Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Альшанский, И. В. Мельникова, Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 11, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:47:46

УДК 517.983.+517.982.4+519.21

М. А. Альшанский, И. В. Мельникова

Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач

Работа посвящена исследованию решений задачи Коши для стохастических дифференциально-операторных уравнений в сепарабельном гильбертовом пространстве. В центре внимания – случай, когда операторный коэффициент уравнения не является генератором полугруппы класса C_0 , а порождает некоторую регуляризованную полугруппу. Построены регуляризованные решения уравнения в форме Ито с винеровским процессом в качестве неоднородности и обобщенные решения уравнения с белым шумом в различных пространствах абстрактных распределений.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: регуляризованная полугруппа операторов, абстрактное распределение, обобщенное решение, винеровский процесс, белый шум.

Введение

Многочисленные модели поведения систем с учетом случайных возмущений приводят к дифференциальным уравнениям в бесконечномерных пространствах с неоднородностями типа белого шума (см., например, [1]–[4]). Среди задач для таких уравнений, называемых абстрактными стохастическими, базовой является задача Коши для уравнения первого порядка с оператором A , порождающим полугруппу класса C_0 . Из-за нерегулярности белого шума, неформально определяемого как процесс, значения которого при разных t одинаково распределены, независимы, имеют нулевое среднее значение и бесконечную вариацию, эту задачу, обобщая подход Ито на бесконечномерный случай (см. [2], [5], [6]), записывают в интегральной форме

$$X(t) = X(0) + \int_0^t AX(s) ds + BW(t), \quad t \in [0, \tau), \quad \tau \leq \infty, \quad (0.1)$$

с “первообразной” белого шума – некоторым непрерывным по t винеровским процессом W , определяемым аксиоматически. Однако это не спасает от проблем, связанных со свойствами оператора A .

Настоящая работа посвящена построению регуляризованных решений задачи (0.1) и обобщенных решений “дифференциальной” стохастической задачи Коши

$$X'(t) = AX(t) + BW(t), \quad t \in [0, \tau), \quad X(0) = \zeta, \quad (0.2)$$

с оператором A , в общем случае являющимся генератором некоторой регуляризованной полугруппы $S = \{S(t), t \in [0, \tau)\}$ в гильбертовом пространстве H ,

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки (проект 2.1.1/14118) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96003р).

$B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$ и $\mathbb{H}$ -значным белым шумом $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$, которому будет дано определение в различных пространствах распределений.

При указанных условиях задача (0.2) является некорректной даже при $B = 0$. Основных причин, вызывающих некорректность рассматриваемой задачи, две. Первая причина некорректности задачи (0.2) (и задачи (0.1) тоже) связана с оператором A , порождающим не полугруппу класса C_0 , а лишь некоторую регуляризованную полугруппу, в частности, интегрированную, конволюционную или R -полугруппу. Для такого оператора A операторы решения $U(t), t \in [0, \tau]$, соответствующей однородной задачи Коши в общем случае не являются ограниченными в H . Поэтому вместо семейства $\{U(t)\}$ приходится строить либо некоторое регуляризованное семейство $\{S(t)\}$, используя современную теорию полугрупп операторов, либо рассматривать операторы решения в пространствах H -значных распределений. Другая причина связана собственно со стохастикой, т.е. с нерегулярностью белого шума, которая имеет место даже в конечномерном случае и усугубляется в бесконечномерных пространствах. Это приводит к необходимости рассматривать либо проинтегрированную задачу (0.1), либо задачу (0.2) с белым шумом $\mathbb{W}$, определяемым через производную от винеровского процесса в некотором пространстве распределений.

Как известно, при определении белого шума в одномерном случае проблема отсутствия непрерывности по t , возникающая вследствие требования независимости в разные моменты времени и бесконечной вариации, решается интегрированием по t и переходом к “первообразной”, называемой броуновским движением. Процесс броуновского движения $\{\beta(t), t \geq 0\}$ ($\beta(t) = \beta(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, где $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство), определяемый аксиоматически через выполнение “одномерных” условий (W1)–(W4) (см. § 1), имеет непрерывные траектории и конечную вариацию. Конечномерное броуновское движение – это конечная сумма вида $\sum_{i=1}^n \beta_i(t) e_i$, где e_i – базис в $\mathbb{R}^n$, а $\beta_i(t)$ – независимые броуновские движения. При переходе к бесконечномерному случаю в гильбертовом пространстве приходится вместо лишь слабо сходящегося ряда $\sum_{i=1}^\infty \beta_i(t) e_i$, называемого цилиндрическим винеровским процессом, рассматривать регуляризованную сумму $\sum_{i=1}^\infty \sigma_i \beta_i(t) e_i$, где σ_i^2 – собственные значения некоторого ядерного оператора Q :

$$Qe_j = \sigma_j^2 e_j, \quad \sum_{i=1}^\infty \sigma_i^2 < \infty, \quad (0.3)$$

$\{e_i\}$ – собственные векторы оператора Q , образующие базис гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Таким образом, с помощью конструкции независимых броуновских движений строится $\mathbb{H}$ -значный процесс

$$W_Q(t) := \sum_{i=1}^\infty \sigma_i \beta_i(t) e_i, \quad t \geq 0; \quad W_Q(t) \in L_2(\Omega; \mathbb{H}), \quad (0.4)$$

удовлетворяющий условиям (W1)–(W4) и называемый Q -винеровским процессом. С Q -винеровским процессом уже можно рассмотреть задачу (0.1) с оператором $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, записываемую обычно коротко в дифференциалах:

$$dX(t) = AX(t) dt + B dW_Q(t), \quad t \in [0, \tau], \quad \tau \leq \infty, \quad X(0) = \zeta, \quad (0.5)$$

– в форме, принятой для уравнений Ито.

В § 1 мы строим регуляризованное решение задачи (0.5) с генератором регуляризованной полугруппы в гильбертовом пространстве H : доказана теорема существования и единственности регуляризованного решения (теорема 1). Под регуляризацией решения мы понимаем здесь регуляризацию в широком смысле (см. [7], [8]) без сходимости по параметру регуляризованного решения к некоторому точному решению. Затем в § 2 и § 3 строим обобщенные решения задачи (0.2) в пространствах гильбертовозначных распределений (по переменной времени t) и в пространствах стохастических распределений (по случайной переменной ω). При этом в конструкции распределения белого шума $\mathbb{W}$ в этих параграфах мы выделяем два принципиально разных подхода.

В § 2 мы строим обобщенное по переменной t решение задачи (0.2) с Q -белым шумом. Здесь Q -белый шум строится через обобщенную производную от $\mathbb{H}$ -значного Q -винеровского процесса в некотором пространстве абстрактных распределений. Обобщенное по t решение задачи (0.2) с генератором интегрированной полугруппы построено в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathbb{H})$, где $\mathcal{D}$ – пространство основных функций Шварца, с генератором конволюционной полугруппы – в пространстве абстрактных ультрараспределений $\mathcal{S}'_{\{M_n\}}(\mathbb{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\{M_n\}}, \mathbb{H})$, где $\mathcal{D}_{\{M_n\}}$ – пространство ультрадифференцируемых функций (теоремы 2, 3). Здесь важно отметить, что решить стохастическую задачу Коши с генераторами интегрированных и конволюционных полугрупп удалось в тех же пространствах, в которых мы строили решение детерминированной задачи с соответствующими генераторами (см. [9]).

В § 3 мы строим обобщенное по ω решение задачи (0.2) с сингулярным белым шумом в пространствах гильбертовозначных стохастических распределений. В основе построений этого параграфа лежит вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$, где $\mathcal{S}'$ – пространство распределений Шварца медленного роста, $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ – борелевская σ -алгебра его подмножеств, а μ – гауссовская мера на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle \omega, \theta \rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}, \quad \omega \in \mathcal{S}', \quad \theta \in \mathcal{S}, \quad |\theta|_0^2 = (\theta, \theta)_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (0.6)$$

существование которой следует из теоремы Минлоса (см. [10]–[13]). По аналогии с тройкой Гельфанда $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^*$ строится тройка

$$(\mathcal{S})(\mathbb{H}) \subset (L_2)(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}),$$

где в качестве центрального элемента выступает пространство $(L_2)(\mathbb{H}) := L_2(\mathcal{S}', \mu; \mathbb{H})$, а элементы пространств $(\mathcal{S})(\mathbb{H})$ и $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ определяются через поведение (убывание или рост соответственно) коэффициентов Фурье по базису, построенному на основе стохастических полиномов Эрмита, ортогональных в $(L_2)(\mathbb{R})$ (см. [14], [15]). Элементы пространства $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ мы называем обобщенными $\mathbb{H}$ -значными случайными величинами. В § 3 показано, что этому пространству принадлежат $\mathbb{H}$ -значные Q -винеровский процесс и цилиндрический винеровский процесс, а также производные по t от этих процессов, называемые соответственно сингулярным Q -белым шумом и сингулярным белым шумом. В пространстве $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ и построено решение задачи (0.2) с сингулярным белым шумом в роли случайного возмущения и генератором полугруппы класса C_0 (теорема 4).

В основе каждого из построенных решений лежит стохастическая свертка – свертка (регуляризованных, обобщенных) операторов решения с белым шумом.

Все построенные в работе решения, как регуляризованные, так и обобщенные, являются регуляризованными в широком смысле. Под регуляризацией в широком смысле понимается построение некоторой новой (исправленной, сглаженной) задачи без требования сходимости по параметру полученных регуляризованных решений к некоторому точному решению исходной задачи (см. [7], [8]). Построенное в § 1 слабое R -регуляризованное решение задачи Коши является результатом регуляризации задачи за счет элементов из области определения оператора A^* и сглаживающего оператора R ; построенное в § 2 обобщенное по t решение регуляризуется за счет основных функций Шварца или ультрадифференцируемых функций; построенное в § 3 обобщенное по ω решение регуляризуется за счет функций из пространства $\mathbb{H}$ -значных основных функций, определяемых в теории стохастических распределений.

§ 1. Стохастическая задача Коши в гильбертовых пространствах

1.1. Необходимые сведения из теории регуляризованных полугрупп. Определения, свойства. Следуя [16], дадим следующее определение регуляризованных полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – замкнутый линейный оператор, $R(t)$, $t \geq 0$, – линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве H . Сильно непрерывное семейство ограниченных операторов $S = \{S(t), t \in [0, \tau)\}$, $\tau \leq \infty$, называется R -регуляризованной полугруппой с генератором A , если

$$S(t)A\zeta = AS(t)\zeta, \quad \zeta \in \text{dom } A, \quad S(t)\zeta = A \int_0^t S(s)\zeta ds + R(t)\zeta, \quad \zeta \in H.$$

Полугруппа S называется экспоненциально ограниченной, если

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

для некоторых $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, и локальной, если $\tau < \infty$. Если $R(t) = I \int_0^t k(s) ds$, где $k \in C[0, \infty)$, то S называется k -конволюционной полугруппой. Если оператор A является плотно определенным и $R(t) \equiv R$ – обратимый линейный ограниченный оператор с плотной областью значений, то S называется R -полугруппой.

Заметим, что если $k(t) = t^{n-1}/(n-1)!$, то k -конволюционная полугруппа является n раз интегрированной полугруппой; если $R = I$, то R -полугруппа является полугруппой класса C_0 .

В [2], [17] R -полугруппы определены как сильно непрерывное семейство ограниченных операторов, удовлетворяющих R -полугрупповому соотношению

$$(R1) \quad S(t+s)R = S(t)S(s), \quad s, t, s+t \in [0, \tau), \quad S(0) = R,$$

с инфинитезимальным генератором

$$\mathcal{G}f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f, \quad \text{dom } \mathcal{G} = \left\{ f \in \text{ran } R : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f \right\},$$

и вместо R использовано обозначение C (C -полугруппа). Мы предпочитаем название “ R -полугруппа”, которое подчеркивает ее регуляризующее свойство и отличие от C_0 -полугруппы (полугруппы класса C_0), где C означает “continuity”.

Следующее предложение делает ясной связь между определением R -полугруппы через уравнение и через соотношение (R1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – замкнутый, плотно определенный оператор в банаховом пространстве H . Тогда сильно непрерывное семейство ограниченных операторов $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$ является R -полугруппой с генератором A , если и только если семейство удовлетворяет соотношению (R1). В этом случае $A = \overline{\mathcal{G}}$.

Доказательство предложения основано на взаимосвязи между R -полугрупповым соотношением для семейства ограниченных операторов и однородной задачей Коши $u'(t) = Au(t)$, $t \in [0, \tau)$, $u(0) = R\zeta$ с A – генератором этого семейства.

Что касается k -конволюционных полугрупп, для них тоже существует “полугрупповое” соотношение (см. [16])

$$(k1) \quad S(t)S(s) = \int_s^{t+s} k(t+s-r)S(r) dr - \int_0^t k(t+s-r)S(r) dr, \quad t, s, t+s \in [0; \tau),$$

но в качестве определения его обычно не используют. Определения полугрупп через соотношения (R1), (k1) подчеркивают структурные свойства полугрупп, а определение 1 показывает, как регуляризованная полугруппа с генератором A связана с задачей Коши: $u(\cdot) = S(\cdot)\zeta$ является решением регуляризованной задачи

$$u(t) = A \int_0^t u(s) ds + R(t)\zeta, \quad t \in [0, \tau),$$

или регуляризованным решением однородной задачи Коши с начальным условием $u(0) = \zeta$.

На базе определения 1 исследованы свойства семейств операторов, сопряженных к регуляризованным полугруппам, необходимые для изучения стохастических задач.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [6]). Пусть A – генератор R -регуляризованной полугруппы $S = \{S(t), t \in [0, \tau)\}$ в гильбертовом пространстве H , операторы $R(t)$ являются сильно непрерывно дифференцируемыми и $\text{dom } A = H$. Тогда $\{S^*(t), t \in [0, \tau)\}$ является R^* -регуляризованной полугруппой с генератором A^* , плотно определенным. Если операторы $R(t)$ являются обратимыми, то $R^*(t)$ обладают теми же свойствами.

Наряду с общими свойствами k -конволюционных полугрупп и R -полугрупп как подслучаев регуляризованных полугрупп они имеют разные спектральные свойства, важные для приложений. Генератор любой k -конволюционной полугруппы имеет резольвенту $\mathcal{R}(\lambda)$ в некоторой области Λ . В случае локальной полугруппы резольвента существует в области

$$\Lambda_{\alpha, \gamma, \beta}^M = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda > \alpha M(\gamma|\lambda|) + \beta\} \quad (1.1)$$

и удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leq Ce^{\beta M(\gamma|\lambda|)}, \quad \lambda \in \Lambda_{\alpha, \gamma, \beta}^M, \quad (1.2)$$

где функция M и параметры α, γ, β зависят от k и τ . Обратный результат тоже имеет место: оценка (1.2) обеспечивает существование k -конволюционной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$ с k и τ , зависящими от параметров оценки, а именно имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [9], [16]). Пусть $M(s), s \geq 0$, – положительная функция, возрастающая при $s \rightarrow \infty$ не быстрее чем s^p , $p < 1$. Предположим, что резольвента оператора A удовлетворяет оценке (1.2) с некоторыми параметрами γ, α, β . Тогда A является генератором локальной k -конволюционной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \frac{\delta-\beta}{\alpha}]\}$ с функцией k , преобразование Лапласа которой удовлетворяет условию

$$|\tilde{k}(\lambda)| = O_{|\lambda| \rightarrow \infty}(e^{-\delta M(\gamma|\lambda|)}), \quad \delta > \beta.$$

В отличие от спектральных свойств k -конволюционной полугруппы, генератор R -полугруппы в общем случае не обладает резольventой, он имеет лишь R -резольventу.

Примеры интегрированных, k -конволюционных полугрупп, R -полугрупп и их генераторов, в частности полугрупп, порожденных дифференциальными операторами, приведены, например, в [8], [9], примеры R -полугрупп, применяемых для регуляризации некорректных задач Коши, рассматриваются в п. 1.3.

1.2. Q -винеровский и цилиндрический процессы. Стохастическая свертка. Постановка задачи Коши в гильбертовом пространстве. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, H – сепарабельное гильбертово пространство. Математическое ожидание для H -значной случайной величины $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P; H) = L_1(\Omega; H)$ определено равенством

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

оператор ковариации для $X \in L_2(\Omega; H)$ – равенством

$$\text{Cov}[X] := E[(X - E[X]) \otimes (X - E[X])].$$

(Для $v \in H_1, u \in H_2$, где H_1 и H_2 – гильбертовы пространства, $u \otimes v$ обозначает оператор из $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, определяемый равенством $(u \otimes v)h := u(v, h)_{H_1}$.) Поскольку $\text{Cov}[X]$ является симметричным, неотрицательным ядерным оператором (см. [2]), он не может быть пропорционален единичному. Следовательно, обобщение броуновского движения на бесконечномерный случай гильбертовых пространств не может иметь закон распределения $\mathcal{N}(0, tI)$, поэтому здесь вместо броуновского движения вводится Q -винеровский процесс, определение которого согласуется с разложением (0.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Q – линейный симметричный, неотрицательный ядерный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Тогда $\mathbb{H}$ -значный стохастический процесс $W_Q = \{W_Q(t), t \geq 0\}$ является Q -винеровским процессом, если:

- (W1) $W_Q(0) = 0$ почти всегда;
- (W2) W_Q имеет независимые приращения;
- (W3) приращения $W_Q(t) - W_Q(s)$, $0 \leq s \leq t$, распределены по нормальному закону с математическим ожиданием нуль и ковариационным оператором $(t - s)Q$;
- (W4) W_Q имеет непрерывные траектории почти всегда.

Пусть $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ – некоторая фильтрация. Если для любого $t \geq 0$ случайная величина $W_Q(t)$ $\mathcal{F}_t$ -измерима, а при $h > 0$ приращение $W_Q(t + h) - W_Q(t)$ не зависит от $\mathcal{F}_t$, то $W_Q(t)$ называют Q -винеровским процессом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оператор Q задан равенством (0.3), где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$.

Свойство (W3) Q -винеровского процесса, в частности, означает, что для любых $t \geq s \geq 0$ верно равенство

$$\begin{aligned} \|W_Q(t) - W_Q(s)\|_{L_2(\Omega; \mathbb{H})}^2 &= E\|W_Q(t) - W_Q(s)\|_{\mathbb{H}}^2 = E \sum_j (W_Q(t) - W_Q(s), e_j)_{\mathbb{H}}^2 \\ &= \sum_j (E[(W_Q(t) - W_Q(s), e_j)_{\mathbb{H}}(W_Q(t) - W_Q(s))], e_j)_{\mathbb{H}} \\ &= \sum_j (\text{Cov}(W_Q(t) - W_Q(s))e_j, e_j)_{\mathbb{H}} = \text{Tr Cov}[W_Q(t) - W_Q(s)] = (t - s) \text{Tr } Q. \end{aligned}$$

Аналогично для случайных процессов $\beta_j(t) := \frac{1}{\sigma_j}(W_Q(t), e_j)_{\mathbb{H}}$, $j \in \mathbb{N}$, со значениями в $\mathbb{R}$ получаем

$$E(\beta_i(t)\beta_j(t)) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(\text{Cov}_Q W(t)e_i, e_j)_{\mathbb{H}} = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(Qe_i, e_j)_{\mathbb{H}} = t \frac{\sigma_i}{\sigma_j}(e_i, e_j)_{\mathbb{H}} = t\delta_{ij},$$

откуда следует их независимость. Таким образом, β_j являются независимыми, одинаково распределенными броуновскими движениями, а сам Q -винеровский процесс W_Q при каждом $t \geq 0$ раскладывается в ряд (0.4), который сходится в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{H})$.

Цилиндрический винеровский процесс W определяется формальным разложением

$$W(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t)e_j, \quad (1.3)$$

где $\{\beta_j\}$ – последовательность независимых броуновских движений. Этот ряд расходится в пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{H})$, но для любого $h \in \mathbb{H}$ в $L_2(\Omega; \mathbb{R})$ сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j(t)e_j, h)$, а ряд (1.3) сходится в $L_2(\Omega, \mathbb{H}_1)$ для любого пространства $\mathbb{H}_1 \supset \mathbb{H}$ такого, что оператор вложения $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}_1$ является оператором Гильберта–Шмидта. В частности, в пространстве $\mathbb{H}_1 = Q_1^{1/2}\mathbb{H}$ с нормой $\|h\|_{\mathbb{H}_1} = \|Q_1^{-1/2}h\|_{\mathbb{H}}$, где Q_1 – произвольный ядерный оператор, W является Q_1 -винеровским процессом. В §3, рассматривая обобщенные решения задачи (0.2) в пространствах стохастических распределений, мы определим цилиндрический процесс и процесс белого шума через ряды, сходящиеся в этих пространствах.

В настоящем параграфе, рассматривая задачу Коши с генератором регуляризованной полугруппы, мы изучаем существование и единственность

слабого регуляризованного решения. (Как известно, существование сильно-го решения требует, чтобы операторы $S(t)B$ были операторами Гильберта–Шмидта даже при априорном предположении, что A является генератором полугруппы класса C_0 ; см. [2].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть A – линейный замкнутый оператор, действующий в H , W – Q -винеровский или цилиндрический процесс в $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, $R(t) \in \mathcal{L}(H)$, $t \geq 0$. H -значный предсказуемый процесс $\{X(t), t \in [0, \tau)\}$ называется *слабым решением задачи (0.1)*, если $\int_0^t \|X(s)\|_H ds < \infty$ почти всюду и почти всюду выполняется равенство

$$(X(t), y) = (\zeta, y) + \int_0^t (X(s), A^*y) ds + (BW(t), y), \quad t \in [0, \tau), \quad y \in \text{dom } A^*,$$

и называется *слабым R -регуляризованным решением задачи (0.1)*, если почти всюду выполняется равенство

$$(X(t), y) = (R(t)\zeta, y) + \int_0^t (X(s), A^*y) ds + \left(\int_0^t R(t-s)B dW(s), y \right), \\ y \in \text{dom } A^*.$$

Подобно случаю полугрупп класса C_0 в конструкции рассматриваемых решений важную роль играет стохастическая свертка

$$W_A(t) := \int_0^t S(t-s)B dW(s), \quad t \in [0, \tau), \quad (1.4)$$

которая определяется стохастическим интегралом по $\mathbb{H}$ -значному Q -винеровскому или цилиндрическому винеровскому процессу. Стохастический интеграл $\int_0^t \Psi(s) dW(s)$ (см. [2]), где W – некоторый Q -винеровский или цилиндрический винеровский процесс, определяется как предел в пространстве $L_2(\Omega; H)$ интегральных сумм вида

$$\sum_{i=0}^{p-1} \Psi(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i))$$

для предсказуемых случайных процессов $\Psi(s)$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, удовлетворяющих условию

$$E \int_0^t \|\Psi(r)\|_{HS^0}^2 dr < \infty, \quad (1.5)$$

где в случае Q -винеровского процесса $\|\cdot\|_{HS^0}$ – норма в пространстве операторов Гильберта–Шмидта, действующих из пространства $H_0 = Q^{1/2}\mathbb{H}$, оснащенного нормой $\|h\|_{H_0} = \|Q^{-1/2}h\|_{\mathbb{H}}$, в пространство H :

$$\|\Psi(s)\|_{HS^0}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi(s)Q^{1/2}e_j\|^2 = \text{Tr } \Psi(s)Q^{1/2}Q^{*1/2}\Psi^*(s),$$

а в случае цилиндрического винеровского процесса $\|\cdot\|_{HS^0}$ – норма пространства операторов Гильберта–Шмидта, действующих из $\mathbb{H}$ в H :

$$\|\Psi(s)\|_{HS^0}^2 := \text{Tr } \Psi(s)\Psi^*(s). \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать стохастическую свертку лишь в частном случае детерминированной функции $\Psi(s)$, равной некоторой полугруппе или ее производной.

1.3. Решение стохастической задачи Коши в гильбертовом пространстве. Рассмотрим стохастическую задачу Коши (0.5) с оператором A – генератором регуляризованной полугруппы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{W_Q(t), t \geq 0\}$ – $\mathbb{H}$ -значный Q -винеровский процесс относительно некоторой фильтрации $\mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, A – плотно определенный генератор R -регуляризованной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^t \|S(r)B\|_{HS^0}^2 dr < \infty, \quad t \in [0, \tau). \quad (1.7)$$

Тогда $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$, $t \in [0, \tau)$, где W_A – стохастическая свертка, определенная равенством (1.4), является слабым R -регуляризованным решением задачи (0.5) для любой H -значной $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величины ζ . В случае конволюционных полугрупп и R -полугрупп это решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что процесс $S\zeta = \{S(t)\zeta, t \in [0, \tau)\}$ является слабым R -регуляризованным решением для соответствующего однородного уравнения. Процесс $S\zeta$ является $\mathcal{F}_t$ -измеримым как композиция детерминированной функции $S(t)h$ двух переменных $(t, h) \in [0, \tau) \times H$ и $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величины ζ ; траектории процесса почти всюду являются непрерывными по $t \in [0, \tau)$. Пусть $y \in \text{dom } A^*$; тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t (S(s)\zeta, A^*y) ds &= \left(\int_0^t S(s)\zeta ds, A^*y \right) = \left(A \int_0^t S(s)\zeta ds, y \right) \\ &= (S(t)\zeta - R(t)\zeta, y). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в решении – W_A . В силу определения стохастического интеграла через предел интегралов от ступенчатых функций нетрудно проверить, что процесс W_A является предсказуемым. В силу условия (1.7) функция $\int_0^t \|S(t-s)B\|_{HS^0}^2 ds$ непрерывна по $t \in [0, \tau)$, следовательно, интегрируема и

$$\int_0^r \int_0^t \|S(t-s)B\|_{HS^0}^2 ds dt = \int_0^r \int_0^t \|S(s)B\|_{HS^0}^2 ds dt.$$

Учитывая непрерывность скалярного произведения, стохастический вариант теоремы Фубини (см. [2]) и свойства сопряженной полугруппы $\{S^*(t), t \in [0, \tau)\}$, указанные в предложении 2, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^s S(s-r)B dW_Q(r), A^*y \right) ds &= \left(\int_0^t \int_0^s B dW_Q(r), S^*(s-r)A^*y ds \right) \\ &= \left(\int_0^t B dW_Q(r), \int_r^t S^*(s-r)A^*y ds \right) = \left(\int_0^t B dW_Q(r), \int_0^{t-r} S^*(\sigma)A^*y d\sigma \right) \\ &= \left(\int_0^t B dW_Q(r), S^*(t-r)y - R^*(t-r)y \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^t S(t-r)B dW_Q(r), y \right) - \left(\int_0^t R(t-r)B dW_Q(r), y \right), \quad t \in [0, \tau).$$

Это означает, что W_A является слабым R -регуляризованным решением задачи (0.5) с начальным условием $\zeta = 0$. Следовательно, $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$, $t \in [0, \tau)$, является слабым R -регуляризованным решением задачи (0.5).

Для доказательства единственности, как и в [2], выведем вспомогательное равенство для скалярного произведения $(X(t), y(t))$, предполагая, что X – это слабое регуляризованное решение (0.5) с нулевым начальным условием и $y(\cdot) \in C^1([0, \tau]; \text{dom } A^*)$. Покажем, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} (X(t), y(t)) &= \int_0^t (X(s), y'(s) + A^*y(s)) ds + \int_0^t \left(\int_0^s R'(s-r)B dW_Q(r), y(s) \right) ds \\ &\quad + \left(\int_0^t B dW_Q(s), R^*(0)y(s) \right), \quad t \in [0, \tau). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Чтобы доказать (1.8), определим

$$\begin{aligned} F_{y_0}(t) &:= (X(t), y_0) = \int_0^t (X(s), A^*y_0) ds + \left(\int_0^t R(t-s)B dW_Q(s), y_0 \right), \\ y_0 &\in \text{dom } A^*, \quad t \in [0, \tau). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(s) \in C^1(\mathbb{R})$; тогда, используя формулу Ито для H -значных процессов, имеем

$$\begin{aligned} d(\varphi(s)F_{y_0}(s)) &= \varphi'(s)F_{y_0}(s) ds + \varphi(s) dF_{y_0}(s) \\ &= \varphi'(s)(X(s), y(s)) + \varphi(s) \left[(X(s), A^*y_0) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^s R'(s-r)B dW_Q(r), \varphi(s)y_0 \right) ds + (R(0)B dW_Q(s), y_0) \right] \\ &= (X(s), y'(s) + A^*y(s)) ds + \left(\int_0^s R'(s-r)B dW_Q(r), y(s) \right) ds \\ &\quad + \left(\int_0^t R(0)B dW_Q(s), y(s) \right). \end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство от 0 до t , получим равенство (1.8) для функций вида $y(s) = \varphi(s)y_0$, $s \in [0, \tau)$. Поскольку множество таких функций всюду плотно в $C^1([0, \tau], \text{dom } A^*)$, равенство (1.8) имеет место для любого $y \in C^1([0, \tau], \text{dom } A^*)$.

Пусть теперь $y(s) = S^*(t-s)y_0$, $y_0 \in \text{dom } A^*$; тогда в силу свойств сопряженной полугруппы (предложение 2) имеем

$$\begin{aligned} (X(t), R^*(0)y_0) &= \int_0^t (X(s), -R^{*'}(t-s)y_0) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(S(t-s) \int_0^s R'(s-r)B dW_Q(r) ds, y_0 \right) \\ &\quad + \left(\int_0^t S(t-s)B dW_Q(s), R^*(0)y_0 \right). \end{aligned}$$

Это равенство выполняется для любого решения задачи (0.5) с $\zeta = 0$, в частности, для $X = W_A$

$$\begin{aligned} & \left(R(0) \int_0^t S(t-s) B dW_Q(s), y_0 \right) + \left(\int_0^t R'(t-s) \int_0^s S(s-r) B dW_Q(r) ds, y_0 \right) \\ &= \left(R(0) \int_0^t S(t-s) B dW_Q(s), y_0 \right) \\ &+ \left(\int_0^t S(t-s) \int_0^s R'(s-r) B dW_Q(r) ds, y_0 \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\overline{\text{dom } A^*} = H$, получаем

$$\int_0^t R'(t-s) \int_0^s S(s-r) B dW_Q(r) ds = \int_0^t S(t-s) \int_0^s R'(s-r) B dW_Q(r) ds$$

и равенство

$$\begin{aligned} & R(0)X(t) + \int_0^t R'(t-s)X(s) ds \\ &= R(0) \int_0^t S(t-s) B dW_Q(s) + \int_0^t R'(t-s) \int_0^s S(s-r) B dW_Q(r) ds. \end{aligned}$$

Запишем это равенство следующим образом:

$$(R(0) + \mathbf{R})X = (R(0) + \mathbf{R})W_A, \quad \mathbf{R}X(t) := \int_0^t R'(t-s)X(s) ds.$$

Отсюда следует, что

$$X(t) = \int_0^t S(t-r) B dW_Q(r) + \eta(t), \quad t \in [0, \tau),$$

где η – решение уравнения $(R(0) + \mathbf{R})\eta = 0$. В общем случае $\eta(t) \in L_2(\Omega, H)$. В частности, если регуляризованная полугруппа S является R -полугруппой (т.е. $R(t) = R$ и оператор R обратим), то $\mathbf{R} = 0$, $\eta = 0$ и полученное решение единственно. Если S является k -конволюционной полугруппой (т.е. $R'(t) = k(t)$, $R(0) = 0$), то решение также единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\zeta \in L_2(\Omega; H)$, то и $X(t) \in L_2(\Omega; H)$, $t \in [0, \tau)$. Учитывая определения математического ожидания и оператора ковариации, получаем следующие характеристики построенного регуляризованного решения:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= S(t)E\zeta, \\ \text{Cov}[X(t)] &= S(t) \text{Cov}[\zeta] S^*(t) + \int_0^t S(t-s) B Q B^* S^*(t-s) ds. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда W является цилиндрическим винеровским процессом. Однако при этом условие (1.7) на полугруппу S , обеспечивающее существование стохастической свертки, становится более жестким; в этом случае HS^0 должно быть пространством операторов Гильберта–Шмидта из $\mathbb{H}$ в H с нормой, заданной равенством (1.6):

$$\|S(r)B\|_{HS^0}^2 = \text{Tr } S(r) B B^* S^*(r).$$

Проиллюстрируем это на примерах полугрупп, связанных с оператором Лапласа. Предположим для простоты, что $B \in \mathcal{L}(H)$, в частности, что B единичный.

ПРИМЕР 1. Пусть $A = \Delta$ – оператор Лапласа с

$$\text{dom } A := H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < x_i < a_i, i = 1, \dots, N\}.$$

Пусть $\{k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ – множество всех мультииндексов $k^{(n)} = (k_1^{(n)}, \dots, k_N^{(n)}) \in \mathbb{N}^N$, упорядоченное так, что $|k^{(n+1)}| \geq |k^{(n)}|$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{-\mu_n\}_{n=1}^\infty$, где $\mu_n = \sum_{i=1}^N (\pi^2 (k_i^{(n)})^2 / a_i^2)$ – спектр A , состоящий из собственных значений, а собственные функции оператора A

$$e_n = \prod_{i=1}^N \left(\frac{2}{a_i}\right)^{1/2} \left(\sin \frac{\pi k_i^{(n)} x_i}{a_i}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

соответствующие μ_n , образуют ортонормированный базис гильбертова пространства $H = L_2(\mathcal{O})$. Оператор A порождает в H полугруппу $\{U(t), t \geq 0\}$ класса C_0 :

$$U(t)\zeta = \sum_{k=1}^\infty e^{-\mu_k t} (e_k \otimes e_k) \zeta := \sum_{k=1}^\infty e^{-\mu_k t} (e_k, \zeta) e_k, \quad \zeta \in H.$$

Следовательно, $U(t)\zeta$, $\zeta \in \text{dom } A$, является решением равномерно корректной однородной задачи Коши с оператором A . При этом

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}(U(s)U^*(s)) ds &= \int_0^t \sum_{k=1}^\infty \|U(s)e_k\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 ds \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t e^{-2\mu_k s} ds = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\mu_k} (1 - e^{-2\mu_k t}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что задача (0.1) с цилиндрическим винеровским процессом W имеет единственное решение в $L_2(\Omega; H)$, если выполнено условие (1.7), т.е. если $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\mu_k} < \infty$, а значит, при $N = 1$. При $N > 1$ однозначная разрешимость задачи (0.1) с цилиндрическим винеровским процессом W имеет место, если B является оператором Гильберта–Шмидта.

ПРИМЕР 2. Пусть теперь $A = -\Delta$ с той же областью определения. Этот оператор связан с некорректной задачей Коши для уравнения обратной теплопроводности. Он является генератором важных для приложений R -полугрупп (см. [8], [9]). Семейство линейных ограниченных операторов, заданных равенством

$$S_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{\mu_k t}}{1 + \varepsilon e^{\mu_k T}} (e_k \otimes e_k), \quad t \in [0, T],$$

является в пространстве $L_2(\mathcal{O})$ локальной R -полугруппой с генератором A и с оператором

$$R = R_\varepsilon = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1 + \varepsilon e^{\mu_k T}} (e_k \otimes e_k), \quad \varepsilon > 0.$$

Такая полугруппа возникает при регуляризации задачи Коши для уравнения обратной теплопроводности методом АВС (auxiliary boundary conditions). Проводя выкладки, аналогичные (1.9), получаем для нее

$$\int_0^t \text{Tr}(S_\varepsilon(s)S_\varepsilon^*(s)) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\mu_k t} - 1}{2\mu_k(1 + \varepsilon e^{\mu_k T})^2}.$$

Отсюда, как в примере 1, следует существование единственного R -регуляризованного решения задачи (0.1) с цилиндрическим винеровским процессом при $N = 1$. Семейство, заданное равенством

$$S_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t - \alpha \mu_k^2 T} (e_k \otimes e_k), \quad t \in [0, T],$$

является локальной R -полугруппой с генератором A и оператором

$$R = R_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha \mu_k^2 T} (e_k \otimes e_k), \quad \alpha > 0.$$

Она используется для регуляризации некорректной задачи Коши для уравнения обратной теплопроводности методом квазиобращения. Для этой полугруппы имеем

$$\int_0^t \text{Tr}(S(s)S^*(s)) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\mu_k t} - 1}{2\mu_k e^{2\alpha \mu_k^2 T}},$$

откуда следует, что задача (0.1) с цилиндрическим винеровским процессом имеет единственное R -регуляризованное решение $X(t) \in L_2(\Omega; H)$ при любом $N \in \mathbb{N}$. Это связано с сильным регуляризующим свойством оператора R_α .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если регуляризованная полугруппа в теореме 1 является R -полугруппой, то при дополнительном предположении

$$\int_0^t \|S(r)R^{-1}B\|_{HS_0}^2 dr < \infty \quad (1.10)$$

процесс

$$S(t)R^{-1}\zeta + \int_0^t S(t-s)R^{-1}B dW_Q(s), \quad t \in [0, \tau],$$

является (слабым) решением задачи (0.1). Однако в этом случае условие (1.10), конечно, более ограничительное, чем (1.7), поскольку операторы решения $U(t) = S(t)R^{-1}$ не являются ограниченными.

В следующих параграфах обобщенное решение задачи (0.2) с генераторами регуляризованных полугрупп будет построено в пространствах абстрактных распределений Шварца и стохастических распределений без дополнительных условий типа (1.10).

§ 2. Стохастическая задача Коши в пространствах абстрактных распределений

2.1. Q -белый шум в пространствах распределений (по t) со значениями в пространстве $\mathbb{H}$ -значных случайных величин. Постановка задачи. Решение в случае полугрупп класса C_0 и интегрированных полугрупп в пространствах абстрактных распределений Шварца. Пусть $\{W_Q(t), t \geq 0\}$ – Q -винеровский процесс со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, определенный выше.

Для произвольного банахова пространства $\mathcal{X}$ будем обозначать через $\mathcal{D}'(\mathcal{X})$ и $\mathcal{S}'(\mathcal{X})$ пространства $\mathcal{X}$ -значных распределений (обобщенных функций) над пространствами основных функций $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ соответственно; $\mathcal{D}'_+(\mathcal{X})$ и $\mathcal{S}'_+(\mathcal{X})$ – подпространства $\mathcal{X}$ -значных распределений и распределений медленного роста с ограниченными снизу носителями, $\mathcal{D}'_0(\mathcal{X})$, $\mathcal{S}'_0(\mathcal{X})$ – с носителями на $[0, \infty)$. Такие распределения, в отличие от $\mathbb{R}$ -значных распределений Шварца, называют абстрактными.

Белый шум $\mathbb{W}_Q$ в пространствах абстрактных распределений определим как обобщенный случайный процесс $\{\langle \mathbb{W}_Q, \theta \rangle, \theta \in \mathcal{D}\}$, равный обобщенной производной от Q -винеровского процесса W_Q , рассматриваемого как элемент пространства $\mathcal{D}'(L_2(\Omega; \mathbb{H}))$:

$$\langle \mathbb{W}_Q, \theta \rangle := - \int_0^\infty W_Q(t) \theta'(t) dt = \int_0^\infty \theta(t) dW_Q(t), \quad \theta \in \mathcal{D}. \quad (2.1)$$

Первый интеграл в равенстве (2.1) понимается как интеграл Бохнера от функции со значениями в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{H})$, второй – как абстрактный интеграл Ито. Равенство интегралов получаем из обобщения формулы Ито на бесконечномерный случай (см. [2]).

Следуя общей идее сведения краевых задач в обобщенных функциях к уравнениям с δ -функциями и их производными при краевых условиях, определяющих их скачки (см. [18]; в задаче Коши для уравнения первого порядка – это скачок от нуля при $t < 0$ до начального условия при $t = 0$), задачу Коши (0.2) можно записать следующим образом¹:

$$P * X = \delta \otimes \zeta + B\mathbb{W}, \quad P := \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\text{dom } A], H)). \quad (2.2)$$

Эту задачу можно рассматривать как частный случай уравнения в свертках, предложенного в [19] для исследования детерминированных задач.

Свертку распределений, необходимую для определения уравнения (2.2) и далее для определения стохастической свертки (стохастической составляющей обобщенного решения), будем понимать следующим образом.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ – банаховы пространства такие, что на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ определена непрерывная билинейная операция $(u, v) \mapsto uv$, где $u \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, $uv \in \mathcal{Z}$. Для любых распределений $F \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{X})$ и $G \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{Y})$ свертка $F * G \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{Z})$ определяется равенством

$$\langle F * G, \theta \rangle := \langle (f * g)^{(n+m)}, \theta \rangle = (-1)^{n+m} \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) \theta^{n+m}(t) dt, \quad \theta \in \mathcal{D},$$

¹Для $u \in \mathcal{D}'$, $h \in H$ через $u \otimes h$ будем обозначать распределение из $\mathcal{D}'(H)$, определенное равенством $\langle u \otimes h, \theta \rangle := \langle u, \theta \rangle h$.

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$ – непрерывные функции, определяемые структурными теоремами в теории распределений, с ограниченными снизу носителями такие, что для любого $\phi \in \mathcal{D}$ с $\text{supp } \phi \subseteq \text{supp } \theta$ выполняются соотношения

$$\langle F, \phi \rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi^{(n)}(t) dt, \quad \langle G, \phi \rangle = (-1)^m \int_{\mathbb{R}} g(t) \phi^{(m)}(t) dt,$$

а $f * g$ определена равенством $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s) ds$.

В [19] показано, что определенная таким образом свертка $F * G$ не зависит от выбора f и g . Заметим, что в частном случае, когда F – регулярное распределение:

$$\langle F, \theta \rangle = \int_{\mathbb{R}} F(t) \theta(t) dt,$$

для свертки F и G с носителями, ограниченными снизу, имеет место равенство

$$\langle F * G, \theta \rangle = \int_{\mathbb{R}} F(t) \langle G(\cdot), \theta(t + \cdot) \rangle dt. \quad (2.3)$$

Пусть A – замкнутый линейный оператор, действующий в H , $[\text{dom } A]$ – область определения оператора A , оснащенная нормой графика, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}; H)$, $\zeta \in H$, а $\mathbb{W}_Q$ – Q -белый шум, определенный равенством (2.1). Обобщенным решением задачи Коши (0.2) с Q -белым шумом

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}_Q(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \zeta, \quad (2.4)$$

будем называть $X \in \mathcal{D}'_0([\text{dom } A])$ – решение уравнения (2.2) с $\mathbb{W} = \mathbb{W}_Q$.

Распределение $G \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(H; \mathcal{X}))$ называется *обратным* к $P \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(\mathcal{X}; H))$ относительно свертки, если $G * P = \delta \otimes I_{\mathcal{X}}$, $P * G = \delta \otimes I_H$, где $I_{\mathcal{X}}$ и I_H – тождественные операторы в пространствах $\mathcal{X}$ и H соответственно.

В силу свойств распределения, обратного относительно свертки, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $P \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\text{dom } A]; H))$ в (2.2) имеет обратное относительно свертки распределение G . Тогда обобщенный случайный процесс $X \in \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, [\text{dom } A]))$, определяемый равенством

$$\langle X, \theta \rangle := \langle G * \delta, \theta \rangle + \langle G * B\mathbb{W}_Q, \theta \rangle, \quad \theta \in \mathcal{D}, \quad (2.5)$$

является единственным решением уравнения (2.2) с $\mathbb{W} = \mathbb{W}_Q$.

Первое слагаемое в правой части равенства (2.5) – это детерминированная часть решения, а второе представляет собой реакцию линейной системы, описываемой уравнением (2.2), на шум $\mathbb{W}_Q$.

Рассмотрим более подробно решение уравнения (2.2), соответствующего задаче Коши (2.4) с генераторами различных полугрупп.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – генератор полугруппы класса C_0 или некоторой интегрированной полугруппы в гильбертовом пространстве H , $\mathbb{W}_Q$ – $\mathbb{H}$ -значный Q -белый шум. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи Коши (0.2), принадлежащее пространству $\mathcal{D}'_0(L_2(\Omega; [\text{dom } A]))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – генератор полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0 . В этом случае операторы полугруппы $S(t)$ совпадают с операторами решения соответствующей однородной задачи Коши и обратным относительно свертки для P является операторнозначное распределение G : $\langle G, \theta \rangle = \int_0^\infty \theta(t) S(t) dt$ (где интеграл понимаем в сильном смысле). Оно принадлежит классу экспоненциальных распределений

$$\mathcal{S}'_a(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A])) := \{G \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A])) : e^{-at}G \in \mathcal{S}'(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A]))\},$$

где a – показатель экспоненциального роста полугруппы $\{S(t)\}$ (см. [20]). В этом случае равенство (2.5), определяющее решение задачи (2.4), принимает вид

$$\langle X, \theta \rangle = \int_0^\infty \theta(t) S(t) \zeta dt - \int_0^\infty \theta'(t) dt \int_0^t S(t-s) BW_Q(s) ds, \quad \theta \in \mathcal{D},$$

где W_Q – Q -винеровский процесс.

Пусть теперь A является генератором экспоненциально ограниченной n раз интегрированной полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$. Тогда для P обратным относительно свертки является операторнозначное распределение G :

$$\langle Gx, \theta \rangle = (-1)^n \int_0^\infty \theta^{(n)}(t) S(t) x dt, \quad \theta \in \mathcal{D}, \quad x \in H. \quad (2.6)$$

Как и в случае полугруппы класса C_0 , оно принадлежит классу экспоненциальных распределений $\mathcal{S}'_a(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A]))$, при этом равенство (2.5) принимает вид

$$\langle X, \theta \rangle = (-1)^n \left[\int_0^\infty \theta^{(n)}(t) S(t) \zeta dt - \int_0^\infty \theta^{(n+1)}(t) dt \int_0^t S(t-s) BW_Q(s) ds \right],$$

$\theta \in \mathcal{D}.$

В случае когда A является генератором некоторой локальной n раз интегрированной полугруппы $S = \{S(t), t \in [0, \tau)\}$, распределение, обратное к P относительно свертки, существует и принадлежит пространству $\mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A]))$, но, в отличие от случая экспоненциально ограниченной полугруппы, равенство (2.6) для него верно лишь локально, а именно только тогда, когда $\text{supp } \theta \subseteq (-\infty; \tau)$. Тем не менее явное представление для $\langle G, \theta \rangle$ можно получить для любой $\theta \in \mathcal{D}$; дело в том, что наряду с локально интегрированной полугруппой S такой генератор порождает целое семейство локально интегрированных полугрупп $\{S_m(t), t \in (-\infty; \tau_m)\}$, где $\tau_m = \frac{\tau'}{n}(m - n - 3)$, $0 < \tau' < \tau$, $m \in \mathbb{N}$, $m > n + 3$, определяемых (в силу структурных теорем для распределений) следующим образом (см. [9]):

$$S_m(t)x := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-m} e^{\lambda t} \mathcal{R}(\lambda) x d\lambda, \quad x \in H,$$

где $\mathcal{R}(\lambda)$ – резольвента генератора A , удовлетворяющая в случае локальной интегрированной полугруппы оценке (1.2) в области (1.1) с $M(\zeta) = \ln \zeta$, $\alpha = 1$, $\gamma, \beta > 0$, а Γ – граница области $\Lambda_{\alpha, \gamma, \beta+\varepsilon}^M$ ($\varepsilon > 0$).

В этом случае распределение G , обратное к P относительно свертки, определяется локально как обобщенная производная порядка m от полугруппы $S_m(t)$, где для произвольного $\theta \in \mathcal{D}$ выберем m так, чтобы $\text{supp } \theta \subseteq (-\infty; \tau_m]$. Тогда

$$\langle Gx, \theta \rangle = (-1)^m \int_0^\infty \theta^{(m)}(t) S_m(t) dt, \quad x \in H.$$

Таким образом, на основной функции $\theta \in \mathcal{D}$ с $\text{supp } \theta \subseteq (-\infty; \tau_m]$ для решения задачи (2.4) верно равенство

$$\langle X, \theta \rangle = (-1)^m \left[\int_0^\infty \theta^{(m)}(t) S_m(t) \zeta dt - \int_0^\infty \theta^{(m+1)}(t) dt \int_0^t S_m(t-s) BW_Q(s) ds \right].$$

2.2. Решение задачи Коши в случае конволюционных полугрупп в пространстве абстрактных ультрараспределений. Для решения задачи Коши с генератором полугруппы из класса более широкого, чем класс интегрированных полугрупп, требуется более широкое пространство распределений и соответственно более узкое пространство основных функций. Пространство основных функций в теории ультрараспределений – это пространство бесконечно дифференцируемых функций, определенных в терминах оценок их производных, зависящих от некоторой последовательности положительных чисел M_n (см. [21]). Пространство ультрадифференцируемых функций (класса M_n) определяется следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\{M_n\}} := \text{ind} \lim_{\Upsilon \subset \mathbb{R}} (\text{proj} \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{D}_{\{M_n\}, h, \Upsilon}),$$

где $\mathcal{D}_{\{M_n\}, h, \Upsilon}$ – нормированное пространство функций $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ с компактными носителями во множестве Υ , удовлетворяющих оценкам $\|\theta^{(n)}\|_{C(\Upsilon)} \leq CM_n h^n$, и с нормой

$$\|\theta\|_{\{M_n\}, h, \Upsilon} := \sup_n \frac{\|\theta^{(n)}\|_{C(\Upsilon)}}{M_n h^n}.$$

Соответствующее пространство абстрактных ультрараспределений – это пространство $\mathcal{D}'_{\{M_n\}}(H) := \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\{M_n\}}, H)$. В этих пространствах, в отличие от пространств распределений Шварца, определено дифференцирование бесконечного порядка, необходимое для построения оператора G , обратного относительно свертки к оператору P .

Теперь рассмотрим в пространстве абстрактных ультрараспределений задачу Коши (0.2) с оператором A , порождающим k -конволюционную полугруппу $\{S(t), t \geq 0\}$. Соответствующее задаче (0.2) уравнение (2.2) выполняется в этом случае на функциях $\theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$:

$$\langle P * X, \theta \rangle = \langle \delta \otimes \xi, \theta \rangle + B \langle \mathbb{W}_Q, \theta \rangle, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}, \quad (2.7)$$

где последовательность $\{M_n\}$ зависит от свойств оператора A и определяется через функцию M из условий (1.1), (1.2) соотношением $e^{M(|\lambda|)} = \sup_n \frac{M_0 |\lambda|}{M_n}$, а Q -белый шум на функциях $\theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$ определяется равенством (2.1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор A – генератор k -конволюционной полугруппы $S = \{S(t), t \geq 0\}$ в гильбертовом пространстве H , $\mathbb{W}_Q$ – $\mathbb{H}$ -значный Q -белый

шум, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. Тогда обобщенная стохастическая задача Коши (2.7) имеет единственное решение $X \in \mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(L_2(\Omega; [\text{dom } A]))$, определяемое равенством (2.5) на $\theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – генератор конволюционной полугруппы S , то единственное решение G соответствующей (2.7) однородной задачи Коши

$$\langle P * G\zeta, \theta \rangle = \langle \delta \otimes \zeta, \theta \rangle, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}},$$

задается равенством

$$\langle G\zeta, \theta \rangle = \left\langle P_{\text{ult}} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{S}\zeta, \theta \right\rangle = \left\langle \mathbf{S}\zeta, P_{\text{ult}}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \theta \right\rangle, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}},$$

где $\mathbf{S}$ – регулярное ультрасреднение в пространстве $\mathcal{D}'_{\{M_n\}}(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A]))$, определяемое полугруппой S , продолженной нулем при $t < 0$, а ультрадифференциальный оператор $P_{\text{ult}}(d/dt) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j d^j/dt^j)$, действующий в пространстве $\mathcal{D}_{\{M_n\}}(H)$, определяется функцией k следующим образом:

$$\langle P_{\text{ult}}(\delta) * k, \theta \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta^{(j)} * k, \theta \right\rangle = \langle \delta, \theta \rangle, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}.$$

Ультрасреднение G принадлежит пространству $\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A]))$ (см., например, [7], [8]). Теперь для введенного G по аналогии с равенством (2.3) определим стохастическую свертку $G * BW_Q$ следующим образом:

$$\langle G * BW_Q, \theta \rangle := - \int_0^{\infty} S(t) \left\langle BW_Q, P_{\text{ult}}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \theta'(t + \cdot) \right\rangle dt, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}.$$

Заметим, что поскольку

$$G \in \mathcal{D}'_{\{M_n\}}(\mathcal{L}(H, [\text{dom } A])), \quad BW_Q \in \mathcal{D}'_{\{M_n\}}(L_2(\Omega; H)),$$

то стохастическая свертка принадлежит пространству $\mathcal{D}'_{\{M_n\}}(L_2(\Omega; [\text{dom } A]))$. Из свойств ультрасреднения G и свойств стохастической свертки следует, что $X = G\zeta + G * BW_Q$ – единственное решение задачи (2.7), т.е. единственное обобщенное решение задачи (0.2) с $\mathbb{W} = \mathbb{W}_Q$.

§ 3. Стохастическая задача Коши в пространствах гильбертовозначных обобщенных (по ω) случайных величин

3.1. Вероятностное пространство $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ – борелевская σ -алгебра подмножеств $\mathcal{S}'$ – пространства медленно растущих распределений Шварца. По теореме Бохнера–Минлоса (см., например, [10]–[12]) существует гауссовская мера μ на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$, для которой выполнено равенство (0.6). Мера μ называется нормализованной гауссовской мерой на $\mathcal{S}'$, так как для любого набора функций $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathcal{S}'$, ортогональных в $L_2(\mathbb{R})$, случайная величина $\omega \mapsto (\langle \omega, \theta_1 \rangle, \langle \omega, \theta_2 \rangle, \dots, \langle \omega, \theta_n \rangle)$, заданная на вероятностном пространстве $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$, распределена по нормальному закону с плотностью распределения

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2} \right\},$$

что эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} E(f(\langle \cdot, \theta_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, \theta_n \rangle)) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2} \right\} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

для любой функции f , для которой существует интеграл в правой части.

Рассмотрим пространство $(L_2) := L_2(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$. Норму этого пространства будем обозначать через $\|\cdot\|_0$. Из равенства (3.1) следует, что для любого $\theta \in \mathcal{S}$ функция $\langle \cdot, \theta \rangle$ принадлежит пространству (L_2) и $\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_0^2 = E\langle \cdot, \theta \rangle^2 = |\theta|_0^2$. Пользуясь этим равенством, отображение $\theta \mapsto \langle \cdot, \theta \rangle$ можно по непрерывности продолжить с $\mathcal{S}$ на все $L_2(\mathbb{R})$, оставляя в случае $\theta \in L_2(\mathbb{R})$ те же обозначения. При этом соотношение (0.6) остается верным для $\theta \in L_2(\mathbb{R})$, а равенство (3.1) – для $\theta_1, \dots, \theta_n \in L_2(\mathbb{R})$.

Случайный процесс, определенный равенством

$$\beta(t) = \begin{cases} \langle \cdot, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle, & t \geq 0, \\ -\langle \cdot, \mathbf{1}_{[t,0]} \rangle, & t < 0, \end{cases}$$

на вероятностном пространстве $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$, является броуновским движением. Действительно, из равенства

$$\int_{\mathcal{S}'} \exp\{i\langle \omega, \mathbf{1}_{(s,t]} \rangle\} d\mu(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\mathbf{1}_{(s,t]}|_0^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-s)\right\}$$

следует, что $\beta(t) - \beta(s) = \langle \cdot, \mathbf{1}_{(s,t]} \rangle \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Из ортогональности $\mathbf{1}_{(t_1, t_2]}$ и $\mathbf{1}_{(t_3, t_4]}$ в $L_2(\mathbb{R})$ при $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ и равенства (3.1) следует, что это процесс с независимыми приращениями:

$$\begin{aligned} E[(\beta(t_2) - \beta(t_1))(\beta(t_4) - \beta(t_3))] \\ = E[\langle \cdot, \mathbf{1}_{(t_1, t_2]} \rangle \langle \cdot, \mathbf{1}_{(t_3, t_4]} \rangle] = (\mathbf{1}_{(t_1, t_2]}, \mathbf{1}_{(t_3, t_4]})_0 = 0, \end{aligned}$$

а в силу того, что $E(\beta(t) - \beta(s))^2 = t - s$, функция $t \mapsto \beta(t)$ со значениями в (L_2) непрерывна.

Используя разложение функции $\mathbf{1}_{[0,t]}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ в ряд Фурье по функциям Эрмита ξ_i :

$$\mathbf{1}_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(\tau) d\tau \xi_i, \quad (3.2)$$

где

$$\xi_i(x) = \pi^{-1/4}((i-1)!)^{-1/2} e^{-x^2/2} h_{i-1}(\sqrt{2}x), \quad h_i(x) = (-1)^i e^{x^2/2} \frac{d^i}{dx^i} e^{-x^2/2}$$

– многочлены Эрмита, нетрудно показать, что для обобщенного $\mathbb{R}$ -значного случайного процесса $\langle \beta, \theta \rangle := \int_{\mathbb{R}} \beta(t) \theta(t) dt$, $\theta \in \mathcal{S}$, определяемого броуновским движением, имеет место равенство

$$\langle \dot{\beta}, \theta \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \beta(t) \theta'(t) dt = \langle \cdot, \theta \rangle.$$

Это равенство показывает, что на элементы пространства $\mathcal{S}'$ можно смотреть как на траектории белого шума, связанного с броуновским движением $\beta(t)$. В связи с этим вероятностное пространство $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$ называют *пространством белого шума*.

Известно, что стохастические многочлены Эрмита, определяемые равенством

$$\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \omega, \xi_i \rangle), \quad \omega \in \mathcal{S}', \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{T},$$

где $\mathcal{T}$ – множество всевозможных финитных мультииндексов, образуют ортогональный базис в пространстве (L_2) (см., например, [11]–[13]). При этом из равенства (3.1) следует $(\mathbf{h}_\alpha, \mathbf{h}_\beta)_{(L_2)} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$, где $\alpha! = \prod_i \alpha_i!$. Из разложения (3.2) следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ случайная величина $\beta(t) = \langle \cdot, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle$ раскладывается в (L_2) в ряд по стохастическим многочленам Эрмита следующим образом:

$$\langle \cdot, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle = \left\langle \cdot, \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \xi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \langle \cdot, \xi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad (3.3)$$

где $\epsilon_n = (0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, \dots)$. Используя вид коэффициентов этого разложения, в пространстве (L_2) можно построить счетный набор независимых одинаково распределенных броуновских движений (см. [14], [15])

$$\beta_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s) ds \mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}, \quad (3.4)$$

где $n(\cdot, \cdot): \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция такая, что $n(i, j) \geq ij$ при $i, j \in \mathbb{N}$. Действительно, для любого $j \in \mathbb{N}$ случайный процесс $\beta_j(t)$ гауссовский, так как для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место представление $\beta_j(t) = \langle \cdot, \theta_j \rangle$, где

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s) ds \xi_{n(i,j)} \in L_2(\mathbb{R}).$$

При этом

$$E[\beta_j(t)\beta_k(t)] = 0$$

при $j \neq k$, так как наборы мультииндексов $\{\epsilon_{n(i,j)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{\epsilon_{n(i,k)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ при $j \neq k$ не пересекаются. Кроме того,

$$E[\beta_j(t) - \beta_j(s)]^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\int_s^t \xi_i(\tau) d\tau \right)^2 = \|\mathbf{1}_{(s;t]}\|_0^2 = t - s.$$

На основе этой последовательности независимых броуновских движений для произвольного ядерного оператора Q , заданного равенством (0.3) и действующего в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, определим равенством (0.4) $\mathbb{H}$ -значный Q -винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$. Все построения и результаты § 2 остаются верными для данного частного случая, когда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$, однако структура этого вероятностного пространства дает дополнительные возможности исследования, а именно позволяет ввести в рассмотрение пространства $\mathbb{H}$ -значных обобщенных функций по переменной $\omega \in \Omega = \mathcal{S}'$.

3.2. Пространства абстрактных стохастических распределений.

Конструкция пространств абстрактных стохастических распределений аналогична конструкции тройки $(\mathcal{S}) \subset (L_2) \subset (\mathcal{S})^*$, построенной в [12], [13], которая в свою очередь обобщает конструкцию тройки Гельфанда $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$.

Рассмотрим подробнее эти пространства. Пусть $\mathcal{A}$ – дифференциальный оператор $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$. Оператор $\mathcal{A}$ симметрический, обратимый, причем $\mathcal{A}^{-1}$ является оператором Гильберта–Шмидта в $L_2(\mathbb{R})$. Для любого $p \in \mathbb{N}$ положим $\mathcal{S}_p := \{f \in L_2(\mathbb{R}), |f|_p := |\mathcal{A}^p f|_0 < \infty\}$. Пространство $\mathcal{S}_p$ со скалярным произведением $(f, g)_p := (\mathcal{A}^p f, \mathcal{A}^p g)_0$ является сепарабельным гильбертовым пространством. Пусть $\mathcal{S}_{-p} := \mathcal{S}_p^*$. Оно совпадает с пополнением $L_2(\mathbb{R})$ по норме $|f|_{-p} := |\mathcal{A}^{-p} f|_0$. При этом $\mathcal{S} := \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_p$ с топологией проективного предела, а $\mathcal{S}' := \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{-p}$ с топологией индуктивного предела. Кроме того, справедливы вложения

$$\mathcal{S} \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{p+1} \subset \mathcal{S}_p \subset \cdots \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{-p} \subset \mathcal{S}_{-p-1} \subset \cdots \subset \mathcal{S}'.$$

Таким образом, пространство $\mathcal{S}'$ является сопряженным к счетно-гильбертову ядерному пространству $\mathcal{S}$.

Функции Эрмита, образующие ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$, являются собственными функциями оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \xi_i = 2i \xi_i$. Таким образом, для норм в пространствах $\mathcal{S}_p$ получаем представления

$$|f|_p^2 = |\mathcal{A}^p f|_0^2 = \left| \sum_i f_i \xi_i \right|_p^2 = \sum_i f_i^2 (2i)^{2p}.$$

Тройка Гельфанда с центральным элементом – пространством (L_2) – строится с использованием оператора $\Gamma(\mathcal{A})$, определенного на элементах ортогонального базиса $\{\mathbf{h}_\alpha, \alpha \in \mathcal{T}\}$ пространства (L_2) соотношением

$$\Gamma(\mathcal{A})\mathbf{h}_\alpha := \prod_{i=1}^{\infty} (2i)^{\alpha_i} h_{\alpha_i}(\langle \cdot, \xi_i \rangle) = (2\mathbb{N})^\alpha \mathbf{h}_\alpha, \quad \text{где } (2\mathbb{N})^\alpha := \prod_i (2i)^{\alpha_i}.$$

Пусть $(\mathcal{S}_p)$ – подпространство (L_2) , состоящее из всех $f = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, для которых выполнено условие

$$\|f\|_p^2 = \|\Gamma(\mathcal{A})^p f\|_0^2 = \sum_\alpha \alpha! f_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty,$$

и пусть $(\mathcal{S}) := \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_p)$ с топологией проективного предела. Через $(\mathcal{S}_{-p})$, $p \in \mathbb{N}$, обозначим сопряженное к $(\mathcal{S}_p)$ пространство, которое можно отождествить с множеством всех формальных разложений $F = \sum_\alpha F_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, для которых выполнено условие

$$\|F\|_{-p}^2 = \|\Gamma(\mathcal{A})^{-p} F\|_0^2 = \sum_\alpha \alpha! F_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty.$$

Через $(\mathcal{S})^*$ обозначим пространство, сопряженное к $(\mathcal{S})$, т.е. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})$ с топологией индуктивного предела. При этом справедливы вложения

$$(\mathcal{S}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S}_p) \subset \cdots \subset (\mathcal{S}_1) \subset (L_2) \subset (\mathcal{S}_{-1}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S}_{-p}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S})^*.$$

Исходя из понятия белого шума как производной броуновского движения, а также из того, что обобщенные функции – элементы $\mathcal{S}'$ – можно считать траекториями белого шума, становится возможным в построенном пространстве обобщенных случайных величин $(\mathcal{S})^*$ придать смысл значению белого шума в момент t . Обозначим его через $\mathcal{W}(t)$ и определим с помощью формального дифференцирования равенства (3.3):

$$\langle \cdot, \delta_t \rangle = \left\langle \cdot, \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t) \xi_n \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t) \langle \cdot, \xi_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t) \mathbf{h}_{\epsilon_n} =: \mathcal{W}(t).$$

Полученный ряд определяет элемент пространства $(\mathcal{S}_{-1})$. Действительно, в силу известной оценки для функций Эрмита

$$|\xi_n(t)| = O(n^{-1/4}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

имеем $\epsilon_n! \xi_n^2(t) (2\mathbb{N})^{-2\epsilon_n} = \xi_n^2(t) (2n)^{-2} = O(n^{-5/2})$, $n \rightarrow \infty$, откуда следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ $\|\mathcal{W}(t)\|_{-1}^2 < \infty$. Случайный процесс $\mathcal{W}(t)$ со значениями в $(\mathcal{S}_{-1}) \subset (\mathcal{S})^*$ называют сингулярным белым шумом.

В работе [15] построена тройка Гельфанда, где в качестве центрального элемента выступает пространство $(L_2)(\mathbb{H})$ интегрируемых с квадратом по Бохнеру относительно меры μ $\mathbb{H}$ -значных функций, определенных на $\mathcal{S}'$, где $\mathbb{H}$ – некоторое сепарабельное гильбертово пространство. (В частности, $(L_2)(\mathbb{R}) = (L_2)$.) Обозначим через $\|\cdot\|_{0,\mathbb{H}}$ норму этого пространства ($\|\cdot\|_{0,\mathbb{R}} = \|\cdot\|_0$). В силу того, что пространство $(L_2)(\mathbb{H})$ изометрически изоморфно тензорному произведению гильбертовых пространств $(L_2) \otimes \mathbb{H}$, элементы вида $(\mathbf{h}_\alpha \otimes e_j)(\omega) = \mathbf{h}_\alpha(\omega) e_j$, $\alpha \in \mathcal{T}$, $j \in \mathbb{N}$, где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$, образуют ортогональный базис пространства $(L_2)(\mathbb{H})$. Любой $f \in (L_2)(\mathbb{H})$ однозначно представим следующим образом:

$$f = \sum_{\alpha,j} f_{\alpha,j} (\mathbf{h}_\alpha e_j) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{h}_\alpha, \quad f_{\alpha} = \sum_j f_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H}.$$

При этом $\|f\|_{0,\mathbb{H}}^2 = \sum_{\alpha,j} \alpha! f_{\alpha,j}^2 = \sum_{\alpha} \alpha! \|f_{\alpha}\|_{\mathbb{H}}^2$. Например, для Q -винеровского процесса $W_Q(t)$, заданного равенством (0.4), с учетом (3.4) получаем

$$W_Q(t) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \xi_i(s) ds (\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j), \quad W_Q(t) \in (L_2)(\mathbb{H}). \quad (3.6)$$

Пусть $(\mathcal{S})_p(\mathbb{H})$ – подпространство пространства $(L_2)(\mathbb{H})$, состоящее из всех случайных величин $\varphi = \sum_{\alpha,j} \varphi_{\alpha,j} (\mathbf{h}_\alpha e_j) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \mathbf{h}_\alpha \in (L_2)(\mathbb{H})$, где $\varphi_{\alpha} = \sum_j \varphi_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H}$, для которых

$$\|\varphi\|_{p,\mathbb{H}}^2 = \sum_{\alpha,j} \alpha! \varphi_{\alpha,j}^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} = \sum_{\alpha} \alpha! \|\varphi_{\alpha}\|_{\mathbb{H}}^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty.$$

Через $(\mathcal{S})_{-p}(\mathbb{H})$ обозначим сопряженное к $(\mathcal{S})_p(\mathbb{H})$ пространство. Его можно отождествить с множеством всех формальных разложений

$$\Phi = \sum_{\alpha,j} \Phi_{\alpha,j} (\mathbf{h}_\alpha e_j) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \mathbf{h}_\alpha, \quad \text{где } \Phi_{\alpha} = \sum_j \Phi_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H},$$

удовлетворяющих условию

$$\|\Phi\|_{-p, \mathbb{H}}^2 = \sum_{\alpha, j} \alpha! \Phi_{\alpha, j}^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} = \sum_{\alpha} \alpha! \|\Phi_{\alpha}\|_{\mathbb{H}}^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty. \quad (3.7)$$

Через $(\mathcal{S})(\mathbb{H})$ обозначим $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_p)(\mathbb{H})$ с топологией проективного предела, а через $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ – пространство $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$ с топологией индуктивного предела. Для построенных пространств справедливы вложения

$$(\mathcal{S})(\mathbb{H}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S}_{p+1})(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S}_p)(\mathbb{H}) \subset \cdots \subset (L_2)(\mathbb{H}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H}) \\ \subset (\mathcal{S}_{-p-1})(\mathbb{H}) \subset \cdots \subset (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}).$$

В пространстве $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ мы и будем строить обобщенное по ω решение задачи Коши (0.2). Сначала покажем, что этому пространству принадлежат $\mathbb{H}$ -значные цилиндрический винеровский процесс, Q -белый шум и цилиндрический белый шум.

Для цилиндрического винеровского процесса справедливо разложение

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) e_j = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \int_0^t \xi_i(s) ds (\mathbf{h}_{\epsilon_n(i, j)} e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \right) \mathbf{h}_{\epsilon_n},$$

где $i(n), j(n) \in \mathbb{N}$ такие, что $n(i(n), j(n)) = n$. В силу известной оценки

$$\left\| \int_0^t \xi_i(s) ds \right\|_{\mathbb{H}}^2 = \left| \int_0^t \xi_i(s) ds \right|^2 = O(i^{-3/2}), \quad i \rightarrow \infty,$$

имеем

$$\|W(t)\|_{-1, \mathbb{H}}^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \left| \int_0^t \xi_i(s) ds \right|^2 (2n(i, j))^{-2} \leq \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \left| \int_0^t \xi_i(s) ds \right|^2 \frac{1}{(2ij)^2} < \infty.$$

Таким образом, $W(t) \in (\mathcal{S}_{-1})(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$.

Разложение $\mathbb{H}$ -значного Q -белого шума получается формальным дифференцированием ряда (3.6):

$$\mathbb{W}_Q(t) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t) (\mathbf{h}_{\epsilon_n(i, j)} e_j) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{j(n)} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) \mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)}.$$

В силу условия $n(i, j) \geq ij$ и оценки (3.5) имеем

$$\sigma_j^2 \xi_i^2(t) (2n(i, j))^{-2} = O(\sigma_j^2 \cdot j^{-2} \cdot i^{-5/2}).$$

Отсюда

$$\|\mathbb{W}_Q(t)\|_{-1, \mathbb{H}}^2 = \sum_{i, j} \sigma_j^2 \xi_i^2(t) (2n(i, j))^{-2} < \infty \\ \implies \mathbb{W}_Q(t) \in (\mathcal{S}_{-1})(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}).$$

Аналогично, в силу оценки $\xi_i^2(t) (2n(i, j))^{-2} = O(j^{-2} \cdot i^{-5/2})$ сингулярный цилиндрический белый шум, для которого имеет место разложение

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \xi_i(t) (\mathbf{h}_{\epsilon_n(i, j)} e_j) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) \mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad (3.8)$$

также принадлежит пространству $(\mathcal{S}_{-1})(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

3.3. Решение задачи Коши с белым шумом в пространствах абстрактных стохастических распределений. Нетрудно доказать следующее утверждение, характеризующее сильную сходимость в пространстве $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$.

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi_n = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{(n)} \mathbf{h}_{\alpha}$, $\Phi = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится к Φ сильно (т.е. $\langle \Phi_n, \phi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \Phi, \phi \rangle$ равномерно на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})(\mathbb{H})$);
- (ii) существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $\Phi_n \in (\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in (\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{-p} = 0$;
- (iii) последовательность $\{\Phi_n\}$ содержится в некотором пространстве $(\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$, ограничена по норме $\|\cdot\|_{-p}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{\alpha}^{(n)} - \Phi_{\alpha}\|_{\mathbb{H}} = 0$ для любого $\alpha \in \mathcal{T}$.

Пусть $\Phi(t) \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Элемент $\Theta \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ будем называть производной $\Phi(t)$ в точке $t \in \mathbb{R}$, если

$$\frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{s - t} \xrightarrow{s \rightarrow t} \Theta =: \Phi'(t)$$

сильно в $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$. Отсюда и из леммы 1 следует

ЛЕММА 2. Производная $\Phi'(t)$ существует, если и только если существуют $p \in \mathbb{N}$, $\delta, M > 0$ такие, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$|t - s| < \delta \implies \|\Phi(t) - \Phi(s)\|_{-p} \leq M|t - s|$$

и для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ существует

$$\Phi'_{\alpha}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\Phi_{\alpha}(s) - \Phi_{\alpha}(t)}{s - t}$$

в пространстве $\mathbb{H}$. При этом $\Phi'(t) = \sum_{\alpha} \Phi'_{\alpha}(t) \mathbf{h}_{\alpha}$.

Отметим важные равенства

$$W'_Q(t) = \mathbb{W}_Q(t), \quad W'(t) = \mathbb{W}(t).$$

Функцию $\Phi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ будем называть интегрируемой на измеримом множестве $C \subseteq \mathbb{R}$, если существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$ для любого $t \in C$ и Φ интегрируема по Бохнеру на C как функция со значениями в гильбертовом пространстве $(\mathcal{S}_{-p})(\mathbb{H})$.

Из равенства (3.7), определяющего норму $\|\cdot\|_{-p, \mathbb{H}}$, следует, что для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ справедлива оценка

$$\|\Phi_{\alpha}\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \frac{(2N)^{2p\alpha}}{\alpha!} \|\Phi\|_{-p, \mathbb{H}}^2,$$

из которой следует, что если $\Phi(t) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(t) \mathbf{h}_{\alpha}$ интегрируема на C , то для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ функция $\Phi_{\alpha}(t)$ интегрируема на C по Бохнеру как $\mathbb{H}$ -значная функция. Кроме того, справедливо следующее достаточное условие интегрируемости.

ЛЕММА 3. Если $\mathbb{H}$ -значная функция $\Phi_\alpha(t)$ для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ интегрируема на C по Бохнеру и

$$\sum_{\alpha} \left(\int_C \|\Phi_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}} dt \right)^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$$

для некоторого $p \in \mathbb{N}$, то $\Phi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ интегрируема на C и

$$\int_C \Phi(t) dt = \sum_{\alpha} \int_C \Phi_\alpha(t) dt \mathbf{h}_\alpha.$$

В дальнейшем при рассмотрении стохастической свертки мы будем использовать интегралы вида $\int_0^t \Psi(s) \mathbb{W}_Q(s) ds$ и $\int_0^t \Psi(s) \mathbb{W}(s) ds$, где $\{\Psi(s), s \geq 0\}$ – семейство операторов из $\mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. Эти интегралы будем рассматривать в пространстве $(\mathcal{S})^*(H)$, которое определим аналогично $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$, зафиксировав в H некоторый ортонормированный базис $\{g_k\}$ и используя его в роли $\{e_j\}$.

Покажем, что если $\Psi(s)$ удовлетворяет условию (1.5), где

$$\|\Psi(s)\|_{HS^0}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\Psi(s) Q^{1/2} e_j\|^2,$$

то интеграл

$$\int_0^t \Psi(s) \mathbb{W}_Q(s) ds = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi(s) e_j \xi_i(s) ds \mathbf{h}_{\epsilon_n(i,j)}$$

определяет элемент пространства $(L_2)(H)$. Это следует из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j^2 \left\| \int_0^t \Psi(s) e_j \xi_i(s) ds \right\|_H^2 &= \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sigma_j^2 \left(\int_0^t \Psi(s) e_j \xi_i(s) ds, g_k \right)_H^2 \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\int_0^t \xi_i(s) (\sigma_j \Psi(s) e_j, g_k)_H ds \right)^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \|\mathbf{1}_{[0,t]}(\sigma_j \Psi(\cdot) e_j, g_k)_H\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \int_0^t |(\Psi(s) Q^{1/2} e_j, g_k)_H|^2 ds = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{N}} (\Psi(s) Q^{1/2} e_j, g_k)_H^2 ds \\ &= \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\Psi(s) Q^{1/2} e_j\|_H^2 ds = \int_0^t \|\Psi(s)\|_{HS^0}^2 ds. \end{aligned}$$

При этом имеет место равенство

$$\int_0^t \Psi(s) \mathbb{W}_Q(s) ds = \int_0^t \Psi(s) dW_Q(s).$$

Аналогично, если $\Psi(s)$ удовлетворяет условию (1.5), где $\|\cdot\|_{HS^0}$ – норма пространства операторов Гильберта–Шмидта из $\mathbb{H}$ в H , то $\int_0^t \Psi(s) \mathbb{W}(s) ds$ определяет элемент пространства $(L_2)(H)$, который в этом случае совпадает с интегралом $\int_0^t \Psi(s) dW(s)$.

Для того чтобы решить стохастически возмущенное белым шумом дифференциально-операторное уравнение (0.2) в пространствах абстрактных стохастических распределений, сначала определим действие в этих пространствах его операторных коэффициентов.

Для $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$ положим $B\Phi := \sum_{\alpha} B\Phi_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha}$ для любого $\Phi = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$. Нетрудно проверить, что правая часть этого равенства определяет элемент пространства $(\mathcal{S})^*(H)$ и определенный таким образом оператор B является линейным непрерывным оператором, действующим из $(\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ в $(\mathcal{S})^*(H)$.

Для линейного замкнутого оператора A , действующего в H , зададим его область определения $(\text{dom } A)$ в $(\mathcal{S})^*(H)$ как множество всех $\Phi = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} \in (\mathcal{S})^*(H)$ таких, что $\Phi_{\alpha} \in \text{dom } A$ для любого $\alpha \in \mathcal{I}$ и для некоторого $p \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\sum_{\alpha} \alpha! \|A\Phi_{\alpha}\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$. Для $\Phi \in (\text{dom } A)$ положим $A\Phi := \sum_{\alpha} A\Phi_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha}$. Нетрудно проверить, что определенный таким образом оператор A – линейный замкнутый оператор в $(\mathcal{S})^*(H)$.

Рассмотрим в пространстве $(\mathcal{S})^*(H)$ задачу Коши (0.2) с белым шумом, заданным равенством (3.8). Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – генератор полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0 в гильбертовом пространстве H , $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, $\mathbb{W}$ – белый шум, заданный равенством (3.8). Тогда

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s) ds$$

– единственное решение задачи Коши (0.2) в пространстве $(\mathcal{S})^*(H)$ для любого $\zeta \in (\text{dom } A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$X(t) = \sum_{\alpha} X_{\alpha}(t) \mathbf{h}_{\alpha} \in (\mathcal{S})^*(H), \quad \zeta = \sum_{\alpha} \zeta_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} \in (\text{dom } A).$$

Процесс $X(t)$ является решением задачи (0.2) тогда и только тогда, когда коэффициенты $X_{\alpha}(t) \in H$ являются решениями задач Коши

$$\begin{aligned} X'_{\epsilon_n}(t) &= AX_{\epsilon_n}(t) + B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(t), & X_{\epsilon_n}(0) &= \zeta_{\epsilon_n} & \text{при } \alpha &= \epsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}; \\ X'_{\alpha}(t) &= AX_{\alpha}(t), & X_{\alpha}(0) &= \zeta_{\alpha} & \text{при } \alpha &\neq \epsilon_n. \end{aligned}$$

В силу корректности этих задач каждая из них имеет единственное решение

$$X_{\alpha}(t) = \begin{cases} S(t)\zeta_{\epsilon_n} + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(s) ds, & \alpha = \epsilon_n, \\ S(t)\zeta_{\alpha}, & \alpha \neq \epsilon_n. \end{cases}$$

Из оценки

$$\int_0^t \|S(t-s)B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(s)\|_H ds \leq M\|B\| \int_0^t e^{a(t-s)} |\xi_{i(n)}(s)| ds \leq M_1\|B\|e^{at},$$

где $M > 0$ и $a > 0$ такие, что $\|S(t)\| \leq Me^{at}$ при $t \geq 0$, следует, что при $p \geq 1$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_0^t \|S(t-s)B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(s)\|_H ds \right)^2 (2\mathbb{N})^{-2p\epsilon_n} < \infty.$$

В силу предложения 3 отсюда следует существование в пространстве $(\mathcal{S})^*(H)$ интеграла $\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds$, что и доказывает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Тот факт, что обобщенное по t решение удалось построить для задачи (0.1) с генератором интегрированной полугруппы и Q -белым шумом в качестве неоднородности, а решение, обобщенное по ω , — для задачи с сингулярным белым шумом, но с генератором полугруппы класса C_0 , приводит к идее построения решений, обобщенных по совокупности переменных, для задачи Коши с белым шумом и с генераторами полугрупп с особенностями. В случае абстрактной стохастической задачи Коши с генераторами интегрированных полугрупп можно построить последовательность распределений X_k , сходящихся в пространстве $\mathcal{D}'_0((S_{-1})(\mathbb{H}))$ к обобщенному по t и ω решению, как решения уравнения (2.2) со стохастической неоднородностью $\mathbb{W}_k$, равной конечной сумме ряда (3.8), вместо сингулярного белого шума. В случае генераторов R -полугрупп решения, обобщенные по переменной t и “переменной оператора A ”, можно построить, рассматривая вместо пространства H пространства обобщенных функций Иванова (см. [22]), в которых ограничен оператор R^{-1} . В настоящей работе, чтобы не увеличивать ее объем, мы не реализуем эти идеи в деталях. Некоторые подходы к определению обобщенных случайных процессов по совокупности переменных описаны в [23].

Список литературы

- [1] А. В. Балакришнан, *Прикладной функциональный анализ*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: A. V. Balakrishnan, *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [2] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [3] D. Filipović, “Consistency problems for Heath–Jarrow–Morton interest rate models”, *Lecture Notes in Math.*, **1760**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [4] I. Ekeland, E. Taflin, “A theory of bond portfolios”, *Ann. Appl. Probab.*, **15**:2 (2005), 1260–1305.
- [5] И. В. Мельникова, А. И. Филинков, “Слабые и обобщенные решения абстрактных стохастических уравнений”, *Докл. РАН*, **375**:4 (2000), 443–447; англ. пер.: I. V. Melnikova, A. I. Filinkov, “Weak and generalized solutions of abstract stochastic equations”, *Dokl. Math.*, **62**:3 (2000), 373–377.
- [6] I. V. Melnikova, A. Filinkov, “Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups”, *Commun. Appl. Anal.*, **13**:2 (2009), 195–212.
- [7] I. V. Melnikova, “Regularized solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **17**:2–3 (2006), 185–191.
- [8] У. А. Ануфриева, И. В. Мельникова, “Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами”, *Дифференциальные уравнения и теория полугрупп*, СМФН, **14**, РУДН, М., 2005, 3–156; англ. пер.: I. V. Melnikova, U. A. Anufrieva, “Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **148**:4 (2008), 481–632.
- [9] I. V. Melnikova, A. Filinkov, *Abstract Cauchy problems: three approaches*, Chapman Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **120**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2001.

- [10] Р. А. Минлос, “Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры”, Тр. ММО, **8**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1959, 497–518; англ. пер.: R. A. Minlos, “Generalized random processes and their extension to a measure”, *Selected Transl. Math. Statist. and Prob.*, **3** (1963), 291–313.
- [11] Т. Хида, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: Т. Hida, *Brownian motion*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.
- [12] Н.-Н. Kuo, *White noise distribution theory*, Probab. Stochastics Ser., CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [13] Н. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, T. Zhang, *Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach*, Probab. Appl., Birkhäuser, Basel, 1996.
- [14] А. Filinkov, J. Sorensen, “Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions”, *Stoch. Stoch. Rep.*, **72**:3–4 (2002), 129–173.
- [15] И. В. Мельникова, А. И. Filinkov, М. А. Alshansky, “Abstract stochastic equations. II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **116**:5 (2003), 3620–3656.
- [16] I. Cioranescu, “Local convoluted semigroups”, *Evolution equations* (Baton Rouge, LA, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **168**, Marcel Dekker, New York, 1995, 107–122.
- [17] N. Tanaka, N. Okazawa, “Local C -semigroups and local integrated semigroups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **61**:1 (1990), 63–90.
- [18] В. Кеч, П. Теодореску, *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*, Мир, М., 1978; пер. с англ.: W. Kecs, P. P. Teodorescu, *Applications of the theory of distributions in mechanics*, Editura Academiei, Bucuresti, 1974.
- [19] Н. О. Fattorini, *The Cauchy problem*, Encyclopedia Math. Appl., **18**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
- [20] И. В. Мельникова, М. А. Альшанский, “Обобщенная корректность задачи Коши и интегрированные полугруппы”, *Докл. РАН*, **343**:4 (1995), 448–451; англ. пер.: I. V. Mel’nikova, M. A. Al’shanskij, “Generalized correctness of the Cauchy problem and integrated semigroups”, *Dokl. Math.*, **52**:1 (1995), 57–60.
- [21] Н. Komatsu, “Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **20**:1 (1973), 25–105.
- [22] В. К. Иванов, И. В. Мельникова, “Новые обобщенные функции и слабая корректность операторных задач”, *Докл. АН СССР*, **317**:1 (1991), 22–26; англ. пер.: V. K. Ivanov, I. V. Mel’nikova, “New generalized functions and weak well-posedness of operator problems”, *Soviet Math. Dokl.*, **43**:2 (1991), 315–319.
- [23] S. Pilipović, D. Seleži, “Structure theorems for generalized random processes”, *Acta Math. Hungar.*, **117**:3 (2007), 251–274.

М. А. Альшанский (M. A. Alshanskiy)

Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
E-mail: mxa2@yandex.ru

Поступила в редакцию

29.01.2010 и 02.02.2011

И. В. Мельникова (I. V. Melnikova)

Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
E-mail: Irina.Melnikova@usu.ru