Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Зархин, Эндоморфизмы абелевых многообразий, круговые расширения и алгебры Ли, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 93–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:06:45

УДК 512.742.7

Ю. Г. Зархин

Эндоморфизмы абелевых многообразий, круговые расширения и алгебры Ли

Доказывается аналог гипотезы Тэйта о гомоморфизмах абелевых многообразий над бесконечными круговыми расширениями конечно порожденных полей нулевой характеристики.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: абелевы многообразия, модули Тэйта, гипотеза Тэйта.

§ 1. Введение

Цель настоящей статьи – распространить результаты Г. Фальтингса (см. [1], [2]), относящиеся к гипотезе Тэйта о гомоморфизмах абелевых многообразий (см. [3], [4]), над конечно порожденными полями K нулевой характеристики, на их бесконечные круговые расширения $K(\ell) = K(\mu_{\ell^\infty})$. Утверждение о возможности подобного обобщения (для случая числового поля K) было высказано (без подробного доказательства) в обзоре [5; § 6, п. 2, с. 91–92]; было отмечено, что этот результат выводится из теоремы Фальтингса с помощью техники, развитой в работе [6] и теоремы Ф. А. Богомолова о гомотетиях (см. [7], [8]). Нашим основным результатом является следующее утверждение. (Ниже через $\text{Gal}(E)$ обозначается абсолютная группа Галуа поля E , а $T_\ell(X)$ и $T_\ell(Y)$ – модули Тэйта абелевых многообразий X и Y соответственно.)

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть K – поле, конечно порожденное над $\mathbf{Q}$, а ℓ – простое число. Положим $E = K(\ell)$. Если X и Y – абелевы многообразия над полем E , то естественное вложение $\mathbf{Z}_\ell$ -модулей

$$\text{Hom}_E(X, Y) \otimes \mathbf{Z}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(E)}(T_\ell(X), T_\ell(Y))$$

является биекцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Заменяя K на его подходящее конечное расширение (лежащее в E), мы можем при доказательстве теоремы 1.1 предполагать, что X и Y определены над K .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. А. Н. Паршин (см. [5; § 6, п. 2, с. 91–92]) предположил, что верен следующий аналог гипотезы Морделла: если K – числовое поле, а C – гладкая абсолютно неприводимая проективная кривая над полем $E = K(\ell)$, то множество $C(E)$ ее E -рациональных точек конечно, если род C больше единицы. Теорема 1.1 возникла из попыток понять, какие части доказательства гипотезы Морделла, принадлежащего Фальтингсу (см. [1]), переносятся на случай поля $K(\ell)$.

Статья организована следующим образом. В § 2 обсуждаются ℓ -адические алгебры Ли, возникающие из модулей Тэйта, и их централизаторы. В § 3 разбираются аналогии гипотезы Тэйта о гомоморфизмах над произвольными полями. В § 4 доказывается основной результат работы.

Автор признателен А. Н. Паршину за стимулирующие обсуждения.

§ 2. Модули Тэйта, ℓ -адические группы и алгебры Ли

Пусть K – поле, $\bar{K}$ – его алгебраическое замыкание и $\text{Gal}(K) = \text{Aut}(\bar{K}/K)$ – абсолютная группа Галуа. Если m – натуральное число, не делящееся на $\text{char}(K)$, то мы обозначаем через μ_m мультипликативную циклическую группу порядка m корней m -й степени из единицы в $\bar{K}$, а через $K(\mu_m)$ – соответствующее круговое расширение поля K . Если ℓ – простое число, отличное от $\text{char}(K)$, то мы обозначаем через $K(\ell)$ “бесконечное” круговое расширение

$$E = K(\mu_{\ell^\infty}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(\mu_{\ell^i}).$$

Хорошо известно, что компактная группа Галуа $\text{Gal}(K(\ell)/K)$ канонически изоморфна замкнутой подгруппе группы $\mathbf{Z}_\ell^*$. Обозначим через

$$\chi_\ell: \text{Gal}(K) \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$$

соответствующий круговой характер; его ядро совпадает с

$$\text{Gal}(K(\ell)) = \text{Aut}(\bar{K}/K(\ell)).$$

Обозначим через $\mathbf{Z}_\ell(1)$ проективный предел групп μ_{ℓ^j} , при котором отображением перехода $\mu_{\ell^{j+1}} \rightarrow \mu_{\ell^j}$ является возведение в ℓ -ю степень. Хорошо известно, что $\mathbf{Z}_\ell(1)$ – свободный $\mathbf{Z}_\ell$ -модуль ранга 1, снабженный естественной структурой модуля Галуа; при этом определяющий гомоморфизм

$$\text{Gal}(K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{Z}_\ell(1)) = \mathbf{Z}_\ell^*$$

совпадает с характером χ_ℓ . Рассмотрим векторное пространство над $\mathbf{Q}_\ell$

$$\mathbf{Q}_\ell(1) = \mathbf{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell,$$

имеющее размерность 1 и структуру модуля Галуа, задаваемую тем же характером

$$\chi_\ell: \text{Gal}(K) \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^* \subset \mathbf{Q}_\ell^* = \text{Aut}_{\mathbf{Q}_\ell}(\mathbf{Q}_\ell(1)).$$

Пусть A – абелево многообразие над K и $\text{End}_K(A)$ – кольцо всех его K -эндоморфизмов. Если X и Y – абелевы многообразия над K , то через $\text{Hom}_K(X, Y)$ обозначается группа всех K -гомоморфизмов из X в Y . Для натуральных m , не делящихся на $\text{char}(K)$, мы обозначаем через A_m ядро умножения на m в $A(\bar{K})$. Подгруппа A_m является свободным $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ -модулем ранга $2 \dim(A)$ (см. [9]) и подмодулем Галуа в $A(\bar{K})$.

Обозначим через $T_\ell(A)$ ℓ -адический модуль Тэйта абелева многообразия A , являющийся проективным пределом групп A_{ℓ^j} , при котором отображением перехода $A_{\ell^{j+1}} \rightarrow A_{\ell^j}$ является умножение на ℓ (см. [9]). Хорошо известно,

что $T_\ell(A)$ – свободный $\mathbf{Z}_\ell$ -модуль ранга $2 \dim(A)$, естественные отображения $T_\ell(A) \rightarrow A_{\ell^j}$ индуцируют изоморфизмы

$$T_\ell(A)/\ell^j = A_{\ell^j}$$

и действия группы Галуа на A_{ℓ^j} позволяют определить естественный непрерывный гомоморфизм (ℓ -адическое представление)

$$\rho_{\ell,A} = \rho_{\ell,A,K}: \text{Gal}(K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(T_\ell(A)),$$

снабжающий $T_\ell(A)$ естественной структурой $\text{Gal}(K)$ -модуля (см. [10]). Образ

$$G_{\ell,A,K} = \rho_{\ell,A}(\text{Gal}(K)) \subset \text{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(T_\ell(A))$$

– компактная ℓ -адическая группа Ли (см. [10]); при этом

$$G_{\ell,A,K} \subset 1 + \ell^j \text{End}_{\mathbf{Z}_\ell}(T_\ell(A)),$$

если и только если $\text{Gal}(K)$ действует тривиально на $T_\ell(A)/\ell^j = A_{\ell^j}$, т.е. $A_{\ell^j} \subset A(K)$.

Ясно, что $\text{Gal}(K(\ell)) = \text{Aut}(\overline{K}/K(\ell))$ – компактная нормальная подгруппа группы $\text{Gal}(K)$. Обозначим через $G_{\ell,A,K}^1$ ее образ $\rho_{\ell,A}(\text{Gal}(K(\ell)))$, который является компактной нормальной подгруппой группы $G_{\ell,A,K}$. По определению

$$G_{\ell,A,K}^1 = G_{\ell,A,K(\ell)}.$$

Рассмотрим $2 \dim(A)$ -мерное векторное пространство

$$V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

над полем $\mathbf{Q}_\ell$. Можно считать $T_\ell(A)$ $\mathbf{Z}_\ell$ -решеткой в $V_\ell(A)$. Справедливы включения

$$G_{\ell,A,K} \subset \text{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(T_\ell(A)) \subset \text{Aut}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A)),$$

которые позволяют снабдить $V_\ell(A)$ естественной структурой $\text{Gal}(K)$ -модуля.

Заметим, что алгебра Ли компактной ℓ -адической группы Ли $\text{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(T_\ell(A))$ совпадает с $\text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A))$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ группы $G_{\ell,A,K}$ является $\mathbf{Q}_\ell$ -линейной подалгеброй Ли в $\text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A))$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ группы $G_{\ell,A,K}^1$ является идеалом в $\mathfrak{g}_{\ell,A}$. Известно (см. [10]), что алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ и $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ не меняются, если заменить поле K на его конечное алгебраическое расширение.

Пусть Id – тождественный автоморфизм векторного пространства $V_\ell(A)$, и пусть

$$\text{tr}: \text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A)) \rightarrow \mathbf{Q}_\ell$$

– отображение следа. Пусть

$$\det: \text{Aut}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A)) \rightarrow \mathbf{Q}_\ell^*$$

– отображения взятия определителя. Обозначим через $\mathfrak{sl}(V_\ell(A))$ подалгебру Ли операторов с нулевым следом в $\text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A))$.

Пусть $\text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A))$ – централизатор алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ в $\text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A))$ и $\text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A))$ – централизатор алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ в $\text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A))$. Ясно, что

$$\mathbf{Q}_\ell \text{Id} \subset \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)) \subset \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)) \subset \text{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ – алгебра Ли группы $G_{\ell,A,K}$, то

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_{\ell}(A)) \supset \mathrm{End}_{G_{\ell,A,K}}(V_{\ell}(A)) = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(K)}(V_{\ell}(A)).$$

Поскольку $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ – алгебра Ли группы $G_{\ell,A,K}^1$, то

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_{\ell}(A)) \supset \mathrm{End}_{G_{\ell,A,K}^1}(V_{\ell}(A)) = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(K(\ell))}(V_{\ell}(A)) = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E)}(V_{\ell}(A)).$$

В следующих двух предложениях мы предполагаем, что абелево многообразие A имеет положительную размерность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. 1) $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0 = \mathfrak{g}_{\ell,A} \cap \mathfrak{sl}(V_{\ell}(A)) \subset \mathfrak{sl}(V_{\ell}(A))$.

2) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ содержит все гомометрии $\mathbf{Q}_{\ell} \mathrm{Id}$. Тогда

$$\mathfrak{g}_{\ell,A} = \mathbf{Q}_{\ell} \mathrm{Id} \oplus \mathfrak{g}_{\ell,A}^0.$$

В частности, централизаторы $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_{\ell}(A))$ и $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_{\ell}(A))$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [11; § 1.3]), что выбор поляризации на A позволяет определить невырожденную альтернированную билинейную форму

$$e_{\ell}: V_{\ell}(A) \times V_{\ell}(A) \rightarrow \mathbf{Q}_{\ell}(1)$$

такую, что

$$e_{\ell}(\rho_{\ell,A}(\sigma)(x), \rho_{\ell,A}(\sigma)(y)) = \chi_{\ell}(\sigma) \cdot e_{\ell}(x, y) \quad \forall x, y \in V_{\ell}(A); \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(K).$$

Зафиксировав (неканонический) изоморфизм (одномерных) векторных над $\mathbf{Q}_{\ell}$ пространств

$$\mathbf{Q}_{\ell}(1) \cong \mathbf{Q}_{\ell},$$

мы можем считать, что альтернированная форма e_{ℓ} принимает значения в поле $\mathbf{Q}_{\ell}$. Получается, что $G_{\ell,A,K}$ лежит в соответствующей группе симплектических подобий

$$\begin{aligned} \mathrm{Gp}(V_{\ell}(A), e_{\ell}) = \{s \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_{\ell}}(V_{\ell}(A)) \mid \exists c \in \mathbf{Q}_{\ell}^* \text{ такой, что} \\ e_{\ell}(sx, sy) = c \cdot e_{\ell}(x, y) \quad \forall x, y \in V_{\ell}(A)\} \subset \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_{\ell}}(V_{\ell}(A)). \end{aligned}$$

При этом характер χ_{ℓ} совпадает с композицией гомоморфизмов

$$\rho_{\ell,A}: \mathrm{Gal}(K) \twoheadrightarrow G_{\ell,A,K}$$

и

$$G_{\ell,A,K} \subset \mathrm{Gp}(V_{\ell}(A), e_{\ell}) \xrightarrow{c} \mathbf{Q}_{\ell}^*,$$

где скаляр $c(s)$ определяется формулой

$$e_{\ell}(sx, sy) = c(s) \cdot e_{\ell}(x, y) \quad \forall x, y \in V_{\ell}(A); \quad s \in \mathrm{Gp}(V_{\ell}(A), e_{\ell}).$$

Ясно, что

$$c: \mathrm{Gp}(V_{\ell}(A), e_{\ell}) \rightarrow \mathbf{Q}_{\ell}^*, \quad s \mapsto c(s),$$

– гомоморфизм ℓ -адических групп Ли и

$$c(s)^{\dim(A)} = \det(s) \quad \forall s \in \mathrm{Gp}(V_{\ell}(A), e_{\ell})$$

(напомним, что $V_\ell(A) - 2 \dim(A)$ -мерное векторное пространство над $\mathbf{Q}_\ell$). Также ясно, что $G_{\ell,A,K}^0$ совпадает с ядром гомоморфизма ℓ -адических групп Ли

$$c: G_{\ell,A,K} \subset \mathrm{Gr}(V_\ell(A), e_\ell) \rightarrow \mathbf{Q}_\ell^*,$$

и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ совпадает с ядром соответствующего касательного отображения алгебр Ли

$$\mathfrak{g}_{\ell,A} \rightarrow \mathbf{Q}_\ell.$$

С другой стороны, легко проверяется, что это касательное отображение совпадает с

$$\frac{1}{\dim(A)} \mathrm{tr}: \mathfrak{g}_{\ell,A} \rightarrow \mathbf{Q}_\ell$$

(потому что tr – касательное отображение к $\det$). Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{g}_{\ell,A}^0 = \mathfrak{g}_{\ell,A} \cap \mathfrak{sl}(V_\ell(A)).$$

Это доказывает утверждение 1) предложения 2.2.

Для того чтобы доказать утверждение 2), заметим, что $\mathbf{Q}_\ell \mathrm{Id} \cap \mathfrak{sl}(V_\ell(A)) = \{0\}$, и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ содержит $\mathbf{Q}_\ell \mathrm{Id} \oplus \mathfrak{g}_{\ell,A}^0$. С другой стороны, поскольку подалгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}^0$ совпадает с ядром касательного отображения $\mathfrak{g}_{\ell,A} \rightarrow \mathbf{Q}_\ell$, ее коразмерность в $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ не превосходит 1. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}_{\ell,A} = \mathbf{Q}_\ell \mathrm{Id} \oplus \mathfrak{g}_{\ell,A}^0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Найдется конечное сепарабельное алгебраическое расширение полей K_0/K , удовлетворяющее следующим условиям.*

Если K'/K_0 – конечное сепарабельное алгебраическое расширение полей, то

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(K')}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с предложением 1 из [12] и его доказательством). Выберем открытую окрестность V точки 0 в $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ и открытую окрестность U точки Id в $G_{\ell,A,K}$ такие, что соответствующие ℓ -адические экспоненциальное отображение $\exp$ и логарифмическое отображение $\log$ устанавливают взаимно обратные $\mathbf{Q}_\ell$ -аналитические изоморфизмы между V и U . Пусть G_0 – открытая подгруппа группы $G_{\ell,A,K}$, лежащая в U . (Существование такой подгруппы вытекает из следствия 2 в [13; ч. II, гл. IV, § 8, с. 117].) Тогда $V_0 = \log(G_0)$ – открытое подмножество в $\mathfrak{g}_{\ell,A}$, содержащее 0, и $G_0 = \exp(V_0)$. Ясно, что G_0 имеет конечный индекс в $G_{\ell,A,K}$ и

$$\mathrm{End}_{G_0}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{V_0}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

Прообраз подгруппы G_0 в $\mathrm{Gal}(K)$ является открытой подгруппой конечного индекса и, следовательно, совпадает с абсолютной группой Галуа $\mathrm{Gal}(K_0)$ некоторого конечного сепарабельного алгебраического расширения K_0 поля K . Отсюда вытекает, что

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(K_0)}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{G_0}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

Если K'/K_0 – конечное сепарабельное алгебраическое расширение полей, то $\mathrm{Gal}(K')$ – компактная подгруппа конечного индекса в $\mathrm{Gal}(K_0)$, а ее образ $G' = \rho_{\ell,A}(\mathrm{Gal}(K'))$ – замкнутая подгруппа конечного индекса в G_0 , следовательно, открыта в G_0 и, стало быть, открыта и в $G_{\ell,A,K}$. Как и выше, $V' = \log(G')$ – открытое подмножество в $\mathfrak{g}_{\ell,A}$, содержащее 0, а $G' = \exp(V')$ и

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(K')}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{G'}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{V'}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

§ 3. Гомоморфизмы абелевых многообразий

На протяжении этого параграфа X, Y, Z, A – это абелевы многообразия над K , а ℓ – простое число, отличное от $\text{char}(K)$. Мы обозначаем через $\text{Hom}_K(X, Y)$ (конечно порожденную свободную) коммутативную группу всех K -гомоморфизмов из X в Y . Если $X = Y = A$, то $\text{Hom}_K(X, Y)$ совпадает с кольцом $\text{End}_K(A)$ всех K -эндоморфизмов абелева многообразия A .

Определено естественное вложение $\mathbf{Z}_\ell$ -модулей

$$i_{X,Y,K}: \text{Hom}_K(X, Y) \otimes \mathbf{Z}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(K)}(T_\ell(X), T_\ell(Y)),$$

коядро которого не имеет кручения (см. [9], [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Заметим, что если L/K – конечное или бесконечное расширение Галуа и отображение

$$i_{X,Y,L}: \text{Hom}_L(X, Y) \otimes \mathbf{Z}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(L)}(T_\ell(X), T_\ell(Y))$$

биективно, то $i_{X,Y,K}$ тоже биективно. Это утверждение вытекает из следующего явного описания $\text{Gal}(L/K)$ -инвариантов:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K(X, Y) &= \{\text{Hom}_L(X, Y)\}^{\text{Gal}(L/K)}, \\ \text{Hom}_{\text{Gal}(K)}(T_\ell(X), T_\ell(Y)) &= \{\text{Hom}_{\text{Gal}(L)}(T_\ell(X), T_\ell(Y))\}^{\text{Gal}(L/K)}, \end{aligned}$$

и $\text{Gal}(L/K)$ -эквивариантности отображения $i_{X,Y,L}$.

Продолжая отображение $i_{X,Y,K}$ по $\mathbf{Q}_\ell$ -линейности, мы получаем естественное вложение векторных пространств над $\mathbf{Q}_\ell$

$$\tilde{i}_{X,Y,K}: \text{Hom}_K(X, Y) \otimes \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(K)}(V_\ell(X), V_\ell(Y))$$

(см. [4; § 1, формула (2), с. 135]).

Следующие наблюдения принадлежат Дж. Тэйту (см. [4; § 1, леммы 1, 3]).

ЛЕММА 3.2. 1) *Отображение $i_{X,Y,K}$ биективно тогда и только тогда, когда отображение $\tilde{i}_{X,Y,K}$ биективно.*

2) *Положим $Z = X \times Y$. Если вложение*

$$\tilde{i}_{Z,Z,K}: \text{End}_K(Z) \otimes \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \text{End}_{\text{Gal}(K)}(V_\ell(Z))$$

биективно, то

$$\tilde{i}_{X,Y,K}: \text{Hom}_K(X, Y) \otimes \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(K)}(V_\ell(X), V_\ell(Y))$$

тоже биективно.

Дж. Тэйт (см. [3], [4]) предположил, а Г. Фальтингс (см. [1], [2]) доказал, что это вложение в действительности является биекцией, когда поле K конечно порождено над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть K – поле, а ℓ – простое число, отличное от $\text{char}(K)$. Положим $E = K(\ell)$. Пусть A – абелево многообразие положительной размерности над K такое, что для всех конечных сепарабельных алгебраических расширений полей K'/K вложение*

$$\tilde{i}_{A,A,K'}: \text{End}_{K'}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \text{End}_{\text{Gal}(K')}(V_\ell(A))$$

является биекцией. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ содержит все гомотетии $\mathbf{Q}_\ell \text{Id}$, то инъективные отображения

$$\begin{aligned}\tilde{i}_{A,A,E}: \text{End}_E(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell &\hookrightarrow \text{End}_{\text{Gal}(E)}(V_\ell(A)), \\ i_{A,A,E}: \text{End}_E(A) \otimes \mathbf{Z}_\ell &\hookrightarrow \text{End}_{\text{Gal}(E)}(T_\ell(A))\end{aligned}$$

являются биекциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле $K_2 = K(A_{\ell^2})$, являющееся полем определения всех точек из A_{ℓ^2} , и положим $E_2 = K_2(\ell)$. Ясно, что K_2/K и E_2/E – конечные расширения Галуа. Применяя замечание 3.1 (к расширению E_2/E вместо расширения L/K) и лемму 3.2, 1) к абелевым многообразиям $X = Y = A$, видим, что в процессе доказательства мы можем (и будем) предполагать, что

$$K = K_2 = K(A_{\ell^2}),$$

т.е. $A_{\ell^2} \subset A(K)$. Поскольку $\ell^2 \geq 4$, то из известного результата А. Сильверберг (см. [14]) вытекает, что все $\overline{K}$ -эндоморфизмы абелева многообразия A определены над K . В частности, $\text{End}_K(A) = \text{End}_E(A) = \text{End}_{\overline{K}}(A)$. Используя предложение 2.3, мы можем, заменив K на его конечное сепарабельное алгебраическое расширение, считать, что

$$\text{End}_{\text{Gal}(K')}(V_\ell(A)) = \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A))$$

для всех конечных сепарабельных алгебраических расширений полей K' поля K .

Пусть K_0/K удовлетворяет заключению предложения 2.3. Заменив K_0 на его нормальное замыкание над K , мы можем (и будем) считать, что K_0/K – конечное расширение Галуа. Положим $E_0 = K_0(\ell)$. Ясно, что E_0/E – конечное расширение Галуа и

$$\text{End}_E(A) = \text{End}_K(A) = \text{End}_{K_0}(A) = \text{End}_{E_0}(A).$$

По предположению теоремы 3.3

$$\text{End}_{\text{Gal}(K_0)}(V_\ell(A)) = \text{End}_{K_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell.$$

Согласно предложению 2.3

$$\text{End}_{\text{Gal}(K_0)}(V_\ell(A)) = \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{End}_{K_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)).$$

Согласно предложению 2.2

$$\text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}}(V_\ell(A)) = \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)).$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \text{End}_{K_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)).$$

В силу замечания 2.1, примененного к K_0 и E_0 (вместо K и E), мы имеем

$$\text{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)) \supset \text{End}_{\text{Gal}(E_0)}(V_\ell(A)).$$

Итак, мы получили, что

$$\mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)) \supset \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E_0)}(V_\ell(A)) \supset \mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell;$$

откуда вытекает, что

$$\mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\ell,A}^0}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E_0)}(V_\ell(A)) = \mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell.$$

В частности,

$$\mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E_0)}(V_\ell(A)).$$

Теперь лемма 3.2, 1), примененная к $X = Y = A$ и к E_0 (вместо K), дает

$$\mathrm{End}_{E_0}(A) \otimes \mathbf{Z}_\ell = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E_0)}(T_\ell(A)).$$

Из замечания 3.1 (примененного к E_0/E вместо L/K) вытекает, что

$$\mathrm{End}_E(A) \otimes \mathbf{Z}_\ell = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E)}(T_\ell(A)).$$

И опять лемма 3.2, 1) показывает, что

$$\mathrm{End}_E(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E)}(V_\ell(A)).$$

ЛЕММА 3.4 (А. Клиффорд). *Пусть G – группа и H – ее нормальная подгруппа. Пусть W – векторное пространство конечной положительной размерности над полем k . Пусть $\rho: G \rightarrow \mathrm{Aut}_k(W)$ – полупростое (вполне приводимое) линейное представление группы G . Тогда соответствующий H -модуль W тоже полупрост.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим W в прямую сумму простых G -модулей W_i : $W = \bigoplus W_i$. По теореме (49.2) из [15] соответствующие H -модули W_i полупросты. Отсюда вытекает, что H -модуль W – прямая сумма полупростых H -модулей W_i и, следовательно, тоже полупрост.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Пусть L/K – конечное или бесконечное расширение Галуа поля K . Если $\mathrm{Gal}(K)$ -модуль $V_\ell(A)$ полупрост, то и $\mathrm{Gal}(L)$ -модуль $V_\ell(A)$ полупрост.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку L/K – расширение Галуа, то подгруппа $\mathrm{Gal}(L)$ группы $\mathrm{Gal}(K)$ нормальна. Теперь желаемый результат следует из леммы 3.4.

§ 4. Гомотетии, централизаторы и полупростота

ТЕОРЕМА 4.1 (Ф. А. Богомолов). *Пусть K – поле, конечно порожденное над $\mathbf{Q}$, и ℓ – простое число. Пусть A – абелево многообразие положительной размерности над K . Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell,A}$ содержит все гомотетии $\mathbf{Q}_\ell \mathrm{Id}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае когда K – числовое поле, это утверждение доказано Ф. А. Богомоловым (см. [7], [8]). Случай произвольного конечно порожденного поля K также известен (см. [16; § 1, с. 2]) и выводится из числового случая с помощью принадлежащего Серру варианта теоремы Гильберта о неприводимости для бесконечных расширений (см. [16; § 1], [17; § 10.6], [18; предложение 1.3, с. 163–164]). Действительно, существуют числовое поле F , абелево многообразие B над F с $\dim(A) = \dim(B)$ и изоморфизм $\mathbf{Z}_\ell$ -модулей $u: T_\ell(A) \cong T_\ell(B)$ такие, что $u^{-1}G_{\ell,B,F}u = G_{\ell,A,K}$. Продолжив u по $\mathbf{Q}_\ell$ -линейности, мы получаем изоморфизм векторных пространств над $\mathbf{Q}_\ell$

$$V_\ell(A) \cong V_\ell(B),$$

который мы по-прежнему обозначаем через u . Ясно, что

$$u^{-1} \mathfrak{g}_{\ell, B} u = \mathfrak{g}_{\ell, A}.$$

Поскольку F – числовое поле, то алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell, B}$ содержит все гомотетии, из чего следует, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell, A}$ также содержит все гомотетии. Это завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. В свете замечания 1.2 мы будем предполагать, что X и Y определены над K . Положим $A = X \times Y$. Поскольку K конечно порождено над $\mathbf{Q}$, то любое конечное алгебраическое расширение K' поля K также конечно порождено над $\mathbf{Q}$. По теореме Фальтингса (см. [1], [2]) вложение

$$\tilde{i}_{A, A, K'} : \text{End}_{K'}(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \text{End}_{\text{Gal}(K')}(V_\ell(A))$$

является биекцией. Благодаря теореме 4.1 мы знаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\ell, A}$ содержит все гомотетии $\mathbf{Q}_\ell \text{Id}$. Теперь желаемый результат получается применением теоремы 3.3 вместе с леммой 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Предположим, что K – поле, конечно порожденное над $\mathbf{Q}$, а ℓ – простое число. Пусть E_1 – расширение поля K , лежащее в $K(\ell)$. Если X и Y – абелевы многообразия над E_1 , то естественное вложение $\mathbf{Z}_\ell$ -модулей*

$$\text{Hom}_{E_1}(X, Y) \otimes \mathbf{Z}_\ell \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(E_1)}(T_\ell(X), T_\ell(Y))$$

является биекцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $K(\ell)/E_1$ – расширение Галуа, то желаемый результат получается применением теоремы 1.1 вместе с замечанием 3.1, примененным к $K(\ell)/E_1$.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что K – поле, конечно порожденное над $\mathbf{Q}$, а ℓ – простое число. Пусть L/K – конечное или бесконечное расширение Галуа (например, $L = K(\ell)$). Пусть A – абелево многообразие положительной размерности над K . Тогда $\text{Gal}(L)$ -модуль $V_\ell(A)$ полупрост.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фальтингс (см. [1], [2]) доказал, что $\text{Gal}(K)$ -модуль $V_\ell(A)$ полупрост. Этот результат влечет за собой наше утверждение, когда L/K – конечное расширение Галуа. Случай бесконечного L/K получается применением результата Фальтингса вместе с предложением 3.5.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что K – поле, конечно порожденное над $\mathbf{Q}$. Пусть L/K – конечное или бесконечное расширение Галуа. Пусть A – абелево многообразие положительной размерности над K . Тогда $\text{Gal}(L)$ -модуль A_ℓ полупрост для всех простых ℓ , кроме, быть может, конечного числа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех простых ℓ , кроме, быть может, конечного числа, $\text{Gal}(K)$ -модуль A_ℓ полупрост. Действительно, для числовых полей K это утверждение содержится в следствии 5.4.3 из [19; с. 316] (доказательство основано на результатах Фальтингса [1]). То же самое доказательство работает для произвольных полей, конечно порожденных над $\mathbf{Q}$, если заменить ссылку на предложение 3.1 работы [1] ссылкой на следствие на из работы [2; с. 211]. Поскольку L/K – расширение Галуа, то $\text{Gal}(L)$ – нормальная подгруппа группы $\text{Gal}(K)$. Теперь желаемый результат вытекает из леммы 3.4, примененной к $k = \mathbf{F}_\ell$, $W = A_\ell$ и $G = \text{Gal}(K)$, $H = \text{Gal}(L)$.

Список литературы

- [1] G. Faltings, “Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern”, *Invent. Math.*, **73**:3 (1983), 349–366; “Erratum”, **75**:2 (1984), 381.
- [2] G. Faltings, “Complements to Mordell”, *Rational points*, Aspects Math., **6**, Vieweg, Braunschweig, 1986, 203–227.
- [3] J. T. Tate, “Algebraic cycles and poles of zeta functions”, *Arithmetical algebraic geometry* (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper and Row, New York, 1965, 93–110.
- [4] J. Tate, “Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields”, *Invent. Math.*, **2**:2 (1966), 134–144.
- [5] Yu. G. Zarhin, A. N. Parshin, “Finiteness problems in Diophantine geometry”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **143** (1989), 35–102, arXiv: abs/0912.4325.
- [6] Ю. Г. Зархин, “Кручение абелевых многообразий в конечной характеристике”, *Матем. заметки*, **22**:1 (1977), 3–11; англ. пер.: Yu. G. Zarkhin, “Torsion of Abelian varieties of finite characteristic”, *Math. Notes*, **22**:1 (1977), 493–498.
- [7] F. A. Bogomolov, “Sur l’algébricité des représentations ℓ -adiques”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **290**:15 (1980), 701–703.
- [8] Ф. А. Богомолов, “Точки конечного порядка на абелевом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 782–804; англ. пер.: F. A. Bogomolov, “Points of finite order on an Abelian variety”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:1 (1981), 55–72.
- [9] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, London, 1974.
- [10] J.-P. Serre, *Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves*, Adv. Book Classics, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
- [11] J.-P. Serre, “Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:1 (1964), 3–20; J.-P. Serre, “Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 731–737; J.-P. Serre, “Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes. II”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:4 (1971), 747–753; *Œuvres*. v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 230–245.
- [12] J.-P. Serre, “Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisibles”, *Proc. Conf. Local Fields* (Driebergen, 1966), Springer-Verlag, Berlin, 1967, 118–131; *Œuvres*. v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 325–338.
- [13] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups. 1964 lectures, given at Harvard University*, Lecture Notes in Math., **1500**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1992.
- [14] A. Silverberg, “Fields of definition for homomorphisms of Abelian varieties”, *J. Pure Appl. Algebra*, **77**:3 (1992), 253–262.
- [15] Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publ., New York–London, 1962.
- [16] J.-P. Serre, “Lettres à Ken Ribet du 1/1/1981 et 29/1/1981”, *Œuvres. Collected papers*. v. IV, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 1–20.
- [17] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell–Weil theorem*, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [18] R. Noot, “Abelian varieties. Galois representation and properties of ordinary reduction”, *Compositio Math.*, **97**:1–2 (1995), 161–171.
- [19] Yu. G. Zarhin, “A finiteness theorem for unpolarized Abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction”, *Invent. Math.*, **79**:2 (1985), 309–321.

Ю. Г. Зархин (Yu. G. Zarhin)

Pennsylvania State University, USA;

Институт математических проблем биологии РАН,

г. Пущино

E-mail: zarhin@math.psu.edu

Поступила в редакцию

21.02.2010