \infty. \quad (51)$$

В самом деле, отношение k -го члена ряда (47) к его $(k-1)$ -му члену равно

$$\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_{k-1} = \frac{m_{k-1}}{m_k} \left(\varepsilon \left(\frac{1}{m_k} \right) m_k \right) \leq 1. \quad (52)$$

Поэтому общий член ряда (51) не превосходит общего члена ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(\varepsilon(1/m_k)m_k)}{\varepsilon(1/m_k)m_k}. \quad (53)$$

Так как из неравенства (52) и условия $\varepsilon(t)/t \uparrow \infty$ следует, что последовательность $\{m_k\}$ растет быстрее геометрической прогрессии, то общий член ряда (53) не превосходит общего члена ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(\varepsilon(2^{-k})2^k)}{\varepsilon(2^{-k})2^k},$$

сходимость которого эквивалентна условию (50).

3.3. Укажем некоторые свойства экстремали в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При условии (50) экстремаль f в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ (если она существует и в случае $\gamma < 1$) обладает следующими свойствами:

- 1) $f \notin \bigcup_{q' < q} H_{q',\gamma}^{\log} =: H_{q-,\gamma}^{\log}$;
- 2) нулевое множество $Z(f)$ экстремали f не может содержаться в нулевом множестве $Z(g)$ ни одной из функций $g \in H_{q-,\gamma}^{\log}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если экстремаль f в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ принадлежит пространству $H_{q',\gamma}^{\log}$, $q' < q$, то соответствующая ей $(\varepsilon(t), \gamma q)$ -разреженная последовательность $\{m_k\}$ удовлетворяет условию (51) и в силу леммы 4 выполняется (47) с $\lambda = \gamma q' < \gamma q$, что противоречит определению f как экстремали в пространстве $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$.

2) Без ограничения общности считаем, что $f(0) = g(0) = 1$. Если $Z(f) \subseteq Z(g)$, то $n(r; f) \leq n(r; g)$, $N(r; f) \leq N(r; g)$ и в силу формулы Иенсена $L(f; r) \leq L(g; r)$. Поэтому из того, что $g \in H_{q',\gamma}^{\log}$, $q' < q$, следует, что $f \in H_{q',\gamma}^{\log}$. А это противоречит свойству 1).

3.4. Сформулируем ряд следствий о различии нулевых множеств.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $q > 0$, $\varepsilon(t) \in E$ и при $0 < \gamma < 1$ выполняется условие (7), а при $\gamma \geq 1$ – условие (50), то

$$Z(H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^\infty) \not\subseteq Z(H_{q-,\gamma}^{\log}). \quad (54)$$

В частности, если $q_i > 0$, $p_i \in [0, +\infty]$, $i = 1, 2$, и $q_1 \neq q_2$, то

$$Z(H_{q_1,\gamma}^{p_1}) \neq Z(H_{q_2,\gamma}^{p_2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $(\alpha_1 + 1)/p_1 = (\alpha_2 + 1)/p_2$, но $(\alpha_1, p_1) \neq (\alpha_2, p_2)$, $\alpha_i > -1$, $p_i > 0$, то

$$Z(A_{\alpha_1}^{p_1}) \neq Z(A_{\alpha_2}^{p_2}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вопрос о точных условиях на $\varepsilon(t)$, при которых выполняется соотношение (54), является открытым.

3.5. Рассмотрим случай $\log \varepsilon(t) = o(\log t)$.

Если в теореме 1 функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет также условию

$$\log \varepsilon(t) = o(\log t), \quad t \rightarrow 0,$$

то условие сходимости ряда (9) и условие (10) можно записать соответственно в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(m_k^{-a_k} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} \right)^{\gamma q} < \infty, \quad 1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1 - a_k}{m_k} \log m_k,$$

где

$$a_k = \frac{\log(1/\varepsilon(1/m_k))}{\log m_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для данного случая более удобной может быть следующая модификация теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < \delta_k < 1$, $0 < a_k < 1$, $a_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $m_1 > 1$,

$$m_k = \left(\frac{1}{\delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} \right)^{1/a_k}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (55)$$

$\{\eta_k\}$ – положительная последовательность, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

Если $\gamma > 0$, $q > 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{\gamma q} < \infty, \quad (56)$$

то в $H_{q,\gamma}^\infty$ найдется функция f такая, что при всех достаточно больших k выполнено неравенство

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} ((1 - a_k) \log m_k + \eta_k).$$

Если условие (56) не выполняется, то в $H_{q,\gamma}^{\log}$ не существует функции f , удовлетворяющей при всех достаточно больших k неравенству

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} ((1 - a_k) \log m_k - \eta_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\delta_k = m_k^{-a_k} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} < 1$$

(см. (55)), то

$$m_{k-1}^{1-a_{k-1}} < m_k^{a_k}. \quad (57)$$

А так как при $0 < a_k < 1/2$ выполняется неравенство $m_k^{a_k} < m_k^{1-a_k}$, то

$$m_{k-1} m_{k-1}^{-a_{k-1}} < m_k m_k^{-a_k} \quad (58)$$

при достаточно больших k . Очевидно также, что $m_k \uparrow \infty$, $m_k^{-a_k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и что неравенство (57) (как следствие неравенства $\delta_k < 1$) с запасом гарантирует сходимость ряда (8).

Определим непрерывную на $(0, 1/m_1]$ функцию $\varepsilon(t)$, взяв ее линейной на отрезках $[1/m_k, 1/m_{k-1}]$ и положив $\varepsilon(1/m_k) = m_k^{-a_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда в силу (58) имеем $\varepsilon(t)/t \uparrow \infty$, $t \rightarrow 0$, и для доказательства следствия 3 достаточно сослаться на теорему 1 и неравенство (43), положив в нем $\varkappa_k = \eta_k$. Следствие 3 доказано.

Сформулируем ослабленный вариант следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $0 < \delta_k < 1$, $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, \dots$, $a_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $m_1 > 1$,

$$m_k = \left(\frac{1}{\delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} \right)^{1/a_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{\gamma q} < \infty, \quad \gamma > 0, \quad q > 0,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы в $H_{q,\gamma}^p$, $p \in [0, +\infty]$, нашлась функция f такая, что при всех достаточно больших k выполнялось неравенство

$$1 - |z_{[\gamma m_k]}(f)| \geq \frac{1}{m_k} (1 - a_k) \log m_k.$$

Для дальнейшего использования приведем модифицированный вариант леммы 4 для случая $\log \varepsilon(t) = o(\log t)$, $t \rightarrow 0$, вытекающий из этой леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $n_k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log n_k < \infty. \quad (59)$$

Если $f \in H_{q,\gamma}^p$, $p \in [0, +\infty]$, $q > 0$, $\gamma > 0$, выполнено неравенство

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq (1 - a_k) \frac{\log m_k}{m_k}, \quad k \geq k_0, \quad (60)$$

где $m_k = n_k/\gamma$, $a_k > 0$, $a_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m_k^{a_k}} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} \right)^{\gamma q} < \infty. \quad (61)$$

В частности, для любого $\theta \in (0, 1)$ и всех достаточно больших k имеем

$$n_k > n_{k-1}^{\theta/a_k}. \quad (62)$$

Последнее неравенство следует из того, что в силу (61) при достаточно больших k

$$\frac{1}{m_k^{a_k}} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j} < 1,$$

откуда

$$m_{k-1}^{1-a_{k-1}} < m_k^{a_k}, \quad m_{k-1}^{(1-a_{k-1})/a_k} < m_k, \quad n_{k-1}^{\theta/a_k} < n_k \quad 0 < \theta < 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если вместо условия (59) потребовать ограниченности общего члена δ_k^λ ряда (61), то лемма 5 будет следовать из второй части следствия 3. Лемма 5 заменяет условие $\delta_k \leq c = \text{const}$ на более общее условие (59). Для функции f , построенной при доказательстве первой части следствия 3, неравенство (60) сохранится, если в нем n_k заменить на $n_k - 1$. Поэтому для нее можно указать подпоследовательность номеров $\{n'_k\}$ такую, что $n'_{k+1} = n'_k + 1$ и выполнено (60) (с заменой n_k на n'_k). Однако условие (61), в котором возьмем $m_k = n'_k/\gamma$, выполняться в этом случае не будет. Таким образом, отказаться в лемме 5 от условия типа условия (59), обеспечивающего некоторое необходимое разрежение последовательности $\{n_k\}$, нельзя.

3.6. Обсудим теперь γ -экстремали и (γ, q) -экстремали.

Функцию $f \in H_\gamma^{\log}$, $\gamma > 0$, назовем γ -экстремалью, если для некоторой последовательности номеров n_k выполнено

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{\gamma}{n_k} \log n_k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Согласно следствию 4 γ -экстремали существуют в пространствах $H_{q,\gamma}^p$ при любых $p \in [0, \infty]$ и $q > 0$. Отсюда получаем различие нулевых множеств пространств $H_{q_1,\gamma_1}^{p_1}$ и $H_{q_2,\gamma_2}^{p_2}$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Из следствия 3 вытекает существование γ -экстремалей в $H_{q,\gamma}^\infty \setminus H_{q-,\gamma}^{\log}$. Такие γ -экстремали назовем (γ, q) -экстремальями. Нулевое множество (γ, q) -экстремали не может содержаться в нулевом множестве ни одной из функций $g \in H_{q-,\gamma}^{\log}$ (иначе, как это было показано при доказательстве свойства 2) экстремали в $H_{q,\gamma,\varepsilon(t)}^p$ (см. утверждение 3, п. 2)), получим, что $f \in H_{q-,\gamma}^{\log}$. Отсюда вытекает различие нулевых множеств пространств $H_{q_1,\gamma}^{p_1}$ и $H_{q_2,\gamma}^{p_2}$ при $q_1 \neq q_2$ (что уже было установлено выше, см. следствие 1).

Отметим, что γ -экстремали в $H_{q,\gamma}^p$ составляют множество

$$\widehat{H}_{q,\gamma}^p := H_{q,\gamma}^p \setminus \left(\bigcup_{0 < \beta < 1} H_{q,\gamma,t^\beta}^p \right)$$

(объединение берется по всем функциям $\varepsilon(t) = t^\beta, 0 < \beta < 1$), так что (γ, q) -экстремали образуют множество $\widehat{H}_{q,\gamma}^\infty \setminus H_{q-,\gamma}^{\log}$.

3.7. Дадим описание последовательностей $\{n_k\}$, “обслуживающих” множество γ -экстремалей $\widehat{H}_{q,\gamma}^p$.

Пусть H – некоторое подмножество функций в пространстве $H_\gamma^{\log}$. Возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ такую, что для некоторой функции $f \in H$ выполняется соотношение (63) и условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log n_k < \infty, \quad (64)$$

назовем *вполне разреженной последовательностью* для H . Через $\mathcal{N}(H)$ обозначим множество всех вполне разреженных для пространства H , $H \subset H_{\gamma}^{\log}$, подпоследовательностей номеров $\{n_k\}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. При любых $\gamma > 0, q > 0$ и $p \in [0, \infty]$ множество $\mathcal{N}(H_{q,\gamma}^p)$ всех вполне разреженных для пространства $H_{q,\gamma}^p$ последовательностей совпадает с множеством $\mathcal{N}$ всех последовательностей $\{n_k\}$, для которых

$$\frac{\log n_{k+1}}{\log n_k} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Совпадение с $\mathcal{N}$ имеет место и для множества $\mathcal{N}(H_{q,\gamma}^{\infty} \setminus H_{q-,\gamma}^{\log})$, “обслуживающего” множество (γ, q) -экстремалей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{n_k\} \in \mathcal{N}$, $\gamma > 0, q > 0, \lambda = \gamma q$. Положим

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{n_k}{\gamma}, \quad d_k = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2}{\log(ek)} \right), \\ a_{k+1} &= \frac{\log m_k}{\log m_{k+1}} \left(1 + \frac{d_k}{\lambda \log m_k} \right), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\delta_k = \frac{1}{m_k^{a_k}} \prod_{j=1}^{k-1} m_j^{1-a_j}. \quad (67)$$

Тогда в силу (65) $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а в силу (66) и (67) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{\lambda} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{\lambda'} = \infty, \quad \lambda' < \lambda.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \right)^{\lambda} &= \left(\frac{m_k}{m_{k+1}^{a_{k+1}}} \right)^{\lambda} = \left(m_k \exp \left\{ - \left(1 + \frac{d_k}{\lambda \log m_k} \right) \log m_k \right\} \right)^{\lambda} \\ &= \left(\exp \left\{ - \frac{1}{\lambda} d_k \right\} \right)^{\lambda} = \exp \{-d_k\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\delta_{k+1}^{\lambda} = \delta_1^{\lambda} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^k d_j \right\} \asymp \frac{1}{k \log^2 k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу следствия 3 найдется функция $f \in H_{q,\gamma}^{\infty} \setminus H_{q-,\gamma}^{\log}$, для которой

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq \frac{\gamma}{n_k} (1 - a_k) \log \left(\frac{n_k}{\gamma} \right),$$

так что $\{n_k\} \in \mathcal{N}(H_{q,\gamma}^{\infty} \setminus H_{q-,\gamma}^{\log})$.

С другой стороны, если $\{n_k\} \in \mathcal{N}(H_{q,\gamma}^p)$, то в силу леммы 5 последовательность $\{n_k\} \in \mathcal{N}$ (см. (62)). Следствие 5 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие (64) выполняется, если, например, $n_k = (k!)^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $(\log n_{k+1})/\log n_k \downarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, условие (65), определяющее необходимый порядок роста последовательности $\{n_k\}$, существенно сильнее условия (64). Роль последнего заключается в том, что оно задает “начальную разреженность” последовательности $\{n_k\}$, без которой условие (65) как необходимое не имеет места (см. замечание 4).

Следствие 5 показывает, что различать между собой нулевые множества пространств $H_{q,\gamma}^p$ с помощью вполне разреженных последовательностей $\{n_k\}$ можно лишь, уточнив асимптотическое соотношение (63) до неравенства

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq \frac{\gamma}{n_k} (1 - a_k) \log \frac{n_k}{\gamma},$$

используя также последовательность $\{a_k\}$.

3.8. Результаты работы не дают ответа на следующий вопрос: различаются ли нулевые множества пространств $H_{q,\gamma}^p$ по параметру p при фиксированных q и γ ? В предельном случае пространства Харди $H^p =: H_{\infty,0}^p$ ответ на этот вопрос хорошо известен.

Список литературы

- [1] С. Ли, С. Стевич, “Дифференцирование суперпозиции как оператор из пространств со смешанной нормой в α -пространства Блоха”, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 117–128; англ. пер.: S. Li, S. Stević, “Composition followed by differentiation from mixed-norm spaces to α -Bloch spaces”, *Sb. Math.*, **199**:12 (2008), 1847–1857.
- [2] С. Horowitz, “Zeros of functions in the Bergman spaces”, *Duke Math. J.*, **41**:4 (1974), 693–710.
- [3] Е. Beller, “Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions”, *Israel J. Math.*, **22**:1 (1975), 68–80.
- [4] А. М. Седлецкий, “О нулях аналитических функций классов A_α^p ”, *Актуальные вопросы теории функций*, Изд-во Ростов. ун-та, Ростов-на-Дону, 1987, 24–29.
- [5] А. М. Седлецкий, “Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации. II”, *СМФН*, **6**, МАИ, М., 2003, 3–162; англ. пер.: A. M. Sedletskii, “Analytic Fourier transforms and exponential approximations. II”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **130**:6 (2005), 5083–5255.
- [6] Н. Hedenmalm, В. Korenblum, К. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [7] А. А. Долгобородов, “О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств”, *Матем. заметки*, **88**:2 (2010), 201–216; англ. пер.: A. A. Dolgoborodov, “On the zeros of functions from Bergman spaces and some related spaces”, *Math. Notes*, **88**:1–2 (2010), 183–197.
- [8] А. А. Долгобородов, “О теореме Ч. Горовица о нулях функций из пространств Бергмана”, *Anal. Math.*, **36**:4 (2010), 251–273.

А. А. Долгобородов (A. A. Dolgoborodov)
 Национальный исследовательский
 ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: kzander@mail.ru

Поступила в редакцию
 28.01.2010 и 26.05.2011

Е. А. Севастьянов (E. A. Sevast'yanov)
 Национальный исследовательский
 ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: sevastianov.e.a@mail.ru