Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, О приближении периодических функций из классов H_q^Ω линейными методами, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 1, 91–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:06:16

УДК 517.518.832

Н. Н. Пустовойтов

О приближении периодических функций из классов H_q^Ω линейными методами

В работе показано, что если приближения функций из классов H_∞^Ω (из классов H_1^Ω) в норме L_∞ (в норме H_1) линейными операторами имеют порядок наилучших приближений, то нормы этих операторов не ограничены в совокупности. Также установлены неравенства Бернштейна и Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из множеств $Q(N)$ (из множеств $\Gamma(N, \Omega)$).

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: модуль непрерывности, линейные приближения, неравенства Бернштейна, неравенства Никольского, функции многих переменных.

Введение

В работе изучается возможность приближения периодических функций многих переменных из классов H_q^Ω линейными методами, дающими наилучшие по порядку приближения. А именно выясняется, существуют ли линейные ограниченные операторы, дающие приближения порядка наилучших и такие, что их нормы ограничены в совокупности. Для классов Никольского H_q^r и Соболева $W_{q,\alpha}^r$ эти вопросы изучались В. Н. Темляковым в [1].

Для классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ указанные вопросы изучались А. С. Романюком в [2].

Дадим определения.

Для $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$, определим функцию $\Omega(t)$ следующим образом: если $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, то

$$\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r \left(\log \frac{1}{t_j} \right)_+^{-b_j}, \quad (1)$$

если $\prod_{j=1}^d t_j = 0$, то $\Omega(t) = 0$; здесь

$$\left(\log \frac{1}{t_j} \right)_+ = \max \left\{ \log_2 \frac{1}{t_j}; 1 \right\}, \quad 0 < r < l,$$

где l – порядок разностей (см. определение $\Delta_t^l f(x)$).

Полагаем, что $b_1 \leq \dots \leq b_d$.

Легко видеть, что при $0 \leq t_j \leq 2^{\frac{b_j}{r}}$ функция $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной. Нас интересует поведение функции $\Omega(t)$ вблизи нуля, а при $t_j > 2^{\frac{b_j}{r}}$ эту функцию можно доопределить, положив $\Omega(t) = \Omega(2^{\frac{b_1}{r}}, \dots, 2^{\frac{b_d}{r}})$.

Рассмотрим множества

$$\varkappa(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \leq N \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \varkappa(N)} \rho(s),$$

где

$$\rho(s) = \{ k = (k_1, \dots, k_d) : k_j \in \mathbb{Z}, 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d \}.$$

Также введем множества

$$\Gamma(N, \Omega) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \Omega\left(\frac{1}{|k_1|}, \dots, \frac{1}{|k_d|}\right) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

т.е.

$$\Gamma(N, \Omega) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d |k_j|^r (\log |k_j|)_+^{b_j} \leq N \right\}.$$

Легко видеть, что $Q(N) \subset \Gamma(N, \Omega) \subset Q(2^{rd + \sum_{j=1}^d |b_j|})$.

Положим

$$\theta(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, N < \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \leq 2^l N \right\}.$$

Как легко видеть, $\theta(N) = \varkappa(2^l N) \setminus \varkappa(N)$.

Мы здесь изучаем порядковые равенства и неравенства.

Запись $A(N) \ll B(N)$ означает, что существует $C > 0$, не зависящее от N , такое, что $A(N) \leq C \cdot B(N)$. Запись $A(N) \asymp B(N)$ означает, что $A(N) \ll B(N) \ll A(N)$.

Автором в [3] доказано, что количество элементов множества $\theta(N)$ по порядку равно $|\theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$.

Также автором доказана следующая теорема, формулировка которой приведена в [4].

ТЕОРЕМА 0.1. *Количество элементов множеств $Q(N)$ и $\Gamma(N, \Omega)$ по порядку равно:*

- 1) $N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{1}{r}(b_1+\dots+b_d)}$, если $b_d < r$;
- 2) $N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{1}{r}(b_1+\dots+b_\nu)} (\log \log N)^\mu$, если $b_\nu < r = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-1} (\log \log N)^{\nu-1}$, если $r = b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1}$;
- 4) $N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r}}$, если $b_2 > r$.

Мы будем рассматривать классы H_q^Ω функций d вещественных переменных, имеющих период 2π по каждой переменной и удовлетворяющих условиям:

1) $f(x) = f(x_1, \dots, x_d) \in L_q^0$, т.е. норма

$$\|f(x)\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f(x)\|_\infty = \sup_{\text{vrai}} |f(x)| \quad \text{при } q = \infty$$

конечна и, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d, \quad \pi_d = [-\pi; \pi]^d;$$

2) $\|\Delta_t^l f(x)\|_q \leq \Omega(t)$, где $\Omega(t)$ определено в (1), а разность

$$\Delta_t^l f(x) = \Delta_{t_1}^l \dots \Delta_{t_d}^l f(x)$$

– это смешанная разность порядка l , т.е. берется разность порядка l по переменной x_j с шагом t_j .

Для классов H_q^Ω в работе [5] доказана теорема о представлении, которая в случае $\Omega(t)$ из (1) верна и формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 0.2. *Функция $f(x)$ из L_q^0 принадлежит классу H_q^Ω с $\Omega(t)$ из (1) тогда и только тогда, когда для всех векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$ с натуральными компонентами верны неравенства*

$$\|\delta_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 < q < \infty,$$

$$\|A_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Здесь

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}, \quad (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d, \quad (2)$$

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где

$$A_s(x) = 2^d \prod_{j=1}^d A_{s_j}(x_j), \quad A_0(x_j) \equiv 1, \quad A_1(x_j) = V_1(x_j) - 1,$$

$$A_{s_j}(x_j) = V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j), \quad s_j \geq 2;$$

$V_m(\tau)$ – одномерное ядро Валле Пуассена порядка $2m - 1$.

Автором доказана следующая лемма, формулировка которой приведена в [4].

ЛЕММА 0.1. *Сумма*

$$\sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\gamma_j}, \quad \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d,$$

по порядку равна:

- 1) $(\log N)^{d-1-\gamma_1-\dots-\gamma_d}$, если $\gamma_d < 1$;
- 2) $(\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu}(\log \log N)^\mu$, если $\gamma_\nu < 1 = \gamma_{\nu+1} = \dots = \gamma_{\nu+\mu} < \gamma_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $(\log N)^{-1}(\log \log N)^{\nu-1}$, если $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu = 1 < \gamma_{\nu+1}$;
- 4) $(\log N)^{-\gamma_1}$, если $1 < \gamma_1$.

Сформулируем две леммы, которые будут нужны нам в дальнейшем (см. [1; леммы 1.3.1, 1.3.1']).

ЛЕММА 0.2. Пусть $1 \leq q < p < \infty$, $f \in L_q^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p^p \leq \sum_s \left(\|\delta_s(f)\|_q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \right)^p.$$

ЛЕММА 0.3. Пусть $1 < p < q \leq \infty$, $f \in L_p^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p^p \geq \sum_s \|\delta_s(f)\|_q^p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})p}.$$

В § 1 доказываются неравенства Бернштейна, а в § 2 доказываются неравенства Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из $\Gamma(N, \Omega)$. Эти результаты носят вспомогательный характер, хотя могут иметь и самостоятельный интерес.

В § 3 доказывается, что при некоторых условиях на b_j нельзя построить последовательность линейных ограниченных операторов, дающих приближения порядка наилучших функций из классов H_∞^Ω в норме L_∞ и классов H_1^Ω в норме L_1 таких, что нормы операторов ограничены в совокупности.

§ 1. Неравенства Бернштейна

Через $T(A)$ будем обозначать множество тригонометрических полиномов со спектром из множества A .

Для $t(x) \in T(\Gamma(N, \Omega))$ определим производную следующим образом:

$$t^{(\rho)}(x, \alpha) = t * U_N^\rho,$$

где

$$U_N^\rho = \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} \prod_{j=1}^d k_j^\rho \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right),$$

$$\rho \geq 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, d.$$

ТЕОРЕМА 1.1. 1) При $1 < p < \infty$ верно порядковое равенство

$$\sup_{t \in T(\Gamma(N, \Omega))} \frac{\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_p}{\|t\|_p} \asymp N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1 \rho}{r}}.$$

2) При $p = \infty$ величина

$$\sup_{t \in T(\Gamma(N, \Omega))} \frac{\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_\infty}{\|t\|_\infty}$$

по порядку равна

$$\begin{aligned} N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{\rho}{r}(b_1+\dots+b_d)}, & \text{ если } b_d < \frac{r}{\rho}, \\ N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{\rho}{r}(b_1+\dots+b_\nu)} (\log \log N)^\mu, & \text{ если } b_\nu < \frac{r}{\rho} = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} \\ & < b_{\nu+\mu+1}, \\ N^{\frac{\rho}{r}} \frac{(\log \log N)^{\nu-1}}{\log N}, & \text{ если } b_1 = \dots = b_\nu = \frac{r}{\rho} < b_{\nu+1}, \\ N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1 \rho}{r}}, & \text{ если } b_2 > \frac{r}{\rho}. \end{aligned}$$

Неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболических крестов изучались в [1], [6]–[10]. К этому кругу вопросов примыкает работа [11]. В [12] М. Б. Сихов при $1 < p < \infty$ получил неравенства Бернштейна для $t \in T(\Gamma(N, \Omega))$ в случае двух переменных при $b_1 \leq 0$, $b_2 = 0$, а также при $b_1 \leq 0$, $b_2(p-1) > r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Сначала рассмотрим случай $1 < p < \infty$.

Как и при доказательстве теоремы 1.1.1 в [1], используем множители Марцинкевича $\lambda_\nu^\rho = |\nu|^\rho 2^{-\rho s}$, $2^{s-1} \leq |\nu| < 2^s$. Как показано в [1], для мультипликаторного оператора Λ_ρ , задаваемого множителями λ_ν^ρ , будет $\|\Lambda_\rho f\|_p \asymp \|f\|_p$. Далее, поскольку оператор тригонометрического сопряжения ограничен в L_p , $1 < p < \infty$, то без ограничения общности можно считать $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, d$.

Имеем

$$\|t^{(\rho)}(x, 0)\|_p \asymp \|\Lambda_p^{-1} t^{(\rho)}\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathfrak{K}(N_1)} 2^{2\rho \|s\|_1} |\delta_s(t, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Здесь

$$N_1 = 2^{rd + \sum_{j=1}^d |b_j|} N, \quad \|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$$

и, кроме того,

$$\delta_s(t, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{t}(k) e^{i(k, x)},$$

где $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$; $\hat{t}(k)$ – коэффициенты Фурье. Кроме того, здесь применена многомерная теорема Литтлвуда–Пэли для функций многих переменных (см. [1; теорема А]). Далее,

$$\|t^{(\rho)}(x, 0)\|_p \ll \max_{s \in \mathfrak{K}(N_1)} 2^{\rho \|s\|_1} \|t\|_p \ll N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1 \rho}{r}} \|t\|_p.$$

Оценка сверху доказана.

Для доказательства оценки снизу при $1 < p < \infty$ возьмем тригонометрический полином $t(x) = e^{i(2^{\tilde{s}}, x)}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d), & 2^{\tilde{s}} &= (2^{\tilde{s}_1}, \dots, 2^{\tilde{s}_d}), \\ \tilde{s}_j &= \begin{cases} \max_{s \in \mathcal{K}(N_1)} s_1, & j = 1, \\ 1, & j = 2, 3, \dots, d. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\|t^{(\rho)}(x, 0)\|_p \asymp 2^{\rho \tilde{s}_1} \|t\|_p \asymp N^{\frac{\rho}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1 \rho}{r}} \|t\|_p.$$

Далее рассмотрим случай $p = \infty$.

По аналогии с доказательством теоремы 1.1.1 в [1] рассмотрим функцию

$$K_N^\rho(x, \alpha) = \sum_{s \in \mathcal{K}(2^{kl} N)} A_s^\rho(x, \alpha),$$

где k выбрано так, что $2^{kl} \geq 2^{rd} 3^{\sum_{j=1}^d |b_j|}$ (l – порядок разности). Кроме того,

$$\begin{aligned} A_s^\rho(x, \alpha) &= \prod_{j=1}^d A_{s_j}^\rho(x_j, \alpha_j), \quad s = (s_1, \dots, s_d), \quad s_j \in \mathbb{N}, \quad s_j \geq 2, \quad j = 1, \dots, d, \\ A_{s_j}^\rho(x_j, \alpha_j) &= V_{2^{s_j-1}}^\rho(x_j, \alpha_j) - V_{2^{s_j-2}}^\rho(x_j, \alpha_j), \\ V_m^\rho(x_j, \alpha_j) &= \sum_{k=1}^m k^\rho \cos\left(kx_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right) + \sum_{k=m+1}^{2m-1} k^\rho \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos\left(kx_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Тогда для $t(x)$ из $T(\Gamma(N, \Omega))$ будет $t^{(\rho)}(x, \alpha) = t * K_N^\rho(x, \alpha)$. Следовательно,

$$\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_\infty \leq \|t\|_\infty \cdot \|K_N^\rho\|_1.$$

Получаем

$$\|K_N^\rho\|_1 \ll \sum_{\nu=1}^{\lfloor \frac{1}{l} \log N \rfloor} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{k\nu}})} \|A_s^\rho(x, \alpha)\|_1 \ll \sum_{s \in \theta(N)} 2^{\rho \|s\|_1} \asymp N^{\frac{\rho}{r}} \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j \rho}{r}}.$$

Применяя лемму 0.1 с $\gamma_j = \frac{b_j \rho}{r}$, получаем оценку сверху.

Для получения оценки снизу используем функцию

$$\bar{U}_N^\beta(x, \alpha) = \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} \prod_{j=1}^d a(k_j, x_j, \alpha_j) k_j^\beta, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a(k_j, x_j, \alpha_j) &= \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right) + \cos\left((k_j + 1)x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos\left(2k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right) - \cos\left((2k_j + 1)x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right). \end{aligned}$$

При $\beta = -1$ для гиперболических крестов эти функции построил С. А. Темляковский (см. [7]). При произвольных $\beta \geq -1$ эти функции рассмотрел В. Н. Темляков (см. [1; лемма 1.2.1]).

По лемме 1.1.1 из [1]

$$\|\bar{U}_N^{-1}(x, \alpha)\|_\infty \ll 1. \quad (4)$$

Тогда

$$|(\bar{U}_N^{-1})^\rho(0, \alpha)| \asymp \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} \prod_{j=1}^d k_j^{\rho-1} \gg \sum_{s \in \theta(N)} 2^{\|s\|_1(\rho-1+1)}$$

и мы получаем оценку снизу. Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Неравенства Джексона–Никольского

Рассмотрим неравенства, связывающие различные L_p -нормы тригонометрических полиномов из $T(\Gamma(N, \Omega))$. Для тригонометрических полиномов со спектром из параллелепипедов, т.е. имеющих степень n_j по переменной x_j , в [13] С. М. Никольский доказал, что

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \cdot \|t\|_q, \quad 1 \leq q < p \leq \infty.$$

Неравенства Джексона–Никольского для случая гиперболических крестов рассмотрены в [1] и [14]. В [15] рассмотрены неравенства Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник. Для тригонометрических полиномов из $T(\Gamma(N, \Omega))$ в случае двух переменных при $1 < p < q < \infty$, $b_1 \leq 0$, $b_2(p-1) > r > 0$ неравенства Джексона–Никольского получены в [12].

Докажем леммы, аналогичные соответствующим леммам из [1; гл. 1, п. 2].

ЛЕММА 2.1. *Верно порядковое неравенство*

$$\|\bar{U}_N^\rho(x, \alpha)\|_\infty \ll N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{\frac{-b_1(\rho+1)}{r}} \equiv E(N, \infty),$$

где $\bar{U}_N^\rho(x, \alpha)$ – функция из (3), $\rho \geq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме двойственности имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{U}_N^\rho(x, \alpha)\|_\infty &= \sup_{\|g\|_1 \leq 1} (\bar{U}_N^\rho, g) \asymp \sup_{\|g\|_1 \leq 1} \sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{r} \log N]} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{\nu r}})} (\delta_s(\bar{U}_N^\rho), g) \\ &\ll \sup_{\|g\|_1 \leq 1} \sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{r} \log N]} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{\nu r}})} 2^{\|s\|_1(\rho+1)} (\delta_s(\bar{U}_N^{-1}), g) \\ &\ll \sum_{s \in \theta(N_1)} 2^{\|s\|_1(\rho+1)} \cdot \|\bar{U}_N^{-1}\|_\infty \asymp N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{\frac{-b_1(\rho+1)}{r}}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta_s(f)$ – функция из (2), $N_1 = 2^{rd + \sum_{j=1}^d |b_j|} \cdot N$ и использовано неравенство (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $2 \leq p < \infty$, $\rho > \frac{1}{p} - 1$. Тогда

$$\|\bar{U}_N^\rho(x, \alpha)\|_p \ll E(N, p),$$

где величина $E(N, p)$ по порядку равна:

- 1) $N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}(\log N)^{\frac{d-1}{p}-\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_d)}$, если $b_d < \frac{r}{p\rho+p-1}$;
- 2) $N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}(\log N)^{\frac{\nu-1}{p}-\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_\nu)}(\log \log N)^{\frac{\mu}{p}}$, если $b_\nu < \frac{r}{p\rho+p-1} = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}(\log N)^{-\frac{1}{p}}(\log \log N)^{\frac{\nu-1}{p}}$, если $b_1 = \dots = b_\nu = \frac{r}{p\rho+p-1} < b_{\nu+1}$;
- 4) $N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}(\log N)^{-\frac{b_1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}$, если $b_2 > \frac{r}{p\rho+p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 0.2, считая $q = 2$, $p \geq 2$. Получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{U}_N^\rho\|_p^p &\ll \sum_{\nu=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \log N \rfloor} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{l\nu}})} \|\delta_s(\bar{U}_N^\rho)\|_2^p \cdot 2^{\|s_1\|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \\ &\asymp \sum_{\nu=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \log N \rfloor} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{l\nu}})} 2^{\|s_1\|((\rho+\frac{1}{2})p+(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p)} \\ &\asymp \left| \rho + 1 - \frac{1}{p} > 0 \right| \asymp N^{\frac{p}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})} \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}p(\rho+1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 0.1 с $\gamma_j = \frac{b_j p}{r}(\rho + 1 - \frac{1}{p})$, получаем лемму 2.2.

Обозначим

$$U_N^\rho(x, \alpha) = \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} \prod_{j=1}^d k_j^\rho \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right).$$

Через $E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_N^\rho)_p$ обозначим наилучшее (в норме L_p) приближение функции $U_N^\rho(x, \alpha)$ функциями вида

$$\sum_{k \notin \Gamma(N, \Omega)} c_k e^{i(k, x)}.$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $2 \leq p \leq \infty$. Верно следующее неравенство:

$$E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_N^\rho)_p \ll E(N, p), \quad (5)$$

где $\rho > -\frac{1}{2}$ при $2 \leq p < \infty$ и $\rho > -1$ при $p = \infty$, а $E(N, p)$ определено в леммах 2.1 и 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его по индукции по размерности пространства аналогично доказательству лемм 1.2.3 и 1.2.3' из [1].

Введем по аналогии с [1] функцию

$$U(G, d, x) = \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} \left(\prod_{j \in G_1} l_j^\rho \prod_{j \in G_2} (k_j - 1)^\rho \prod_{j \in G_3} k_j^\rho \right) \prod_{j=1}^d \cos k_j x_j,$$

где G – разбиение множества $\{1, \dots, d\}$ на непересекающиеся множества G_1 , G_2 и G_3 , а

$$l_j = \begin{cases} k_j - 1, & k_j \text{ нечетное,} \\ k_j, & k_j \text{ четное.} \end{cases}$$

Аналогично доказательству леммы 2.3 из [1; гл. 1] приходим к неравенству

$$E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U(G, d, x))_p \ll \|\bar{U}_N^\rho\|_p + E^{(d-1)}(N, p), \quad (6)$$

где $E^{(d-1)}(N, p)$ обозначает величину $E(N, p)$, соответствующую размерности $d - 1$.

Используя леммы 2.1 и 2.2 и неравенство (6), получаем (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. При $1 < p \leq 2$, $\rho > \frac{1}{p} - 1$ верно неравенство

$$E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_N^\rho)_p \ll E(N, p),$$

где $E(N, p)$ – величина, определенная в лемме 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$2^{n-1} \leq N < 2^n, \quad M = 2^l N_1, \quad N_1 = 2^{r d + \sum_{j=1}^d |b_j|} \cdot N.$$

Возьмем приближающую функцию

$$g(x) = U_N^\rho(x, \alpha) - S_{Q(N_1)}(U_M^\rho(x, \alpha)),$$

где $S_{Q(N_1)}(U_M^\rho(x, \alpha))$ – частная сумма Фурье функции $U_M^\rho(x, \alpha)$, соответствующая множеству $Q(N_1)$.

Тогда из многомерной теоремы Литтлвуда–Пэли с учетом $\rho + 1 - \frac{1}{p} > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|U_N^\rho(x, \alpha) - g(x)\|_p^p &= \|S_{Q(N_1)}(U_M^\rho(x, \alpha))\|_p^p \\ &\ll \sum_{s \in \mathfrak{x}(N_1)} \|\delta_s(U_M^\rho)\|_p^p \ll \sum_{s \in \mathfrak{x}(N_1)} 2^{p(\rho+1-\frac{1}{p})\|s\|_1} \\ &\ll \sum_{s \in \theta(N_1)} 2^{p(\rho+1-\frac{1}{p})\|s\|_1} \asymp N_1^{\frac{p}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})} \sum_{s \in \theta(N_1)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}p(\rho+1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 0.1 с $\gamma_j = \frac{b_j}{r}(p\rho + p - 1)$, получаем лемму 2.4.

При некоторых дополнительных условиях на b_j мы можем указать точный порядок величин $E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_N^\rho)_p$.

Введем следующие обозначения ($p' = \frac{p}{p-1}$):

$$M_1 = \max \left\{ \frac{r}{p'-1}, \frac{r}{\rho+1}, \frac{r}{p\rho+p-1} \right\},$$

$$m_1 = \min \left\{ \frac{r}{p'-1}, \frac{r}{\rho+1}, \frac{r}{p\rho+p-1} \right\}, \quad m_2 = \min \left\{ \frac{r}{p\rho+p-1}, \frac{r}{3}, \frac{r}{\rho+2} \right\}.$$

ЛЕММА 2.5. Пусть $\rho > \frac{1}{p}$. Для $1 < p \leq 2$ имеем:

1) при $b_d < m_1$

$$E_{\Gamma(N,\Omega)}^\perp (U_N^\rho)_p \asymp N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})} (\log N)^{\frac{d-1}{p}-\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_d)}; \quad (7)$$

2) при $b_\nu < m_1 \leq M_1 < b_{\nu+1}$

$$E_{\Gamma(N,\Omega)}^\perp (U_N^\rho)_p \asymp N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})} (\log N)^{\frac{\nu-1}{p}-\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_\nu)}; \quad (8)$$

3) при $b_1 \geq M_1, b_2 > M_1$

$$E_{\Gamma(N,\Omega)}^\perp (U_N^\rho)_p \asymp N^{\frac{1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})} (\log N)^{-\frac{b_1}{r}(\rho+1-\frac{1}{p})}. \quad (9)$$

При $2 \leq p < \infty$ получаем, что:

- 1) при $b_d < m_2$ верно (7);
- 2) при $b_\nu < m_2 < r < b_{\nu+1}$ верно (8);
- 3) при $b_1 \geq r, b_2 > r$ верно (9).

При $p = \infty, b_2 > r$ будет

$$E_{\Gamma(N,\Omega)}^\perp (U_N^\rho)_\infty \asymp N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r}(\rho+1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху следуют из лемм 2.3 и 2.4. Докажем оценки снизу.

Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда

$$(U_N^\rho(x, \alpha), \bar{U}_{3^{-d}N}^0(x, \alpha)) \leq E_{\Gamma(N,\Omega)}^\perp (U_N^\rho)_p \cdot \|\bar{U}_{3^{-d}N}^0\|_{p'}.$$

По лемме 2.2 с $\rho = 0$ получаем, что $\|\bar{U}_{3^{-d}N}^0\|_{p'}$ по порядку не превосходит:

- 1) $N^{\frac{1}{rp}} (\log N)^{\frac{d-1}{p'}-\frac{1}{rp}(b_1+\dots+b_d)}$, если $b_d < \frac{r}{p'-1}$;
- 2) $N^{\frac{1}{rp}} (\log N)^{\frac{\nu-1}{p'}-\frac{1}{rp}(b_1+\dots+b_\nu)}$, если $b_\nu < \frac{r}{p'-1} < b_{\nu+1}$;
- 3) $N^{\frac{1}{rp}} (\log N)^{-\frac{b_1}{rp}}$, если $b_2 > \frac{r}{p'-1}$.

С другой стороны,

$$(U_N^\rho(x, \alpha), \bar{U}_{3^{-d}N}^0) \geq \sum_{s \in \theta(3^{-d}N)} 2^{\|s_1\|(\rho+1)} \asymp N^{\frac{\rho+1}{r}} \sum_{s \in \theta(3^{-d}N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}(\rho+1)}.$$

Далее, по лемме 0.1 получаем, что последняя величина по порядку равна:

- 1) $N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{\rho+1}{r}(b_1+\dots+b_d)}$, если $b_d < \frac{r}{\rho+1}$;

- 2) $N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{\rho+1}{r}(b_1+\dots+b_\nu)}$, если $b_\nu < \frac{r}{\rho+1} < b_{\nu+1}$;
- 3) $N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1(\rho+1)}{r}}$, если $b_2 > \frac{r}{\rho+1}$.

Соединяя эти оценки и учитывая условия на b_j , получаем нужную оценку снизу для $1 < p \leq 2$.

Пусть, далее, $2 \leq p < \infty$. Считаем, что N – достаточно большое натуральное число. Возьмем функцию $V_N(x, \alpha) = K_{2^{-kl}N}^1(x, \alpha)$, где $K_M^\rho(x, \alpha)$ определено выше. Легко видеть, что $\|V_N\|_1 \asymp |Q(N)|$.

Далее,

$$\|V_N\|_2^2 \asymp \sum_{\nu=1}^{\lfloor \frac{1}{r} \log N \rfloor} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^{l\nu}})} \sum_{k \in \rho(s)} 2^{2\|s\|_1} \asymp \sum_{s \in \theta(N)} 2^{3\|s\|_1} \asymp N^{\frac{3}{r}} \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{3b_j}{r}}.$$

По лемме 0.1 эта величина по порядку равна:

- 1) $N^{\frac{3}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{3(b_1+\dots+b_d)}{r}}$, если $b_d < \frac{r}{3}$;
- 2) $N^{\frac{3}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{3(b_1+\dots+b_\nu)}{r}}$, если $b_\nu < \frac{r}{3} < b_{\nu+1}$;
- 3) $N^{\frac{3}{r}} (\log N)^{-\frac{3b_1}{r}}$, если $b_2 > \frac{r}{3}$.

Интерполируя, для $1 < q \leq 2$ получим

$$\|V_N\|_q \leq \|V_N\|_1^{\frac{2-q}{q}} \cdot \|V_N\|_2^{\frac{2(q-1)}{q}}. \quad (10)$$

Подставляя сюда $\|V_N\|_1$ и $\|V_N\|_2$, получаем оценку для $\|V_N\|_q$.

Теперь рассмотрим скалярное произведение

$$(U_{N_1}^\rho, V_N), \quad \text{где } N_1 = 2^{rd+\sum_{j=1}^d |b_j|} N.$$

С одной стороны, для $2 \leq p < \infty$ имеем

$$|(U_{N_1}^\rho, V_N)| \leq E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_{N_1}^\rho)_p \cdot \|V_N\|_{p'}. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$|(U_{N_1}^\rho, V_N)| \gg \sum_{s \in \theta(N)} 2^{\|s\|_1(\rho+2)} \asymp N^{\frac{\rho+2}{r}} \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j(\rho+2)}{r}}.$$

По лемме 0.1 эта величина по порядку равна:

- 1) $N^{\frac{\rho+2}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{(\rho+2)(b_1+\dots+b_d)}{r}}$, если $b_d < \frac{r}{\rho+2}$;
- 2) $N^{\frac{\rho+2}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{(\rho+2)(b_1+\dots+b_\nu)}{r}}$, если $b_\nu < \frac{r}{\rho+2} < b_{\nu+1}$;
- 3) $N^{\frac{\rho+2}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1(\rho+2)}{r}}$, если $b_2 > \frac{r}{\rho+2}$.

Собирая воедино (10) и (11), получаем нужную оценку для $2 \leq p < \infty$.

Рассмотрим $p = \infty$. Аналогично предыдущему случаю с учетом $b_2 > r$ получим, с одной стороны,

$$|(U_{N_1}^\rho, V_N)| \gg N^{\frac{\rho+2}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1(\rho+2)}{r}}.$$

С другой стороны,

$$|(U_{N_1}^\rho, V_N)| \leq E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_{N_1}^\rho)_\infty \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r}}.$$

Отсюда получим оценку снизу для $p = \infty$. Лемма 2.5 доказана.

Перейдем к неравенствам Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов $t(x) \in T(\Gamma(N, \Omega))$.

Обозначим

$$m_3 = \min \left\{ \frac{r(1 - \frac{1}{p})}{\rho + \frac{1}{p}}, \frac{r}{\rho + 1}, \frac{r}{\rho - 1} \right\}, \quad M_3 = \max \left\{ \frac{r(1 - \frac{1}{p})}{\rho + \frac{1}{p}}, \frac{r}{\rho + 1}, \frac{r}{\rho - 1} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Для величины*

$$A(p) = \sup_{t \in T(\Gamma(N, \Omega))} \frac{\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_\infty}{\|t\|_p}$$

верно следующее:

- 1) при $\rho > -1$ будет $A(1) \asymp N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1(\rho+1)}{r}}$;
- 2) при $1 < p < \infty$, $\rho > -\frac{1}{p}$ величина $A(p)$ по порядку равна (см. замечание после доказательства теоремы 2.1)

$$\begin{aligned} N^{\frac{\rho+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{p}) - \frac{(\rho+\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_d)}{r}} & \quad \text{при } b_d < m_3, \\ N^{\frac{\rho+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p}) - \frac{(\rho+\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_\nu)}{r}} & \quad \text{при } b_\nu < m_3 \leq M_3 < b_{\nu+1}, \\ N^{\frac{\rho+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{\frac{-b_1(\rho+\frac{1}{p})}{r}} & \quad \text{при } b_2 > M_3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценки сверху.

Так как $t^{(\rho)}(x, \alpha) = t(x) * U_N^\rho(x, \alpha)$, то

$$\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_\infty \leq \|t\|_p E_{\Gamma(N, \Omega)}^\perp(U_N^\rho)_{p'},$$

и по леммам 2.3 и 2.4 мы получаем оценки сверху.

Докажем оценки снизу.

При $p = 1$ возьмем вектор

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_1, 1, \dots, 1) \in \theta(N), \quad \tilde{s}_1 \asymp \log N.$$

Рассмотрим функцию

$$A_{\tilde{s}}(x, \alpha) = \left(V_{2^{\tilde{s}_1-1}} \left(x_1 + \frac{\alpha_1 \pi}{2} \right) - V_{2^{\tilde{s}_1-2}} \left(x_1 + \frac{\alpha_1 \pi}{2} \right) \right) \prod_{j=2}^d \cos \left(x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2} \right);$$

$V_m(\tau)$ – одномерное ядро Валле Пуссена. Тогда $\|A_{\bar{s}}(x, \alpha)\|_1 \ll 1$. И, кроме того,

$$|A_{\bar{s}}^\rho(0, \alpha)| \asymp 2^{\|\bar{s}\|_1(\rho+1)} \asymp N^{\frac{\rho+1}{r}} (\log N)^{\frac{-b_1(\rho+1)}{r}}.$$

Отсюда следует оценка снизу при $p = 1$.

Пусть теперь $1 < p < \infty$.

Рассмотрим функцию $t(x) = S_{Q(N)}(U_N^0(x, \alpha))$, где $S_{Q(N)}$ – частная сумма Фурье, соответствующая множеству $Q(N)$. Как отмечено выше, $Q(N) \subset \Gamma(N, \Omega)$. Оценка сверху $\|t\|_p$ следует из доказательства леммы 2.4 с $\rho = 0$, $1 < p \leq 2$ и из леммы 2.2 с $\rho = 0$, $2 \leq p < \infty$. Оценим снизу $t^{(\rho)}(0, \alpha)$:

$$t^{(\rho)}(0, \alpha) \asymp \sum_{\nu=1}^{\lceil \frac{1}{r} \log N \rceil} \sum_{s \in \theta(\frac{N}{2^\nu})} 2^{\|s\|_1(\rho+1)} \asymp \sum_{s \in \theta(N)} N^{\frac{\rho+1}{r}} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j(\rho+1)}{r}}.$$

Далее применение леммы 0.1 дает оценку снизу. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что для $1 < p < \infty$ при рассмотрении оценок сверху и снизу важно сравнение чисел

$$\frac{r(1 - \frac{1}{p})}{\rho + \frac{1}{p}}, \quad \frac{r}{\rho + 1}, \quad \frac{r}{p - 1}.$$

При $\rho = p - 2$ все эти числа равны. При $\rho > p - 2$ будет

$$\frac{r(1 - \frac{1}{p})}{\rho + \frac{1}{p}} < \frac{r}{\rho + 1} < \frac{r}{p - 1},$$

а при $\rho < p - 2$ будет

$$\frac{r(1 - \frac{1}{p})}{\rho + \frac{1}{p}} > \frac{r}{\rho + 1} > \frac{r}{p - 1}.$$

Поэтому в случае $1 < p < \infty$, $\rho = p - 2$ утверждение теоремы 2.1 имеет наиболее завершённый вид, т.е. $A(p)$ по порядку равно:

- 1) $N^{\frac{p-2+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{p}) - \frac{(p-2+\frac{1}{p})(b_1+\dots+b_d)}{r}}$, если $b_d < \frac{r}{p-1}$;
- 2) $N^{\frac{p-2+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p}) - (p-2+\frac{1}{p})\frac{(b_1+\dots+b_\nu)}{r}} (\log \log N)^{\mu(1-\frac{1}{p})}$, если $b_\nu < \frac{r}{p-1} = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $N^{\frac{p-2+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{-(1-\frac{1}{p})} (\log \log N)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})}$, если $\frac{r}{p-1} = b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1}$;
- 4) $N^{\frac{p-2+\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{\frac{-b_1(p-2+\frac{1}{p})}{r}}$, если $b_2 > \frac{r}{p-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть

$$V_{N,\Omega}(x) = \sum_{s \in Q(N)} A_s^0(x, 0).$$

Норма $\|V_{N,\Omega}(x)\|_1$ по порядку не меньше, чем:

- 1) $(\log N)^{d-1-\frac{b_2+\dots+b_d}{r}}$, если $b_d < r$;
- 2) $(\log N)^{\nu-1-\frac{b_2+\dots+b_\nu}{r}}(\log \log N)^\mu$, если $b_\nu < r = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $(\log \log N)^{\nu-1}$, если $r = b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $V_{N,\Omega}(0) \asymp |\Gamma(N, \Omega)|$. С другой стороны, по теореме 2.1 с $\rho = 0$

$$\|V_{N,\Omega}(x)\|_\infty \ll N^{\frac{1}{r}}(\log N)^{-\frac{b_1}{r}} \|V_{N,\Omega}(x)\|_1.$$

Отсюда получаем утверждение следствия.

Это следствие показывает, что нормы $\|V_{N,\Omega}(x)\|_1$ не ограничены в совокупности. Как и в [1; теорема 1.2.2], отметим одно усиление теоремы 2.1 при $1 < p \leq 2$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть

$$1 < p \leq 2, \quad t(x) = \sum_{k \in Q(N)} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Тогда $\sum_{k \in Q(N)} |\widehat{t}(k)|$ по порядку не превосходит:

- 1) $N^{\frac{1}{rp}}(\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{p})-\frac{b_1+\dots+b_d}{rp}} \|t\|_p$, если $b_d < \frac{r}{p'-1}$;
- 2) $N^{\frac{1}{rp}}(\log N)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})-\frac{b_1+\dots+b_\nu}{rp}}(\log \log N)^{\mu(1-\frac{1}{p})} \|t\|_p$, если $b_\nu < \frac{r}{p'-1} = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;
- 3) $N^{\frac{1}{rp}}(\log N)^{\frac{1}{p}-1}(\log \log N)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})} \|t\|_p$, если $\frac{r}{p'-1} = b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1}$;
- 4) $N^{\frac{1}{rp}}(\log N)^{-\frac{b_1}{rp}} \|t\|_p$, если $b_2 > \frac{r}{p'-1}$.

Причем константы в этих неравенствах не зависят от N , но зависят от p .

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.2 из [1] с применением леммы 0.1 с $\gamma_j = b_j \frac{p'-1}{r}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $1 \leq q \leq p < \infty$, $p > 1$, $\rho \geq 0$. Тогда

$$\sup_{t \in T(\Gamma(N, \Omega))} \frac{\|t^{(\rho)}(x, \alpha)\|_p}{\|t\|_q} \asymp N^{\frac{\rho+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1(\rho+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}{r}}.$$

Оценки сверху доказываются аналогично доказательству теоремы 1.2.3 из [1]. Для доказательства оценок снизу берем функцию $A_s(x, 0)$ из доказательства теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $p > 1$. Тогда для произвольного полинома $t(x) \in T(\Gamma(N, \Omega))$ сумма $\sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} |\widehat{t}(k)|$ по порядку не превосходит:

- 1) $N^{\frac{1}{r}}(\log N)^{\frac{d-1}{p'}-\frac{b_1}{r}-\frac{b_2+\dots+b_d}{rp}} \|t\|_1$, если $b_d < \frac{r}{p'-1}$;
- 2) $N^{\frac{1}{r}}(\log N)^{\frac{\nu-1}{p'}-\frac{b_1}{r}-\frac{b_2+\dots+b_\nu}{rp}}(\log \log N)^{\frac{\mu}{p'}} \|t\|_1$, если $b_\nu < \frac{r}{p'-1} = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$;

- 3) $N^{\frac{1}{r}}(\log N)^{(\frac{b_1}{r}+1)(\frac{1}{p}-1)}(\log \log N)^{\frac{\nu-1}{p'}}\|t\|_1$, если $\frac{r}{p'-1} = b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1}$;
 4) $N^{\frac{1}{r}}(\log N)^{-\frac{b_1}{r}}\|t\|_1$, если $b_2 > \frac{r}{p'-1}$.

Причем константы в неравенствах не зависят от N , но зависят от p .

Доказательство следствия аналогично доказательству следствия из теоремы 1.2.3 из [1] с дополнительным применением леммы 0.1.

§ 3. Линейные приближения

В [1; гл. 2, п. 5] для классов Никольского и Соболева изучалась возможность приближения функций линейными операторами, которые дают приближения порядка наилучшего. Мы рассмотрим аналогичную задачу для классов H_q^Ω , обобщающих классы Никольского.

Через $E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p$ обозначим наилучшее приближение класса H_q^Ω в норме L_p тригонометрическими полиномами из $T(Q(N))$, т.е.

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p = \sup_{f \in H_q^\Omega} E_{Q(N)}(f)_p, \quad E_{Q(N)}(f)_p = \inf_{t \in T(Q(N))} \|f - t\|_p.$$

Рассмотрим линейные ограниченные операторы $\mathcal{L}_N$ такие, что

$$\|f - \mathcal{L}_N f\|_\infty \ll E_{Q(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty.$$

Из результатов работы [3] следует, что

$$E_{Q(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{d-1}.$$

Итак, считаем, что для $f \in H_\infty^\Omega$ будет

$$\|f - \mathcal{L}_N f\|_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{d-1}. \quad (12)$$

Как отмечено выше, можно брать $\Gamma(N, \Omega)$ вместо $Q(N)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть линейные ограниченные операторы $\mathcal{L}_N$ ставят в соответствие функции $f(x) \in H_\infty^\Omega$ тригонометрический полином $t(x)$, принадлежащий $T(\Gamma(N, \Omega))$, так, что

$$\|f - \mathcal{L}_N f\|_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{d-1}.$$

Тогда:

1) если $b_1 \leq \dots \leq b_\nu < 0 = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$, $b_d < r\delta$, $b_1 > -\alpha r$, где $\delta > 0$ – достаточно малое число, $0 < \alpha < \frac{d-1-\delta^2(d-\nu-\mu)}{p+\nu-1}$, причем $p = 1 + \delta$, то для нормы оператора $\mathcal{L}_N$ верно неравенство

$$\|\mathcal{L}_N\| \gg (\log N)^\beta,$$

где $0 < \beta = \frac{d-1-\alpha(p+\nu-1)-\delta^2(d-\nu-\mu)}{p}$;

2) если $b_1 > 0$, то

$$\|\mathcal{L}_N\| \gg (\log N)^{d-1-\frac{b_2+\dots+b_d}{r}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в условиях теоремы 3.1 $d - 1 - \frac{b_2 + \dots + b_d}{r} > 0$, то нормы $\|\mathcal{L}_N\|$ не ограничены при $N \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Как сказано в [1] при доказательстве теоремы 2.5.1, в качестве $\mathcal{L}_N$ можно брать оператор свертки с ядром

$$L_N = \sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} c_{N,k} e^{i(k,x)}.$$

Пусть $b_1 \leq \dots \leq b_\nu < 0 = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}$. Тогда легко видеть, что если

$$\prod_{j=1}^d |k_j| \leq c \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{(b_{\nu+\mu+1} + \dots + b_d)}{r}},$$

то $k = (k_1, \dots, k_d) \in \Gamma(N, \Omega)$, т.е. $\Gamma(N_2) \subset \Gamma(N, \Omega)$, где

$$\Gamma(N_2) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d |k_j| \leq N_2 \right\}$$

– гиперболический крест,

$$N_2 = c \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{(b_{\nu+\mu+1} + \dots + b_d)}{r}}.$$

Если теперь взять функцию $f(x) \in H_\infty^\Omega$ со спектром из $\Gamma(N_2)$, то получим, что

$$\mathcal{L}_N(f) = f * \sum_{k \in \Gamma(N_2)} c_{N,k} e^{i(k,x)}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_N^{(1)}(f)$ оператор свертки с ядром

$$L_N^{(1)} = \sum_{k \in \Gamma(N_2)} c_{N,k} e^{i(k,x)}.$$

Тогда для любой функции $f(x) \in H_\infty^\Omega$ со спектром из $\Gamma(N_2)$ будет

$$\|f - \mathcal{L}_N^{(1)}(f)\|_\infty \ll \frac{1}{N} (\log N)^{d-1}. \quad (13)$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующая

ЛЕММА 3.1. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех натуральных N будет*

$$\sum_{k \in \Gamma(N, \Omega)} |c_{N,k}| \geq \varepsilon \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{d-1 - \frac{b_{\nu+\mu+1} + \dots + b_d}{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем указанный выше оператор $\mathcal{L}_N^{(1)}$ для приближения функции $f(x) \in H_\infty^\Omega$ со спектром из $\Gamma(N_2)$.

Предполагая противное, а именно, что $\sum_{k \in \Gamma(N_2)} |c_{N,k}| < \varepsilon |\Gamma(N_2)|$, как и в [1] при доказательстве леммы 2.5.1, получим для числа элементов множества

$$Q = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \rho(s) \subset \Gamma(N_2), \right. \\ \left. \exists k^s \in \rho(s) : |c_{N,k^s}| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

следующую оценку снизу:

$$|Q| \gg (\log N_2)^{d-1} \log \frac{1}{\varepsilon} \gg (\log N)^{d-1} \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > (\log N)^{1-d}. \quad (14)$$

Далее, рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{s \in Q} \left(\prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \right)^{-1} e^{i(k^s, x)}.$$

Напомним, что $|c_{N,k^s}| \leq \frac{1}{2}$. По теореме 0.2 $f \in H_\infty^\Omega$. Имеем

$$|f(0) - (\mathcal{L}^{(1)} f)(0)| = \left| \sum_{s \in Q} (1 - c_{N,k^s}) \left(\prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \right)^{-1} \right| \gg \frac{|Q|}{N}.$$

Отсюда с учетом (13) и (14) получаем, что $\log \frac{1}{\varepsilon} \leq c$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Продолжим доказательство теоремы 3.1.

Сначала рассмотрим случай

$$b_1 \leq \dots \leq b_\nu < 0 = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}.$$

Учитывая условия на b_j из леммы 3.1 и следствия 2.2, получим

$$\|L_N\|_1 \gg \frac{(\log N)^{d-1 - \frac{b_\nu + \mu + 1 + \dots + b_d}{r}}}{(\log N)^{\frac{d-1}{p'} - \frac{b_1}{r} - \frac{b_2 + \dots + b_d}{rp}}}.$$

Далее, взяв $p = 1 + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно малое, получаем утверждение теоремы 3.1 в случае 1). Взяв $b_1 > 0$, можно выбрать $p > 1$, p близко к 1, так, чтобы было $b_1 > \frac{r}{p'-1}$, и аналогично предыдущему случаю получаем утверждение теоремы 3.1 в случае 2). Теорема 3.1 доказана.

Если некоторые b_j больше r , т.е. $b_\nu \leq r < b_{\nu+1}$, то возникает эффект “не своих” гиперболических крестов. В этом случае наряду с $Q(N)$ рассмотрим множества

$$Q'(N) = \bigcup_{s \in \varkappa'(N)} \rho(s),$$

где

$$\varkappa'(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b'_j} \leq N \right\},$$

причем $b'_j = b_j$ при $j = 1, \dots, \nu$, $r < b'_j < b_j$ при $j = \nu + 1, \dots, d$. В этом случае по теореме 0.1

$$|Q(N)| \asymp |Q'(N)|,$$

но приближения $E_{Q'(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty$ по порядку меньше, чем $E_{Q(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty$. Этот эффект для классов Никольского установил С. А. Теляковский (см. [8]).

Автором доказано, что если $b_\nu \leq r < b_{\nu+1}$, $b_j - b'_j > 1$, $j = \nu + 1, \dots, d$, то

$$E_{Q'(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{\nu-1}$$

(формулировку этого утверждения см. в [4]).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $b_\nu \leq r < b_{\nu+1}$, $\nu > 1$, $b_{\nu+1} - r > 1$. Пусть последовательность линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}_N$ ставит в соответствие функции $f(x)$ тригонометрический полином со спектром из $Q'(N)$, причем $b'_j = b_j$ при $j = 1, \dots, \nu$, $r < b'_j < b_j$ при $j = \nu + 1, \dots, d$ и, кроме того, $b_j - b'_j > 1$ при $j = \nu + 1, \dots, d$, и для всякой функции $f(x) \in H_\infty^\Omega$ верно неравенство

$$\|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{\nu-1}.$$

Тогда:

1) если $b_1 \leq \dots \leq b_\xi < 0 = b_{\xi+1} = \dots = b_{\xi+\zeta} < b_{\xi+\zeta+1} \leq \dots \leq b_\nu < r\delta < r < b_{\nu+1}$, $p = 1 + \delta$, $b_1 > -\alpha r$, где $0 < \alpha < \frac{\nu-1-\delta^2(\nu-\xi-\zeta)}{p+\xi-1}$, то

$$\|\mathcal{L}_N\| \gg (\log N)^\beta,$$

где $0 < \beta = \frac{\nu-1-\alpha(p+\xi-1)-\delta^2(\nu-\xi-\zeta)}{p}$;

2) если $b_1 > 0$, то

$$\|\mathcal{L}_N\| \gg (\log N)^{\nu-1-\frac{b_2+\dots+b_\nu}{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы

$$E_{Q'(N)}(H_\infty^\Omega)_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{\nu-1}.$$

Как и в теореме 3.1, достаточно рассмотреть оператор свертки с ядром

$$L_N(x) = \sum_{s \in \mathfrak{K}'(N)} \sum_{k \in \rho(s)} c_{N,k} e^{i(k,x)}.$$

Для любой функции $f(x) \in H_\infty^\Omega$ со спектром из множества

$$Q^{(\nu)}(N) = \bigcup_{s \in \mathfrak{K}^{(\nu)}(N)} \rho(s),$$

где

$$\mathfrak{K}^{(\nu)}(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^{\nu} 2^{rs_j} s_j^{b'_j} \leq N, \right. \\ \left. s_j = 1, j = \nu + 1, \dots, d \right\},$$

будет $\|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty \ll \frac{1}{N}(\log N)^{\nu-1}$.

Предположим, что $b_1 \leq \dots \leq b_\xi < 0 = b_{\xi+1} = \dots = b_{\xi+\zeta} < b_{\xi+\zeta+1}$. Отсюда, как и в теореме 3.1, следует, что

$$\sum_{k \in Q^{(\nu)}(N)} |c_{N,k}| \gg \varepsilon \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{b_\xi+\zeta+1+\dots+b_\nu}{r}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \in Q'(N)} |c_{N,k}| \gg \varepsilon \cdot N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{\nu-1-\frac{b_\xi+\zeta+1+\dots+b_\nu}{r}}.$$

И далее так же, как и в теореме 3.1, мы получаем оценки снизу для $\|\mathcal{L}_N\|$. Теорема 3.2 доказана.

Перейдем к рассмотрению метрики L_1 . Из результатов работы [3] следует, что

$$E_{Q(N)}(H_1^\Omega)_1 \ll \frac{1}{N} (\log N)^{d-1}.$$

Автором доказано, что если $b_\nu \leq r < b_{\nu+1}$, $b_j - b'_j > 1$, $j = \nu + 1, \dots, d$, то

$$E_{Q'(N)}(H_1^\Omega)_1 \ll \frac{1}{N} (\log N)^{\nu-1}$$

(формулировку см. в [4]).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть

$$\begin{aligned} b_1 \leq \dots \leq b_\xi < 0 = b_{\xi+1} = \dots = b_{\xi+\eta} < b_{\xi+\eta+1} \leq \dots \leq b_\nu < r \\ = b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1}. \end{aligned}$$

Пусть также

$$r > \frac{d + b_{\mu+1} + \dots + b_d}{d-1}.$$

Предположим, что линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_N$ ставит в соответствие каждой функции $f(x) \in H_1^\Omega$ тригонометрический полином со спектром из $Q(N)$ так, что

$$\|f - \mathcal{L}_N(f)\|_1 \ll \frac{1}{N} (\log N)^{d-1}.$$

Тогда существует число $a > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{L}_N\| \geq c_a (\log N)^a,$$

где c_a зависит от a и не зависит от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано N . Рассмотрим функцию

$$f_N(x) = \sum_{s \in \mathfrak{x}(N)} \Omega(2^{-s}) \prod_{j=1}^d s_j^{-1} \cdot \delta_s(x),$$

где

$$\delta_s(x) = \sum_{s \in \rho(s)} e^{i(k,x)}.$$

Как легко видеть, по теореме 0.2 функция $B \cdot f_N(x)$ принадлежит H_1^Ω при некотором $B > 0$. Имеем

$$\|f_N - \mathcal{L}_N(f_N)\|_1 \ll \frac{1}{N} (\log N)^{d-1}. \quad (15)$$

Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть оператор свертки с ядром

$$L_N(x) = \sum_{k \in Q(N)} c_{N,k} e^{i(k,x)}.$$

По теореме 2.3 с $\rho = 0$ с учетом (15) получим ($q > 1$)

$$\|f_N - \mathcal{L}_N(f_N)\|_q \ll N^{\frac{1-\frac{1}{q}-r}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{b_1(1-\frac{1}{q})}{r}}. \quad (16)$$

Будем считать, что $q > 1$, q близко к 1. Обозначим $1 - \frac{1}{q} = \delta$, т.е. $q = \frac{1}{1-\delta}$. По лемме 0.3 с учетом (16) получим

$$\begin{aligned} J &\equiv \left(\sum_s \left(\sum_{k \in \rho(s)} |\widehat{f}_N(k)|^2 |1 - c_{N,k}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} 2^{\|s\|_1(\frac{q}{2}-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll N^{\frac{1-\frac{1}{q}-r}{r}} (\log N)^{d-1-\frac{b_1(1-\frac{1}{q})}{r}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим, как и в лемме 3.1, противное, т.е. для $\varepsilon > 0$ будет

$$\sum_{k \in Q(N)} |c_{N,k}| < \varepsilon |Q(N)|. \quad (18)$$

Пусть

$$V = \left\{ k \in Q(N) : |c_{N,k}| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Тогда из неравенства (18) следует, что $|V| < 2\varepsilon |Q(N)|$.

Положим $V_s = V \cap \rho(s)$. Тогда $\sum_s |V_s| < 2\varepsilon |Q(N)|$ и для J при указанных q получаем

$$\begin{aligned} J^q &\gg \sum_s \left(\sum_{\substack{k \in \rho(s) \\ k \notin V}} |\widehat{f}_N(k)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} 2^{\|s\|_1(\frac{q}{2}-1)} \\ &\gg \sum_s \left(1 - \frac{|V_s|}{|\rho(s)|} \right) 2^{\|s\|_1 \frac{q}{2}} (\Omega(2^{-s}))^q \prod_{j=1}^d s_j^{-q} 2^{\|s\|_1(\frac{q}{2}-1)} \\ &= \sum_s \left(1 - \frac{|V_s|}{|\rho(s)|} \right) 2^{\|s\|_1(q-1-rq)} \prod_{j=1}^d s_j^{-q(b_j+1)}. \end{aligned}$$

Поскольку q близко к 1, то $q - 1 - rq < 0$. Имеем

$$J^q \gg \sum_{\|s\|_1 > m} 2^{\|s\|_1(q-1-rq)} \prod_{j=1}^d s_j^{-q(b_j+1)},$$

где m выбрано максимально возможным таким, что для множества $Q_m = \bigcup_{\|s\|_1 \leq m} \rho(s)$ выполнено неравенство $|Q_m| < 2\varepsilon|Q(N)|$.

Поскольку $|Q_m| \asymp 2^m m^{d-1}$, то, полагая $|Q(N)| = N^{\frac{1}{r}} \Phi(N)$ (см. оценку количества элементов множества $Q(N)$ – теорему 0.1), продолжаем оценку снизу:

$$\begin{aligned} J^q &\gg 2^{m(q-1-rq)} m^{d-1-qd-q(b_1+\dots+b_d)} \\ &\asymp \left(\varepsilon N^{\frac{1}{r}} \frac{\Phi(N)}{(\log N)^{d-1}} \right)^{q-1-rq} (\log N)^{d-1-qd-q(b_1+\dots+b_d)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соединяя оценки (17) и (19), получим

$$\varepsilon \gg \left(\left(\frac{\Phi(N)}{(\log N)^{d-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}-r} (\log N)^{(d-1)(\frac{1}{q}-1)+\frac{b_1(1-\frac{1}{q})}{r}-d-(b_1+\dots+b_d)} \right)^{-\frac{q}{q-1-rq}}. \quad (20)$$

Учитывая условия на b_j и оценку $|Q(N)|$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &\gg \left((\log N)^{(\nu-d)(1-\frac{1}{q}-r)+(d-1)(\frac{1}{q}-1)-d-\frac{(1-\frac{1}{q})(b_2+\dots+b_\nu)}{r}-(b_{\nu+1}+\dots+b_d)} \right. \\ &\quad \left. \times (\log \log N)^{\mu(1-\frac{1}{q}-r)} \right)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $q = \frac{1}{1-\delta}$, получаем противоречие в (18).

Итак,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Q(N)} |c_{N,k}| &\geq c_\delta |Q(N)| (\log N)^{d-\nu-(d-1)\frac{\delta}{r-\delta}-\frac{d}{r-\delta}-\frac{\delta(b_2+\dots+b_\nu)}{r(r-\delta)}-\frac{b_{\nu+1}+\dots+b_d}{r-\delta}} \\ &\quad \times (\log \log N)^{-\mu}. \end{aligned}$$

Считаем, что $p > 1$, p близко к 1, т.е. $1 - \frac{1}{p} = \delta_1$, $p = \frac{1}{1-\delta_1}$. Кроме того, выбираем p так, чтобы было

$$b_{\xi+\eta} < \frac{r}{p'-1} < b_{\xi+\eta+1}.$$

Соединяя эту оценку со следствием 2.2 и теоремой 0.1, получаем

$$\|L_N\|_1 \gg (\log N)^a,$$

где

$$\begin{aligned} a &= d-1 - \frac{1}{r} \delta_1 (b_2 + \dots + b_{\xi+\eta}) - \frac{1}{r} (b_{\xi+\eta+1} + \dots + b_\nu) - \delta_1 (\xi + \eta - 1) \\ &\quad - (d-1) \frac{\delta}{r-\delta} - \frac{d}{r-\delta} - \frac{\delta(b_2 + \dots + b_\nu)}{r(r-\delta)} - \frac{b_{\nu+1} + \dots + b_d}{r-\delta}. \end{aligned}$$

Считая δ и δ_1 достаточно малыми положительными числами и учитывая, что r удовлетворяет условию теоремы, получим, что $a > 0$.

Теорема 3.3 доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть b_j , $j = 1, \dots, d$, удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Пусть, кроме того,

$$b_{\nu+1} - r > 1, \quad r > \frac{\nu + b_{\mu+\xi+1} + \dots + b_d}{d-1}.$$

Предположим, что линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_N$ ставит в соответствие функции $f(x) \in H_1^\Omega$ тригонометрический полином со спектром из $Q'(N)$ такой, что

$$\|f - \mathcal{L}_N f\|_1 \ll \frac{1}{N} (\log N)^{\nu-1}.$$

Тогда $\|\mathcal{L}_N\| \geq c_a (\log N)^a$, где $a > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3.3, полагая $1 - \frac{1}{q} = \delta$, получаем

$$\varepsilon \gg \left(\left(\frac{\Phi(N)}{(\log N)^{d-1}} \right)^{\delta-r} (\log N)^{\frac{d-1}{q} - (\nu-1) + \frac{b_1\delta}{r} - d - (b_1 + \dots + b_d)} \right)^{\frac{1}{r-\delta}}.$$

Учитывая, что по теореме 0.1

$$\Phi(N) \asymp (\log N)^{(\nu-1) - \frac{1}{2}(b_1 + \dots + b_\nu)} (\log \log N)^\mu,$$

получаем

$$\varepsilon \gg (\log N)^{\frac{b}{r-\delta}} (\log \log N)^{-\mu},$$

где

$$b = (d-1) \left(r - \delta + \frac{1}{q} \right) - (\nu-1)(r-\delta+1) - \frac{\delta}{r} (b_2 + \dots + b_\nu) - (b_{\nu+1} + \dots + b_d) - d.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \in Q'(N)} |c_{N,k}| \geq C_\delta |Q'(N)| (\log N)^{\frac{b}{r-\delta}} (\log \log N)^{-\mu}.$$

Соединяя это неравенство со следствием 2.2, для $L_N = \sum_{k \in Q'(N)} c_{N,k} e^{i(k,x)}$ получаем

$$\begin{aligned} \nu - 1 - \frac{b_{\mu+\xi+1} + \dots + b_\nu}{r} + (d-\nu) \frac{r+1}{r} - \frac{d}{r} - \frac{b_{\nu+1} + \dots + b_d}{r} &> 0, \\ r(d-1) - (b_{\mu+\xi+1} + \dots + b_d) - \nu &> 0, \\ r &> \frac{\nu + b_{\mu+\xi+1} + \dots + b_d}{d-1}, \\ \|L_N\|_1 &\gg \frac{(\log N)^{\nu-1 - \frac{b_1 + \dots + b_\nu}{r} - \frac{\delta(\nu-d - \frac{b_2 + \dots + b_\nu}{r}) - \delta(\nu-1) + (d-\nu)(r+\frac{1}{q}) - d - b_{\nu+1} - \dots - b_d}{r-\delta}}}{(\log N)^{\frac{\mu+\xi-1}{p'} - \frac{b_1}{r} - \frac{b_2 + \dots + b_{\mu+\xi}}{rp}}} \\ &= (\log N)^a. \end{aligned}$$

Если обозначить $1 - \frac{1}{p} = \delta_1$, то

$$\begin{aligned} a = & \nu - 1 - (\mu + \xi - 1)\delta_1 - \delta_1 \frac{b_2 + \dots + b_{\mu+\xi}}{r} - \frac{b_{\mu+\xi+1} + \dots + b_\nu}{r} \\ & + \frac{\delta}{r - \delta} \left(\nu - d - \frac{b_2 + \dots + b_\nu}{r} \right) - \frac{\delta(\nu - 1)}{r - \delta} \\ & + (d - \nu) \frac{r + \frac{1}{q}}{r - \delta} - \frac{d}{r - \delta} - \frac{b_{\nu+1} + \dots + b_d}{r - \delta}. \end{aligned}$$

Выбираем p и q так, чтобы δ и δ_1 были достаточно малыми. Тогда с учетом условий, наложенных на r , получаем утверждение теоремы 3.4.

Теоремы 3.1–3.4 показывают, что при некоторых условиях на r и b_j нельзя указать последовательность линейных ограниченных операторов, дающих приближения классов H_1^Ω в метрике L_1 и классов H_∞^Ω в метрике L_∞ порядка наилучшего и имеющих нормы, ограниченные в совокупности.

Список литературы

- [1] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, Тр. МИАН СССР, **178**, Наука, М., 1986, 3–113; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximation of functions with a bounded mixed derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **178** (1989), 1–121.
- [2] А. С. Романюк, “Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 91–116; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Approximability of the classes $B_{p,\theta}^r$ of periodic functions of several variables by linear methods and best approximations”, *Sb. Math.*, **195**:2 (2004), 237–261.
- [3] Н. Н. Пустовойтов, “Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 107–117; англ. пер.: N. N. Pustovoitov, “Approximation of multidimensional functions with a given majorant of mixed moduli of continuity”, *Math. Notes*, **65**:1 (1999), 89–98.
- [4] Н. Н. Пустовойтов, “Ортоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители”, *Anal. Math.*, **34**:3 (2008), 187–224.
- [5] Н. Н. Пустовойтов, “Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности”, *Anal. Math.*, **20**:1 (1994), 35–48.
- [6] К. И. Бабенко, “О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами”, *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 982–985; англ. пер.: K. I. Babenko, “Approximation by trigonometric polynomials in a certain class of periodic functions of several variables”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 672–675.
- [7] С. А. Теляковский, “Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных”, *Сиб. матем. журнал*, **4**:6 (1963), 1404–1411.
- [8] С. А. Теляковский, “Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами”, *Матем. сб.*, **63**(105):3 (1964), 426–444; англ. пер.: S. A. Telyakovskij, “Some estimates for trigonometric series with quasi-convex coefficients”, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, **86** (1970), 109–131.

- [9] Б. С. Митягин, “Приближение функций в пространствах L^p и C на торе”, *Матем. сб.*, **58(100)**:4 (1962), 397–414.
- [10] Н. С. Никольская, “Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p ”, *Сиб. матем. журн.*, **15**:2 (1974), 395–412; англ. пер.: N. S. Nikol'skaya, “The approximation in the L_p metric of differentiable functions of several variables by Fourier sums”, *Siberian Math. J.*, **15**:2 (1974), 282–295.
- [11] Э. С. Белинский, Э. М. Галеев, “О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, №2, 3–7; англ. пер.: E. S. Belinskij, E. M. Galeev, “On the minimum of norms of mixed derivatives of trigonometric polynomials with given number of harmonics”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **46**:2 (1991), 4–7.
- [12] М. Б. Сихов, “Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 95–104; англ. пер.: M. B. Sikhov, “Inequalities of Bernstein and Jackson–Nikol'skii type and estimates of the norms of derivatives of Dirichlet kernels”, *Math. Notes*, **80**:1 (2006), 91–100.
- [13] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, Тр. МИАН СССР, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278.
- [14] Э. М. Галеев, “Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными”, *Матем. заметки*, **23**:2 (1978), 197–212; англ. пер.: E. M. Galeev, “Approximation by Fourier sums of classes of functions with several bounded derivatives”, *Math. Notes*, **23**:2 (1978), 109–117.
- [15] Э. С. Белинский, “Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник”, *Матем. заметки*, **49**:1 (1991), 12–18; англ. пер.: É. S. Belinskii, “Two extremal problems for trigonometric polynomials with a prescribed number of harmonics”, *Math. Notes*, **49**:1 (1991), 10–14.

Н. Н. Пустовойтов (N. N. Pustovoirov)

Московский государственный технический
университет “МАМИ”

E-mail: pustovoirovnick@mail.ru

Поступила в редакцию

18.02.2010 и 08.06.2011