Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, Сходимость рядов наипростейших дробей
в $L_p(\mathbb{R})$, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 10, 87–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:14:55

УДК 517.538.52+517.444

И. Р. Каюмов

Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$

Для $p > 1$ найдено необходимое и достаточное условие сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-z_k}$ в случае, когда $|z_k| < C|y_k|$.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, неравенство Харди, преобразование Фурье, ряды Дирихле.

§ 1. Введение

Пусть f – алгебраический многочлен степени n с нулями в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$. *Наипростейшей дробью* называется логарифмическая производная многочлена f :

$$g_n(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}.$$

Эти дроби обладают рядом интересных свойств, которые привлекают внимание специалистов по комплексному анализу. Подробные исторические сведения о наипростейших дробях изложены в недавно опубликованных работах В. Ю. Протасова [1], В. И. Данченко [2] и П. А. Бородина [3], и мы на этом останавливаться не будем.

В настоящей работе мы предполагаем, что $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$.

В работе [1] Протасовым исследована сходимость наипростейших дробей. В частности, им доказано, что если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|y_k|^{1/q}} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1)$$

то функциональный ряд

$$g_{\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Протасовым поставлена задача нахождения необходимых и достаточных условий сходимости ряда g_{∞} и показано, что в случае, когда все точки z_k лежат в угле $\{|z| \leq C|y|\}$ с фиксированным C , необходимым условием сходимости ряда g_{∞} является выполнение неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|y_k|^{1/q+\varepsilon}} < +\infty. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00762-а, № 09-01-12188-офи-м).

Таким образом, достаточное условие (1) весьма близко к необходимому условию (2).

Основной целью настоящей работы является получение достаточного условия сходимости типа (1), которое будет являться также необходимым условием, в предположении, что все полюсы z_n лежат в некотором угле $\{|z| \leq C|y|\}$ с фиксированным C . Таковым условием оказалось выполнение неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < +\infty. \quad (3)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 1$. Если выполнено условие (3), то ряд

$$g_{\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Обратно, если этот ряд сходится в $L_p(\mathbb{R})$, последовательность $|y_n|$ упорядочена по возрастанию и $|z_k| \leq C|y_k|$, то выполнено условие (3).

Условие сходимости (3) хотя и близко к (1), но не следует из него. В самом деле, рассмотрим последовательность $y_k = k^q \ln^q(k+1)$. Для нее ряд (3) сходится, а ряд (1) – нет. Попытка применить неравенство Гёльдера к (1) с целью получить (3) как раз и дает тот самый “логарифмический зазор”, который не позволяет “замкнуть” условие сходимости (1).

При помощи преобразования Гильберта Протасовым в [1] показано, что сходимости рядов

$$g_{\infty}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{t - z_n} \right) \right|$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равносильны. Следовательно, сходимость ряда g_{∞} в $L_p(\mathbb{R})$ эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{(t - x_n)^2 + y_n^2}$$

в этом же пространстве.

Это значит, что при доказательстве сходимости ряда g_{∞} можно считать, что все $y_n > 0$. В формулировках результатов мы не будем делать такое предположение.

§ 2. Доказательство основного результата

Прежде чем приступить к доказательству приведенного выше результата, напомним два классических неравенства (теоремы 326, 331, 344 из хорошо известной монографии [4]).

НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ. Пусть $s > 1$, $a_n \geq 0$, $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n} \right)^s \leq \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \sum_{n=1}^{\infty} a_n^s. \quad (4)$$

Дополнительным (в некотором смысле) к неравенству Харди является следующее неравенство.

НЕРАВЕНСТВО КОПСОНА. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда в случае $s \geq 1$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_j \right)^s \leq s^s \sum_{n=1}^{\infty} (na_n)^s, \quad (5)$$

а в случае $0 < s \leq 1$ выполнено обратное неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_j \right)^s \geq s^s \sum_{n=1}^{\infty} (na_n)^s. \quad (6)$$

Нам также понадобятся две леммы, которые играют ключевую роль при доказательстве результатов настоящей статьи.

ЛЕММА 1. Для любого натурального p имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right|^p dt \leq \pi p! (p-1)! \sum_{k=1}^n \left| \frac{k}{y_k} \right|^{p-1}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая, что $y_k > 0$, распишем степень подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_{k_1}}{(t - x_{k_1})^2 + y_{k_1}^2} \frac{y_{k_2}}{(t - x_{k_2})^2 + y_{k_2}^2} \cdots \frac{y_{k_p}}{(t - x_{k_p})^2 + y_{k_p}^2} dt \\ &\leq p! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_{k_1}}{(t - x_{k_1})^2 + y_{k_1}^2} \frac{y_{k_2}}{(t - x_{k_2})^2 + y_{k_2}^2} \cdots \frac{y_{k_p}}{(t - x_{k_p})^2 + y_{k_p}^2} dt \\ &\leq p! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_{k_1}}{y_{k_1}^2} \frac{y_{k_2}}{y_{k_2}^2} \cdots \frac{y_{k_{p-1}}}{y_{k_{p-1}}^2} \frac{y_{k_p}}{(t - x_{k_p})^2 + y_{k_p}^2} dt \\ &= p! \pi \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p} \frac{1}{y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_{p-1}}} = p! \pi \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{p-1}} \frac{k_{p-1}}{y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_{p-1}}} \\ &= p! \pi \sum_{k_1=1}^n \frac{1}{y_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-3}} \frac{1}{y_{k_{p-2}}} \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{k_{p-1}}{y_{k_{p-1}}}. \end{aligned}$$

В этих выкладках индексы суммирования $k_1, k_2, \dots, k_p$ изменяются от 1 до n ; при $p = 1$ последняя сумма равна $n\pi$, а при $p = 2$ эта сумма равна $2\pi \sum_{k=1}^n k/y_k$.

Ясно, что для доказательства (7) достаточно показать, что имеет место неравенство

$$\sum_{k_1=1}^n \frac{1}{y_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-3}} \frac{1}{y_{k_{p-2}}} \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{k_{p-1}}{y_{k_{p-1}}} \leq (p-1)! \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{y_k} \right)^{p-1}, \quad (8)$$

которое мы докажем методом математической индукции. Случай $p = 2$ тривиален. Докажем неравенство (8) для случая $p = 3$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^n \frac{1}{y_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{k_2}{y_{k_2}} &= \sum_{k_1=1}^n \frac{k_1}{y_{k_1}} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{k_2}{y_{k_2}} \leq \sqrt{\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^2}{y_{k_1}^2} \sum_{k_1=1}^n \frac{1}{k_1^2} \left(\sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{k_2}{y_{k_2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^2}{y_{k_1}^2}} \sqrt{\sum_{k_1=1}^n \frac{1}{k_1^2} \left(\sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{k_2}{y_{k_2}} \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^2}{y_{k_1}^2}} \sqrt{2^2 \sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^2}{y_{k_1}^2}} = 2 \sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^2}{y_{k_1}^2}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы применили неравенство Харди (4) для параметра $s = 2$ и коэффициентов $a_k = k/y_k$. Неравенство (8) для $p = 3$ доказано.

Теперь, предполагая справедливость неравенства (8) для $r = p$, докажем его для случая $r = p + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^n \frac{1}{y_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{1}{y_{k_{p-1}}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p}{y_{k_p}} \\ &= \sum_{k_1=1}^n \frac{k_1}{y_{k_1}} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{1}{y_{k_{p-1}}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p}{y_{k_p}} \\ &\leq \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^\alpha}{y_{k_1}^\alpha} \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{1}{k_1^\beta} \left(\sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{1}{y_{k_{p-1}}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p}{y_{k_p}} \right)^\beta \right)^{1/\beta} \\ &\leq \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^\alpha}{y_{k_1}^\alpha} \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{1}{k_1^\beta} \left((p-1)! \sum_{k=1}^{k_1} \left(\frac{k}{y_k} \right)^{p-1} \right)^\beta \right)^{1/\beta} \\ &= (p-1)! \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^\alpha}{y_{k_1}^\alpha} \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{k_1=1}^n \left(\frac{1}{k_1} \sum_{k=1}^{k_1} \left(\frac{k}{y_k} \right)^{p-1} \right)^\beta \right)^{1/\beta} \\ &\leq (p-1)! \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{k_1^\alpha}{y_{k_1}^\alpha} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{\beta^\beta}{(\beta-1)^\beta} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{y_k} \right)^{(p-1)\beta} \right)^{1/\beta}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы применили неравенство Харди (4) для параметра $s = \beta$ и коэффициентов $a_k = (k/y_k)^{p-1}$. Полагая $\alpha = p$, $\beta = p/(p-1)$, получаем неравенство

$$\sum_{k_1=1}^n \frac{1}{y_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{y_{k_2}} \cdots \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} \frac{1}{y_{k_{p-1}}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p}{y_{k_p}} \leq p(p-1)! \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{y_k} \right)^p,$$

которое доказывает (8), а вместе с ним и лемму 1.

Положим

$$\gamma_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2 + 1)^s} dt \right)^{1/s} = \left(\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \right)^{1/s},$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

ЛЕММА 2. Для любого $p \geq 2$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right|^p dt \leq C_p \sum_{k=1}^n \left| \frac{k}{y_k} \right|^{p-1}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \leq 2^{p-1} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^j \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt. \end{aligned}$$

Здесь было использовано классическое неравенство $(a+b)^\alpha \leq 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$, справедливое для всех положительных a, b и α .

Используя тривиальное неравенство

$$\frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \leq \frac{1}{y_k},$$

оценим интеграл I_2 :

$$I_2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} dt = \pi \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1}. \quad (10)$$

Неравенство Копсона (5) дает следующую оценку:

$$I_2 \leq \pi(p-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n \frac{j^{p-1}}{y_j^{p-1}}. \quad (11)$$

Для оценки величины I_1 используем неравенство Гёльдера с параметрами $\alpha = m/(m+1-p)$, $\beta = m/(p-1)$, где m – целая часть p :

$$I_1 \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \right)^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^j \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{(p-1)\beta} dt \right)^{1/\beta}.$$

Далее, лемма 1 и неравенство Гёльдера влекут следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \sum_{j=1}^n \gamma_\alpha y_j^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^j \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^m dt \right)^{(p-1)/m} \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \gamma_\alpha \left(\frac{1}{y_j} \right)^{(p-1)/m} \left(\pi m! (m-1)! \sum_{k=1}^j \left(\frac{k}{y_k} \right)^{m-1} \right)^{(p-1)/m} \\
 &= C(m, p) \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{(p-1)/m} \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \left(\frac{k}{y_k} \right)^{m-1} \right)^{(p-1)/m} \\
 &\leq C(m, p) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{\alpha_1(p-1)/m} \right)^{1/\alpha_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \left(\frac{k}{y_k} \right)^{m-1} \right)^{\beta_1(p-1)/m} \right)^{1/\beta_1}.
 \end{aligned}$$

Полагая $\alpha_1 = m$, $\beta_1 = m/(m-1)$, получаем неравенство

$$I_1 \leq C(m, p) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{(p-1)} \right)^{1/m} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \left(\frac{k}{y_k} \right)^{m-1} \right)^{(p-1)/(m-1)} \right)^{(m-1)/m}.$$

Применим теперь неравенство Харди (4) для $s = (p-1)/(m-1)$ и $a_k = (k/y_k)^{m-1}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq C(m, p) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{(p-1)} \right)^{1/m} \left(s^s (s-1)^{-s} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{p-1} \right)^{(m-1)/m} \\
 &= C_1(m, p) \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{y_j} \right)^{(p-1)}.
 \end{aligned}$$

Полученная оценка вместе с (11) доказывает (9). Лемма 2 доказана.

Лемма 2 позволяет доказать теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем считать, что все y_k положительны.

Как показано Протасовым в [1], если ряд g_∞ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то он сходится безусловно, т.е. сходится при любой перестановке его членов. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность y_n упорядочена по возрастанию. Это хорошо согласуется с условием (3), т.е. если это условие выполнено для некоторой последовательности y_n , то после упорядочивания этой последовательности по возрастанию вышеуказанное неравенство сохранится.

Докажем теперь первую часть теоремы 1 для случая $p \in (1, 2)$.

Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \leq I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^j \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt.$$

Здесь было использовано классическое неравенство $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$, справедливое для всех положительных a, b и $\alpha \in [0, 1]$. Как и при доказательстве леммы 2, интеграл I_2 оценивается так:

$$I_2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} dt = \pi \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1}. \quad (12)$$

Для оценки интеграла I_1 , используем неравенство Гёльдера с параметрами $\alpha = 1/(2-p)$, $\beta = 1/(p-1)$. Имеем

$$I_1 \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \right)^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^j \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^{(p-1)\beta} dt \right)^{1/\beta}.$$

Полученные интегралы легко вычисляются, и мы приходим к следующей оценке:

$$I_1 \leq \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{1/(2-p)}}{y_j^{p-1}} \pi^{p-1} j^{p-1} = \pi^{p-1} \gamma_{1/(2-p)} \sum_{j=1}^n \frac{j^{p-1}}{y_j^{p-1}}.$$

Применяя неравенство Копсона (6) для последовательности $a_k = 1/y_k$, получаем неравенство

$$I_1 \leq \pi^{p-1} \gamma_{1/(2-p)} (p-1)^{-(p-1)} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1}.$$

Это неравенство вместе с (12) дает нам следующую оценку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \leq C_p \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n \frac{1}{y_k} \right)^{p-1}.$$

Отсюда сразу следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=m}^n \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt < \varepsilon, \quad n > m > N. \quad (13)$$

Последний факт вытекает из того, что условие (3) влечет сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{y_k} \right)^{p-1}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=2^s j}^{2^{s+1}j} \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=2^s j}^{2^{s+1}j} \frac{1}{y_{2^s j}} \right)^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s j}{y_{2^s j}} \right)^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{2^s j}{y_{2^s j}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Последний ряд можно разбить на два ряда: один ряд по нечетным j , а другой – по четным. В силу монотонности последовательности y_k эти ряды будут сравнимы, т.е. они будут сходиться или расходиться одновременно. Ряд по нечетным j , очевидно, совпадает с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} (k/y_k)^{p-1}$, что в силу условия (3) влечет выполнение (13).

Оценка (13) означает, что последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2}$$

фундаментальна в $L_p(\mathbb{R})$. Отсюда в силу полноты $L_p(\mathbb{R})$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{(t - x_n)^2 + y_n^2}$$

в этом же пространстве. Это в силу вышеприведенного результата Протасова и доказывает первую часть теоремы 1 в случае, когда $1 < p < 2$.

Докажем теперь первую часть теоремы 1 для случая $p \geq 2$.

Из леммы 2 и условия (3) следует фундаментальность последовательности S_n в $\mathbb{R}$. В самом деле,

$$\|S_m - S_n\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=m}^n \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \leq C_p \sum_{k=m}^n \left| \frac{k}{y_k} \right|^{p-1}.$$

Так как ряд (3) сходится, то последнее неравенство доказывает фундаментальность S_n . Теперь из полноты пространства $L_p(\mathbb{R})$ вытекает первая часть теоремы 1.

Докажем теперь вторую часть теоремы 1. В этом случае можно предполагать, что все $x_k = 0$. Это следует из того, что

$$\frac{t^2 + y_k^2}{2 + C^2} \leq (t - x_k)^2 + y_k^2 \leq (2 + C^2)(t^2 + y_k^2)$$

для всех t , x_k и y_k таких, что $|z_k| \leq C y_k$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^p dt &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_j}^{y_j} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \geq \sum_{j=1}^{\infty} 2y_j \frac{y_j}{y_j^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{y_k}{y_k^2 + y_k^2} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

$$= 2^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} \geq 2^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{2j} \frac{1}{y_{2j}} \right)^{p-1} = 2^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_{2j}^{p-1}}.$$

Отсюда сразу заключаем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_{2j}^{p-1}}$$

сходится. Следовательно, в силу монотонности y_n должен сходиться и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_j^{p-1}}.$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 1 можно вывести тот факт, что условие (3) может быть заменено условием

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{|y_k|} \right)^{p-1} < +\infty.$$

Хотя условие (3) выглядит проще, в некоторых ситуациях последнее условие предпочтительнее.

§ 3. Наипростейшие дроби и ряды Дирихле на $\mathbb{R}_+$

Рассмотрим конечную сумму Дирихле на $\mathbb{R}_+$:

$$D_n(t) = \sum_{k=1}^n \exp(tw_k).$$

Естественно предположить, что $\operatorname{Re} w_k < 0$, для того чтобы этот полином принадлежал $L_p(\mathbb{R}_+)$, $p > 0$.

Имеется простая связь между наипростейшими дробями на $\mathbb{R}$ и многочленами вида $D_n(t)$. Будем считать, что $D_n(t) = 0$ в $\mathbb{R}_-$. Преобразование Фурье функции $D(t)$ дает наипростейшую дробь, умноженную на $i/\sqrt{2\pi}$:

$$\widehat{D}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} D_n(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda t} D_n(t) dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda + iw_k}.$$

Таким образом, мы видим, что преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между наипростейшими дробями $g(t)$, у которых все $y_k > 0$, и конечными рядами Дирихле $D_n(t)$ с $\operatorname{Re} w_k < 0$.

Как было отмечено выше, Протасовым была поставлена задача о нахождении необходимых и достаточных условий сходимости ряда g_{∞} в $L_p(\mathbb{R})$ в терминах последовательности z_k . Естественно, такую же задачу можно сформулировать и для сходимости ряда

$$D_{\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(tw_k), \quad w_k = u_k + iv_k, \quad u_k < 0,$$

в $L_q(\mathbb{R}_+)$, тем более, что в силу теоремы Планшереля эти задачи эквивалентны в случае $p = q = 2$.

Базовым результатом в этой задаче является следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для сходимости ряда D_∞ в $L_1(\mathbb{R}_+)$ необходима сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w_k}$$

и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k}.$$

Доказательство этого утверждения легко вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w_k} \right| = \left| \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{w_k t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{w_k t} \right| dt \leq \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |e^{w_k t}| dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|u_k|}.$$

Из этого утверждения видно, что если ограничиться углом $|w_k| \leq C|u_k|$, то числа v_k не влияют на сходимость ряда D_∞ , так же как и числа x_k не влияют на сходимость ряда g_∞ , что было ранее замечено Протасовым.

По рядам Дирихле имеется большое количество результатов (см. например, монографию А. Ф. Леонтьева [5]). Насколько известно автору, вопрос сходимости рядов Дирихле в $L_p(\mathbb{R}_+)$ еще не изучался.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $q \geq 1$. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{q-1}}{|u_k|} < \infty, \quad (14)$$

то ряд D_∞ сходится в $L_q(\mathbb{R}_+)$. Обратно, если ряд D_∞ сходится в $L_q(\mathbb{R}_+)$, последовательность $|u_n|$ упорядочена по возрастанию и $v_k = 0$ для всех k , то выполнено условие (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из легко проверяемых неравенств

$$1 + qx \leq (1 + x)^q \leq 1 + q2^{q-1}x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

следует, что

$$a^q + qa^{q-1}b \leq (a + b)^q \leq a^q + q2^{q-1}a^{q-1}b, \quad 0 \leq b \leq a. \quad (15)$$

Зафиксируем два натуральных числа $m < n$ и упорядочим числа $u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ по убыванию. Полученные числа обозначим через u_k^* . Полагая

$$a = \sum_{k=m}^{n-1} e^{u_k^* t}, \quad b = e^{u_n^* t}$$

и применяя (15), получаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^n e^{u_k t} \right|^q dt &= \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^n e^{u_k^* t} \right|^q dt \\
 &\leq \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^{n-1} e^{u_k^* t} \right|^q dt + q2^{q-1} \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^{n-1} e^{u_k^* t} \right|^{q-1} e^{u_n^* t} dt \\
 &\leq \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^{n-1} e^{u_k^* t} \right|^q dt + q2^{q-1} \int_0^\infty (n-1)^{q-1} e^{u_n^* t} dt \\
 &= \int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^{n-1} e^{u_k^* t} \right|^q dt + \frac{q2^{q-1}(n-1)^{q-1}}{|u_n^*|}.
 \end{aligned}$$

Применяя такую процедуру многократно, получаем неравенство

$$\int_0^\infty \left| \sum_{k=m}^n e^{u_k t} \right|^q dt \leq \sum_{k=m}^n \frac{q2^{q-1}(k-1)^{q-1}}{|u_k^*|} \leq q2^{q-1} \sum_{k=m}^n \frac{(k-1)^{q-1}}{|u_k|},$$

из которого следует фундаментальность в $L_p(\mathbb{R})$ частичных сумм ряда D_∞ , что и доказывает первую часть теоремы 2.

Аналогичным образом, используя (15) и монотонность u_n , получаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^n e^{u_k t} \right|^q dt &\geq \int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k t} \right|^q dt + q \int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k t} \right|^{q-1} e^{u_n t} dt \\
 &\geq \int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k t} \right|^q dt + q \int_0^\infty (n-1)^{q-1} e^{q u_n t} dt \\
 &= \int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k t} \right|^q dt + \frac{(n-1)^{q-1}}{|u_n|}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \left| \sum_{k=1}^n e^{u_k t} \right|^q dt \geq \frac{1}{q|u_1|} + \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)^{q-1}}{|u_k|},$$

что доказывает вторую часть теоремы 2.

§ 4. Задачи для исследования

1. Явно оценить или найти точную константу C_p в лемме 2. Верно ли, что в экстремальном случае в этой задаче все y_k равны между собой?
2. Распространить результат теоремы 2 на случай $q > 0$.

Автор благодарит рецензента за большое количество полезных замечаний, способствовавших значительному улучшению качества работы.

Список литературы

- [1] В. Ю. Протасов, “Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by simple partial fractions and the Hilbert transform”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 333–349.
- [2] В. И. Данченко, “О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 53–66; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Convergence of simple partial fractions in $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 985–997.
- [3] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями на полуоси”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions on the semi-axis”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1127–1148.
- [4] Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [5] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

И. Р. Каюмов (I. R. Kayumov)

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета
E-mail: ikayumov@mail.ru

Поступила в редакцию
04.02.2010 и 08.04.2011