Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Изосимов, Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 95–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:32:56

УДК 517.938.5

А. М. Изосимов

Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений

В работе дается топологическая классификация почти торических особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с большим числом степеней свободы, т.е. невырожденных особенностей без гиперболических компонент. Строится наглядная геометрическая модель, позволяющая производить эффективные вычисления.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, особенности, интегрируемость, топологические инварианты, лагранжевы слоения.

§ 1. Введение

Предмет настоящей статьи – топологическая классификация лагранжевых слоений, ассоциированных с интегрируемыми гамильтоновыми системами, в окрестности особого слоя. Более точно, мы рассматриваем почти торические лагранжевы слоения, введенные для четырехмерных многообразий в [1] и в общем случае в [2].

Мы дадим другое определение на эквивалентном языке интегрируемых гамильтоновых систем (основные понятия теории интегрируемых гамильтоновых систем см. в [3]). Под интегрируемой системой мы будем понимать тройку (M^{2n}, ω, F) , где M^{2n} – гладкое многообразие размерности $2n$, ω – симплектическая структура на нем, а $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение такое, что его компоненты коммутируют относительно ω и функционально независимы почти всюду. Отображение F называется отображением момента системы (M^{2n}, ω, F) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Особую точку x отображения момента F будем называть *почти торической*, если найдутся такая каноническая система координат (p, q) в окрестности x и такая система координат в окрестности $F(x)$, что $F = (f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n)$, где $f_j(p, q) = p_j$ для $j \leq k$, а остальные компоненты имеют вид

$$f_i(p, q) = p_i^2 + q_i^2, \quad (f_i(p, q), f_{i+1}(p, q)) = (p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1}, p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i).$$

С интегрируемой гамильтоновой системой ассоциировано лагранжево слоение – слоение на связные компоненты множеств уровня F . Оно называется *слоением Лиувилля*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП-2.1.1.3704), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

Почти торические особые точки являются частным случаем невырожденных особых точек. Невырожденные особые точки – это в некотором смысле особые точки общего положения (точное определение см. в [3]). Здесь мы приводим характеристическое свойство невырожденных особенностей, которое условно может быть принято за определение.

Пусть:

- 1) E – лагранжево слоение, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией $p^2 + q^2$ (эллиптический тип);
- 2) H – лагранжево слоение, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией pq (гиперболический тип);
- 3) F – лагранжево слоение, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^4, dp \wedge dq)$ коммутирующими функциями $p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - q_1p_2$ (фокус-фокус).

ТЕОРЕМА 1 (Элиасон; см. [4], [3]). *Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга r локально послойно симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения E , k_h экземпляров слоения H и k_f экземпляров слоения F , а также тривиального слоения $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$.*

Тройка (k_e, k_h, k_f) определена однозначно и называется *типом* особой точки. Почти торические особые точки – это невырожденные особые точки типа $(k_e, 0, k_f)$, т.е. без гиперболических компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Росток отображения момента на особом слое будем называть *особенностью*. Особенность будем называть *почти торической* (невырожденной), если все ее особые точки почти торические (соответственно невырожденные).

Бифуркационная диаграмма особенности – это множество особых значений отображения момента. Локальная бифуркационная диаграмма для данной точки – это множество особых значений отображения момента, ограниченного на малую окрестность данной точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Невырожденная особенность называется *нерасщепляемой*, если для каждой ее особой точки минимального ранга локальная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой особенности.

Здесь мы следуем работе [3]. В [5] нерасщепляемые особенности называются топологически устойчивыми. Тип всех особых точек минимального ранга нерасщепляемой особенности один и тот же и называется типом этой особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Две особенности будем считать *топологически эквивалентными*, если между ними существует послойный гомеоморфизм.

В [5] Нгуен Тьен Зунг показал, что при выполнении условия нерасщепляемости невырожденная особенность топологически эквивалентна почти прямому произведению (т.е. фактору прямого произведения по свободному действию конечной группы) простейших особенностей: эллиптической, гиперболической и фокусной, а также слоения без особенности. Однако существование такого представления не полностью решает задачу классификации: одна и та же особенность может быть представлена в виде почти прямого произведения несколькими способами.

В нашей статье решается задача топологической классификации для нерасщепляемых почти торических особенностей с компактными слоями. Строится наглядная модель, позволяющая производить эффективные вычисления. В частности, вычислены матрицы монодромии и показано, что топологический тип нерасщепляемой почти торической особенности полностью восстанавливается по ее монодромии.

Еще один контекст, где возникают почти торические особенности, – это комплексные интегрируемые системы (лагранжевы слоения). Для комплексной системы три типа невырожденных особых точек: эллиптическая, гиперболическая и фокусная, совпадают и с вещественной точки зрения представляют собой особую точку типа фокус-фокус. Поэтому комплексная невырожденная особенность с вещественной точки зрения – это особенность четного ранга типа $(0, 0, n)$. Мы покажем, что верно и обратное: всякая нерасщепляемая чисто фокусная особенность четного ранга топологически эквивалентна некоторой невырожденной особенности комплексной интегрируемой системы.

Автор благодарен А. В. Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание.

§ 2. Формулировка результатов

ТЕОРЕМА 2. *Любая нерасщепляемая почти торическая особенность ранга r типа $(k_e, 0, k_f)$ топологически эквивалентна прямому произведению особенности ранга 0 типа $(0, 0, k_f)$ (т.е. чисто фокусной особенности), k_e экземпляров особенности ранга 0 типа $(1, 0, 0)$ (т.е. эллиптической особенности) и слоения без особенности $T^r \times D^r$.*

Доказательство см. в § 10.

Поскольку эллиптическая особенность с точностью до послыйного гомеоморфизма (и даже симплектоморфизма) единственна, классификация нерасщепляемых почти торических особенностей сводится к классификации нерасщепляемых чисто фокусных особенностей нулевого ранга. Особенности типа $(0, 0, n)$ ранга 0 для краткости будем называть *фокусными особенностями степени n* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В окрестности особого слоя фокусной особенности F степени n существует единственное гамильтоново свободное почти всюду действие тора T^n .*

Доказательство см. в § 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Фактор особого слоя особенности F по действию T^n будем называть *редуцированным особым слоем* фокусной особенности.

Образы особых точек различных рангов определяют на редуцированном особом слое структуру клеточного комплекса. Выясним, как устроен этот комплекс.

Рассмотрим стандартное разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на единичные кубы. Пусть G – некоторая подгруппа максимального ранга n в группе трансляций $\mathbb{Z}^n$ этого разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Разбиение n -мерного тора на кубы будем называть *правильным кубическим разбиением*, если его можно получить факторизацией стандартного кубического разбиения $\mathbb{R}^n$ по некоторой подгруппе G в группе $\mathbb{Z}^n$ трансляций этого разбиения. Число n будем называть *степенью* кубического разбиения, число кубов – его *сложностью*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Редуцированный особый слой нерасщепляемой фокусной особенности является правильным кубическим разбиением n -мерного тора.*

Доказательство см. в §6.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение, сопоставляющее фокусной особенности ее редуцированный особый слой, является взаимно однозначным соответствием между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и правильными кубическими разбиениями n -мерного тора. Сложность особенности равна сложности соответствующего разбиения.*

Доказательство см. в §6.

Каждое правильное кубическое разбиение тора по определению задается подгруппой G в $\mathbb{Z}^n$. Две подгруппы задают одно и то же разбиение, если одна переходит в другую при некотором целочисленном ортогональном преобразовании (т.е. при композиции отражений относительно плоскостей $x_i = 0$, $x_i = x_j$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем называть такие подгруппы *ортогонально эквивалентными*.

ТЕОРЕМА 4. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга 0 степени n и классами ортогонально эквивалентных подгрупп конечного индекса в $\mathbb{Z}^n$. Сложность особенности равна индексу соответствующей подгруппы.*

Доказательство см. в §6.

Зафиксируем некоторую подгруппу в $\mathbb{Z}^n$, соответствующую особенности F , и выберем в ней базис. Составим матрицу $A(F)$ из векторов этого базиса, записанных по столбцам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Матрица $A(F)$ называется *матрицей разложения* базисных циклов особенности (для данного базиса).

Матрица разложения базисных циклов особенности задана с точностью до умножения на обратимую целочисленную матрицу справа и на ортогональную целочисленную матрицу слева. Модуль определителя матрицы разложения базисных циклов равен сложности особенности. Любая невырожденная целочисленная матрица задает некоторую фокусную особенность.

Рассмотрим образ отображения момента в окрестности фокусной особенности. Бифуркационная диаграмма представляет собой объединение n дисков коразмерности 2, находящихся в общем положении. Множество регулярных значений диффеоморфно $T^n \times D^n$, и его фундаментальная группа изоморфна $\mathbb{Z}^n$. Более того, в фундаментальной группе имеется естественный базис

$\gamma_1, \dots, \gamma_n$, заданный с точностью до перестановки и изменения ориентации циклов (т.е. с точностью до целочисленного ортогонального преобразования). Этот базис определяется тем, что каждый его элемент зацеплен ровно с одним диском бифуркационной диаграммы.

ТЕОРЕМА 5. *Существует способ согласованно выбрать порядок и ориентации циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и базис в группе одномерных гомологий тора Лиувилля так, что матрицы монодромии будут иметь вид*

$$h_{\gamma_i} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{pmatrix},$$

где A_i – матрица, полученная из матрицы разложения базисных циклов обнулением всех строк, кроме i -й.

Доказательство см. в §9.

Это утверждение является непосредственным обобщением формулы монодромии для фокусной особенности степени 1 (см. [6]–[8]). Поскольку произвольная нерасщепляемая почти торическая особенность распадается в прямое произведение фокусной и эллиптической особенностей, ее монодромия выражается через монодромии ее фокусной компоненты, откуда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *С точностью до послыйного гомеоморфизма нерасщепляемая почти торическая особенность однозначно восстанавливается по набору операторов монодромии h_{γ_i} .*

Доказательство см. в §9.

Поскольку монодромию можно определить в терминах аффинной структуры на базе слоения, это утверждение означает, что аффинная структура на базе почти торического слоения позволяет определить тип его особенностей (по крайней мере, если эти особенности нерасщепляемы).

§ 3. Автоморфизмы фокусных особенностей

Прежде чем перейти к классификации многомерных особенностей, мы докажем некоторые свойства обычных четырехмерных фокусных особенностей, т.е. особенностей степени 1 в нашей терминологии. Все особенности в этом параграфе предполагаются нерасщепляемыми.

С точностью до послыйного гомеоморфизма фокусная особенность степени 1 полностью определяется числом особых точек на слое (см. [6], [8]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что этот послыйный гомеоморфизм, вообще говоря, нельзя сделать гладким (см. [9]).

На рис. 1 изображен особый слой фокусной особенности степени 1. Особый слой гомеоморфен “тору с перемычками” и представляет собой объединение n особых точек и n колец.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Автоморфизм фокусной особенности* – это ее послыйный симплектоморфизм в себя, тождественный на базе слоения.

Рис. 1

Пусть $\text{Aut}(F)$ – группа автоморфизмов особенности F . Выясним, как устроена эта группа для фокусной особенности степени 1.

Для начала докажем одну общую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть (M^{2n}, ω, F) – интегрируемая гамильтонова система и $\varphi: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ – симплектоморфизм, тождественный на базе слоения Лиувилля. Предположим также, что существует неособая точка $x \in M^{2n}$ такая, что $\varphi(x)$ и x лежат в одной орбите пуассонова действия. Тогда найдется функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что на всех орбитах, проходящих через малую окрестность точки x , отображение φ есть сдвиг вдоль траекторий $\text{sgrad } f(F(x))$ на время 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – некоторое лагранжево сечение нашего слоения, проходящее через точку x . Пуассоново действие (при фиксированной системе координат на базе слоения $f^1, \dots, f^n$) задает отображение $\Pi: L \times \mathbb{R}^n \rightarrow M^{2n}$. По предположению $\varphi(x) = \Pi(x, y)$. Легко видеть, что дифференциал Π в точке (x, y) невырожден и, следовательно, Π диффеоморфно отображает окрестность $(x, y) \in (L, \mathbb{R}^n)$ на окрестность $\varphi(x) \in M^{2n}$, откуда $\varphi(z) = \Pi(z, y(z))$ для z , лежащих на L в окрестности x , где $y: L \rightarrow \mathbb{R}^n$. Поскольку L – сечение, можно считать, что отображение y задано на базе слоения.

Рассмотрим на базе слоения 1-форму $\alpha = y_i df^i$. Легко видеть, что условие лагранжевости $\varphi(L)$ равносильно замкнутости этой формы. Следовательно, в малой окрестности точки $F(x)$ существует представление $\alpha = df$ и φ , ограниченное на L , есть сдвиг на время 1 вдоль траекторий косого градиента f .

Пусть ψ – сдвиг вдоль траекторий косого градиента f на время 1. Тогда $\psi|_L = \varphi|_L$. Покажем, что они совпадают всюду на орбитах, проходящих через L . Пусть $x = \Pi(x_L, y)$, $x_L \in L$. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi(\Pi(x_L, y)) = \Pi(\varphi(x_L), y) = \Pi(\psi(x_L), y) = \psi(\Pi(x_L, y)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что сдвиг вдоль траекторий косого градиента функции на базе слоения коммутирует с любым другим симплектоморфизмом, тождественным на базе слоения. Лемма доказана.

Здесь и далее в этом параграфе независимые инволютивные интегралы нашей особенности мы будем обозначать f_1, f_2 , причем траектории косого градиента f_2 замкнуты с периодом 2π .

Пусть $f = f(f_1, f_2)$. Тогда векторное поле $\text{sgrad } f$ касается слоев нашего слоения и его поток является автоморфизмом. Будем называть такие автоморфизмы *гамильтоновыми*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Предположим, автоморфизм φ фокусной особенности оставляет на месте все ее особые точки. Тогда φ гамильтонов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если φ оставляет на месте все особые точки, то он оставляет на месте и кольца особого слоя.

Противное, очевидно, возможно, только если наша особенность имеет ровно две особые точки. Рассмотрим поток $\text{sgrad } f_1$ в окрестности одной из этих точек. На одном из колец этот поток втекает в особую точку, а на другом вытекает. Поскольку любой автоморфизм должен сохранять поток $\text{sgrad } f_1$, кольца переставиться не могут.

2. Если φ оставляет на месте хотя бы одно кольцо, то φ гамильтонов.

Если мы рассмотрим произвольную точку x на кольце, то через ее окрестность проходят все торы Лиувилля, достаточно близкие к особому слою. По лемме 1 φ гамильтонов на этих торах. Но тогда по непрерывности он гамильтонов и на особом слое.

Множество гамильтоновых симплектоморфизмов образует подгруппу в $\text{Aut}(F)$. Обозначим эту подгруппу H .

Пусть сложность F равна s . Занумеруем особые точки особенности F числами $1, \dots, s$ так, что соседние точки получают соседние номера. Любой автоморфизм F как-то переставляет эти особые точки. Тем самым, определен гомоморфизм в группу перестановок $\psi: \text{Aut}(F) \rightarrow S_s$. Очевидно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Образ ψ есть подгруппа в циклической группе, порожденной циклом $(1, \dots, s)$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Группа $\text{Aut}(F)$ изоморфна $\mathbb{Z}_k \times H$, где $k|s$, $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$, $a(x_m) = x_{m+k \pmod s}$ для всякой особой точки x_m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный автоморфизм φ такой, что $\psi(\varphi) = a$, где a – произвольная образующая в $\text{Im } \psi$. Тогда $\varphi^k = h \in H$. Пусть h – это сдвиг вдоль траекторий косого градиента некоторого интеграла f на время 1. Рассмотрим сдвиг вдоль траекторий косого градиента f на $\frac{1}{k}$ и обозначим его j . Имеем $j^k = h$, и поскольку H лежит в центре $\text{Aut}(F)$, получаем $(j^{-1}\varphi)^k = e$. Легко видеть, что $\text{Aut}(F) = H \times \langle j^{-1}\varphi \rangle$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим переменные действия в окрестности фокусной особенности. Одна из них – это f_2 . Любая другая имеет в особой точке ветвление. Легко видеть, что элементы группы $\mathbb{Z}_k$ вне особого слоя действуют, как сдвиги на время 1 вдоль траекторий $\text{sgrad } \frac{m}{k}s$, где s – многозначная переменная действия в окрестности фокусной особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Разложение $\text{Aut}(F) = \mathbb{Z}_k \times H$ не является однозначным. Действительно, если a является образующей $\mathbb{Z}_k$, а h – сдвигом вдоль траектории $\text{sgrad } 2\pi \frac{m}{k} f_2$ на 1, то ah также можно взять в качестве образующей, и мы получим другое разложение.

Поскольку траектории $\text{sgrad } f_2$ имеют период 2π , сдвиги вдоль этих траекторий порождают в H подгруппу, изоморфную S^1 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $\text{Aut}(F) = \mathbb{Z}_k \times H$. Тогда все элементы конечного порядка в $\text{Aut}(F)$ лежат в ее “компактной части” $\text{Aut}_0(F) = \mathbb{Z}_k \times S^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что все элементы конечного порядка в H на самом деле лежат в S^1 . Пусть $h \in H$, $h^k = e$. Поскольку h гамильтонов, он является сдвигом на время 1 вдоль траекторий косого градиента $f(f_1, f_2)$. Равенство $h^k = e$ означает, что траектории $\text{sgrad } f$ имеют период k . Тогда траектории $\text{sgrad } \frac{kf}{2\pi}$ имеют период 2π и, следовательно, $\frac{kf}{2\pi}$ – переменная действия. Но единственные однозначные переменные действия в окрестности фокусной особенности – это f_2 и $-f_2$. Следовательно, $f = \pm \frac{2\pi f_2}{k}$ и $h \in S^1$.

В [3; п. 9.8.3] построена “модельная” фокусная особенность с s точками на слое. Эта особенность симметрична, и для нее $\text{Aut} = \mathbb{Z}_s \times H$. Модельную особенность сложности s будем обозначать $F(s)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть F – фокусная особенность с s особыми точками на слое. Тогда существует гомеоморфизм $\psi: F \rightarrow F(s)$, индуцирующий вложение $\text{Aut}_0(F)$ в $\text{Aut}_0(F(s))$. Другими словами, существует также мономорфизм $\psi^*: \text{Aut}_0(F) \rightarrow \text{Aut}_0(F(s))$ такой, что для любого $\varphi \in \text{Aut}_0(F)$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & F(s) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi^*(\varphi) \\ F & \xrightarrow{\psi} & F(s) \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем, $\text{Aut}_0(F) \simeq \mathbb{Z}_k \times S^1$, $\text{Aut}_0(F(s)) \simeq \mathbb{Z}_s \times S^1$. Поскольку k делит s , то $\mathbb{Z}_k$ вкладывается в $\mathbb{Z}_s$, а $\text{Aut}(F)$ в $\text{Aut}(F(s))$. Возьмем этот мономорфизм в качестве ψ^* . Далее, будем считать, что $\text{Aut}(F)$ действует на обеих особенностях, имея в виду построенный мономорфизм. Наша задача состоит в построении $\text{Aut}(F)$ -эквивариантного гомеоморфизма ψ .

Рассмотрим произвольную особую точку x_1 особенности F и произвольную особую точку y_1 особенности $F(s)$. В окрестности особой точки типа фокус-фокус существуют комплексные координаты (z, w) такие, что отображение момента в них имеет вид zw . Окрестность $U(x_1)$ можно отобразить на окрестность $U(y_1)$ с помощью отображения, тождественного в этих координатах. Это отображение, очевидно, $\text{Aut}(F)$ -эквивариантно. Далее, наш гомеоморфизм однозначным образом продолжается на орбиту $U(x_1)$. Если в результате остались незадействованные точки, процедуру нужно повторить необходимое число раз. При этом может получиться так, что гомеоморфизмы, построенные нами для разных точек, различны на базе слоения, и тогда

продолжить их на всю особенность не получится. Для того чтобы этого избежать, нужно предварительно согласовать выбор z, w для разных точек. Возможность такого согласования следует из S^1 -эквивариантного варианта леммы 9.9 из [3]. S^1 -эквивариантный гомеоморфизм окрестности особой точки типа фокус-фокус, поднимающий заданный диффеоморфизм φ базы, может быть задан формулами

$$\begin{cases} \tilde{z} = \frac{\varphi(zw)}{zw} z, \\ \tilde{w} = w. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Это отображение непрерывно, но, вообще говоря, не дифференцируемо.

Теперь нужно продолжить гомеоморфизм с окрестностей особых точек на окрестность особого слоя $U(L)$. Сделать это не составляет труда, поскольку на $U(L) \setminus (\bigcup U(x_i))$ наше действие свободно и имеет сечение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Существование S^1 -эквивариантного гомеоморфизма между фокусными особенностями одинаковой сложности было отмечено в [10].

Отметим еще одно важное свойство модельной особенности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Модельная фокусная особенность имеет структуру комплексной интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Aut_0 действует на ней биголоморфно и симплектично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слоение на модельной фокусной особенности есть слоение на множества уровня голоморфной функции. Комплексная симплектическая форма задается в окрестности каждой особой точки формулой $dw \wedge dz$. Отображения склейки окрестностей сохраняют эту форму. Легко видеть, что элементы Aut_0 также сохраняют эту форму, что и требовалось доказать.

§ 4. Сингулярная координата на универсальном накрытии

Рассмотрим универсальное накрытие над модельной особенностью $F(m)$. Это накрытие одно и то же для всех m и является модельной особенностью $F(\infty)$ (рис. 2). Стрелкой указано направление потока $\text{sgrad } f_1$. Мы хотим построить функцию, растущую в этом направлении.

Рис. 2

ЛЕММА 2. *На модельной фокусной особенности $F(\infty)$ существует гладкая функция f_3 со следующими свойствами:*

- 1) f_3 принимает последовательные целые значения в особых точках;
- 2) f_3 не имеет особенностей вне особых точек;
- 3) $\{f_1, f_3\} > 0$ всюду, кроме особых точек;
- 4) $\{f_2, f_3\} = 0$;
- 5) $f_3(\varphi(x)) = f_3(x) + 1$, где φ – симплектоморфизм, переводящий i -ю точку в $(i + 1)$ -ю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала построим f_3 в окрестности одной особой точки. Обозначим эту точку x_1 . В окрестности x_1 существуют канонические координаты (p, q) такие, что

$$f_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2, \quad f_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2.$$

Положим

$$f_3 = q_1^2 + q_2^2 - p_1^2 - p_2^2.$$

Имеем

$$\{f_1, f_3\} = 2(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2), \quad \{f_2, f_3\} = 0.$$

Построенная нами функция в окрестности особой точки удовлетворяет всем требуемым свойствам. Далее, нужно перенести f_3 в окрестность каждой особой точки с помощью соответствующего симплектоморфизма. При этом значения f_3 нужно увеличивать на соответствующие целые числа.

Теперь осталось продолжить f_3 в области между окрестностями особых точек. Достаточно сделать это для одной такой области (далее f_3 продолжается однозначно), например для области между окрестностями x_1 и x_2 . Обозначим эту область через G .

Без ограничения общности можно считать, что окрестности особых точек – это шары в канонических координатах (p, q) . Тогда G расслоена на цилиндры, ограниченные траекториями $\text{sgrad } f_2$. Рассмотрим функцию T , которая есть время движения вдоль траектории $\text{sgrad } f_1$ от одной из границ G . Искомая функция f_3 будет функцией от T, f_1, f_2 . Она должна удовлетворять условию $\partial f_3 / \partial T > 0$ и гладко склеиваться с уже построенной функцией в окрестностях x_1, x_2 . Такую функцию легко построить при помощи разбиения единицы. Функция f_3 также должна коммутировать с f_2 , но этого условия всегда можно добиться усреднением построенной функции по действию окружности.

§ 5. Правильные кубические разбиения тора

В этом параграфе мы установим некоторые свойства правильных кубических разбиений тора, необходимые нам для классификации фокусных особенностей.

Пусть L – правильное кубическое разбиение тора. По определению L получается из стандартной решетки факторизацией по подгруппе полного ранга $G \subset \mathbb{Z}^n$. Действие $\mathbb{Z}^n$ на стандартной решетке определяет действие $\mathbb{Z}^n$ на L . Таким образом, определено отображение δ группы $\mathbb{Z}^n$ в группу автоморфизмов L . Образ этого отображения обозначим через $\text{Aut}_0(L)$. Ядро δ есть G , поэтому $\text{Aut}_0(L) \simeq \mathbb{Z}^n / G$. Группа $\text{Aut}_0(L)$ действует на множестве кубов разбиения L , а также на множестве их вершин транзитивно и свободно.

Выясним, однозначно ли представление L в виде фактора $\mathbb{R}^n / G$.

ЛЕММА 3. *Два кубических разбиения тора $\mathbb{R}^n/G_1$ и $\mathbb{R}^n/G_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда G_2 получается из G_1 композицией некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = x_j$ и $x_i = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что разбиения $\mathbb{R}^n/G_1$ и $\mathbb{R}^n/G_2$ изоморфны, φ – изоморфизм. Поскольку группа автоморфизмов правильного кубического разбиения тора действует на нем транзитивно, можно считать, что φ переводит образ начала координат в образ начала координат. Тогда φ поднимается до автоморфизма стандартной решетки, сохраняющего начало координат. Но такой автоморфизм, очевидно, есть целочисленное и ортогональное преобразование, т.е. композиция некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = x_j$ и $x_i = 0$. При этом G_1 он переводит в G_2 , что и требовалось доказать.

В обратную сторону утверждение очевидно.

Таким образом, действие $\mathbb{Z}^n$ на L задано не однозначно, а лишь с точностью до ортогонального автоморфизма $\mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Правильное кубическое разбиение тора с фиксированным на нем действием группы $\mathbb{Z}^n$ мы будем называть *ориентированным правильным кубическим разбиением тора*.

Очевидно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Ориентированные правильные кубические разбиения тора находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами конечного индекса в $\mathbb{Z}^n$.*

Пусть теперь L – ориентированное правильное кубическое разбиение тора. Обозначим через Δ_i автоморфизм, соответствующий i -му базисному вектору $\mathbb{Z}^n$. Будем называть автоморфизмы Δ_i *базисными сдвигами*.

Рассмотрим произвольный базисный сдвиг Δ_i . Пусть m_i – его порядок в $\text{Aut}_0(L)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Если $0 < k < m_i$, то $\Delta_i^k(K) \neq K$ для любого куба K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Delta_i^k(K) = K$ для некоторого K . Пусть $\tilde{K}$ – любой другой куб. Тогда $\tilde{K} = a(K)$ для некоторого $a \in \text{Aut}_0$. Имеем

$$\Delta_i^k(\tilde{K}) = \Delta_i^k(a(K)) = a(\Delta_i^k(K)) = \tilde{K},$$

откуда Δ_i^k есть тождественное отображение и $k = m_i$. Здесь мы воспользовались абелевостью Aut_0 .

Таким образом, m_i – это число сдвигов, которые нужно сделать в направлении i , чтобы куб перешел в себя. Число m_i будем называть *порядком i -го базисного сдвига L* .

Поскольку $\Delta_i^{m_i}$ есть тождественное отображение, то действие $\mathbb{Z}^n$ сводится к действию $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$. Более точно, существует эпиморфизм

$$\tilde{\delta}: \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n} \rightarrow \text{Aut}_0(L)$$

такой, что $\delta = \tilde{\delta}\pi$, где π – стандартная проекция $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.

Пусть $\tilde{G} = \text{Ker } \tilde{\delta}$. Обозначим (единственное) правильное кубического разбиение окружности сложности m через $L(m)$. Очевидно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Имеет место разложение $L \simeq (L(m_1) \times \cdots \times L(m_n))/\tilde{G}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Подгруппа $\tilde{G}$ имеет тривиальное пересечение с $\mathbb{Z}_{m_i}$ в $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Предположим, что $L \simeq (L(k_1) \times \cdots \times L(k_n))/H$, причем H имеет тривиальное пересечение с $\mathbb{Z}_{m_i}$. Тогда:*

- 1) *числа k_i и m_i совпадают;*
- 2) *$\tilde{G}$ и H совпадают как подгруппы $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $L \simeq (L(k_1) \times \cdots \times L(k_n))/H$, то выполнено равенство $\Delta_i^{k_i} = e$; следовательно, k_i делится на m_i . Но тогда $m_i \in H \cap \mathbb{Z}_{k_i}$ и, следовательно, $m_i = 0$ в $\mathbb{Z}_{k_i}$, откуда получаем $m_i = k_i$.

2) Это утверждение следует из того, что соответствующие подгруппы должны совпадать при поднятии в $\mathbb{Z}^n$.

Таким образом, ориентированное правильное кубическое разбиение тора имеет однозначное представление в виде почти прямого произведения одномерных разбиений со свойством из утверждения 13. Если же разбиение не ориентировано, то разложение в почти прямое произведение может зависеть от ориентации. При изменении ориентации числа m_i могут меняться местами. Две подгруппы в $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$ задают одинаковые разбиения, если они получаются друг из друга композицией некоторого числа отражений относительно плоскостей $x_i = 0$ и $x_i = x_j$ (когда $m_i = m_j$).

Введем теперь понятие матрицы разложения базисных циклов. Пусть $L = \mathbb{R}^n/G$ – ориентированное правильное кубическое разбиение. Тогда существует естественный изоморфизм между G и группой одномерных целочисленных гомологий $H_1(L, \mathbb{Z})$. Выберем некоторый базис $(e_1, \dots, e_n)$ в $H_1(L, \mathbb{Z})$ и рассмотрим соответствующий базис в G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Матрица, по столбцам которой записаны векторы полученного базиса, называется *матрицей разложения базисных циклов правильного кубического разбиения L* для базиса $(e_1, \dots, e_n)$.

При замене базиса матрица разложения базисных циклов умножится на обратимую целочисленную матрицу справа, а при замене ориентации – на ортогональную целочисленную матрицу слева.

§ 6. Классификация фокусных особенностей

В этом параграфе мы будем рассматривать особенности ранга 0 типа $(0, 0, n)$, т.е. особенности, имеющие только фокусные компоненты. Мы называем их фокусными особенностями степени n . Наша задача состоит в классификации таких особенностей с точностью до послыйного гомеоморфизма.

Далее в тексте $F(m)$ обозначает модельную фокусную особенность степени 1 сложности m .

Покажем, что в окрестности фокусной особенности всегда существует гамильтоново свободное почти всюду действие тора половинной размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Это утверждение имеет место и в расщепляемом случае. Действительно, такое действие существует и единственно в окрестности произвольной особой точки ранга 0 фокусной особенности. Поскольку это действие гамильтоново, оно порождается некоторыми функциями на базе слоения, а значит, может быть продолжено на всю окрестность особого слоя.

Мы определили редуцированный особый слой как фактор особого слоя по этому действию. Из этого определения а priori не следует инвариантность при гомеоморфизмах, поскольку послыйный гомеоморфизм не обязательно коммутирует с действием тора. Однако всякий послыйный гомеоморфизм сохраняет стратификацию особого слоя на орбиты пуассонова действия, поскольку окрестности точек на орбитах разных размерностей имеют различные топологические структуры.

Нашим основным инструментом будет

ТЕОРЕМА 6 (см. [5]). *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послыйно гомеоморфна особенности вида*

$$F = (F_1 \times \cdots \times F_n)/G,$$

где F_i – фокусные особенности степени 0, а действие G свободное, симплектическое, покомпонентное и тождественное на базе слоения.

Отсюда следует, что все орбиты пуассонова действия гомеоморфны $T^m \times \mathbb{R}^m$. Теперь можно определить редуцированный особый слой комбинаторно: для каждого m объявим $2m$ -мерные орбиты m -мерными клетками. Инцидентным орбитам будут соответствовать инцидентные клетки. Легко видеть, что определенный таким образом комплекс совпадает с редуцированным особым слоем. Кроме того, этот комплекс, очевидно, инвариантен относительно гомеоморфизмов.

Покажем теперь, что редуцированный особый слой нерасщепляемой особенности есть правильное кубическое разбиение тора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Очевидно, редуцированный особый слой прямого произведения особенностей степени 1 есть правильное кубическое разбиение тора. Если же мы имеем почти прямое произведение, то группа G действует на этом разбиении просто трансляциями (это следует из нашего описания автоморфизмов фокусных особенностей), поэтому фактор также будет правильным кубическим разбиением тора.

Далее мы докажем, что особенность однозначно с точностью до послыйного гомеоморфизма восстанавливается по своему редуцированному особому слою.

Используя утверждение 8, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послыйно гомеоморфна особенности вида*

$$F = (F(m_1) \times \cdots \times F(m_n))/G,$$

где $F(m_i)$ – модельные фокусные особенности степени 1, а

$$G \subset \text{Aut}_0(F(m_1)) \times \cdots \times \text{Aut}_0(F(m_n))$$

действует свободно, покомпонентно и симплектично.

Таким образом, можно рассматривать лишь почти прямые произведения модельных особенностей. Отметим важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякая чисто фокусная особенность ранга 0 степени n послойно гомеоморфна некоторой невырожденной особенности комплексной интегрируемой системы с n степенями свободы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, прямое произведение модельных особенностей имеет указанную структуру, а G действует послойно, биголоморфно и симплектично.

Переходя к универсальному накрытию $F(\infty) \rightarrow F(m)$ и используя утверждение 15, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послойно гомеоморфна особенности вида $F(\infty)^n/G$, где подгруппа $G \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$ действует свободно, покомпонентно и симплектично.*

Для решения задачи классификации необходимо выяснить, какие подгруппы в $G \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$ определяют топологически эквивалентные особенности.

Поскольку $\text{Aut}_0(F(\infty)) \simeq \mathbb{Z} \times S^1$, то определена проекция

$$\pi: \text{Aut}_0(F(\infty))^n \rightarrow \mathbb{Z}^n.$$

ТЕОРЕМА 7. *Пусть G_1, G_2 – подгруппы в $\text{Aut}_0(F(\infty))^n$, действующие на $F(\infty)^n$ свободно. Предположим также, что их проекции на $\mathbb{Z}^n$ совпадают. Тогда существуют послойный диффеоморфизм $\Psi: F(\infty)^n \rightarrow F(\infty)^n$ и изоморфизм $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ такие, что для любого элемента $g \in G_1$ коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} F(\infty)^n & \xrightarrow{\Psi} & F(\infty)^n \\ \downarrow g & & \downarrow \psi(g) \\ F(\infty)^n & \xrightarrow{\Psi} & F(\infty)^n \end{array}$$

Другими словами, эти действия гладко сопряжены и особенности $F(\infty)^n/G_1$, $F(\infty)^n/G_2$ послойно диффеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – проекция $\text{Aut}_0(F(\infty))^n$ на $\mathbb{Z}^n$. Из условий теоремы следует, что $(\pi|_{G_2})^{-1}\pi|_{G_1}: G_1 \rightarrow G_2$ является изоморфизмом. Этот изоморфизм мы и возьмем в качестве ψ .

Пусть Φ – действие тора. Тогда Ψ будем искать в виде

$$\Psi(x) = \Phi(\alpha(f_3^1(x), \dots, f_3^n(x)))x, \quad \text{где } \alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \text{ – гомоморфизм.}$$

При этом должно быть выполнено условие $\Psi(g(x)) = \psi(g)(\Psi(x))$:

$$\Phi(\alpha(f_3(g(x))))g(x) = \psi(g)(\Phi(\alpha(f_3(x)))x). \quad (1)$$

Заметим, что

$$\psi(g)(\Phi(\alpha(f_3(x)))x) = \Phi(\alpha(f_3(x)))\psi(g)(x),$$

поэтому уравнение (1) после замены x на $g^{-1}(x)$ переписывается в виде

$$\Phi(\alpha(f_3(x)))x = \Phi(\alpha(f_3(g^{-1}(x))))\psi(g)(g^{-1}(x)). \quad (2)$$

По условию $\psi(g)(g^{-1})$ принадлежит T^n и может быть представлено в виде $\Phi(\beta(g))$, где $\beta: G_1 \rightarrow T^n$ – гомоморфизм. Таким образом, уравнение (2) можно переписать как

$$\Phi(\alpha(f_3(x)))x = \Phi(\alpha(f_3(g^{-1}(x))))\Phi(\beta(g))(x)$$

или

$$\alpha(f_3(g(x)) - f_3(x)) = \beta(g).$$

По построению функции f_3 выражение $f_3(g(x)) - f_3(x)$ не зависит от x и линейно по g . Обозначим его через $\gamma(g)$. Так как γ есть мономорфизм G_1 в $\mathbb{R}^n$, то уравнение $\alpha(\gamma(g)) = \beta(g)$ задает α на решетке полного ранга в $\mathbb{R}^n$. Далее α продолжается на все $\mathbb{R}^n$ по линейности. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякая нерасщепляемая фокусная особенность ранга 0 степени n послойно гомеоморфна особенностям вида $F(\infty)^n/G$, где G – подгруппа полного ранга в $\mathbb{Z}^n \subset \text{Aut}_0(F(\infty))^n$.*

Теперь мы готовы доказать теоремы 3 и 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Достаточно показать, что группа G из следствия 1 определена с точностью до целочисленного ортогонального преобразования. Предположим, что $F(\infty)^n/G_1 \simeq F(\infty)^n/G_2$. Тогда кубические разбиения торов $\mathbb{R}^n/G_1$ и $\mathbb{R}^n/G_2$ изоморфны и по лемме 3 G_2 получается из G_1 целочисленным ортогональным преобразованием.

Пусть теперь G_2 получена из G_1 некоторым целочисленным ортогональным преобразованием. Покажем, что действия G_2 и G_1 на $F(\infty)^n$ сопряжены. Достаточно рассмотреть два случая:

- 1) подгруппа G_2 получена из G_1 транспозицией i -й и j -й координат; тогда в качестве сопрягающего диффеоморфизма можно взять перестановку i -й и j -й компонент в $F(\infty)^n$;
- 2) подгруппа G_2 получена из G_1 изменением знака i -й координаты; тогда в качестве сопрягающего диффеоморфизма можно взять отображение, “переворачивающее” i -ю компоненту $F(\infty)^n$.

Поскольку любое целочисленное ортогональное преобразование есть композиция этих двух, то действия G_1 и G_2 сопряжены и наши особенности послойно гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы уже показали, что редуцированные особые слои топологически эквивалентных особенностей изоморфны.

1. Если редуцированные особые слои двух фокусных особенностей изоморфны, то эти особенности топологически эквивалентны.

Действительно, пусть одна из особенностей представлена в виде $F(\infty)^n/G_1$, а другая в виде $F(\infty)^n/G_2$. Тогда их редуцированные особые слои имеют вид

$\mathbb{R}^n/G_1$ и $\mathbb{R}^n/G_2$ соответственно. Они изоморфны, поэтому G_2 и G_1 связаны между собой целочисленным ортогональным преобразованием, откуда и следует топологическая эквивалентность особенностей.

2. Всякое правильное кубическое разбиение тора является редуцированным особым слоем некоторой фокусной особенности.

Всякое кубическое разбиение получается из стандартного разбиения $\mathbb{R}^n$ факторизацией по $G \subset \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим особенность $F(\infty)^n/G$. Ее редуцированный особый слой будет совпадать с нашим разбиением.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Можно показать, что если фокусные особенности степени n гомеоморфны, то они также и T^n -эквивариантно гомеоморфны (в случае степени 1 это утверждение 8). По-видимому, это проявление общего факта об особенностях, допускающих гамильтоново действие тора.

§ 7. Модель почти прямого произведения

Используя уже имеющиеся у нас результаты о представлении правильных кубических разбиений в виде почти прямых произведений, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 17 (о канонической модели почти прямого произведения в смысле Зунга). *Любая нерасщепляемая фокусная особенность гомеоморфна особенностям вида $(F(m_1) \times \cdots \times F(m_n))/G$, где $G \subset \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$, $G \cap \mathbb{Z}_{m_i} = 0$. Числа m_i в этом разложении определены однозначно с точностью до перестановки, а подгруппа G – однозначно с точностью до композиции отражений относительно плоскостей $x_i = 0$ и $x_i = x_j$ (когда $m_i = m_j$).*

§ 8. Подсчет числа особенностей

В некоторых частных случаях можно явно вычислить число особенностей данной степени и сложности. Обозначим соответствующую функцию через $\xi(n, s)$, где n – степень, s – сложность.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Для любой степени существует единственная с точностью до гомеоморфизма особенность сложности 1. Другими словами,*

$$\xi(n, 1) = 1.$$

Для подсчета числа особенностей большей сложности полезна симметричная модель.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Все порядки базисных сдвигов фокусной особенности делят ее сложность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Порядок базисного сдвига Δ_i – это длина орбиты куба под действием этого сдвига. Поскольку все орбиты имеют одинаковую длину, эта длина должна быть делителем общего числа кубов, т.е. сложности. Можно объяснить этот факт алгебраически: если $F = (F(m_1) \times \cdots \times F(m_n))/G$ –

каноническая модель, то проекция G на $\mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$ не имеет ядра и $|G|$ делит $m_2 \cdots m_n$, откуда сложность F равна

$$\frac{m_1 \cdots m_n}{|G|} = m_1 \frac{m_2 \cdots m_n}{|G|} = km_1,$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Фокусная особенность сложности s послойно гомеоморфна особенности вида*

$$F = (F(s) \times \cdots \times F(s))/G.$$

Эту модель мы называем *симметричной*. Группа G в симметричной модели – произвольная подгруппа в $\mathbb{Z}_s^n$ индекса s . Степень произвола выбора G такая же, как и в модели универсального накрытия. Симметричная модель удобна тем, что нужно перечислять подгруппы в конечной группе. При этом никаких дополнительных условий проверять не нужно. Эту задачу можно легко решить, например, с помощью компьютера.

Рассмотрим случай, когда $s = p$ простое. В этом случае мы должны перечислять гиперплоскости в линейном пространстве $\mathbb{Z}_p^n$. Всякая гиперплоскость задается своей нормалью. Таким образом, фокусной особенности сложности p , где p простое, мы сопоставили некоторый ненулевой вектор из $\mathbb{Z}_p^n$. Этот вектор задан с точностью до пропорциональности, изменения знаков и перестановки координат. Из этого рассуждения легко выводятся следующие утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. $\xi(n, 2) = n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. $\xi(n, 3) = n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Пусть p нечетное простое. Тогда*

$$\frac{p^n - 1}{(p-1)n! 2^{n-1}} \leq \xi(n, p) \leq \frac{p^n - 1}{p-1},$$

$$\frac{2}{p-1} (C_{n+(p-1)/2}^{(p-1)/2} - 1) \leq \xi(n, p) \leq C_{n+(p-1)/2}^{(p-1)/2} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на $\mathbb{Z}_p^n$ действие группы H , порожденной изменениями знаков, перестановкой координат и умножениями на ненулевой элемент $\mathbb{Z}_p$. Множество особенностей состоит во взаимно однозначном соответствии с орбитами этого действия. Поскольку $|H| = (p-1)n! 2^{n-1}$, то

$$\xi(n, p) \geq \frac{p^n - 1}{(p-1)n! 2^{n-1}}.$$

Длина каждой орбиты не меньше, чем $p-1$, откуда

$$\xi(n, p) \leq \frac{p^n - 1}{p-1}.$$

Докажем теперь вторую цепочку неравенств. В каждой орбите имеется представитель, все координаты которого меньше либо равны $(p-1)/2$ и не убывают, поэтому

$$\xi(n, p) \leq C_{n+(p-1)/2}^{(p-1)/2} - 1.$$

При этом одной и той же особенности соответствует не более $(p-1)/2$ таких последовательностей, откуда получаем нижнюю оценку.

Не более чем полиномиальный рост по сложности, очевидно, имеет место и в общем случае в силу очевидной грубой оценки $\xi(n, m) \leq m^{n^2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. $\xi(n, m)$ растет по n не быстрее чем полиномиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кубическое разбиение тора сложности m степени n может быть склеено из m кубов. Можно считать, что гиперграни кубов помечены метками $1, \dots, n$, и мы склеиваем грани с одинаковыми метками. Каждому разбиению мы можем сопоставить “вектор” (склейка граней с меткой 1 и т.д., склейка граней с меткой n). Очевидно, разбиение останется тем же самым, если мы переставим компоненты этого “вектора” местами. Пусть $f(m)$ – число всевозможных разбиений на пары множества из $2m$ элементов. Искомое число разбиений не превосходит числа неупорядоченных наборов длины n , состоящих из чисел $1, \dots, f(m)$. Имеем

$$\xi(n, m) \leq C_{n+f(m)-1}^{f(m)-1} \leq (n + f(m) - 1)^{f(m)-1},$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Алгебраическое доказательство утверждения 23 автору не известно. Нетривиальность утверждения состоит в том, что число подгрупп в $\mathbb{Z}^n$ заданного индекса растет вместе с n экспоненциально, но если мы отождествим между собой ортогонально-эквивалентные подгруппы, то число классов эквивалентности будет иметь полиномиальный рост.

Рассмотрим особенности сложности 2 степени 2. Таких особенностей две и их редуцированные особые слои изображены на рис. 3.

Рис. 3

Вторая особенность является простейшим примером особенности, не представимой в виде прямого произведения. Подгруппа $\mathbb{Z}_2$ здесь вложена в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ как диагональ. Два квадрата, составляющие редуцированный особый слой этой особенности, граничат как по вертикальному, так и по горизонтальному ребру. Образно говоря, они прочнее сцеплены друг с другом, чем в случае прямого произведения. Можно показать, что особенность $(F(2) \times F(2))/\mathbb{Z}_2$ устойчива

в классе особенностей интегрируемых систем. Для $F(1) \times F(2)$ это, вообще говоря, неверно: например, симплектическое прямое произведение $F(1) \times F(2)$ неустойчиво и при малом возмущении распадается на две особенности сложности 1.

§ 9. Монодромия

Этот параграф посвящен изучению строения слоения Лиувилля в дополнении к особым слоям вблизи фокусной особенности. Умение вычислять монодромию особенности дает возможность делать выводы о глобальном устройстве слоения Лиувилля системы, зная лишь локальное строение ее особенностей. И наоборот, зная, как устроена система вдали от особенности, мы можем определить топологический тип особенности.

Рассмотрим сначала случай степени 1. Пусть f_2 – периодический интеграл, f_1 – произвольный другой интеграл, функционально не зависящий от f_2 вне особых точек. Пусть x – точка на базе слоения, близкая к особому значению, γ – петля, обходящая особое значение в плоскости (f_1, f_2) в положительном направлении, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Пусть v_1 – класс одномерных целочисленных гомологий тора Лиувилля, лежащего в прообразе x , соответствующий траектории косого градиента периодического интеграла f_2 , e_1 – произвольный цикл, дополняющий v_1 до базиса и идущий в направлении траектории $\text{sgrad } f_1$. Начнем двигаться по петле γ и будем следить, что происходит с базисом (e_1, v_1) . Оказывается, что после совершения полного обхода мы получим базис, отличный от исходного. Соответствующий оператор на группе одномерных гомологий тора называется оператором монодромии.

ТЕОРЕМА 8 (см. [7], [8]). *В базисе (e_1, v_1) матрица оператора монодромии имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix},$$

где m – число особых точек на слое.

Наша задача состоит в обобщении этого результата на случай произвольной степени.

Бифуркационная диаграмма в случае фокусной особенности степени n – это n дисков коразмерности 2. Дополнение к бифуркационной диаграмме диффеоморфно $\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^n$. В его фундаментальной группе имеется выделенный базис из k циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (определенных с точностью до перестановки и изменения ориентации), каждый из которых зацеплен с единственным $(2n-2)$ -мерным диском бифуркационной диаграммы. Следовательно, определено n операторов монодромии.

Рассмотрим сначала особенность сложности 1. С точностью до послыного гомеоморфизма такая особенность единственна и имеет вид $F(1)^n$. Для каждого из сомножителей выберем базис на торе Лиувилля, как описано выше. В результате мы получим базис $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ на торе Лиувилля $F(1)^n$. Любой базис, построенный таким способом, мы будем называть *стандартным*. Очевидно, что

$$h_i(v_j) = v_j, \quad h_i(e_j) = e_j + \delta_{ij}v_j,$$

где h_i – оператор монодромии, соответствующий обходу вокруг i -го диска бифуркационной диаграммы.

Пусть теперь F – произвольная фокусная особенность степени n . Можно считать, что F есть почти прямое произведение $F(\infty)^n/G$.

Пусть $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ – базис на некотором торе Лиувилля, близком к особому слою, такой, что $v_1, \dots, v_n$ – траектории косых градиентов периодических интегралов. Легко видеть, что особый слой F является деформационным ретрактом своей окрестности. Стыгивая циклы e_i на особый слой и проецируя их на редуцированный особый слой, мы получим базис в одномерных гомологиях редуцированного особого слоя. Таким образом, базис на торе Лиувилля фокусной особенности определяет базис на ее редуцированном особом слое.

ЛЕММА 4. Пусть $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ – базис на торе Лиувилля, лежащем в прообразе точки x , особенности F такой, что $v_1, \dots, v_n$ – траектории косых градиентов периодических интегралов. Тогда существует послойное накрытие $\rho: F \rightarrow F(1)^n$, являющееся гомеоморфизмом на базе слоения и такое, что

$$\rho(v_i) = \tilde{v}_i, \quad \rho(e_i) = \sum_j a_{ji} \tilde{e}_j,$$

где $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ – стандартный базис на торе $\rho(x)$, (a_{ij}) – матрица разложения базисных циклов, соответствующая $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на $F(\infty)^n$ действие группы $\mathbb{Z}^n$. Оно определяет действие группы $\mathbb{Z}^n/G$ на F . Фактор F по этому действию есть особенность сложности 1, т.е. $F(1)^n$.

Очевидно, что $\rho(v_i) = \tilde{v}_i$. Для доказательства равенства $\rho(e_i) = a_{ji} \tilde{e}_j$ заметим, что именно так связаны между собой базисы на редуцированном особом слое F и $F(1)^n$.

ТЕОРЕМА 9 (о монодромии). Имеет место формула

$$h_i(e_j) = e_j + a_{ij}v_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся существованием накрытия, построенного в лемме 4. Имеет место очевидное равенство

$$\rho(h_i(e_j)) = h_i(\rho(e_j)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} h_i(\rho(e_j)) &= \sum_k a_{kj} h_i(\tilde{e}_k) = \sum_k a_{kj} (\tilde{e}_k + \delta_{ik} \tilde{v}_k) \\ &= \left(\sum_k a_{kj} \tilde{e}_k \right) + a_{ij} \tilde{v}_i = \rho(e_j + a_{ij}v_i), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое равенство.

Эта теорема является координатной формой теоремы 5. Действительно, в базисе $(e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n)$ матрица h_i имеет вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{pmatrix},$$

где A_i – матрица, полученная из матрицы разложения базисных циклов обнулением всех строк, кроме i -й.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Фокусная особенность восстанавливается по своей монодромии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, фокусная особенность восстанавливается по своей матрице разложения базисных циклов, а

$$h_{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A & E \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. Вычислим монодромию для особенности $(F(2) \times F(2))/\mathbb{Z}_2$. Матрица разложения базисных циклов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 10. Доказательство теоремы 2

По теореме Зунга всякая особенность может быть представлена в виде $L \times E$, где E – эллиптическая особенность ранга 0, L – особенность без эллиптических компонент. Таким образом, нам надо показать, что всякая фокусная особенность ненулевого ранга – это прямое произведение фокусной особенности ранга 0 и слоения без особенности.

Всякая фокусная особенность ранга k может быть представлена в виде

$$F = (F_0 \times (T^k \times D^k))/G_0,$$

где $F_0 = F(m_1) \times \dots \times F(m_n)$.

Как и в случае с особенностями нулевого ранга, перейдем к накрытию. Это позволит представить нашу особенность в виде

$$F = (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/G.$$

Шаг 1. Можно считать, что G действует на $F(\infty)^n$ сдвигами без подкруток. Другими словами, для всякого действия G существует диффеоморфизм $F(\infty)^n \times (T^k \times D^k)$ в себя, “убивающий” подкрутки. Это доказывается так же, как и в случае нулевого ранга.

Шаг 2. Можно считать, что G действует на $F(\infty)^n$ свободно. Действительно, пусть это не так. Выделим подгруппу $H \subset G$, состоящую из элементов, оставляющих компоненту $F(\infty)^n$ неподвижной. Тогда

$$\begin{aligned} (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/G &= ((F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/H)/(G/H) \\ &= (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k)/H)/(G/H) = (F(\infty)^n \times (T^k \times D^k))/(G/H). \end{aligned}$$

Как легко видеть, действие G/H на $F(\infty)^n$ эффективно, а потому свободно (поскольку мы избавились от подкруток).

Шаг 3. Если G действует на $F(\infty)^n$ сдвигами и свободно, то при помощи диффеоморфизма $F(\infty)^n \times (T^k \times D^k)$ в себя можно избавиться от действия G на $T^k \times D^k$. Это делается так же, как мы избавлялись от подкруток в случае нулевого ранга.

Список литературы

- [1] M. Symington, “Four dimensions from two in symplectic topology”, *Topology and geometry of manifolds* (Athens, GA, USA, 2001), Proc. Sympos. Pure Math., **71**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 153–208.
- [2] N. C. Leung, M. Symington, “Almost toric symplectic four-manifolds”, *J. Symplectic Geom.*, **8**:2 (2010), 143–187; math.SG/0312165
- [3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [4] L. H. Eliasson, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, **65**:1 (1990), 4–35.
- [5] N. T. Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, **101**:2 (1996), 179–215.
- [6] В. С. Матвеев, “Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло”, *Матем. сб.*, **187**:4 (1996), 29–58; англ. пер.: V. S. Matveev, “Integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom. The topological structure of saturated neighbourhoods of points of focus-focus and saddle-saddle type”, *Sb. Math.*, **187**:4 (1996), 495–524.
- [7] M. Zou, “Monodromy in two degrees of freedom integrable systems”, *J. Geom. Phys.*, **10**:1 (1992), 37–45.
- [8] N. T. Zung, “A note on focus-focus singularities”, *Differential Geom. Appl.*, **7**:2 (1997), 123–130.
- [9] А. М. Изосимов, *Критерий гладкой эквивалентности особенностей типа фокус-фокус*, дипломная работа, Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2008.
- [10] N. T. Zung, “Another note on focus-focus singularities”, *Lett. Math. Phys.*, **60**:1 (2002), 87–99.

А. М. Изосимов (A. M. Izosimov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: alifesin@gmail.com

Поступила в редакцию
 19.02.2010 и 21.12.2010