Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Богатырёв, Чебышёвское представление рациональных функций, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 11, 19–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:08:21

УДК 517.545

А. Б. Богатырёв

Чебышёвское представление рациональных функций

Получено эффективное представление рациональных функций, у которых все критические точки, за исключением $g - 1$ из них, простые со значениями в множестве из четырех элементов. Такие функции описываются при помощи гиперэллиптических кривых рода $g \geq 1$. Классическая дробь Золотарёва в этой конструкции возникает при $g = 1$.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация, дробь Золотарёва, римановы поверхности, абелевы интегралы.

§ 1. Введение

Следующая оптимизационная задача естественно возникает при построении многополосных числовых и аналоговых фильтров.

Дана совокупность E непересекающихся отрезков действительной оси. На каждом из отрезков импульсная функция $F(x)$ равна 0 (полоса задержки) или 1 (полоса пропускания). Требуется среди вещественных рациональных функций $R(x)$ заданной степени n найти наилучшее приближение импульсной функции в равномерной метрике на указанных отрезках:

$$\|R - F\|_E := \max_{x \in E} |R(x) - F(x)| \longrightarrow \min.$$

Решение этой задачи имеет $2n + 2$ точек альтернанса (см. [1]), т.е. точки, в которых с последовательной переменой знака достигается норма отклонения. Всякая точка альтернанса из внутренности E является критической точкой решения со значением во множестве из четырех элементов $\pm \|R - F\|_E$, $1 \pm \|R - F\|_E$. При небольшом числе отрезков, составляющих E , число внутренних точек альтернанса почти равно общему количеству $2n - 2$ критических точек решения, подсчитанных с кратностями.

Цель данной работы состоит в эффективном представлении рациональных функций, у которых подавляющее большинство критических точек являются простыми с четырьмя различными значениями. Аналогичная задача возникает при исследовании задач о наименьшем отклонении в равномерной норме для многочленов. П. Л. Чебышёв изобрел способ описания многочленов, у которых подавляющее большинство критических точек являются простыми со значениями во множестве из двух элементов. Мы покажем, как видоизменить

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00393, № 08-01-00317, № 09-01-12160, № 10-01-00407) и Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики".

чебышёвскую конструкцию, чтобы она описывала рациональные функции с четырьмя исключительными критическими значениями.

Статья посвящается памяти В. И. Лебедева и Ф. Пехерстофера.

§ 2. Чебышёвское представление многочленов

Напомним основные детали чебышёвской конструкции для многочленов; ее подробное изложение можно найти в [2], [3]. Без потери общности считаем, что два выделенных критических значения – это ± 1 . Говоря неформально, число экстремальности многочлена равно g , если все его критические точки, за исключением g из них, простые со значениями ± 1 . Смысловая нагрузка термина “экстремальный” здесь двоякая. Во-первых, мы выделяем критические точки, не подчиняющиеся некоторому общему правилу, во-вторых, многочлены с небольшим числом $g = 0, 1, 2, \dots$ чаще других являются решениями различных задач на экстремум для равномерной нормы.

2.1. Число экстремальности многочлена. Числом экстремальности многочлена $P(x)$ назовем

$$g = \sum_{x: P(x) \neq \pm 1} \text{ord } P'(x) + \sum_{x: P(x) = \pm 1} \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ord } P'(x) \right\rfloor, \quad (2.1)$$

где $\text{ord } P'(x)$ – порядок нуля производной многочлена P в точке $x \in \mathbb{C}$, а $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.

2.2. Риманова поверхность. Чебышёвское соответствие состоит в сопоставлении всякому многочлену $P(x)$ двулистной римановой поверхности $M = M(E)$ с ветвлениями в точках $E := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$, в которых многочлен принимает значения ± 1 с нечетной кратностью (т.е. в общем положении – простые значения). Аффинная часть этой кривой задается уравнением

$$w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2. \quad (2.2)$$

Можно показать (см. [2], [3]), что число экстремальности (2.1) многочлена совпадает с родом сопоставляемой ему римановой поверхности M . По римановой поверхности (2.2) можно эффективно определить, произошла ли она из многочлена. На M есть единственный абелев дифференциал третьего рода $d\eta_M$ с простыми полюсами на бесконечности, вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами. Кривая (2.2) порождена многочленом степени n тогда и только тогда, когда

$$\int_C d\eta_M \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z} \quad \forall C \in H_1(M, \mathbb{Z}). \quad (2.3)$$

Приведенные включения накладывают $2g$ трансцендентных вещественных условий на $2g - 1$ комплексных модулей кривой $M(E)$. Если кривая вещественная (например, порожденная вещественным многочленом), то половина этих

условий автоматически удовлетворяется из-за зеркальной симметрии, и мы получаем g вещественных связей между вещественными модулями. Многочлен, породивший кривую, можно восстановить по явной формуле

$$P(x) = \pm \cos \left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad e \in E, \quad (2.4)$$

где результат вычисления не зависит от пути интегрирования по M , от двузначности в выборе $w(x)$ и от точки ветвления e , выбранной в качестве начальной точки интегрирования. С практической точки зрения важно то, что сложность вычисления по формуле (2.4) не зависит от степени n многочлена. В частных случаях $g = 0$ и $g = 1$ эта формула дает классические многочлены Чебышёва и Золотарёва соответственно. Формулу (2.4) будем называть *чебышёвским представлением многочлена*. Мотивация чебышёвского представления связана с классическим уравнением Пелля–Абея и его геометрической трактовкой.

2.3. Мотивировка чебышёвского соответствия. Пусть $P(x)$ – произвольный многочлен степени n . Выделим в многочлене $P^2 - 1$ полный квадрат, так что справедливо уравнение Пелля–Абея

$$P^2(x) - D(x)Q^2(x) = 1,$$

где многочлен $D(x)$ свободен от квадратов и его старший коэффициент равен 1. Нули коэффициента $D(x)$ уравнения Пелля–Абея образуют дивизор ветвления E кривой (2.2), сопоставляемой многочлену $P(x)$. Нетрудно видеть, что многочлен $Q(x)$ нацело делит $dP(x)/dx$, т.е. для некоторого многочлена $\rho(x) = x^g + \dots$ справедливо представление

$$P'(x) = n\rho(x)Q(x).$$

В результате уравнение Пелля–Абея становится дифференциальным уравнением

$$\frac{dP(x)}{\sqrt{P^2(x) - 1}} = n \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{D(x)}},$$

которое несложно решить:

$$P(x) = \pm \cos \left(ni \int_e^x \frac{\rho(s) ds}{\sqrt{D(s)}} \right).$$

Разумеется, для произвольных многочленов $D(x)$ и $\rho(x)$ правая часть последней формулы не является многочленом. Для того чтобы она была однозначной функцией от x , необходимо и достаточно выполнение включений

$$\int_C \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{D(x)}} \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z}$$

для всех целых 1-циклов C на римановой поверхности $M(E)$. В частности, все периоды дифференциала $\frac{\rho(x)dx}{\sqrt{D(x)}}$ чисто мнимые, поэтому он совпадает с дифференциалом $d\eta_M$, полностью определяемым по римановой поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Попутно мы получили следующее необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения Пелля–Абеля (о других условиях см. [4], [5]). На кривой $w^2 = D(x)$, задаваемой коэффициентом $D(x)$ уравнения Пелля–Абеля, специальным образом нормированный абелев дифференциал $\frac{1}{2\pi i} d\eta_M$ должен иметь рациональные периоды. Если это условие выполнено, то решения P, Q имеют соответственно вид

$$P(x) = \pm \cosh\left(n \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right), \quad \deg P = n,$$

$$Q(x)w(x) = \pm \sinh\left(n \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right), \quad \deg Q = n - g - 1,$$

где целое n делится на знаменатели всех периодов. Из этого представления следует такая структура решений $P(x)$ уравнения Пелля–Абеля: существует единственное с точностью до знака решение $P_0(x)$ наименьшей положительной степени, остальные решения являются композицией этого примитивного решения с классическим многочленом Чебышёва.

§ 3. Чебышёвское представление рациональных функций

Четверку различных точек на сфере можно подходящим дробно-линейным отображением перевести во множество

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\varkappa) := \left\{-1, 1, -\frac{1}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right\}, \quad \varkappa \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}.$$

Говоря неформально, число экстремальности рациональной функции равно g , если все ее критические точки, за исключением $g - 1$ из них, простые со значениями из множества $\mathcal{Q}$. Конечно, число экстремальности зависит от модуля $\varkappa$, но в данной работе мы фиксируем множество $\mathcal{Q}$ и явно эту зависимость указывать не будем.

3.1. Число экстремальности рациональной функции. Число экстремальности рациональной функции $R(x)$ относительно множества значений $\mathcal{Q}$ есть

$$g = 1 + \sum_{x: R(x) \notin \mathcal{Q}} \text{ord } dR(x) + \sum_{x: R(x) \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ord } dR(x) \right\rfloor, \quad (3.1)$$

где суммирование производится по всем точкам сферы Римана; $\text{ord } dR(x)$ – порядок нуля дифференциала голоморфного отображения $R: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ в точке x (например, в простых полюсах функции $R(x)$ это число равно нулю).

Для описания рациональных функций в большинстве критических точек, принимающих одно из заданных четырех значений, будем применять подход Чебышёва.

3.2. Риманова поверхность. Рациональной функции $R(x)$ сопоставим двулистную риманову поверхность $M = M(E)$ с ветвлением в точках $E := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$, в которых эта функция принимает значения из множества $\mathcal{Q}(\varkappa)$ с

нечетной кратностью (т.е. в общем случае простые значения). Аффинная часть этой кривой задается уравнением

$$w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2. \quad (3.2)$$

Если одна из точек ветвления находится на бесконечности, то соответствующий сомножитель в уравнении кривой отсутствует.

ЛЕММА 1. *Род римановой поверхности $M(E)$, сопоставляемой рациональной функции $R(x)$, равен числу экстремальности этой рациональной функции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рациональная функция $R(x)$ степени n имеет на римановой сфере $2n - 2$ критических точек, считая их кратности. Принимая во внимание определение (3.1) степени экстремальности и тождество

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = a, \quad a \in \mathbb{Z},$$

запишем равенство

$$2n - 2 = \sum_x \text{ord } dR(x) = g - 1 + \sum_{x: R(x) \in \mathbb{Q}} \left\lfloor \frac{1}{2} (\text{ord } dR(x) + 1) \right\rfloor.$$

Общее число точек из множества $R^{-1}\mathbb{Q}$, считая их кратности, равно $4n$, а точек, где эти кратности нечетные, по определению столько, сколько точек ветвления у кривой $M(E)$:

$$4n = \sum_{x: R(x) \in \mathbb{Q}} (\text{ord } dR(x) + 1) = \deg E + \sum_{x: R(x) \in \mathbb{Q}} 2 \left\lfloor \frac{1}{2} (\text{ord } dR(x) + 1) \right\rfloor,$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $2\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ равно a для четных a и равно $a - 1$ для нечетных a . Сравнивая два последних равенства, получаем, что $\deg E = 2g + 2$, т.е. род гиперэллиптической кривой $M(E)$ равен g .

3.3. Мотивация в духе уравнения Пелля–Абеля. Пусть $R(x)$ – произвольная рациональная функция, представленная в виде несократимой дроби. Выделим полный квадрат в числителе левой части следующего выражения:

$$(R^2(x) - 1)(\varkappa^2 R^2(x) - 1) =: D_{2g+2}(x) S^2(x), \quad (3.3)$$

где $S(x)$ – рациональная функция, в знаменателе которой стоит квадрат знаменателя дроби $R(x)$. Унимодальный (monic) многочлен $D(x)$ тот же, что и в правой части уравнения (3.2). Он имеет степень $2g + 2$, если $R(x)$ не принимает на бесконечности значений из множества $\mathbb{Q}$ с нечетной кратностью. В противном случае $D(x)$ – многочлен степени $2g + 1$.

Несложно видеть, что все нули функции $S(x)$ будут также нулями производной функции $R(x)$, поэтому

$$R'(x) = S(x)\rho(x), \quad (3.4)$$

где $\rho(x)$ – некоторый многочлен. Степень этого многочлена можно определить, сравнив асимптотики $R(x)$ и $S(x)$ на бесконечности (следует отдельно рассмотреть случаи, когда значение $R(\infty)$ бесконечно или лежит во множестве $\mathbb{Q}$). Оказывается, что всегда $\deg \rho(x) < g$. Уравнение типа Пелля–Абеля (3.3) теперь можно переписать в виде дифференциального:

$$\frac{dR}{\sqrt{(R^2(x) - 1)(\varkappa^2 R^2(x) - 1)}} = \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{D(x)}}. \quad (3.5)$$

Это уравнение нетрудно решить и получить представление исходной рациональной функции в виде

$$R(x) = \operatorname{sn} \left(\int_e^x \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{D(x)}} + A(e) \right), \quad (3.6)$$

где согласованный выбор точки e и фазового сдвига $A(e)$ будет произведен позднее. Правая часть последнего равенства должна быть однозначной функцией от x , поэтому интегралы от голоморфного на римановой поверхности $M(\mathbf{E})$ дифференциала $\rho(x) \frac{dx}{w}$ по всем целым 1-циклам на этой поверхности должны лежать в решетке $4K(\varkappa)\mathbb{Z} + 2iK'(\varkappa)\mathbb{Z}$, где $K(\varkappa)$ и $K'(\varkappa)$ – полные эллиптические интегралы модуля $\varkappa$. Существование такого дифференциала, конечно, накладывает ограничения на модули римановой поверхности.

Представление рациональной функции в виде (3.6) будем называть *чебышёвским представлением*. Как и в случае многочленов, сложность вычислений по этой формуле не зависит от степени рациональной функции. Поэтому ее можно использовать как подстановку при решении задач оптимизации фильтров. Ниже будет показано, что классическую дробь Золотарёва (решение задачи о наилучшем рациональном приближении функции sign) можно представить в таком виде.

§ 4. Образ чебышёвского соответствия

ТЕОРЕМА 1. *Гиперэллиптическая кривая является образом рациональной функции при чебышёвском соответствии тогда и только тогда, когда она (возможно, с ветвлением) накрывает тор $T(\mathbb{Q})$, аффинную часть которого задает уравнение*

$$s^2 = (r^2 - 1)(\varkappa^2 r^2 - 1), \quad (r, s) \in \mathbb{C}^2. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если кривая M получена в результате применения чебышёвской конструкции к рациональной функции R , то накрытие тора задается рациональным отображением

$$M \ni (x, w) \xrightarrow{\tilde{R}} (R(x), wS(x)) = (r, s) \in T, \quad (4.2)$$

в котором функция $S(x)$ та же, что и в уравнении типа Пелля–Абеля (3.3). Видно, что это накрытие эквивариантно относительно действия гиперэллиптических инволюций $J_M(x, w) := (x, -w)$ на кривой и $J_T(r, s) := (r, -s)$ на торе.

Дадим также чисто топологическое доказательство существования накрытия $M \rightarrow T$, перестановочного с действиями инволюций. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} M(E) - \tilde{R} & \twoheadrightarrow & T(Q) \\ p_M \downarrow & & \downarrow p_T \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}P^1 \end{array} \quad (4.3)$$

$p_M(x, w) := x$ и $p_T(r, s) := r$ – факторотображения по действию инволюций J_M и J_T соответственно. Они являются двулиственными накрытиями, ветвящимися над точками E и Q соответственно. Существование поднятия отображения R на накрывающие пространства равносильно следующему вложению образов фундаментальных групп (см. [6]):

$$(R \circ p_M)\pi_1(M \setminus p_M^{-1}R^{-1}Q) \subset p_T\pi_1(T \setminus p_T^{-1}Q)$$

при согласованном выборе отмеченных точек для фундаментальных групп. Проверим это вложение на образующих фундаментальной группы проколотой поверхности M . В качестве образующих будем брать петли двух видов:

(А) $2g$ петель, порождающих каноническое рассечение непроколотой поверхности;

(В) петли, огибающие проколы $p_M^{-1}R^{-1}Q$ на поверхности и не пересекающие (за исключением начальной точки) петли из класса (А).

Рис. 1. Проекция на проколотую сферу образующих группы $\pi_1(M \setminus p_M^{-1}R^{-1}Q)$. Отмеченной точкой фундаментальной группы является бесконечность; $\bullet$ – точки дивизора ветвления E ; $\circ$ – другие точки множества $R^{-1}Q$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – проекции петель класса (А), β_1 – проекция петли подкласса (В1), β_2 – проекция петли подкласса (В2)

Петли класса (А) можно выбрать так, чтобы проекция p_M каждой такой петли на сферу была произведением двух петель из $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus R^{-1}Q)$, каждая из

которых охватывает ровно одну точку множества E (рис. 1). Отображение $R(x)$ переводит петлю такого вида в произведение двух петель, каждая из которых нечетное число раз обходит один из проколов из множества Q . Последняя петля поднимается до петли на торе.

Петля класса (B) огибает: либо – подкласс (B1) – точку ветвления $(e, 0)$, либо – подкласс (B2) – прокол (x, w) , для которого индекс (ветвления) отображения R в точке x четный. В каждом из этих случаев образ петли класса (B) при отображении Rp_M является петлей, обходящей четное число раз вокруг одной из точек множества Q . Такая петля поднимается до петли на торе.

Из конструкции поднятия отображения легко вытекает уже отмеченная эквивариантность:

$$\tilde{R}J_M = J_T\tilde{R}. \quad (4.4)$$

2. Обратно, пусть гиперэллиптическая кривая M накрывает тор (4.1). Ниже мы покажем, что существует также накрытие $\tilde{R}$, перестановочное с действиями инволюций J_M и J_T . Как только это будет установлено, отображение $\tilde{R}$ можно будет опустить до отображения R в базах диаграммы (4.3). Из эквивариантности (4.4) следует, что отображение $\tilde{R}$ переводит неподвижные точки $(e, 0)$ инволюции J_M в неподвижные точки инволюции J_T на торе и имеет в них нечетный индекс ветвления. Соответственно, образ дивизора ветвления RE целиком лежит в Q и индекс ветвления $R(x)$ в каждой из точек $e \in E$ нечетный. Во всех других прообразах $x \in R^{-1}Q$ индекс четный, так как индексы ветвления отображений при композиции перемножаются и

$$\text{ind } p_M(x, w) = \begin{cases} 1, & x \notin E, \\ 2, & x \in E, \end{cases} \quad \text{ind } p_T(r, s) = \begin{cases} 1, & r \notin Q, \\ 2, & r \in Q. \end{cases} \quad (4.5)$$

Как видим, чебышёвская конструкция сопоставляет рациональной функции $R(x)$ именно кривую M .

Покажем, как подправить заданное накрытие $\tilde{R}: M \rightarrow T$ так, чтобы выполнялось условие эквивариантности. Фиксируем голоморфный дифференциал $d\eta \neq 0$ на торе. Его периоды образуют решетку

$$L = L(\eta) := \left\{ \int_C d\eta, C \in H_1(T, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Тор имеет представление в виде фактора комплексной плоскости по этой решетке, причем соответствие $T \rightarrow \mathbb{C}/L$ имеет вид

$$\eta(r, s) = \int_{(1,0)}^{(r,s)} d\eta \pmod{L(\eta)}$$

(смена начальной точки интегрирования приводит к скольжениям тора). Запишем действие накрытия $\tilde{R}$ в этой модели:

$$\eta(\tilde{R}(x, w)) - \eta(\tilde{R}(e, 0)) = \int_{\tilde{R}(e,0)}^{\tilde{R}(x,w)} d\eta = \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta. \quad (4.6)$$

Здесь $d\zeta := \check{R}^* d\eta$ – дифференциал, перенесенный с тора на кривую M . Этот дифференциал голоморфный, а значит, меняет знак при действии гиперэллиптической инволюции: $J_M^* d\zeta = -d\zeta$. Продолжим равенство (4.6):

$$\int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta = - \int_{(e,0)}^{(x,-w)} d\zeta = -(\eta(\check{R}(x, -w)) - \eta(\check{R}(e, 0))). \quad (4.7)$$

Равенства (4.6) и (4.7) можно интерпретировать как эквивариантность накрытия $\check{R}$ относительно действия инволюции J_M на кривой M и инволюции на торе T , действующей в плоскости переменной η по правилу

$$\eta \rightarrow 2\eta(\check{R}(e, 0)) - \eta \pmod{L}.$$

Эта инволюция тора имеет четыре неподвижные точки $\eta(\check{R}(e, 0)) + L/2 \pmod{L}$ и, вообще говоря, не совпадает с введенной нами ранее инволюцией J_T , действующей в нашей модели как $\eta \rightarrow -\eta \pmod{L}$. Однако, комбинируя $\check{R}$ с подходящим скольжением тора, мы можем определить новое накрытие $\tilde{R}$, которое удовлетворяет нужному условию эквивариантности (4.4). Несложно видеть, что имеется ровно четыре подходящих скольжения тора. Они приводят к четырем рациональным функциям $\{\pm R, \pm 1/(\varkappa R)\}$, составляющим орбиту действия четверной группы Клейна и порождающим при чебышёвском соответствии одну и ту же риманову поверхность M .

Теорема 1 доказана.

Образ чебышёвского соответствия можно описать более явно – в духе соотношений (2.3), показывающих, что все периоды некоторого абелева дифференциала на поверхности соизмеримы. Мы не сильно потеряем в общности, если сделаем это в практически важном случае вещественных рациональных функций и $\varkappa \in (0, 1)$. В этом случае кривая M и тор T будут вещественными, т.е. будут допускать действие антиконформных инволюций $\bar{J}_M(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$, $\bar{J}_T(r, s) := (\bar{r}, \bar{s})$. Действие только что введенных отражений накладывает отпечаток на структуру одномерных гомологий поверхности, которые мы и рассмотрим в следующем параграфе.

§ 5. Одномерные циклы на вещественной кривой

Пусть на римановой поверхности M действует антиконформная инволюция $\bar{J}$ (отражение). Действие отражения естественно переносится на $2g$ -мерное вещественное пространство одномерных гомологий поверхности, которое расщепляется в сумму подпространств, отвечающих собственным числам ± 1 оператора $\bar{J}$:

$$H_1(M, \mathbb{R}) = H_1^+(M, \mathbb{R}) \oplus H_1^-(M, \mathbb{R}), \quad H_1^\pm(M, \mathbb{R}) := (I \pm \bar{J})H_1(M, \mathbb{R}). \quad (5.1)$$

Циклы $C = \bar{J}C$ пространства $H_1^+(M)$ будем называть *четными*. Соответственно, циклы $C = -\bar{J}C$ пространства $H_1^-(M)$ назовем *нечетными*. Пространства четных и нечетных циклов содержат решетки целых циклов

$$H_1^\pm(M, \mathbb{Z}) := H_1^\pm(M, \mathbb{R}) \cap H_1(M, \mathbb{Z})$$

полного ранга.

На пространстве $H_1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g}$ имеется симплектическая форма, порожденная индексом пересечения циклов. Поскольку отражение $\bar{J}$ меняет ориентацию в каждой точке пересечения целых циклов, то

$$\bar{J}C_1 \circ \bar{J}C_2 = -C_1 \circ C_2, \quad C_1, C_2 \in H_1(M, \mathbb{R}). \quad (5.2)$$

Отсюда несложно вывести, что подпространства четных и нечетных циклов – лагранжевы (т.е. ограничение на них формы пересечений нулевое) и их размерности равны половине размерности объемлющего пространства.

ЛЕММА 2. *Размерность пространства $\dim H_1^\pm(M, \mathbb{R})$ равна g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения (5.1) следует, что сумма размерностей подпространств четных и нечетных циклов равна $2g$. Покажем, что размерность одного подпространства не может быть больше размерности другого. Пусть это не так, например $\dim H_1^+(M, \mathbb{R}) > \dim H_1^-(M, \mathbb{R})$. Форма пересечений задает линейное действие четных циклов на нечетных. Из указанного соотношения размерностей следует существование четного цикла, аннулирующего все нечетные. Индекс пересечения этого четного цикла с любым элементом $H_1(M, \mathbb{R})$ равен нулю, что противоречит невырожденности формы пересечений.

ЛЕММА 3. 1. *Базис пространства четных (нечетных) циклов можно использовать для нормировки абелевых дифференциалов.*

2. *Три утверждения равносильны:*

- (i) *голоморфный дифференциал $d\xi$ является вещественным;*
- (ii) $\int_{C^+} d\xi \in \mathbb{R}$ *при всех четных C^+ ;*
- (iii) $\int_{C^-} d\xi \in i\mathbb{R}$ *при всех нечетных C^- .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_g$ – базис пространства четных (соответственно нечетных) циклов. Нам нужно показать, что если интегралы от голоморфного дифференциала по указанным g циклам равны нулю, то и сам дифференциал нулевой. Дополним выбранный базис до базиса во всем пространстве гомологий. Для гладких замкнутых 1-форм $d\omega$, $d\xi$ на поверхности M и базиса в гомологиях $C_1, C_2, \dots, C_{2g}$ (возможно, неканонического и нецелого) справедливо билинейное соотношение Римана (см. [2])

$$\int_M d\omega \wedge d\xi = - \sum_{s,j=1}^{2g} F_{sj} \int_{C_s} d\omega \int_{C_j} d\xi,$$

где матрица F_{sj} обратна матрице пересечений $C_s \circ C_j$. Полагая здесь $d\xi = \overline{d\omega}$, получим

$$0 \leq \|d\omega\|^2 = i \int_M d\omega \wedge \overline{d\omega} = -i \sum_{s,j=1}^{2g} F_{sj} \int_{C_s} d\omega \overline{\int_{C_j} d\omega}. \quad (5.3)$$

Если $\int_{C_j} d\omega = 0$ при $j = 1, \dots, g$, то в сумме в правой части остаются члены с $s, j > g$. Но в этом случае $F_{sj} = 0$. Действительно, матрица пересечений

имеет блочную структуру 2×2 с нулевым блоком размера $g \times g$ в позиции $(1, 1)$. Обратная матрица имеет нулевой блок того же размера в позиции $(2, 2)$. Как видим, только нулевой голоморфный дифференциал имеет нулевые периоды вдоль всех четных (соответственно нечетных) циклов.

2. Голоморфный дифференциал $d\xi$ называется *вещественным*, если при действии отражения он переходит в комплексно сопряженный: $\bar{J}^* d\xi = \overline{d\xi}$. Если цикл $C \in H_1^\pm(M)$ четный или нечетный, то

$$\int_C d\xi = \int_{\pm \bar{J}C} d\xi = \pm \int_C \bar{J}^* \xi = \pm \int_C \overline{d\xi} = \pm \overline{\int_C d\xi}.$$

Обратно, пусть голоморфный дифференциал $d\xi$ имеет вещественные периоды вдоль всех четных циклов или чисто мнимые периоды вдоль всех нечетных циклов. Тогда дифференциал $\bar{J}^* \overline{d\xi} - d\xi$ имеет нулевые периоды вдоль всех четных или всех нечетных циклов. Из первого утверждения леммы следует, что он нулевой, а это равносильно вещественности дифференциала $d\xi$.

§ 6. Базисы решеток четных и нечетных циклов на гиперэллиптической кривой

Для исследования чебышёвского представления вещественных рациональных функций нам потребуются базисы в решетках целых четных и нечетных циклов на вещественной гиперэллиптической кривой, а также в подрешетках (анти)симметризованных циклов

$$L_M^\pm := (I \pm \bar{J})H_1(M, \mathbb{Z}) \subset H_1^\pm(M, \mathbb{Z}).$$

Пусть дивизор ветвления E римановой поверхности (3.2) содержит $2k$ вещественных точек и $g - k + 1$ пар комплексно сопряженных точек. При $k > 0$ топологический инвариант k имеет смысл числа вещественных овалов поверхности. Случай $k = 0$ имеет особенности и будет рассматриваться отдельно.

6.1. Случай $k > 0$. Проведем на сфере Римана не пересекающиеся разрезы, попарно соединяющие точки ветвления поверхности и инвариантные при комплексном сопряжении. Вещественные точки ветвления соединим k отрезками, вдоль которых $w^2(x) < 0$. Каждую пару комплексно сопряженных точек ветвления соединим простой дугой так, что все разрезы этой группы пересекают проекцию одного и того же вещественного овала. В качестве модели кривой будем брать две копии сферы Римана, склеенные крест-накрест по введенным разрезам. Отражение $\bar{J}$ действует, как комплексное сопряжение на каждом листе. На рис. 2 жирными линиями показана система разрезов, а тонкими линиями показаны g нечетных и g четных циклов на поверхности (штриховая линия означает, что контур проходит по нижнему листу). Например, нечетные циклы проходят по берегу введенных разрезов на одном листе; $k - 1$ первых из введенных четных циклов – это вещественные овалы кривой. В выборе последних $g - k + 1$ четных и нечетных циклов есть большой произвол. Подробнее об этом см. [2].

Рис. 2. Система разрезов плоскости и базис в решетке: а) $H_1^-(M, \mathbb{Z})$; б) $H_1^+(M, \mathbb{Z})$

Лишь следующие элементы матрицы пересечений для введенных $2g$ циклов не равны нулю:

$$\begin{aligned}
 C_s^+ \circ C_s^- &= 1, & s &= 1, \dots, k-1, \\
 C_s^+ \circ C_{s-1}^- &= -1, & s &= 2, \dots, k-1, \\
 C_s^+ \circ C_s^- &= 2, & s &= k, \dots, g.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Матрица пересечений построенных циклов невырожденна, но не унимодальна при $k \leq g$. Поэтому указанные циклы образуют базис в пространстве гомологий с вещественными коэффициентами, однако разложение целых циклов по этому базису имеет, вообще говоря, полуцелые коэффициенты.

ЛЕММА 4. При $k > 0$:

- 1) циклы $C_1^\pm, C_2^\pm, \dots, C_g^\pm$ образуют базис в решетке $H_1^\pm(M, \mathbb{Z})$;
- 2) циклы $2C_1^\pm, 2C_2^\pm, \dots, 2C_{k-1}^\pm, C_k^\pm, \dots, C_g^\pm$ образуют базис в решетке $L_M^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем рассуждения для решеток нечетных циклов. Для четных циклов аргументация та же.

1) Достаточно представить g линейных функционалов со значениями в $\mathbb{Z}$, значения которых на циклах $C_1^-, \dots, C_g^-$ образуют матрицу с определителем ± 1 . В качестве таких функционалов будем брать индексы пересечения со следующими целыми циклами:

$$\begin{aligned} D_1 &:= C_1^+, \\ D_2 &:= C_2^+ + C_1^+, \\ &\dots\dots\dots \\ D_{k-1} &:= C_{k-1}^+ + C_{k-2}^+ + \dots + C_1^+. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Оставшиеся циклы D_j – это целые решения уравнений

$$D_j + \bar{J}D_j = C_j^+, \quad j = k, \dots, g;$$

один из таких циклов показан на рис. 2, а). Для последних циклов справедливо равенство $2D_j \circ C^- = C_j^+ \circ C^-$, $j = k, \dots, g$, $C^- \in H_1^-$. Все индексы пересечения теперь можно восстановить из (6.1), и несложно подсчитать, что матрица $D_s \circ C_j^-$ единичная.

2) Элемент решетки L_M^- антисимметризованных целых циклов можно разложить по введенному базису в решетке целых нечетных циклов. Коэффициентами этого разложения являются индексы пересечения с циклами D_j . Заметим, что циклы $D_1, \dots, D_{k-1}$ четные, поэтому коэффициенты при образующих $C_1^-, \dots, C_{k-1}^-$ будут четными:

$$(C - \bar{J}C) \circ C^+ = 2C \circ C^+, \quad C \in H_1(M, \mathbb{Z}), \quad C^+ \in H_1^+(M, \mathbb{Z}).$$

6.2. Пример. Тор (4.1) при $\varkappa \in (0, 1)$ имеет два вещественных овала. Четные и нечетные гомологии порождаются циклами C^+ и C^- , показанными на

Рис. 3. Образующие решеток четных и нечетных циклов в пространстве гомологий тора

рис. 3. На торе существует единственный голоморфный дифференциал, нормированный условием

$$\int_{C^+} d\eta := 2 \tag{6.3}$$

и определяющий период

$$\tau := \int_{C^-} d\eta \in i\mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Этот дифференциал потребуется нам в следующем параграфе, он вещественный и имеет вид

$$d\eta = \frac{dr}{2K(\kappa)s}.$$

6.3. Случай $k = 0$. Случай $k = 0$ в приложении к задачам приближения не встречается, и мы рассматриваем его только для полноты картины. Вещественная гиперэллиптическая кривая без вещественных точек ветвления может вообще не иметь вещественных овалов (как, например, кривая $w^2 + x^4 + 1 = 0$). Рассматриваемая нами кривая (3.2) имеет один вещественный овал при четном g и два вещественных овала при нечетном g . В этих случаях имевшейся ранее симметрии между четными и нечетными циклами уже нет.

Пусть, как и ранее, комплексно сопряженные точки ветвления соединены не пересекающимися разрезами, инвариантными при отражении в вещественной оси. Обходы по берегам этих разрезов (рис. 4) дадут $g + 1$ нечетных циклов, в сумме дающих нуль. Один из этих циклов мы отбросим, а остальные обозначим $C_1^-, C_2^-, \dots, C_g^-$ (см. рис. 4, а).

Рис. 4. Вещественная гиперэллиптическая кривая без вещественных точек ветвления: а) базис нечетных циклов; б) вспомогательные циклы для определения базиса четных циклов

Определим четные циклы: $C_j^+ := D_j + \bar{J}D_j$, $j = 1, \dots, 2[g/2]$, где целые циклы D_j представлены на рис. 4, б). При нечетном g оставшийся цикл

$$C_g^+ := D_1 + D_3 + D_5 + \dots + D_g$$

гомологичен вещественному овалу (любому из двух) кривой. При четном g вещественный овал гомологичен нулю.

ЛЕММА 5. При $k = 0$:

- 1) циклы $C_1^\pm, C_2^\pm, \dots, C_g^\pm$ образуют базис в решетке $H_1^\pm(M, \mathbb{Z})$;
- 2) при четном g решетка $L_M^\pm$ совпадает с решеткой $H_1^\pm(M, \mathbb{Z})$;
- 3) при нечетном g решетку L_M^- образуют целочисленные линейные комбинации введенных нечетных базисных циклов с четной суммой коэффициентов; циклы $C_1^+, C_2^+, \dots, C_{g-1}^+, 2C_g^+$ образуют базис решетки L_M^+ .

Доказательство леммы основано на предъявлении целых циклов, образующих с базисом соответствующей решетки единичную матрицу пересечений. Детали мы опускаем для экономии места.

§ 7. Основная теорема

ТЕОРЕМА 2. Вещественная гиперэллиптическая кривая $M(E)$ является образом вещественной рациональной функции $R(x)$ при чебышёвском соответствии, если и только если на кривой есть голоморфный дифференциал $d\zeta$, периоды которого удовлетворяют вложениям

$$\int_C d\zeta \in 4\mathbb{Z}, \quad C \in L_M^+ := (I + \bar{J}_M)H_1(M, \mathbb{Z}), \quad (7.1)$$

$$\int_C d\zeta \in 2\tau\mathbb{Z}, \quad C \in \begin{cases} L_M^- := (I - \bar{J}_M)H_1(M, \mathbb{Z}), & k > 0, \\ H_1^-(M, \mathbb{Z}), & k = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

с модулем τ , определенным в (6.4).

При выполнении включений (7.1), (7.2) восстановить рациональную функцию можно по формуле

$$R(x) = \operatorname{sn} \left(2K(\tau) \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta + A(e) \middle| \tau \right), \quad A(e) := K(\tau) \begin{cases} \pm 1, & R(e) = \pm 1, \\ \pm 1 + \tau, & R(e) = \pm \frac{1}{\varkappa}, \end{cases} \quad (7.3)$$

в которой результат вычисления не зависит от пути интегрирования на M , от двузначности в выборе $w(x)$ и от точки ветвления e , выбранной в качестве начальной точки интегрирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) Замена фазового слагаемого $A(e)$ в формуле восстановления (7.3) приводит к действию четверной группы Клейна на множестве из четырех рациональных функций $\pm R(x)$, $\pm 1/(\varkappa R(x))$, порождающих одну и ту же риманову поверхность $M(E)$.

2) На одной и той же кривой $M(E)$ может быть несколько форм $d\zeta$, удовлетворяющих вложениям (7.1), (7.2).

3) Одно из вложений (7.1) или (7.2) можно рассматривать как нормировку (определение) голоморфного дифференциала, тогда оставшиеся вложения дадут g вещественных соотношений между $2g - 1$ вещественными модулями римановой поверхности $M(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1. Пусть вещественная рациональная функция порождает риманову поверхность. Мы знаем, что эта риманова поверхность будет покрывать тор, причем покрытие перестановочно с действиями гиперэллиптических инволюций J_M на кривой и J_T на торе. Несложно видеть (например, из (4.2)), что покрытие перестановочно также и с отражениями $\bar{J}_M$, $\bar{J}_T$, действующими соответственно на кривой и на торе.

Накрытие $\tilde{R}$ переносит определенный в (6.3) дифференциал $d\eta$ с тора на поверхность M :

$$d\zeta := \tilde{R}^* d\eta. \quad (7.4)$$

Для всякого целого цикла C на поверхности справедливы равенства

$$\int_{C \pm \bar{J}_M C} d\zeta = \int_{\tilde{R}C \pm \tilde{R}\bar{J}_M C} d\eta = \int_{(I \pm \bar{J}_T)\tilde{R}C} d\eta, \quad (I \pm \bar{J}_T)\tilde{R}C \in 2\mathbb{Z}C^\pm,$$

откуда следуют вложения (7.1), а при $k > 0$ также и вложения (7.2). При $k = 0$ вложения (7.2) нужно доказать для всех нечетных целых циклов на поверхности, а не только для антисимметризованных.

Вспомним, что при $k = 0$ в качестве базиса нечетных циклов можно взять циклы вида $C = B - JB$, где $B = -\bar{J}_M B$ – симметричная дуга (незамкнутая цепь), соединяющая пару точек ветвления. На концах дуги B вещественная функция $R(x)$ принимает одно и то же значение из множества $\mathbb{Q}$, поэтому $\tilde{R}B$ – замкнутая цепь на торе. Соответственно, $\tilde{R}C = 2\tilde{R}B \in 2H_1(T, \mathbb{Z})$, так как гиперэллиптическая инволюция действует на гомологиях просто сменой знака. Итак, вложения (7.2) установлены и при $k = 0$.

Получим наконец формулу восстановления (7.3) рациональной функции. Поднимем действие $\tilde{R}$ на универсальную накрывающую тора:

$$\int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta = \int_{\tilde{R}(e,0)}^{\tilde{R}(x,w)} d\eta = \eta(\tilde{R}(x,w)) - \eta(\tilde{R}(e,0)), \quad (7.5)$$

где $\eta(r,s) := \int_{(0,1)}^{(r,s)} d\eta$ – изоморфное отображение универсальной накрывающей тора на комплексную плоскость. Функция $r(\eta)$ периодическая относительно решетки $L = L(\eta) := 2\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ с простыми нулями при $\eta = 0, 1$, с простыми полюсами при $\eta = \tau/2, 1 + \tau/2$ и нормированная равенством $r(1/2) = 1$. Этих данных достаточно для восстановления этой функции: $r(\eta) = \text{sn}(2K(\tau)\eta|\tau)$, где $K(\tau)$ – полный эллиптический интеграл модуля $\varkappa(\tau)$.

Из коммутативности диаграммы (4.3) следует, что

$$R(x) = p_T \circ \tilde{R}(x,w) = r(\eta(\tilde{R}(x,w))) = \text{sn}\left(2K(\tau)\left(\int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta + \eta(\tilde{R}(e,0))\right)\middle|\tau\right).$$

Фазовый сдвиг в последней формуле определяется по отображению выделенной точки ветвления e поверхности:

$$R(e) \in \mathbb{Q}, \quad \eta(\pm 1, 0) = \pm \frac{1}{2} \pmod{L}, \quad \eta\left(\pm \frac{1}{\varkappa}, 0\right) = \pm \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \pmod{L}.$$

2. Обратно, пусть на кривой $M(E)$ найдется голоморфный дифференциал, периоды которого удовлетворяют вложениям (7.1), (7.2). Покажем, что правая часть формулы (7.3) задает однозначную функцию на сфере. Раскладывая произвольный целый цикл C на поверхности $M(E)$ на (полуцелые) четную и нечетную компоненты, получаем из вложений (7.1), (7.2), что

$$\int_C d\zeta \in L := 2\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}.$$

Соответственно, аргумент эллиптического синуса в формуле (7.3) определен с точностью до элемента решетки $4K\mathbb{Z} + 2K'\mathbb{Z}$. Тем самым, правая часть формулы не зависит от пути интегрирования, соединяющего точку ветвления $(e, 0)$ и поднятие (x, w) аргумента x на риманову поверхность. От поднятия (т.е. знака $w(x)$) тоже ничего не зависит: функция $\operatorname{sn}(A(e) + u)$ является четной от аргумента u , а голоморфный дифференциал $d\zeta$ меняет знак при гиперэллиптической инволюции.

Особенности функции в правой части формулы (7.3) не более чем степенные, поэтому она является рациональной функцией переменной x . Покажем, что эта функция вещественная. Из условий (7.1) видно, что периоды дифференциала $d\zeta$ по всем четным циклам вещественные, поэтому и сам дифференциал вещественный, т.е. удовлетворяет равенству $\bar{J}_M d\zeta = \overline{d\zeta}$. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \overline{R(\bar{x})} &= \operatorname{sn}\left(2K(\tau) \int_{(\bar{e}, 0)}^{(x, w)} d\zeta + \overline{A(e)} \tau\right) \\ &= \operatorname{sn}\left(2K(\tau) \int_{(e, 0)}^{(x, w)} d\zeta + A(e) + 2K(\tau) \int_{(\bar{e}, 0)}^{(e, 0)} d\zeta \mid \tau\right). \end{aligned}$$

Если $e = \bar{e}$, то дополнительный интеграл между точками ветвления в последнем равенстве исчезает. В противном случае этот интеграл равен половине интеграла по одной из образующих решетки L_M^- при $k > 0$ или решетки $H_1^-(M, \mathbb{Z})$ при $k = 0$; следовательно,

$$\int_{(\bar{e}, 0)}^{(e, 0)} d\zeta \in \tau\mathbb{Z}, \quad \overline{R(\bar{x})} = R(x).$$

Проверим, что кривая, сопоставляемая полученной рациональной функции $R(x)$ при чебышёвском соответствии, совпадает с кривой $M(E)$, с которой мы начали. Найдем все прообразы $R^{-1}\mathbb{Q}$ точек ветвления тора T . Значения эллиптического синуса лежат во множестве $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда его аргумент лежит в сдвинутой решетке полупериодов $(1 + L)K(\tau)$. Другими словами, все точки x указанного прообраза задаются вложением

$$2 \int_{(e, 0)}^{(x, w)} d\zeta \in L.$$

Все точки ветвления $x = e_*$ первоначальной кривой лежат во множестве $R^{-1}\mathbb{Q}$, поскольку

$$2 \int_{(e, 0)}^{(e_*, 0)} d\zeta = \int_C d\zeta \in L, \quad C \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Более того, во всех точках $x = e_*$ индекс ветвления отображения $R(x)$ нечетный, в то время как во всех прочих прообразах $R^{-1}\mathbf{Q}$ он четный. Последнее утверждение следует из записи отображения $R(x)$ в локальных координатах и того, что функция $\text{sn}(W + u)$ – четная функция от u при $W \in \text{sn}^{-1}\mathbf{Q}$.

Теорема 2 доказана.

Вычисление степени рациональной функции. В отличие от чебышёвского представления для многочленов, степень рациональной функции не входит явно в формулу восстановления (7.3). Это число можно восстановить, зная отображение в гомологиях, порождаемое накрытием тора римановой поверхностью M . Как мы уже знаем, накрытие перестановочно с действием отражений на поверхности и на торе. Поэтому четные (соответственно нечетные) циклы поверхности будут отображаться на четные (соответственно нечетные) циклы тора:

$$\tilde{R}D_j^+ := m_j^+ C^+, \quad \tilde{R}C_j^- := m_j^- C^-, \quad j = 1, \dots, g, \quad m_j^\pm \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & j < k, \\ 2\mathbb{Z}, & j \geq k. \end{cases} \quad (7.6)$$

Здесь $D_j^+ := C_1^+ + C_2^+ + \dots + C_j^+$ при $j = 1, \dots, k-1$ и $D_j^+ := C_j^+$ при $j = k, \dots, g$ – новый базис в решетке четных циклов на M , матрица пересечения которого с ранее введенным базисом нечетных циклов C_s^- является диагональной.

ЛЕММА 6. При $k > 0$

$$\deg R = \sum_{j < k} m_j^+ m_j^- + \frac{1}{2} \sum_{j \geq k} m_j^+ m_j^-. \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем 2-форму площади $i d\eta \wedge \overline{d\eta}$ на торе и поднимем ее при помощи накрытия $\tilde{R}$ на риманову поверхность M , где она примет вид $i d\zeta \wedge \overline{d\zeta}$. Степень накрытия равна отношению площади поверхности к площади тора. Площадь поверхности связана с периодами по базису 1-циклов формулой Римана (5.3). Вычисляя площадь тора и поверхности, получим утверждение леммы:

$$\begin{aligned} \text{vol}(T) &= i \int_T d\eta \wedge \overline{d\eta} = -i \left(\int_{C^-} d\eta \overline{\int_{C^+} d\eta} - \int_{C^+} d\eta \overline{\int_{C^-} d\eta} \right) = 4 \text{Im } \tau > 0, \\ \text{vol}(M) &= i \int_M d\zeta \wedge \overline{d\zeta} = -i \left(\sum_{j < k} \left(\int_{C_j^-} d\zeta \overline{\int_{D_j^+} d\zeta} - \int_{D_j^+} d\zeta \overline{\int_{C_j^-} d\zeta} \right) \right) \\ &\quad - i \left(\frac{1}{2} \sum_{j \geq k} \left(\int_{C_j^-} d\zeta \overline{\int_{D_j^+} d\zeta} - \int_{D_j^+} d\zeta \overline{\int_{C_j^-} d\zeta} \right) \right) \\ &= 4 \text{Im } \tau \left(\sum_{j < k} m_j^+ m_j^- + \frac{1}{2} \sum_{j \geq k} m_j^+ m_j^- \right). \end{aligned}$$

§ 8. Примеры

Покажем, как в рамках нашей конструкции возникает классическая золотарёвская дробь (см. [7]), а также другие решения задач о наименьшем уклонении

от импульсных функций. Численные расчеты для этого параграфа проведены Д. В. Ярмоличем.

8.1. Дробь Золотарёва. Фиксируем натуральное n и модуль $\tau \in i\mathbb{R}^+$. Рассмотрим в комплексной плоскости переменной u прямоугольник

$$\{| \operatorname{Re} u| < 1; 0 < \operatorname{Im} u < n|\tau|\},$$

составленный из n прямоугольников размера $1 \times |\tau|$, как на рис. 5. Конформные отображения большого и маленького прямоугольников на верхнюю полуплоскость обозначим $x(u)$ и $R(u)$ соответственно. При нормировке, оставляющей неподвижными три точки $u = -1, 0, 1$, эти отображения принимают соответственно вид

$$x(u) = \operatorname{sn}(K(n\tau)u|n\tau), \quad R(u) = \operatorname{sn}(K(\tau)u|\tau), \quad (8.1)$$

но сейчас конкретный вид этих отображений не важен. По принципу отражений функция $R(u)$, отображающая маленький прямоугольник

$$\{| \operatorname{Re} u| < 1; 0 < \operatorname{Im} u < |\tau|\}$$

на верхнюю полуплоскость, определена в большом прямоугольнике и вещественна на его границе. Отсюда несложно вывести, что R является (однозначной) мероморфной функцией от x на всей сфере Римана, т.е. рациональной функцией. Эта функция называется *дробью Золотарёва*. Она имеет простые

Рис. 5. а) Большой прямоугольник, составленный из малых; б) график золотарёвской дроби степени $n = 8$

нули при аргументе x , соответствующем $u = 0, \pm 2\tau, \pm 4\tau, \dots$, и простые полюсы в точках, соответствующих $u = \pm \tau, \pm 3\tau, \dots$. Все критические точки рациональной функции $R(u(x))$ расположены на вещественной оси и соответствуют

$$u = \pm 1 \pm \tau, \pm 1 \pm 2\tau, \dots, \pm 1 \pm (n-1)\tau;$$

их ровно $2n-2$. Все критические значения содержатся во множестве из четырех точек $\pm 1, \pm 1/\kappa(\tau)$, поэтому дробь Золотарёва имеет чебышёвское представление при $g = 1$.

В самом деле, тор $\mathbb{C}/(4\mathbb{Z} + 2n\tau\mathbb{Z})$, склеенный из четырех копий большого прямоугольника, показанного на рис. 5, естественно покрывает без ветвления тор $\mathbb{C}/(4\mathbb{Z} + 2\tau\mathbb{Z})$ (склеенный из четырех копий малого прямоугольника из рис. 5). В наших координатах $d\zeta = d\eta = du/2$, и формула (7.3) переходит в параметрическое представление (8.1).

8.2. Разрезанный прямоугольник. Деформируя конструкцию золотарёвской дроби, можно явно управлять величиной критических значений. Этот процесс аналогичен превращению классического многочлена Чебышёва с использованием гребенки Ахиезера (см. [8]) в чебышёвский многочлен на многих отрезках. Проведем $g - 1$ горизонтальных разрезов, начинающихся на границе большого прямоугольника на высотах, кратных τ , как на рис. 6. Пусть функция $R(u)$ та же, что и в (8.1), а $x(u)$ конформно отображает разрезанный прямоугольник на верхнюю полуплоскость. Как и в п. 8.1, несложно показать, что пара функций $R(u)$, $x(u)$ параметрически задает вещественную рациональную функцию на римановой сфере. У этой функции все критические точки вещественные, а значения в них лежат в множестве $\pm 1, \pm 1/\varkappa(\tau)$, кроме $g - 1$ точек x , которые соответствуют концам разрезов на плоскости переменной u .

Рис. 6. а) Большой прямоугольник с двумя разрезами; б) график деформированной золотарёвской дроби степени $n = 12$; в) тонкая структура графика слева и справа от фронта (увеличен масштаб по оси x)

Эта рациональная функция тоже описывается при помощи чебышёвской конструкции. Функцию, обратную к $x(u)$, можно записать в виде интеграла Кристоффеля–Шварца, который в данном случае будет голоморфным абелевым интегралом на гиперэллиптической кривой рода g . Все точки ветвления этой кривой вещественные и являются x -образами тех вершин разрезанного прямоугольника, угол при которых равен прямому. Как видим, рациональная функция $R(u(x))$ имеет представление в виде (7.3).

Рис. 7. а) Двухлистный восьмиугольный прямоугольник; б) график рациональной функции степени $n = 12$

8.3. Многолистный прямоугольник. Приведем пример, имеющий непосредственное отношение к равномерному рациональному приближению импульсных функций. Рассмотрим двухлистный прямоугольный восьмиугольник с внутренней точкой ветвления u_* , как на рис. 7. Все четыре горизонтальные стороны этого восьмиугольника лежат на высотах, кратных τ . Пара функций $R(u)$ и $x(u)$, где $R(u)$ та же, что и раньше, а $x(u)$ конформно отображает двухлистный восьмиугольник на верхнюю полуплоскость, параметрически задает вещественную рациональную функцию $R(u(x))$. Эта функция имеет две комплексно сопряженные критические точки $x(u_*)$, $x(\overline{u_*})$; все остальные критические точки вещественные, а значения в них лежат в множестве из четырех точек ± 1 , $\pm 1/\varkappa(\tau)$. Полученная рациональная функция является 3-экстремальной, следовательно, допускает представление в виде (7.3) с абелевым интегралом на кривой рода 3. Этот абелев интеграл является интегралом Кристоффеля–Шварца, отображающим верхнюю полуплоскость на двухлистный восьмиугольный прямоугольник.

Список литературы

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука., М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [2] А. Б. Богатырёв, *Экстремальные многочлены и римановы поверхности*, Издательство МЦНМО, М., 2005.
- [3] А. Б. Богатырёв, “Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 21–40; англ. пер.: A. B. Bogatyrev, “Effective approach to least deviation problems”, *Sb. Math.*, **193**:12 (2002), 1749–1769.
- [4] N. H. Abel, “Sur l’intégration la formule différentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entieres”, *J. Reine u. Angewand. Math.*, **1** (1826), 105–144.
- [5] Н. Г. Чеботарёв, *Теория алгебраических функций*, УРСС, М., 2003.

- [6] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [7] Е. И. Золотарёв, “Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наиболее и наименее отклоняющихся от нуля”, *Записки Санкт-Петербургской акад. наук*, **30**:5 (1877).
- [8] А. Б. Богатырёв, “Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для нескольких отрезков”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 15–50; англ. пер.: A. B. Bogatyrev, “Effective computation of Chebyshev polynomials for several intervals”, *Sb. Math.*, **190**:11 (1999), 1571–1605.

А. Б. Богатырёв (A. B. Bogatyrev)
Институт вычислительной математики РАН;
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: gourmet@inm.ras.ru

Поступила в редакцию
11.02.2010 и 19.05.2010