Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, О решениях эволюционной управляемой системы, зависящей от параметров, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 9, 113–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:23:45

УДК 517.97

А. А. Толстоногов

О решениях эволюционной управляемой системы, зависящей от параметров

Изучается управляемая система, описываемая нелинейным эволюционным уравнением первого порядка со смешанными невыпуклыми ограничениями на управление. Система зависит от параметров. Параметры входят во все данные системы, включая нелинейный эволюционный оператор и ограничения на управление. Также рассматривается система с выпукленными ограничениями на управление. С помощью общего понятия G -сходимости операторов доказывается существование непрерывных относительно параметров селекторов, значениями которых являются решения исходной системы, и непрерывная версия теоремы релаксации для таких селекторов. Последнее означает аппроксимацию непрерывных селекторов – решений системы с выпукленными ограничениями – непрерывными селекторами – решениями исходной системы. Рассматривается пример управляемой параболической системы.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

В работе изучается зависимость от параметров множества допустимых пар “траектория-управление” нелинейной эволюционной управляемой системы первого порядка со смешанными невыпуклыми ограничениями на управление. При этом параметры входят в начальные условия, эволюционные операторы и в ограничения на управление. Наряду с исходной системой рассматривается система с выпукленными ограничениями на управление. Основное внимание в работе уделено существованию непрерывных селекторов многозначных отображений, которые определены на пространстве параметров и значениями которых являются множества решений управляемых систем. Рассматриваются также вопросы аппроксимации непрерывных селекторов (теоремы релаксации для селекторов) управляемой системы с выпукленными ограничениями подобными селекторами исходной системы. Помимо этих вопросов изучается ряд топологических свойств множества решений, таких как абсолютная ретрактность, дугообразная связность и т. д. Так как значениями указанных выше отображений являются невыпуклые множества, то в работе выделен класс многозначных отображений с невыпуклыми значениями, у которых существуют непрерывные селекторы, что является актуальной современной проблемой (см. [1]). Необходимость рассмотрения подобных вопросов обусловлена также различными приложениями. Среди

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00203), Российского фонда фундаментальных исследований – Государственного фонда естественных наук Китая (грант № 02-01-39006) и фонда INTAS (грант № 2000-0015).

них следует отметить задачи идентификации и параметрической оптимизации (см. [2]).

Вопросы существования непрерывных селекторов, значениями которых являются решения обыкновенных дифференциальных включений, изучались многими авторами. Наиболее общие в этом направлении результаты получены в [3]. Подобные вопросы для включений типа Гурса–Дарбу и некоторых классов эволюционных включений рассматривались в работах [4]–[7] и др.

Что же касается релаксационных теорем для селекторов, то для обыкновенных дифференциальных включений они рассматривались в [8]. В этой работе роль параметра играли начальные условия. Общий случай, когда параметр входит и в правую часть обыкновенного дифференциального включения, изучен в [3]. Для линейных эволюционных включений, у которых линейные, плотно определенные операторы и правые части зависят от параметра, релаксационные теоремы для селекторов доказаны в [7].

Отличие нашей работы от известных состоит в следующем. Мы рассматриваем нелинейные управляемые системы, у которых параметры входят как в начальные условия, так и в нелинейные эволюционные операторы и в смешанные невыпуклые ограничения на управление. Затронутые в работе вопросы в такой постановке ранее не изучались не только для нелинейных эволюционных управляемых систем, но и для эволюционных включений. Более того, управляемые системы являются более сложным объектом с точки зрения изучения свойств решений, чем включения. Это объясняется в первую очередь тем, что реакция траектории на изменение управления носит более сложный характер, чем реакция траектории на изменение ее производной у включения.

При изучении указанных выше вопросов мы развиваем подходы, отличные от традиционных (см. [4], [5], [8] и др.). Нашим основным инструментом является теория G -сходимости эволюционных операторов [9]–[11] и др. и теория непрерывных селекторов, проходящих через неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми разложимыми значениями, зависящими от параметра, развитая в работах автора [6], [12], [13].

Мы рассматриваем следующую нелинейную эволюционную управляемую систему.

Пусть $T = [0, 1]$, H – сепарабельное гильбертово пространство, V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H . Отождествляя H с его топологически сопряженным, мы имеем $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* – пространство, топологически сопряженное к V . При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной*. Пусть Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений, и Λ – сепарабельное метрическое пространство значений параметра. Управляемая система описывается следующим эволюционным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t), \xi) &= B(t)u(t) \quad \text{почти всюду,} \\ x(0) &= \lambda \in H, \quad \xi \in \Lambda, \end{aligned} \quad (1.1)$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi) \quad \text{почти всюду,} \quad (1.2)$$

где $A: T \times V \times \Lambda \rightarrow V^*$ – нелинейный оператор, $U: T \times H \times \Lambda \rightarrow Y$ – многозначное отображение с невыпуклыми замкнутыми значениями, $B(t)$ при почти каждом $t \in T$ – линейный непрерывный оператор из Y в H . Наряду с ограничениями (1.2) мы рассматриваем следующее ограничение:

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t), \xi) \quad \text{почти всюду,} \quad (1.3)$$

где $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

При фиксированных $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in H$ под решением управляемой системы (1.1), (1.2) мы понимаем пару $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$, состоящую из траектории $x(\xi, \lambda)$ и управления $u(\xi, \lambda)$, удовлетворяющих уравнению (1.1) и ограничению (1.2). Основная цель работы – изучение свойств пар $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$ и их зависимости от параметров (ξ, λ) .

Работа состоит из семи параграфов.

В §1 дается краткий экскурс в состояние проблемы и ее постановка.

В §2 приводятся основные обозначения, определения и предположения.

В §3 приведены доказательства ряда вспомогательных результатов, необходимых в дальнейшем.

В §4 изучаются свойства многозначного оператора Немыцкого, порожденного управляемой системой.

В §5 изучаются свойства неподвижных точек многозначного оператора Немыцкого и их зависимость от параметров.

В §6 изложены основные результаты работы.

В §7 рассматривается пример управляемой параболической системы и применительно к этой системе дается конкретизация абстрактных результатов из §6.

§2. Основные определения и обозначения

Пусть (X, d) – метрическое пространство, $T = [0, 1]$ – отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+$ с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ μ -измеримых подмножеств из T .

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: sX – семейство всех непустых, замкнутых подмножеств из X , cbX – семейство всех непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X . На пространстве sX определим обобщенную метрику Хаусдорфа

$$D_X(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}.$$

Поскольку функция $D_X(\cdot, \cdot)$ может принимать бесконечные значения, то она называется *обобщенной метрикой*.

Пусть Y – некоторое топологическое пространство. Многозначное отображение $F: Y \rightarrow sX$ называется *непрерывным*, если оно является непрерывным из Y в $(sX, D_X(\cdot, \cdot))$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису*, если для любого открытого множества $E \subset Y$ множество $F^{-1}(E) = \{x \in X : F(x) \cap E \neq \emptyset\}$ открыто.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным сверху по Вьеторису*, если для любого открытого множества $E \subset Y$ множество $F^+(E) = \{x \in X : F(x) \subset E\}$ открыто.

Многозначное отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным по Вьеторису*, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху по Вьеторису.

Если отображение $F : Y \rightarrow cX$ непрерывно, то оно полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график.

Отметим, что если Y — метрическое пространство, то определение полунепрерывности снизу по Вьеторису эквивалентно следующему: для любых $x \in X$, $y \in F(x)$ и для любой последовательности $x_n \rightarrow x$ существует последовательность $y_n \in F(x_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к y .

Многозначное отображение $F : T \rightarrow cX$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(E) = \{t \in T : F(t) \cap E \neq \emptyset\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $E \subset X$.

Подмножество A хаусдорфова топологического пространства Y называется *ретрактом*, если существует непрерывное отображение $g : Y \rightarrow A$ такое, что $g(y) = y$, $y \in A$. Любое такое отображение g мы называем *ретракцией* Y на A .

Множество $A \subset Y$ называется *абсолютным ретрактом*, если для любого сепарабельного метрического пространства Z , для любого замкнутого множества $B \subset Z$ и для любого непрерывного отображения $g : B \rightarrow A$ существует непрерывное продолжение g на Z со значениями в A [14].

Множество A называется *дугообразно связным*, если любую пару его точек можно соединить дугой [14].

Множество A называется *линейно связным*, если для любых его точек y_1, y_2 существует непрерывное отображение $g : [0, 1] \rightarrow A$ такое, что $g(0) = y_1$, $g(1) = y_2$ [15].

Известно, что для хаусдорфова пространства Y понятия дугообразной и линейной связности множества $A \subset Y$ совпадают [15].

Множество K измеримых функций из T в X называется *разложимым*, если для любых $u, v \in K$, $E \in \Sigma$ элемент $\chi(E)u + \chi(T \setminus E)v$ принадлежит K , где $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E .

Пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — банахово пространство. Множество $K \subset L^p(T, Z)$, $1 \leq p < \infty$, называется *равномерно p -интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|f(t)\|_Z^p dt < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$, $\mu(E) \leq \delta(\varepsilon)$, и всех $f \in K$.

Всюду в дальнейшем мы используем следующие фиксированные обозначения. Пусть (V, H, V^*) — эволюционная тройка пространств. Через $\|\cdot\|$ (соответственно $|\cdot|_H$, $\|\cdot\|_*$) мы обозначаем норму пространства V (соответственно H, V^*). Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , а $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в H . Как обычно, мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ согласованы, т.е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V \times H$ совпадает с $(\cdot, \cdot)$.

Всюду в дальнейшем число p удовлетворяет условию $2 \leq p < \infty$. Мы введем следующие пространства:

$$\mathcal{V} = L^p(T, V), \quad \mathcal{H} = L^p(T, H), \quad \mathcal{H}^* = L^q(T, H), \quad \mathcal{V}^* = L^q(T, V^*), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пространство $\mathcal{W} = \{\nu \in \mathcal{V} : \dot{\nu} \in \mathcal{V}^*\}$ с нормой $\|\nu\|_{\mathcal{W}} = (\|\nu\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\dot{\nu}\|_{\mathcal{V}^*}^2)^{1/2}$, где производная понимается в смысле векторных распределений. Пространство $\mathcal{W}$

с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ является сепарабельным, рефлексивным, банаховым пространством. Известно, что любой элемент из $\mathcal{W}$ можно отождествить с элементом из $C(T, H)$ путем изменения его значений на множестве нулевой меры и вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$ непрерывно, а вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно.

Билинейную форму, устанавливающую двойственность между $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$, мы будем обозначать $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Она имеет вид

$$(y, y')_{\mathcal{H}} = \int_T (y(t), y'(t)) dt, \quad y \in \mathcal{H}, \quad y' \in \mathcal{H}^*.$$

Для любого банахова пространства X символ $w\text{-}X$ означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией [16]. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X . Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Пусть $A_n, A: V \rightarrow V^*$, $n \geq 1$, – последовательность операторов. Будем говорить, что последовательность A_n , $n \geq 1$, G -сходится к A , если существуют обратные операторы $A_n^{-1}, A^{-1}: V^* \rightarrow V$, $n \geq 1$, и для любого $v' \in V^*$ последовательность $A_n^{-1}v' \rightarrow A^{-1}v'$ в $w\text{-}V$ (и, следовательно, в H) [9], [11].

Решением управляемой системы (1.1), (1.2) при фиксированных $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in H$ мы называем пару $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$, состоящую из траектории $x(\xi, \lambda) \in \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$ и управления $u(\xi, \lambda) \in L^q(T, Y)$, удовлетворяющих почти всюду уравнению (1.1) и ограничению (1.2). Аналогично определяется решение управляемой системы (1.1), (1.3). Через $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda) \subset \mathcal{W} \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ мы обозначаем множество всех решений управляемой системы (1.1), (1.2). Множество всех решений управляемой системы (1.1), (1.3) обозначается через $\mathcal{R}_{\overline{U}}(\xi, \lambda)$.

Введем следующие предположения (гипотезы).

ГИПОТЕЗЫ $\Gamma(A)$. Считаем, что $A: T \times V \times \Lambda \rightarrow V^*$ является оператором таким, что:

- 1) отображение $x \mapsto A(t, x, \xi)$ радиально непрерывно, т.е. для любых $x, y \in V$ отображение $\beta \mapsto \langle y, A(t, x + \beta y, \xi) \rangle$ является непрерывным из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$ при любом $\xi \in \Lambda$;
- 2) пусть Θ_V, Θ_{V^*} – нулевые элементы пространств V и V^* , тогда

$$A(t, \Theta_V, \xi) = \Theta_{V^*} \quad \text{для всех } (t, \xi) \in T \times \Lambda; \quad (2.1)$$

- 3) для компактного множества $K \subset \Lambda$ существует $m_K > 0$ такое, что

$$m_K \|x - y\|^p \leq \langle x - y, A(t, x, \xi) - A(t, y, \xi) \rangle, \quad (2.2)$$

$x, y \in V, t \in T, \xi \in K$ (строгая монотонность);

- 4) для компактного множества $K \subset \Lambda$ существует $M_K > 0$ такое, что

$$\|A(t, x, \xi)\|_* \leq M_K(1 + \|x\|^{p-1}),$$

$x \in V, t \in T, \xi \in K$;

- 5) существует неубывающая функция $c_K(\tau)$, $c_K(\tau) \downarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0+$, такая, что

$$\|A(t, x, \xi) - A(t + \tau, x, \xi)\|_* \leq c_K(\tau)(1 + \|x\|^{p-1}),$$

$t, t + \tau \in T, x \in V, \xi \in K$;

- 6) если $\xi_n \rightarrow \xi$, то последовательность операторов $A(t, \cdot, \xi_n)$, $n \geq 1$, G -сходится к $A(t, \cdot, \xi)$, $t \in T$.

Всюду в дальнейшем, не оговаривая особо, считаем, что гипотезы $\Gamma(A)$ имеют место.

ГИПОТЕЗЫ $\Gamma(B)$. Считаем, что $B: T \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, где $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H , является отображением таким, что

- 1) отображение $t \mapsto B(t)u$ измеримо для любого $u \in Y$;
- 2) справедливо

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m, \quad m > 0, \quad \text{п.в.} \quad (2.3)$$

ГИПОТЕЗЫ $\Gamma(U)$. Считаем, что $U: T \times H \times \Lambda \rightarrow {}^c Y$ является многозначным отображением таким, что:

- 1) отображение $t \mapsto U(t, x, \xi)$ измеримо, $x \in H, \xi \in \Lambda$;
- 2) при почти всех $t \in T$ и любом $x \in H$ отображение $\xi \mapsto U(t, x, \xi)$ непрерывно;
- 3) существует непрерывная функция $l: \Lambda \rightarrow L^q(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любых $x, y \in H, \xi \in \Lambda$ почти всюду

$$D_Y(U(t, x, \xi), U(t, y, \xi)) \leq l(\xi)(t)|x - y|_H; \quad (2.4)$$

- 4) для любой сходящейся последовательности $\xi_n \in \Lambda, n \geq 1$, последовательность числовых функций $d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta_H, \xi_n)), n \geq 1$, равномерно q -интегрируема, где $d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta_H, \xi_n))$ – расстояние от нулевого элемента Θ_Y пространства Y до множества $U(t, \Theta_H, \xi_n)$, а Θ_H – нулевой элемент пространства H .

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем, что гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–4) имеют место.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из (2.1), (2.2) следует, что

$$m_K \|x\|^p \leq \langle x, A(t, x, \xi) \rangle \quad (2.5)$$

для всех $t \in T, x \in V, \xi \in K$, т.е. для любых $t \in T, \xi \in \Lambda$ оператор $A(t, \cdot, \xi)$ является коэрцитивным. Поэтому согласно [17; гл. III, §2, теорема 2.2] для любых $t \in T, \xi \in \Lambda$ существует обратный оператор $A^{-1}(t, \cdot, \xi)$. Это означает, что гипотеза $\Gamma(A)$ 6) имеет смысл.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Гипотезы $\Gamma(A)$ 1)–4), $\Gamma(B)$ являются традиционными, при которых для фиксированного ξ эволюционное уравнение (1.1) имеет единственное решение (см., например, [17; гл. VI, §1 теорема 1.1 и примеры]). Согласно [11; лемма 5] гипотезы $\Gamma(A)$ обеспечивают выполнение более общих предположений А)–D) [11], при которых справедлива теорема 1 из [11] (ее мы будем использовать в дальнейшем).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из гипотезы $\Gamma(U)$ 1) следует, что при любом $\xi \in \Lambda$ функция $t \mapsto d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta_H, \xi))$ измерима. Поэтому гипотеза $\Gamma(U)$ 4) будет иметь место, если для любого компакта $K \subset \Lambda$ существуют функции $a_K, b_K \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что почти всюду для любых $x \in H, \xi \in K$

$$\|U(t, x, \xi)\|_Y \leq a_K(t) + b_K(t)|x|_H^{2/q}, \quad (2.6)$$

где $\|U(t, x, \xi)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y : u \in U(t, x, \xi)\}$.

§3. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам понадобятся априорные оценки для траекторий управляемой системы (1.1), (1.3) и, следовательно, системы (1.1), (1.2).

ЛЕММА 3.1. Пусть $K \subset \Lambda$ – компактное множество, $D \subset H$ – ограниченное множество и выполняется неравенство (2.6). Тогда существуют $M_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, такие, что для любой траектории $x(\xi, \lambda) \in \mathcal{W}$, $\xi \in K$, $\lambda \in D$, управляемой системы (1.1), (1.3) имеют место неравенства

$$|x(\xi, \lambda)(t)|_H \leq M_1, \quad t \in T, \quad (3.1)$$

$$\|x(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{V}} \leq M_2, \quad \|\dot{x}(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_3, \quad (3.2)$$

$$\|x(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{W}} \leq M_4. \quad (3.3)$$

Доказательство оценок (3.1)–(3.3) проводится по достаточно известным схемам (см., например, [18] и др.), и мы его опускаем.

Через $d_L(v, B)$ обозначим расстояние от точки $v \in L^q(T, Y)$ до множества $B \subset L^q(T, Y)$, а через $D_L(\cdot, \cdot)$ – обобщенную метрику Хаусдорфа на пространстве $L^q(T, Y)$, порожденные нормой пространства $L^q(T, Y)$.

Пусть $U_1, U_2: T \rightarrow Y$ – измеримые многозначные отображения с замкнутыми значениями. Через S_1, S_2 обозначим совокупность всех селекторов отображений U_1, U_2 , являющихся элементами пространства $L^q(T, Y)$. Если множества S_1, S_2 не пусты, то они являются разложимыми, замкнутыми в $L^q(T, Y)$ множествами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $U_1, U_2: T \rightarrow {}^cY$ – измеримые многозначные отображения. Предположим, что множества S_1, S_2 не пусты. Тогда для любого $u \in L^q(T, Y)$

$$d_L(u, S_1) = \left(\int_T d_Y^q(u(t), U_1(t)) dt \right)^{1/q}, \quad (3.4)$$

$$D_L(S_1, S_2) \leq \left(\int_T D_Y^q(U_1(t), U_2(t)) dt \right)^{1/q} \leq 2^{1/q} D_L(S_1, S_2). \quad (3.5)$$

Доказательство неравенств (3.4), (3.5) проводится по аналогии с доказательством подобных неравенств в [19; утверждение 4.2], где они были доказаны в предположении, что S_1 и S_2 являются ограниченными подмножествами пространства $L^q(T, Y)$.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t), \xi) &= f(t) \quad \text{п.в.}, \\ x(0) &= \lambda, \quad \xi \in \Lambda. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если выполняются гипотезы $\Gamma(A)$, то в соответствии с [17; гл. VI, §1, теорема 1.1] и [17; гл. VI, §1, пример 1] для любых $f \in \mathcal{V}^*$, $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in H$ уравнение (3.6) имеет единственное решение $x(\xi, \lambda, f) \in \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$.

Пусть $\lambda \in H$ и $f \in \mathcal{V}^*$ фиксированы и $\xi_n \rightarrow \xi_0$, $n \geq 1$. Тогда будут определены решения $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 0$, уравнения (3.6).

ЛЕММА 3.2. Последовательность $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 1$, сходится к $x(\xi_0, \lambda, f)$ в $C(T, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим случай, когда $f \in C(T, H)$. Пусть $C(T, w-H)$ – пространство всех непрерывных функций из T в $w-H$ с топологией равномерной сходимости на T . По аналогии с леммой 3.1 можно показать, что существуют $M_i^* > 0$, $i = 1, \dots, 4$, такие, что для любых $n \geq 0$ справедливы неравенства

$$|x(\xi_n, \lambda, f)(t)|_H \leq M_1^*, \quad t \in T, \quad (3.7)$$

$$\|x(\xi_n, \lambda, f)\|_{\mathcal{V}} \leq M_2^*, \quad \|\dot{x}(\xi_n, \lambda, f)\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_3^*, \quad (3.8)$$

$$\|x(\xi_n, \lambda, f)\|_{\mathcal{W}} \leq M_4^*. \quad (3.9)$$

Покажем, что для любого $h \in H$ последовательность числовых функций

$$(h, x(\xi_n, \lambda, f)(t)), \quad n \geq 0, \quad (3.10)$$

равностепенно непрерывна. Так как V плотно вложено в H , то в соответствии с (3.7) нам достаточно показать, что последовательность (3.10) равностепенно непрерывна для любого $h \in V$. Воспользовавшись формулой интегрирования по частям [17] для элементов из $\mathcal{W}$, мы получим

$$\begin{aligned} & |(h, x(\xi_n, \lambda, f)(t) - x(\xi_n, \lambda, f)(\tau))| \\ &= \left| \int_{\tau}^t (h, \dot{x}(\xi_n, \lambda, f)(s)) ds \right| \leq \|h\|_V \|\dot{x}(\xi_n, \lambda, f)\|_{\mathcal{V}^*} |t - \tau|^{1/p}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (3.8) следует, что последовательность (3.10) равностепенно непрерывна. Поскольку любое выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из H является метризуемым компактом в $w-H$, то из (3.7) и теоремы Арцелла–Асколи следует, что последовательность $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 1$, является метризуемым, относительно компактным подмножеством пространства $C(T, w-H)$. Воспользовавшись замечанием 2.2 и теоремой 1 из [11], мы получим, что

$$x(\xi_n, \lambda, f)(t) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, f)(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T. \quad (3.11)$$

Поэтому

$$x(\xi_n, \lambda, f) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, f) \quad \text{в } C(T, w-H).$$

Следовательно, для любой последовательности $t_n \rightarrow t_0$ мы имеем

$$x(\xi_n, \lambda, f)(t_n) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, f)(t_0) \quad \text{в } w-H. \quad (3.12)$$

Из (3.12) и [17; гл. I, § 5, лемма 5.3] следует, что

$$|x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} |x(\xi_n, \lambda, f)(t_n)|_H. \quad (3.13)$$

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$, последовательность $t_k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$ и подпоследовательность $x(\xi_{n_k}, \lambda, f)$, $k \geq 1$, последовательности $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 1$, такие, что

$$|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k) - x(\xi_0, \lambda, f)(t_k)|_H > \varepsilon, \quad k \geq 1.$$

Поскольку функция $x(\xi_0, \lambda, f)(t)$ непрерывна, то

$$|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k) - x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H > \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.14)$$

если $k \geq N$ и N достаточно велико.

Воспользовавшись (3.13) и переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что

$$|x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H \leq a = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k)|_H. \quad (3.15)$$

Если $a = |x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H$, то из (3.12), (3.15), равномерной выпуклости пространства H и [17; гл. I, § 5, теорема 5.12] следует, что

$$x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, f)(t_0) \quad \text{в } H.$$

Но это противоречит (3.14). Поэтому в соответствии с (3.15)

$$a^2 = |x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H^2 + \varepsilon_1 \quad (3.16)$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$.

Покажем, что при достаточно больших k будет иметь место неравенство $t_k < t_0$. Если это не так, то, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что $t_0 \leq t_k$ и $t_k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Проинтегрировав уравнение (3.6) с учетом (2.5), мы получим

$$\begin{aligned} & |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k)|_H^2 - |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_0)|_H^2 \\ & \leq 2 \int_{t_0}^{t_k} (x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(s), f(s)) ds \\ & \leq 2 \max_{t \in T} \|f(t)\|_{V^*} \|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)\|_{\mathcal{V}} (t_k - t_0)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда из (3.8), (3.11) и (3.17) следует, что

$$a^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k)|_H^2 \leq |x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H^2.$$

Но это противоречит (3.16). Поэтому $t_k < t_0$ при достаточно больших k и, следовательно, $t_0 > 0$.

Проинтегрируем уравнение (3.6) по отрезку $[t_k - \eta, t_k]$, $\eta = \text{const} > 0$, $t_k - \eta \geq 0$. Учитывая (3.8), по аналогии с (3.17) мы получаем

$$|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k)|_H^2 \leq c_1 \eta^{1/q} + |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k - \eta)|_H^2$$

при некотором $c_1 > 0$. Из этого неравенства и (3.15), (3.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k - \eta)|_H^2 & \geq |x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k)|_H^2 - \frac{\varepsilon_1}{4} \geq a^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \\ & \geq |x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|_H^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

если $0 \leq \eta \leq \delta_1$, $\delta_1 = \text{const} > 0$ достаточно мала, и k достаточно велико. Поскольку функция $x(\xi_0, \lambda, f)(t)$ непрерывна, то

$$|x(\xi_0, \lambda, f)(t_0)|^2 \geq |x(\xi_0, \lambda, f)(t_k - \eta)|_H^2 - \frac{\varepsilon_1}{4},$$

если $0 \leq \eta \leq \delta_2$, $t_0 - t_k < \delta_3$ и δ_2, δ_3 достаточно малы. Поэтому из (3.18) получаем

$$|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t_k - \eta)|_H^2 \geq |x(\xi_0, \lambda, f)(t_k - \eta)|_H^2 + \frac{\varepsilon_1}{4} \quad (3.19)$$

при $0 \leq \eta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_0$ и достаточно больших k . Так как $t_k < t_0$, то из определения $\delta_0 > 0$ следует, что существует k_0 такое, что множество $\mathcal{T} = \bigcap_{k \geq k_0} [t_k - \delta_0, t_k]$ не пусто. Возьмем произвольное $t \in \mathcal{T}$. Тогда существует $0 < \eta_k < \delta_0$ такое, что $t = t_k - \eta_k$, $k \geq k_0$. Воспользовавшись (3.19), мы получим

$$|x(\xi_{n_k}, \lambda, f)(t)|_H^2 \geq |x(\xi_0, \lambda, f)(t)|_H^2 + \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad k \geq k_0.$$

Но последнее неравенство противоречит (3.11). Следовательно, $x(\xi_{n_k}, \lambda, f) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, f)$ в $C(T, H)$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $u \in \mathcal{V}^*$. Так как пространство $C(T, H)$ плотно вложено в $\mathcal{V}^*$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $f \in C(T, H)$ такое, что

$$\|u - f\|_{\mathcal{V}^*} < \varepsilon. \quad (3.20)$$

Пусть $x(\xi_n, \lambda, u)$, $n \geq 0$, — последовательность решений уравнения (3.6). Как и для последовательности $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 0$, можно показать, что для последовательности $x(\xi_n, \lambda, u)$, $n \geq 0$, имеют место неравенства, аналогичные (3.7)–(3.9). Тогда существует $M > 0$ такое, что

$$\|x(\xi_n, \lambda, f) - x(\xi_n, \lambda, u)\|_{\mathcal{V}} \leq M, \quad n \geq 1. \quad (3.21)$$

Воспользовавшись уравнением (3.6), (2.2) и формулой интегрирования по частям для элементов из $\mathcal{W}$, мы получим

$$|x(\xi_n, \lambda, f)(t) - x(\xi_n, \lambda, u)(t)|_H^2 \leq 2\|x(\xi_n, \lambda, f) - x(\xi_n, \lambda, u)\|_{\mathcal{V}} \|u - f\|_{\mathcal{V}^*},$$

$n \geq 1$, $t \in T$. Поэтому в соответствии с (3.20), (3.21)

$$|x(\xi_n, \lambda, f)(t) - x(\xi_n, \lambda, u)(t)|_H^2 < 2M\varepsilon, \quad n \geq 1, \quad t \in T. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что

$$\bigcup_{n \geq 1} x(\xi_n, \lambda, u) \subset \bigcup_{n \geq 0} x(\xi_n, \lambda, f) + (2M\varepsilon)^{1/2} B_{C(T, H)}, \quad (3.23)$$

где $B_{C(T, H)}$ — единичный открытый шар из $C(T, H)$. Поскольку множество $\bigcup_{n \geq 0} x(\xi_n, \lambda, f)$, как было доказано выше, является компактом в $C(T, H)$, то включение (3.23) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $\bigcup_{n \geq 0} x(\xi_n, \lambda, f)$ такое, что имеет место включение (3.23). Поэтому

множество $\bigcup_{n \geq 1} x(\xi_n, \lambda, u)$ относительно компактно в $C(T, H)$. Согласно [11; теорема 1]

$$x(\xi_n, \lambda, u)(t) \rightarrow x(\xi_0, \lambda, u)(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T.$$

Следовательно, последовательность $x(\xi_n, \lambda, u)$, $n \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к $x(\xi_0, \lambda, u)$. Лемма доказана.

Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(B)$. Тогда для любого $u \in L^q(T, Y)$ функция $f(t) = B(t)u(t)$, $t \in T$, является элементом пространства $\mathcal{H}^*$. Поэтому на основании вышесказанного для любых $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in H$, $u \in L^q(T, Y)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $x(\xi, \lambda, u) \in \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$. Тем самым будет определен оператор $\mathcal{T}: \Lambda \times H \times L^q(T, Y) \rightarrow \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$, который каждой тройке (ξ, λ, u) ставит в соответствие единственное решение

$$x(\xi, \lambda, u) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, u) \quad (3.24)$$

уравнения (1.1).

Следующая теорема является основополагающей в наших исследованиях.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$. Тогда отображение $(\xi, \lambda, u) \mapsto \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)$ является секвенциально непрерывным из $\Lambda \times H \times w\text{-}L^q(T, Y)$ в $C(T, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi_0$ в Λ , $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ в H и $u_n \rightarrow u_0$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$. Положим

$$y_n = \mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n), \quad n \geq 1, \quad (3.25)$$

$$x_n = \mathcal{T}(\xi_n, \lambda_0, u_0), \quad n \geq 1, \quad (3.26)$$

$$x_0 = \mathcal{T}(\xi_0, \lambda_0, u_0). \quad (3.27)$$

По аналогии с леммой 3.1 можно показать, что для последовательностей y_n , x_n , $n \geq 1$, имеют место оценки (3.7)–(3.9). Рассмотрим последовательность $z_n = y_n - x_n$, $n \geq 1$. Воспользовавшись неравенством (3.9), мы получим, что последовательность z_n , $n \geq 1$, относительно компактна в $w\text{-}\mathcal{W}$ и, следовательно, является относительно компактным множеством в $\mathcal{H}$. Пусть $v_n(t) = B(t)u_n(t)$, $n \geq 0$. Из гипотез $\Gamma(B)$ следует, что

$$v_n \rightarrow v_0 \quad \text{в } w\text{-}\mathcal{H}^*. \quad (3.28)$$

Воспользовавшись уравнением (1.1) и (2.2), мы получим

$$\frac{1}{2}|y_n(t) - x_n(t)|_H^2 \leq \frac{1}{2}|\lambda_n - \lambda_0|_H^2 + \int_0^t (y_n(s) - x_n(s), v_n(s) - v_0(s)) ds. \quad (3.29)$$

Зафиксируем $t \in T$ и перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{1}{2}|z_n(t)|_H^2 \leq \frac{1}{2}|\lambda_n - \lambda_0|_H^2 + \int_T (z_n(s), f_n(s) - f_0(s)) ds, \quad (3.30)$$

где $f_n(s) = \chi_t(s)v_n(s)$, $s \in T$, $n \geq 0$ и $\chi_t(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0, t]$. Из (3.28) следует, что

$$f_n \rightarrow f_0 \quad \text{в } w\text{-}\mathcal{H}^*. \quad (3.31)$$

Пусть $(y, y')_{\mathcal{H}}$ – каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$. Из (3.31) следует, что последовательность числовых функций $y \mapsto (y, f_n)_{\mathcal{H}}$, $n \geq 1$, $y \in \mathcal{H}$, равномерно непрерывна [16]. Пусть $D = \{\bigcup_{n \geq 1} z_n\} \subset \mathcal{H}$. Известно, что на каждом равномерно непрерывном множестве топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathcal{H}$. Поскольку множество D относительно компактно в $\mathcal{H}$, то в соответствии с (3.31)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in D} |(y, f_n - f_0)_{\mathcal{H}}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in D} \left| \int_T (y(s), f_n(s) - f_0(s)) ds \right| = 0. \quad (3.32)$$

Теперь из (3.30), (3.32) следует, что

$$|z_n(t)|_H = |y_n(t) - x_n(t)|_H \rightarrow 0, \quad t \in T. \quad (3.33)$$

Так как последовательность z_n , $n \geq 1$, относительно компактна в $\mathcal{H}$, то в соответствии с (3.33)

$$z_n \rightarrow \Theta_{\mathcal{H}} \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad (3.34)$$

где $\Theta_{\mathcal{H}}$ – нулевой элемент пространства $\mathcal{H}$. Из (3.29) следует, что

$$\frac{1}{2} |y_n(t) - x_n(t)|_H^2 \leq \frac{1}{2} |\lambda_n - \lambda_0|_H^2 + \|z_n\|_{\mathcal{H}} \|v_n - v_0\|_{\mathcal{H}^*}.$$

Из последнего неравенства, (3.28), (3.34) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} |y_n(t) - x_n(t)|_H = 0. \quad (3.35)$$

Воспользовавшись (3.25)–(3.27), (3.35), леммой 3.2 и неравенством

$$|y_n(t) - x_0(t)|_H \leq |y_n(t) - x_n(t)|_H + |x_n(t) - x_0(t)|_H,$$

мы получим, что

$$\mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n) \rightarrow \mathcal{T}(\xi_0, \lambda_0, u_0) \quad \text{в } C(T, H).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При доказательстве леммы 3.2 мы использовали только условия, при которых уравнение (3.6) имеет единственное решение и справедливо утверждение основной теоремы 1 из [11]. Все это имеет место и в рамках предположений А)–Д) этой теоремы. Поэтому лемма 3.2 является усилением теоремы 1 из [11], где утверждается только поточечная сходимость последовательности $x(\xi_n, \lambda, f)$, $n \geq 1$, к $x(\xi_0, \lambda, f)$.

§4. Многозначный оператор Немыцкого

Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, мы предполагаем, что имеют место гипотезы $\Gamma(B)$, $\Gamma(U)$ 1)–4).

Для каждых $(\xi, \lambda, u) \in \Lambda \times H \times L^q(T, Y)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \geq 2$, положим

$$\Phi(\xi, \lambda, u) = \{\varphi \in L^q(T, Y) : \varphi(t) \in U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi) \text{ п.в.}\}, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{T}(\xi, \lambda, u)$ – оператор (3.24). В соответствии с гипотезами $\Gamma(U)$ 1), 3) для любой непрерывной функции $x: T \rightarrow H$ отображение $t \mapsto U(t, x(t), \xi)$ измеримо. Воспользовавшись неравенством (2.4), мы получим

$$d_Y(\Theta_Y, U(t, x(t), \xi)) \leq d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta_H, \xi)) + l(\xi)(t)|x(t)|_H.$$

Из этого неравенства, гипотезы $\Gamma(U)$ 4) и свойств измеримых многозначных отображений [20] вытекает, что для каждых (ξ, λ, u) множество $\Phi(\xi, \lambda, u)$ является непустым, разложимым, замкнутым подмножеством пространства $L^q(T, Y)$. Поэтому будет определено отображение $\Phi: \Lambda \times H \times L^q(T, Y) \rightarrow cL^q(T, Y)$, которое называется *многозначным оператором Немыцкого*.

Наряду с оператором Φ рассмотрим оператор $\overline{\text{co}}\Phi$, $(\overline{\text{co}}\Phi)(\xi, \lambda, u) = \overline{\text{co}}\Phi(\xi, \lambda, u)$. Известно [20], что

$$\overline{\text{co}}\Phi(\xi, \lambda, u) = \{\varphi \in L^q(T, Y) : \varphi(t) \in \overline{\text{co}}U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi) \text{ п.в.}\}. \quad (4.2)$$

На пространстве $\Lambda \times L^q(T, Y)$ рассмотрим числовую функцию

$$P(\xi, u) = \left(\int_T \rho^q(t, \xi, u(t)) dt \right)^{1/q}, \quad (4.3)$$

где

$$\rho(t, \xi, u) = \exp\left(-\frac{1}{q} m^q 2^q \int_0^t l^q(\xi)(\tau) d\tau\right) \|u\|_Y, \quad (4.4)$$

где m – константа, фигурирующая в неравенстве (2.3), а $l(\xi)(\tau)$ – функция из неравенства (2.4). Тогда функция $\rho(t, \xi, u)$ обладает свойствами 1) ρ)–3) ρ), введенными в §2 работы [12], а функция $P(\xi, u)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству (3.1) в [12]. Поэтому для каждого $\xi \in \Lambda$ функция $P(\xi, \cdot)$ является нормой, эквивалентной исходной норме пространства $L^q(T, Y)$.

Для каждого $\xi \in \Lambda$ через $d_L(\xi)(u, B)$ и $D_L(\xi)(\cdot, \cdot)$ обозначим расстояние от точки $u \in L^q(T, Y)$ до множества $B \subset L^q(T, Y)$ и обобщенную метрику Хаусдорфа, порожденные нормой $P(\xi, \cdot)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–4). Тогда оператор Немыцкого $\Phi: \Lambda \times H \times L^q(T, Y) \rightarrow cL^q(T, Y)$ обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису;
- 2) справедливо

$$D_L(\xi)(\Phi(\xi, \lambda, u), \Phi(\xi, \lambda, v)) \leq \frac{1}{2} P(\xi, u - v), \quad (4.5)$$

$$\xi \in \Lambda, \lambda \in H, u, v \in L^q(T, Y);$$

3) справедливо

$$\begin{aligned} D_L(\Phi(\xi, \lambda_1, u_1), \Phi(\xi, \lambda_2, u_2)) \\ \leq \|l(\xi)\|_{L^q(T, \mathbb{R}^+)} (|\lambda_1 - \lambda_2|_H + m\|u_1 - u_2\|_{L^q(T, Y)}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\xi \in \Lambda$, $\lambda_1, \lambda_2 \in H$, $u_1, u_2 \in L^q(T, Y)$;

4) отображение $(\xi, \lambda, u) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ имеет замкнутый график в $\Lambda \times H \times L^q(T, Y) \times L^q(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что отображение $\xi \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису для фиксированных $\lambda \in H$, $u \in L^q(T, Y)$.

Пусть последовательность $\xi_n \in \Lambda$, $n \geq 1$, сходится к ξ . Возьмем произвольное $\varphi \in \Phi(\xi, \lambda, u)$. В соответствии с гипотезой $\Gamma(U)$ 2) отображение $\tau \mapsto U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \tau)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (4.7)$$

Так как

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)) \\ \leq d_Y(\varphi(t), U(t, \Theta_H, \xi_n)) + D_Y(U(t, \Theta_H, \xi_n), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)) \\ \leq \|\varphi(t)\|_Y + d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta_H, \xi_n)) + l(\xi_n)(t) \|\mathcal{T}(\xi, \lambda, u)\|_{C(T, H)}, \end{aligned}$$

то из гипотезы $\Gamma(U)$ 4) и последнего неравенства получаем, что последовательность $d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n))$, $n \geq 1$, равномерно q -интегрируема. Поэтому из (4.7) и [19; утверждение 2.4] мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_T d_Y^q(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)) dt \right)^{1/q} = 0. \quad (4.8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi_n, \lambda, u)(t), \xi_n)) \\ \leq d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)) + l(\xi_n)(t) \|\mathcal{T}(\xi_n, \lambda, u) - \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)\|_{C(T, H)}, \end{aligned}$$

то из (4.8), (3.4) и теоремы 3.1 мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_L(\varphi, \Phi(\xi_n, \lambda, u)) = 0.$$

Но это означает, что отображение $\xi \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису.

В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство. Пусть

$$x(\xi, \lambda_1, u_1) = \mathcal{T}(\xi, \lambda_1, u_1), \quad x(\xi, \lambda_2, u_2) = \mathcal{T}(\xi, \lambda_2, u_2).$$

Тогда

$$|x(\xi, \lambda_1, u_1)(t) - x(\xi, \lambda_2, u_2)(t)|_H \leq |\lambda_1 - \lambda_2|_H + \int_0^t m\|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds, \quad t \in T. \quad (4.9)$$

Воспользовавшись уравнением (1.1) и (2.3), мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |x(\xi, \lambda_1, u_1)(t) - x(\xi, \lambda_2, u_2)(t)|_H^2 \\ & \leq \frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2|_H^2 + \int_0^t (x(\xi, \lambda_1, u_1)(s) - x(\xi, \lambda_2, u_2)(s), B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)) ds \\ & \leq \frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2|_H^2 + \int_0^t m |x(\xi, \lambda_1, u_1)(s) - x(\xi, \lambda_2, u_2)(s)|_H \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теперь неравенство (4.9) вытекает из (4.10) и [21; лемма A5].

Покажем теперь, что отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису для каждого $u \in L^q(T, Y)$. Пусть последовательность (ξ_n, λ_n) , $n \geq 1$, сходится к (ξ, λ) . Возьмем произвольное $\varphi \in \Phi(\xi, \lambda, u)$. Тогда из (2.4) и (4.9) мы получим

$$\begin{aligned} & d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u)(t), \xi_n)) \\ & \leq d_Y(\varphi(t), U(t, \mathcal{T}(\xi_n, \lambda, u)(t), \xi_n)) + l(\xi_n)(t) |\lambda_n - \lambda|_H. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Воспользовавшись (3.4), (4.1), (4.11), мы придем к неравенству

$$d_L(\varphi, \Phi(\xi_n, \lambda_n, u)) \leq d_L(\varphi, \Phi(\xi_n, \lambda, u)) + |\lambda_n - \lambda|_H \left(\int_T l^q(\xi_n)(t) dt \right)^{1/q}. \quad (4.12)$$

Так как отображение $\xi \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису, то из (4.12) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_L(\varphi, \Phi(\xi_n, \lambda_n, u)) = 0.$$

Но это означает, что отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Тем самым утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем неравенство (4.5). Из (2.4), (4.9) следует, что

$$D_Y(U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, v)(t), \xi)) \leq ml(\xi)(t) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_Y ds. \quad (4.13)$$

Тогда, воспользовавшись (4.13), (4.1), (4.3), (4.4) и первым неравенством в (3.5), мы получим

$$\begin{aligned} & D_L(\xi)(\Phi(\xi, \lambda, u), \Phi(\xi, \lambda, v)) \\ & \leq \left(\int_T \exp \left(-m^q 2^q \int_0^t l^q(\xi)(\tau) d\tau \right) m^q l^q(\xi)(t) \left(\int_0^t \|u(s) - v(s)\|_Y^q ds \right) dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Проинтегрировав по частям правую часть (4.14), мы получим

$$\begin{aligned} & D_L(\xi)(\Phi(\xi, \lambda, u), \Phi(\xi, \lambda, v)) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_T \exp \left(-\frac{1}{q} m^q 2^q \int_0^t l^q(\xi)(\tau) d\tau \right) \|u(t) - v(t)\|_Y^q dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Теперь неравенство (4.5) вытекает из (4.3), (4.4) и (4.15).

Докажем неравенство (4.6). Из (2.4) и (3.24) следует, что

$$\begin{aligned} D_Y(U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda_1, u_1)(t), \xi), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda_2, u_2)(t), \xi)) \\ \leq l(\xi)(t) \|\mathcal{T}(\xi, \lambda_1, u_1) - \mathcal{T}(\xi, \lambda_2, u_2)\|_{C(T, H)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Воспользовавшись (4.16), (4.9), (4.1) и первым из неравенств (3.5), мы приходим к неравенству (4.6).

Перейдем к доказательству утверждения 4). Пусть последовательность (ξ_n, λ_n, u_n) , $n \geq 1$, сходится к (ξ, λ, u) , а последовательность $\varphi_n \in \Phi(\xi_n, \lambda_n, u_n)$, $n \geq 1$, сходится к φ . Нам нужно доказать, что $\varphi \in \Phi(\xi, \lambda, u)$. Так как $\varphi_n(t) \in U(t, \mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n)(t), \xi_n)$ п.в., то существует последовательность измеримых функций $q_n: T \rightarrow Y$ такая, что

$$q_n(t) \in U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n) \text{ п.в.}, \quad (4.17)$$

$$\|\varphi_n(t) - q_n(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + d_Y(\varphi_n(t), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n)). \quad (4.18)$$

Воспользовавшись (4.18), (2.4) и (3.24), мы получим

$$\|\varphi(t) - q_n(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_Y + l(\xi_n)(t) \|\mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n) - \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)\|_{C(T, H)}. \quad (4.19)$$

Поэтому из (4.19) и теоремы 3.1 вытекает, что $q_n \rightarrow \varphi$ в $L^q(T, Y)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $q_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ п.в. в Y . Тогда из (4.17) и гипотезы $\Gamma(U) 2)$ следует, что $\varphi(t) \in U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi)$ п.в. Следовательно, $\varphi \in \Phi(\xi, \lambda, u)$. Тем самым показано, что отображение $(\xi, \lambda, u) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ имеет замкнутый график в $\Lambda \times H \times L^q(T, Y) \times L^q(T, Y)$. Теорема доказана.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U) 1)$ – $3)$ и неравенство (2.6). Тогда отображение $(\xi, \lambda, u) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ является секвенциально непрерывным из $\Lambda \times H \times w\text{-}L^q(T, Y)$ в $(\text{cb}L^q(T, Y), D_L(\cdot, \cdot))$ и справедливы все утверждения теоремы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (2.6) вытекает, что значениями оператора $\Phi(\xi, \lambda, u)$ являются элементы пространства $\text{cb}L^q(T, Y)$. Пусть $(\xi_n, \lambda_n, u_n) \rightarrow (\xi, \lambda, u)$ в $\Lambda \times H \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Тогда

$$\begin{aligned} D_Y(U(t, \mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n)(t), \xi_n), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi)) \\ \leq l(\xi_n)(t) \|\mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n) - \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)\|_{C(T, H)} \\ + D_Y(U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi)). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} D_L(\Phi(\xi_n, \lambda_n, u_n), \Phi(\xi, \lambda, u)) \\ \leq \|l(\xi_n)\|_{L^q(T, \mathbb{R}^+)} \|\mathcal{T}(\xi_n, \lambda_n, u_n) - \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)\|_{C(T, H)} \\ + \left(\int_T D_Y^q(U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi_n), U(t, \mathcal{T}(\xi, \lambda, u)(t), \xi)) dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, теоремы 3.1, гипотезы $\Gamma(U)$ 2), неравенства (2.6) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_L(\Phi(\xi_n, \lambda_n, u_n), \Phi(\xi, \lambda, u)) = 0.$$

Следовательно, отображение $(\xi, \lambda, u) \mapsto \Phi(\xi, \lambda, u)$ является секвенциально непрерывным из $\Lambda \times H \times w\text{-}L^q(T, Y)$ в $(\text{cb}L^q(T, Y), D_L(\cdot, \cdot))$. Отсюда сразу вытекают утверждения 1) и 4) теоремы 4.1. Что же касается неравенств (4.5) и (4.6), то их доказательство базировалось на гипотезах $\Gamma(U)$ 3), 4). Поскольку гипотеза $\Gamma(U)$ 4) следует из неравенства (2.6), то лемма доказана.

§ 5. Свойства неподвижных точек оператора Немыцкого

В этом параграфе мы изучим свойства неподвижных точек оператора $\Phi(\xi, \lambda, u)$. Наряду со стандартной нормой на пространстве $L^q(T, Y)$ мы будем рассматривать так называемую слабую норму [22]

$$\|u\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Y. \quad (5.1)$$

Пространство $L^q(T, Y)$ с нормой (5.1) мы будем обозначать через $L_w^q(T, Y)$. Для фиксированных (ξ, λ) обозначим через $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ множество неподвижных точек оператора $\Phi(\xi, \lambda, u)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–4). Тогда

- а) для любых (ξ, λ) множество $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ не пусто и существует непрерывная функция $u: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$u(\xi, \lambda) \in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H; \quad (5.2)$$

- б) если $D \subset \Lambda \times H$ – замкнутое множество и $u_D: D \rightarrow L^q(T, Y)$ – непрерывная функция, $u_D(\xi, \lambda) \in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$, то существует непрерывная функция $u: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что справедливо включение (5.2) и $u(\xi, \lambda) = u_D(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть выполняются предположения теоремы 5.1. Тогда

- а) отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda, u)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми в $L^q(T, Y)$ значениями;
- б) для любых (ξ, λ) множество $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ является абсолютным ретрактом, и ретракцию можно выбрать непрерывно зависящей от (ξ, λ) , т.е. существует непрерывная функция $g: \Lambda \times H \times L^q(T, Y) \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$\begin{aligned} g(\xi, \lambda, u) &\in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda), & (\xi, \lambda) &\in \Lambda \times H, & u &\in L^q(T, Y), \\ g(\xi, \lambda, u) &= u, & u &\in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda), & (\xi, \lambda) &\in \Lambda \times H; \end{aligned}$$

- в) если пространство Λ дугообразно связно, то множество

$$\left\{ \bigcup_{(\xi, \lambda) \in \Lambda \times H} \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda) \right\}$$

дугообразно связно;

- d) для любых непрерывных селекторов $u_i: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$, $i = 1, 2$, отображения $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ существует непрерывное отображение $h: \Lambda \times H \times [0, 1] \rightarrow L^q(T, Y)$ такое, что

$$\begin{aligned} h(\xi, \lambda, 0) &= u_1(\xi, \lambda), \quad h(\xi, \lambda, 1) = u_2(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H, \\ h(\xi, \lambda, \tau) &\in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda, \tau) \in \Lambda \times H \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Если пространство Λ дугообразно связно, то и пространство $\Lambda \times H$ является дугообразно связным. При выполнении гипотез $\Gamma(U)$ 1)–4) справедливы утверждения теоремы 4.1. Эти утверждения являются предположениями в теоремах 3.1, 4.1 и следствии 4.1 из работы [12]. Поэтому теорема 5.1 вытекает из теоремы 3.1 в [12], а утверждения следствия 5.1 являются перефразировкой аналогичных утверждений из теоремы 4.1 и следствия 4.1 в [12].

ЛЕММА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенство (2.6). Тогда для отображений $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ и $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ справедливы все утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1. Более того, отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ является непрерывным по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$ с компактными в $w\text{-}L^q(T, Y)$ значениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с замечанием 2.3 из гипотез $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенства (2.6) следует, что для отображения $\overline{\text{co}} U(t, x, \xi)$ имеют место гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–4). Воспользовавшись (4.2), мы получим, что для отображений $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ и $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ справедливы утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1.

Докажем непрерывность по Вьеторису отображения $(\xi, \lambda) \mapsto \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ из $\Lambda \times H$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$.

Поскольку любое открытое в $w\text{-}L^q(T, Y)$ множество является открытым и в $L^q(T, Y)$, то полунепрерывность снизу по Вьеторису отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ из $\Lambda \times H$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$ вытекает из утверждения а) следствия 5.1. Чтобы доказать полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ из $\Lambda \times H$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$, достаточно показать, что этим свойством обладает сужение отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ на любое компактное множество $Q \subset \Lambda \times H$.

Пусть $Q \subset \Lambda \times H$ — компактное множество и $u(\xi, \lambda) \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$. Положим $x(\xi, \lambda) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, u(\xi, \lambda))$. Тогда согласно (3.24) пара $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$ является решением управляемой системы (1.1), (1.3). Воспользовавшись леммой 3.1, мы получим, что для любой траектории $x(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in Q$, системы (1.1), (1.3) справедливо неравенство (3.1). Поэтому в соответствии с (2.6)

$$\|\overline{\text{co}} U(t, x(\xi, \lambda)(t), \xi)\|_Y \leq a_K(t) + b_K(t)M_1^{2/q}, \quad (5.3)$$

где $K \subset \Lambda$ — проекция множества Q на Λ и M_1 — константа из неравенства (3.1).

Обозначим

$$\mathcal{F} = \{\varphi \in L^q(T, Y) : \|\varphi(t)\|_Y \leq a_K(t) + b_K(t)M_1^{2/q} \text{ п.в.}\}. \quad (5.4)$$

Тогда $\mathcal{F}$ является выпуклым, метризуемым, компактным подмножеством пространства $w\text{-}L^q(T, Y)$ и

$$\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda) \subset \mathcal{F}, \quad (\xi, \lambda) \in Q. \quad (5.5)$$

Известно, что если значения многозначного отображения лежат в компакте, то полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения и компактность его значений следуют из замкнутости его графика. Поэтому нам достаточно показать замкнутость в $\Lambda \times H \times w-L^q(T, Y)$ графика сужения отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ на Q .

Пусть $(\xi_n, \lambda_n) \rightarrow (\xi, \lambda)$ в $\Lambda \times H$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $w-L^q(T, Y)$, $(\xi_n, \lambda_n) \in Q$, $\varphi_n \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi_n, \lambda_n)$, $n \geq 1$. Поскольку $\varphi_n \in \overline{\text{co}} \Phi(\xi_n, \lambda_n, \varphi_n)$, $n \geq 1$, то из леммы 4.1 и теоремы Мазура следует, что

$$\varphi \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k \geq n} \varphi_k \right) \subset \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k \geq n} \overline{\text{co}} \Phi(\xi_k, \lambda_k, \varphi_k) \right) \subset \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda, \varphi).$$

Следовательно, $\varphi \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$. Воспользовавшись (5.5), мы получим, что значениями отображения $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ являются компактные множества из $w-L^q(T, Y)$ и отображение $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ полунепрерывно сверху по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $w-L^q(T, Y)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации непрерывных селекторов отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ непрерывными селекторами отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенство (2.6). Тогда для любого непрерывного селектора $v: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $Q \subset \Lambda \times H$ существует непрерывный селектор $u: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ отображения $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ такой, что

$$\|v(\xi, \lambda) - u(\xi, \lambda)\|_\omega < \varepsilon, \quad (\xi, \lambda) \in Q, \quad (5.6)$$

где $\|\cdot\|_\omega$ – норма (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ – непрерывный селектор отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$, который существует согласно лемме 5.1, и $Q \subset \Lambda \times H$ – компактное множество. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 5.1, имеет место включение (5.5) с $\mathcal{F}$, определенным соотношением (5.4). Поэтому в соответствии с (5.3), (5.4)

$$\overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda, v(\xi, \lambda)) \subset \mathcal{F}, \quad (\xi, \lambda) \in Q.$$

Поскольку $\mathcal{F}$ является компактным, метризуемым в $w-L^q(T, Y)$ множеством, то в соответствии с леммой 4.1 сужение отображения $\Phi(\xi, \lambda, u)$ на $Q \times \mathcal{F}$ является непрерывным из $\Lambda \times H \times w-L^q(T, Y)$ в $(\text{cb}L^q(T, Y), D_L(\cdot, \cdot))$. Так как $\mathcal{F}$ является разложимым, замкнутым, ограниченным подмножеством пространства $L^q(T, Y)$, то утверждение теоремы вытекает из [13; теорема 5.1]. Теорема доказана.

§6. Основные результаты

В этом параграфе мы приведем основные результаты нашей работы.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–4). Тогда для любых (ξ, λ) множество $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ не пусто и существует непрерывная функция $s: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ такая, что

а) справедливо

$$s(\xi, \lambda) \in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H; \quad (6.1)$$

- б) если $D \subset \Lambda \times H$ – замкнутое множество и $s_D: D \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ – непрерывная функция, $s_D(\xi, \lambda) \in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$, то существует непрерывная функция $s: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ такая, что справедливо включение (6.1) и $s(\xi, \lambda) = s_D(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть выполняются предположения теоремы 6.1. Тогда

- а) отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times L^q(T, Y)$ с замкнутыми в $C(T, H) \times L^q(T, Y)$ значениями;
- б) для любых (ξ, λ) множество $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ является абсолютным ретрактом в $C(T, H) \times L^q(T, Y)$, и ретракцию можно выбрать непрерывно зависящей от (ξ, λ) , т.е. существует непрерывная функция $g: \Lambda \times H \times C(T, H) \times L^q(T, Y) \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ такая, что

$$\begin{aligned} g(\xi, \lambda, x, u) &\in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda), & (\xi, \lambda, x, u) &\in \Lambda \times H \times C(T, H) \times L^q(T, Y), \\ g(\xi, \lambda, x, u) &= (x, u), & (x, u) &\in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H; \end{aligned}$$

- с) если пространство Λ дугообразно связно, то множество

$$\left\{ \bigcup_{(\xi, \lambda) \in \Lambda \times H} \mathcal{R}_U(\xi, \lambda) \right\}$$

дугообразно связно;

- д) для любых непрерывных селекторов $s_i: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$, $i = 1, 2$, отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ существует непрерывное отображение $h: \Lambda \times H \times [0, 1] \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ такое, что

$$\begin{aligned} h(\xi, \lambda, 0) &= s_1(\xi, \lambda), & h(\xi, \lambda, 1) &= s_2(\xi, \lambda), & (\xi, \lambda) &\in \Lambda \times H, \\ h(\xi, \lambda, \tau) &\in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda), & (\xi, \lambda, \tau) &\in \Lambda \times H \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Утверждение д) следствия 6.1 означает, что любые два непрерывных селектора отображения $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ можно соединить гомотопией со значениями в $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$.

Если $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$ – решение управляемой системы (1.1), (1.2), то в соответствии с определением решения и (3.24), (4.1)

$$x(\xi, \lambda) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, u(\xi, \lambda)), \quad (6.2)$$

$$u(\xi, \lambda) \in \Phi(\xi, \lambda, u(\xi, \lambda)). \quad (6.3)$$

Поэтому пара $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$ является решением управляемой системы (1.1), (1.2) тогда и только тогда, когда справедливы соотношения (6.2), (6.3). Включение (6.3) эквивалентно тому, что $u(\xi, \lambda) \in \text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$. Поэтому если $u(\xi, \lambda) \in \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ является непрерывным селектором отображения $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$, то $x(\xi, \lambda)$, определенное соотношением (6.2), согласно теореме 3.1 является непрерывным отображением из $\Lambda \times H$ в $C(T, H)$. Тогда функция $s(\xi, \lambda) = (x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$ является непрерывным селектором отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$. Поэтому с учетом теоремы 3.1 утверждения теоремы 6.1, утверждения а), с), d) и первая часть утверждения б)

следствия 6.1 являются перефразировками подобных утверждений из теоремы 5.1 и следствия 5.1.

Докажем теперь вторую часть утверждения б) следствия 6.1. Пусть $Z = C(T, H) \times L^q(T, Y)$. Пространство Z является метрическими и сепарабельным. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi^*: \Lambda \times H \times Z \times L^q(T, Y) \rightarrow L^q(T, Y)$, определенное по правилу

$$\Phi^*(\xi, \lambda, z, u) = \Phi(\xi, \lambda, u), \quad (\xi, \lambda, u) \in \Lambda \times H \times L^q(T, Y), \quad z \in Z. \quad (6.4)$$

Рассматривая $z \in Z$ как еще один новый параметр, мы получаем, что многозначное отображение $\Phi^*(\xi, \lambda, z, u)$ обладает теми же свойствами 1), 2), 4), которые установлены для отображения $\Phi(\xi, \lambda, u)$ в теореме 4.1. Поэтому для отображения $\text{Fix } \Phi^*(\xi, \lambda, z)$ согласно [12; теорема 3.1] справедливы утверждения теоремы 5.1. Обозначим через D график отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$.

Воспользовавшись утверждением 4) теоремы 4.1, теоремой 3.1 и (6.2), (6.3), мы получим, что D является замкнутым подмножеством пространства $\Lambda \times H \times Z$.

Пусть $z \in Z$, тогда $z = (x, u)$, $x \in C(T, H)$, $u \in L^q(T, Y)$. Рассмотрим функцию $h_D: D \rightarrow L^q(T, Y)$, определенную следующим образом:

$$h_D(\xi, \lambda, z) = u, \quad (\xi, \lambda, z) \in D. \quad (6.5)$$

Эта функция непрерывна на множестве D и, как следует из (6.3), (6.5),

$$h_D(\xi, \lambda, z) \in \Phi(\xi, \lambda, u), \quad (\xi, \lambda, z) \in D. \quad (6.6)$$

Воспользовавшись (6.4)–(6.6), мы получим

$$h_D(\xi, \lambda, z) \in \Phi(\xi, \lambda, h_D(\xi, \lambda, z)) = \Phi^*(\xi, \lambda, z, h_D(\xi, \lambda, z)), \quad (\xi, \lambda, z) \in D. \quad (6.7)$$

Из (6.7) следует, что $h_D(\xi, \lambda, z)$ является непрерывным селектором отображения $\text{Fix } \Phi^*(\xi, \lambda, z)$, определенным на D . Воспользовавшись утверждением б) теоремы 5.1, примененным к отображению $\text{Fix } \Phi^*(\xi, \lambda, z)$, мы получим, что существует непрерывная функция $h: \Lambda \times H \times Z \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$h(\xi, \lambda, z) \in \text{Fix } \Phi^*(\xi, \lambda, z), \quad (\xi, \lambda, z) \in \Lambda \times H \times Z, \quad (6.8)$$

$$h(\xi, \lambda, z) = h_D(\xi, \lambda, z) = u, \quad (\xi, \lambda, z) \in D. \quad (6.9)$$

Из (6.4), (6.8) следует, что

$$h(\xi, \lambda, z) \in \Phi^*(\xi, \lambda, z, h(\xi, \lambda, z)) = \Phi(\xi, \lambda, h(\xi, \lambda, z)). \quad (6.10)$$

Положим $x(\xi, \lambda, z) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, h(\xi, \lambda, z))$. Из непрерывности $h: \Lambda \times H \times Z \rightarrow L^q(T, Y)$ и теоремы 3.1 следует, что функция $x: \Lambda \times H \times Z \rightarrow C(T, H)$ непрерывна. Тогда согласно (6.2), (6.3) и (6.10) пара $(x(\xi, \lambda, z), u(\xi, \lambda, z))$ является решением управляемой системы (1.1), (1.2). Положим $g(\xi, \lambda, z) = g(\xi, \lambda, x, u) = (x(\xi, \lambda, x, u), h(\xi, \lambda, x, u))$, где $z = (x, u)$. Тогда $g(\xi, \lambda, x, u) \in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda, x, u) \in \Lambda \times H \times C(T, H) \times L^q(T, Y)$, и согласно (6.9)

$$g(\xi, \lambda, x, u) = (x, u), \quad (x, u) \in \mathcal{R}_U(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H.$$

Вторая часть утверждения б) следствия 6.1 доказана.

ЛЕММА 6.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенство (2.6). Тогда для отображений $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ справедливы все утверждения теоремы 6.1 и следствия 6.1. Более того, отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ является непрерывным по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждений леммы следует из леммы 5.1. Согласно утверждению а) теоремы 6.1 отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times L^q(T, Y)$. Поэтому оно является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Как и при доказательстве леммы 5.1, нам осталось доказать, что сужение отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ на любой компакт $Q \subset \Lambda \times H$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$.

Пусть $Q \subset \Lambda \times H$ – компакт. Тогда согласно лемме 5.1 график сужения отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$ на Q является компактом в $\Lambda \times H \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Воспользовавшись теоремой 3.1, мы получим, что график сужения отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ на Q является компактом в $\Lambda \times H \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Но это означает, что сужение отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ на Q является полунепрерывным сверху по Вьеторису из $\Lambda \times H$ в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации непрерывных селекторов отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ непрерывными селекторами отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$. Рассмотрим пространство $C(T, H) \times L_\omega^q(T, Y)$ (см. (5.1)) с нормой

$$\|h\|_{C, \omega} = \|(x, u)\|_{C, \omega} = \|x\|_{C(T, H)} + \|u\|_\omega, \quad (6.11)$$

где $\|\cdot\|_\omega$ – норма (5.1), $h = (x, u) \in C(T, H) \times L_\omega^q(T, Y)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенство (2.6). Тогда для любого непрерывного селектора $g: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $Q \subset \Lambda \times H$ существует непрерывный селектор $h: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ такой, что

$$\|g(\xi, \lambda) - h(\xi, \lambda)\|_{C, \omega} < \varepsilon, \quad (\xi, \lambda) \in Q. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный компакт $Q \subset \Lambda \times H$, и пусть $g: \Lambda \times H \rightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ – непрерывный селектор отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$, который существует согласно лемме 6.1. Тогда $g(\xi, \lambda) = (x(\xi, \lambda), v(\xi, \lambda))$, где $x(\xi, \lambda) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, v(\xi, \lambda))$ и $v(\xi, \lambda)$ – непрерывный селектор отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$. Как было показано при доказательстве теоремы 5.2, существует выпуклое, метризуемое, компактное подмножество $\mathcal{F} \subset w\text{-}L^q(T, Y)$ такое, что справедливо включение (5.5). Согласно теореме 5.2 существует последовательность $v_n: \Lambda \times H \rightarrow L^q(T, Y)$ непрерывных селекторов отображения $\text{Fix } \Phi(\xi, \lambda)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\xi, \lambda) \in Q} \|v(\xi, \lambda) - v_n(\xi, \lambda)\|_\omega = 0. \quad (6.13)$$

Положим

$$Z = \bigcup_{(\xi, \lambda) \in Q} \left(v(\xi, \lambda) \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} v_n(\xi, \lambda) \right) \right) \subset L^q(T, Y). \quad (6.14)$$

Так как $v_n(\xi, \lambda) \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi, \lambda)$, $n \geq 1$, то в соответствии с (5.5)

$$Z \subset \mathcal{F}. \quad (6.15)$$

Так как любое непрерывное отображение из $\Lambda \times H$ в $L^q(T, Y)$ является непрерывным и из $\Lambda \times H$ в $L_\omega^q(T, Y)$, то из (6.13) следует, что множество Z является компактом в $L_\omega^q(T, Y)$. Пусть Z_ω — множество с топологией, индуцированной топологией пространства $L_\omega^q(T, Y)$. В соответствии с (6.15) Z является ограниченным подмножеством пространства $L^q(T, Y)$. Тогда из [13; лемма 5.1] вытекает, что на множестве Z топологии пространств $w\text{-}L^q(T, Y)$ и $L_\omega^q(T, Y)$ совпадают. Поэтому в соответствии с теоремой 3.1 отображение $\mathcal{T}: Q \times Z_\omega \rightarrow C(T, H)$ является непрерывным. Поскольку множество $Q \times Z_\omega$ является компактом, то отображение $\mathcal{T}: Q \times Z_\omega \rightarrow C(T, H)$ равномерно непрерывно.

Пусть $x_n(\xi, \lambda) = \mathcal{T}(\xi, \lambda, v_n(\xi, \lambda))$, $n \geq 1$. Тогда $g_n(\xi, \lambda) = (x_n(\xi, \lambda), v_n(\xi, \lambda))$, $n \geq 1$, является непрерывным селектором отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$. Воспользовавшись (6.13), (6.14) и равномерной непрерывностью отображения $\mathcal{T}: Q \times Z_\omega \rightarrow C(T, H)$, мы получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\xi, \lambda) \in Q} \|x_n(\xi, \lambda) - x(\xi, \lambda)\|_{C(T, H)} = 0. \quad (6.16)$$

Поэтому в соответствии с (6.13), (6.16) для $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что

$$\|v(\xi, \lambda) - v_n(\xi, \lambda)\|_\omega < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|x(\xi, \lambda) - x_n(\xi, \lambda)\|_{C(T, H)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.17)$$

$n \geq n_0$, $(\xi, \lambda) \in Q$. Из (6.17) и (6.11) следует, что

$$\|g(\xi, \lambda) - g_n(\xi, \lambda)\|_{C, \omega} < \varepsilon, \quad (\xi, \lambda) \in Q, \quad n \geq n_0.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из последнего неравенства. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Мы ввели гипотезу $\Gamma(U) 2$, чтобы в рамках единых предположений доказать все результаты, приведенные в статье. Ряд из них справедлив при более слабых предположениях, чем гипотеза $\Gamma(U) 2$. Например, теоремы 4.1, 5.1, 6.1 и ряд утверждений из следствий 5.1, 6.1 остаются справедливыми, если вместо гипотезы $\Gamma(U) 2$ предположить, что при почти всех $t \in T$ и любом $x \in H$ отображение $\xi \mapsto U(t, x, \xi)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису (детали см. в [7], [12], [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Аппроксимация непрерывных селекторов отображения $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi, \lambda)$ непрерывными селекторами отображения $\mathcal{R}_U(\xi, \lambda)$ обычно называется *релаксацией*. Поэтому теорема 6.2 является теоремой релаксации для селекторов решений управляемой системы.

§ 7. Пример

В этом параграфе мы рассмотрим пример управляемой параболической системы и дадим интерпретацию полученных выше абстрактных результатов.

Пусть $T = [0, 1]$, Λ — компактное метрическое пространство, Z — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей ∂Z и Z_1 — проекция Z на первую координатную ось пространства $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим управляемую систему, описываемую параболическим уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}(t, z_1, \xi) D_j x) = f(t, z)u(t, z),$$

$$x|_{T \times \partial Z} = 0, \quad x(0, z) = x_0(z) = \lambda(z), \quad (7.1)$$

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z), \xi) \quad \text{п.в. в } T \times Z. \quad (7.2)$$

Здесь $D_i = \partial/\partial z_i$, $i = 1, \dots, N$.

Наряду с ограничениями (7.2) мы рассмотрим ограничение

$$u(t, z) \in \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z), \xi) \quad \text{п.в. в } T \times Z. \quad (7.3)$$

Введем следующие предположения, которые всюду в дальнейшем считаем выполненными.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ $\Gamma(a)$. Считаем, что $a_{ij}(t, z_1, \xi) = a_{ji}(t, z_1, \xi)$, $i = 1, \dots, N$, $z_1 \in Z_1$, $\xi \in \Lambda$, являются элементами пространства $L^\infty(T \times Z_1)$ такими, что

1) существуют константы $0 < m < M$, для которых имеют место неравенства

$$m|z|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, z_1, \xi) z_i z_j \leq M|z|^2, \quad z \in Z, \quad \xi \in \Lambda, \quad t \in T;$$

2) существует функция $l(t, z) \in L^\infty(T \times Z)$ такая, что

$$|a_{ij}(t, z_1, \xi) - a_{ij}(t + \tau, z_1, \xi)| \leq l(t, z)|\tau|, \quad z \in Z, \quad \xi \in \Lambda, \quad t + \tau, t \in T;$$

3) если $\xi_n \rightarrow \xi$, то для любого $t \in T$

$$\frac{1}{a_{11}(t, \cdot, \xi_n)} \rightarrow \frac{1}{a_{11}(t, \cdot, \xi)}, \quad \frac{a_{i1}(t, \cdot, \xi_n)}{a_{11}(t, \cdot, \xi_n)} \rightarrow \frac{a_{i1}(t, \cdot, \xi)}{a_{11}(t, \cdot, \xi)}, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$a_{ij}(t, \cdot, \xi_n) - \frac{a_{i1}(t, \cdot, \xi_n) a_{1j}(t, \cdot, \xi_n)}{a_{11}(t, \cdot, \xi_n)} \rightarrow a_{ij}(t, \cdot, \xi) - \frac{a_{i1}(t, \cdot, \xi) a_{1j}(t, \cdot, \xi)}{a_{11}(t, \cdot, \xi)},$$

$$i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq 1, \quad j \neq 1,$$

где сходимость понимается в $\sigma(L^\infty(Z), L^1(Z))$ топологии.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $\Gamma(f)$. Функция $f(t, z)$ является элементом пространства $L^\infty(T \times Z)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ $\Gamma(\tilde{U})$. Считаем, что $\tilde{U}: T \times Z \times R \times \Lambda \rightarrow R$ является многозначным отображением с замкнутыми значениями таким, что

- 1) отображение $(t, z) \mapsto \tilde{U}(t, z, x, \xi)$ измеримо;
- 2) отображение $\xi \mapsto \tilde{U}(t, z, x, \xi)$ непрерывно п.в. на $T \times Z$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
- 3) существует непрерывная функция $l: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}, \xi \in \Lambda$ почти всюду на $T \times Z$

$$D_{\mathbb{R}}(\tilde{U}(t, z, x, \xi), \tilde{U}(t, z, y, \xi)) \leq l(\xi)(t)|x - y|;$$

- 4) существуют $a(t, z) \in L^2(T \times Z, \mathbb{R}^+)$ и $b > 0$ такие, что $|U(t, z, x, \xi)| \leq a(t, z) + b|x|$ п.в. на $T \times Z$ для любых $x \in \mathbb{R}, \xi \in \Lambda$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $\Gamma(x_0)$. Считаем, что $x_0 = \lambda \in L^2(Z)$.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что гипотезы $\Gamma(a)$, $\Gamma(f)$, $\Gamma(\tilde{U})$, $\Gamma(x_0)$ имеют место.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Так как в рамках гипотез $\Gamma(\tilde{U})$ значениями отображения $\tilde{U}(t, z, x, \lambda)$ являются компактные подмножества пространства $\mathbb{R}$, то $\text{co } \tilde{U}(t, z, x, \lambda) = \text{co } \tilde{U}(t, z, x, \lambda)$, где co означает выпуклую оболочку множества. Поэтому вместо ограничения (1.3) мы рассматриваем ограничение 7.3.

В нашем примере мы берем $p = 2$.

Пусть $H_0^1(Z)$ – пространство Соболева [17]. Тогда его сопряженным является пространство $H^{-1}(Z)$. Положим $V = H_0^1(Z)$, $H = L^2(Z)$, $V^* = H^{-1}(Z)$. В качестве пространства Y мы берем пространство $L^2(Z)$. Как обычно, пространство $L^2(T, L^2(Z))$ мы отождествляем с пространством $L^2(T \times Z)$, полагая $u(t)(z) = u(t, z)$ для элемента $u \in L^2(T, L^2(Z))$ и $v(t, z) = v(t)(z)$ для элемента $v \in L^2(T \times Z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. При фиксированных $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in L^2(Z)$ пара функций $(x(\xi, \lambda), u(\xi, \lambda))$, $x(\xi, \lambda) \in L^2(T, H_0^1(Z))$ с $dx/dt \in L^2(T, H^{-1}(Z))$ и $u \in L^2(T \times Z) = L^2(T, L^2(Z))$, называется *решением управляемой системы* (7.1), (7.2), если для почти всех $t \in T$ и всех $y \in H_0^1(Z)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_Z x(t, z) y(z) dz + \int_Z \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, z_1, \xi) D_i x D_j y dz &= \int_Z f(t, z) u(t, z) y(z) dz, \\ x(0, z) &= \lambda(z) \end{aligned}$$

и включение

$$u(t, z) \in U(t, z, x(t, z), \xi) \quad \text{п.в. на } T \times Z.$$

Сведем управляемую систему (7.1), (7.2) к управляемой системе (1.1), (1.2). Рассмотрим форму Дирихле $a: T \times H_0^1(Z) \times H_0^1(Z) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$a(t, \xi, x, y) = \int_Z \sum_{i,j} a_{ij}(t, z_1, \xi) D_i x D_j y dz, \quad x, y \in H_0^1(Z).$$

Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(a)$ 1), с помощью хорошо известных рассуждений получим, что существует оператор $A: T \times H_0^1(Z) \times \Lambda \rightarrow H^{-1}(Z)$ такой, что

$$\langle y, A(t, x, \xi) \rangle = a(t, \xi, x, y), \quad x, y \in H_0^1(Z). \quad (7.4)$$

При фиксированных $t \in T$, $\xi \in \Lambda$ этот оператор является линейным, непрерывным и удовлетворяет гипотезам $\Gamma(A)$ 1)–4) с $K = \Lambda$.

Из гипотезы $\Gamma(a)$ 2) с достаточной очевидностью вытекает гипотеза $\Gamma(A)$ 5). И, наконец, из гипотезы $\Gamma(a)$ 3) и [23; лемма 3] мы получаем, что оператор $A(t, x, \xi)$ удовлетворяет гипотезе $\Gamma(A)$ 6). Таким образом, оператор $A(t, x, \xi)$, определенный по формуле (7.4), удовлетворяет всем гипотезам $\Gamma(A)$.

Пусть $B(t)u$, $u \in L^2(Z)$, – функция, определенная по правилу

$$(B(t)u)(z) = f(t, z)u(z), \quad z \in Z. \quad (7.5)$$

Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(f)$ и рассуждениями, приведенными в [24; § 7], мы получим, что формула (7.5) определяет оператор $B: T \rightarrow \mathcal{L}(L_2(Z), L_2(Z))$, удовлетворяющий гипотезам $\Gamma(B)$.

Рассмотрим многозначное отображение $(t, x) \mapsto U(t, x, \xi)$, $x \in L^2(Z)$, $\xi \in \Lambda$, определенное по правилу

$$U(t, x, \xi) = \{u \in L^2(Z) : u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z), \xi) \text{ п.в. на } Z\}. \quad (7.6)$$

Согласно [19; теорема 1.5] имеет место равенство

$$\overline{\text{co}} U(t, x, \xi) = \{u \in L^2(Z) : u(z) \in \text{co } \tilde{U}(t, z, x(z), \xi) \text{ п.в. на } Z\}. \quad (7.7)$$

Как было показано в [24; § 7], при выполнении гипотез $\Gamma(\tilde{U})$ 1), 3), 4) отображение $U(t, x, \xi)$ является отображением из $T \times L^2(Z) \times \Lambda$ в $CL^2(Z)$ и удовлетворяет гипотезам $\Gamma(U)$ 1), 3) и неравенству (2.6). Так как при фиксированном $x \in L^2(Z)$ при почти каждом $t \in T$ отображение $z \mapsto \tilde{U}(t, z, x(z), \xi)$ измеримо [24; § 7], то по аналогии с (3.5), принимая во внимание (7.6), мы получим

$$D_{L^2(Z)}(U(t, x, \xi_1), U(t, x, \xi_2)) \leq \left(\int_Z D_{\mathbb{R}}(\tilde{U}(t, z, x(z), \xi_1), \tilde{U}(t, z, x(z), \xi_2))^2 dz \right)^{1/2}. \quad (7.8)$$

Воспользовавшись гипотезами $\Gamma(\tilde{U})$ 3), 4), (7.8) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, мы приходим к выводу, что при почти всех $t \in T$ для любого $x \in L^2(Z)$ отображение $\xi \mapsto U(t, x, \xi)$ непрерывно, т.е. удовлетворяет гипотезе $\Gamma(U)$ 2). Следовательно, отображение $U(t, x, \xi)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(U)$ 1)–3) и неравенству (2.6).

И, наконец, включение $u(t) \in U(t, x(t), \xi)$, $x \in C(T, L^2(Z))$, $u \in L^2(T, L^2(Z)) = L^2(T \times Z)$, имеет место почти всюду на T тогда и только тогда, когда $u(t, z) = u(t)(z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z), \xi)$ почти всюду на $T \times Z$ [24; § 7]. Поэтому в соответствии с (7.2), (7.3) и (7.6), (7.7) с точки зрения определения решений управляемые системы (7.1), (7.2) и (7.1), (7.3) и порожденные ими управляемые системы (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) с операторами A , B и многозначными отображениями $U(t, x, \xi)$ и $\overline{\text{co}} U(t, x, \xi)$, определенными соотношениями (7.4), (7.5), (7.6) и (7.7), эквивалентны, т.е. имеют одни и те же решения. Поэтому применительно к управляемым системам (7.1), (7.2) и (7.1), (7.3) мы можем сформулировать все результаты § 6. Приведем некоторые из них.

Через $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda) \subset C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$, $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in L^2(Z)$, обозначим множество решений управляемой системы (7.1), (7.2). Под $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(\xi, \lambda)$ мы понимаем множество решений управляемой системы (7.1), (7.3).

ТЕОРЕМА 7.1. Для любых $(\xi, \lambda) \in \Lambda \times L^2(Z)$ множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda) \subset C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ не пусто и существует непрерывная функция $s: \Lambda \times L^2(Z) \rightarrow C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ такая, что

а) справедливо

$$s(\xi, \lambda) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda), \quad (\xi, \lambda) \in \Lambda \times H; \quad (7.9)$$

б) если $D \subset \Lambda \times L^2(Z)$ — замкнутое множество и $s_D: D \rightarrow C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ — непрерывная функция, $s_D(\xi, \lambda) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$, то существует непрерывная функция $s: \Lambda \times L^2(Z) \rightarrow C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ такая, что справедливо включение (7.9) и $s(\xi, \lambda) = s_D(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in D$;

в) отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $\Lambda \times L^2(Z)$ в $C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ с замкнутыми значениями, а отображение $(\xi, \lambda) \mapsto \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(\xi, \lambda)$ является непрерывным по Вьеторису из $\Lambda \times L^2(Z)$ в $C(T, L^2(Z)) \times w\text{-}L^2(T \times Z)$ с компактными значениями.

ТЕОРЕМА 7.2. Для любого непрерывного селектора $g = (x, u): \Lambda \times L^2(Z) \rightarrow C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ отображения $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(\xi, \lambda)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $Q \subset \Lambda \times L^2(Z)$ существует непрерывный селектор $h = (y, v): \Lambda \times L^2(Z) \rightarrow C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ отображения $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi, \lambda)$ такой, что

$$\sup_{t \in T} \left(\int_{\Omega} |x(\xi, \lambda)(t, z) - y(\xi, \lambda)(t, z)|^2 dz \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (\xi, \lambda) \in Q, \quad (7.10)$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left(\int_{\Omega} \left| \int_{t'}^t (u(\xi, \lambda)(\tau, z) - v(\xi, \lambda)(\tau, z)) d\tau \right|^2 dz \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (\xi, \lambda) \in Q. \quad (7.11)$$

Теорема 7.1 представляет собой перефразировку аналогичных утверждений из теоремы 6.1, следствия 6.1 и леммы 6.1. Теорема 7.2 является аналогом теоремы 6.2. Что же касается неравенств (7.10), (7.11), то они вытекают из (6.11) и (5.1). Мы не приводим других аналогов остальных результатов из §6 ввиду их очевидности, хотя все они имеют место.

Список литературы

1. Repovš D., Semenov P. V. Continuous selections of multivalued mappings. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
2. Ahmed N. U. Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space. Harlow / New York: Longman Scientific & Technical / John Wiley & Sons, 1988.
3. Tolstonogov A. A. Differential inclusions in a Banach space. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
4. De Blasi F. S., Pianigiani G., Staicu V. Topological properties of nonconvex differential inclusions of evolution type // Nonlinear Anal. 1995. V. 24. P. 711–720.
5. De Blasi F. S., Pianigiani G., Staicu V. On the solution sets of some nonconvex hyperbolic differential inclusions // Czechoslovak Math. J. 1995. V. 120. P. 107–116.
6. Tolstonogov A. A. Continuous selectors of fixed point sets of multifunctions with decomposable values // Set-Valued Anal. 1998. V. 6. P. 129–147.

7. Толстоногов А. А. L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. III. Приложения // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 6. С. 1380–1396.
8. Fryskowski A., Rzezuchowski T. Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem // J. Differential Equations. 1991. V. 94. P. 254–265.
9. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
10. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. О G -сходимости параболических операторов // УМН. 1981. Т. 36. № 1. С. 11–58.
11. Колпаков А. Г. G -сходимость одного класса эволюционных операторов // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 2. С. 90–104.
12. Толстоногов А. А. L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. I. Теоремы существования // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 3. С. 695–709.
13. Толстоногов А. А. L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. II. Теоремы релаксации // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 5. С. 1167–1181.
14. Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1965.
15. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
16. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
17. Гасевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
18. Papageorgiou N. S. On the “bang-bang” principle for nonlinear evolution inclusions // Dynam. Systems Appl. 1993. V. 2. P. 61–74.
19. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
20. Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
21. Brezis H. Operateurs maximaux monotones. Amsterdam: North Holland, 1973.
22. Толстоногов А. А. Экстремальные селекторы многозначных отображений и принцип “бэнг-бэнг” для эволюционных включений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 589–593.
23. Sokolowski J. Optimal control in coefficients for weak variational problems in Hilbert space // Appl. Math. Optim. 1981. V. 7. P. 283–293.
24. Толстоногов А. А. Свойства множества допустимых пар “траектория-управление” эволюционных управляемых систем первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 201–224.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
г. Иркутск-33
E-mail: aatol@icc.ru

Поступила в редакцию
28.05.2002 и 20.05.2003