Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 95–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 03:11:17

УДК 519.179.4

М. Е. Жуковский

Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов

В работе изучаются законы нуля или единицы для свойств случайных дистанционных графов. Рассматриваются свойства, записанные на языке первого порядка. При таких $p(N)$, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$, закон удалось опровергнуть. В связи с этим рассмотрен ослабленный j -закон нуля или единицы. Для этого закона для случайных дистанционных графов получены результаты, схожие с утверждениями, касающимися классического закона нуля или единицы для случайных графов.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: законы нуля или единицы, язык первого порядка, случайные графы, дистанционные графы, игра Эренфойхта.

§ 1. Введение и история задачи

В работе речь пойдет об одной известной задаче, которая лежит на стыке теории случайных графов, логики и комбинаторной геометрии. Прежде всего введем основные объекты.

1.1. Формулы первого порядка и игра Эренфойхта. Напомним основные определения. *Сигнатура* S – это конечное множество предикатных символов $R_1, \dots, R_s$, каждый с фиксированной арностью a_i (см. [1]).

Конечная S -структура $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$ состоит из:

- конечного пространства U ;
- предикатов R_i арности a_i над U .

Формулы первого порядка над сигатурой S строятся (см. [1], [2]) с помощью символов из S , символа отношения $=$, логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных $x, y, x_1, \dots$, кванторов $\forall, \exists$.

Опишем построение формул подробнее (см. [1], [2]). Введем для этого понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $(R_i(x_1, \dots, x_{a_i}))$, либо имеет вид $(x = y)$, где $x, y, x_1, \dots, x_{a_i}$ – переменные. Атом является формулой. Пусть $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$ – некоторая S -структура. Рассмотрим произвольный набор элементов $c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}}$ из U . Если $R_i(c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}}) = 1$, то будем говорить, что формула $(R_i(x_1, \dots, x_{a_i}))$ *истинна* на структуре $\mathcal{A}$ на наборе $(c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}})$. В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $(x = y)$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294) и Программы Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-8390.2010.1).

истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых элементов структуры, т.е. на наборах (c_j, c_j) . Каждая из переменных $x, y, x_1, \dots, x_{a_i}$ является свободной. Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ – формулы, X, X_1, X_2 и Y, Y_1, Y_2 – соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X . Конструкции

$$\neg \varphi, \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2), \quad (\varphi_1 \wedge \varphi_2), \quad (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2), \quad (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2), \quad \forall x \varphi, \quad \exists x \varphi$$

являются формулами. При этом $X \setminus \{x\}$ – множество свободных переменных формул $\forall x \varphi, \exists x \varphi$; $Y \cup \{x\}$ – множество связанных переменных этих формул, $X_1 \cup X_2$ – множество свободных переменных формул $(\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2), (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$; $Y_1 \cup Y_2$ – множество связанных переменных этих формул, X – множество свободных переменных формулы $\neg \varphi$; Y – множество связанных переменных этой формулы. Так же, как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе элементов, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна на структуре $\mathcal{A}$, либо всегда ложна.

Определим *кванторную глубину формулы*. Глубина атома равна нулю. Глубина формул

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2), \quad (\varphi_1 \wedge \varphi_2), \quad (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2), \quad (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$$

равна максимуму глубин формул φ_1 и φ_2 . Глубина формулы $\neg \varphi$ равна глубине формулы φ . Глубина формул $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ на единицу больше глубины φ .

Формулы называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или одновременно ложны на любой S -структуре $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$ при любых значениях из U переменных в формуле. Говорят, что формула находится в *предваренной нормальной форме*, если все кванторы у нее вынесены в начало. Доказано (см. [2]), что любая формула эквивалентна некоторой формуле, находящейся в предваренной нормальной форме.

Если замкнутая формула φ первого порядка истинна на структуре $\mathcal{A}$, то будем говорить, что структура $\mathcal{A}$ *удовлетворяет* этой формуле, и писать $\mathcal{A} \models \varphi$. Формула φ *определяет класс* $\mathcal{C}$ конечных S -структур, если $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \models \varphi$. В этом случае будем говорить, что на сигнатуре S задано *свойство L первого порядка*, которое определяет класс $\mathcal{C}$, и что это свойство определено формулой φ .

Пусть на сигнатуре S задана некоторая структура $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$. Пусть, кроме того, $W \subseteq U$. Тогда *индуцированной подструктурой* $\mathcal{A} \downarrow W$ будем называть S -структуру, состоящую из множества W и предикатов R'_i , определенных на $W \times W \times \dots \times W$, если выполнено

$$\forall i \forall j_1, \dots, j_{a_i} \quad (c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}} \in W \Rightarrow R'_i(c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}}) = R_i(c_{j_1}, \dots, c_{j_{a_i}})).$$

Две S -структуры $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$ и $\mathcal{B} = (U', R'_1, \dots, R'_s)$ называются *изоморфными* (пишем $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), если существует такое биективное отображение $f: U \rightarrow U'$, что выполнено условие

$$\forall i \forall c_1, \dots, c_{a_i} \in U \quad (R_i(c_1, \dots, c_{a_i}) = R'_i(f(c_1), \dots, f(c_{a_i}))).$$

Определим игру $\text{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ на двух S -структурах $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$ и $\mathcal{B} = (U', R'_1, \dots, R'_s)$ с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и с фиксированным числом раундов k . Она носит название *игра Эренфойхта* (см. [2]–[4]). На ν -м ходу, $1 \leq \nu \leq k$, Новатор выбирает элемент в любой из структур (он выбирает либо $c_{j_\nu} \in U$, либо $c'_{j'_\nu} \in U'$). Затем Консерватор выбирает элемент из другой оставшейся структуры. Если Новатор выбирает на μ -м ходу, скажем, элемент $c_{j_\mu} \in U$, $j_\mu = j_\nu$, $\nu < \mu$, то Консерватор должен выбрать $c'_{j'_\mu} \in U'$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, элемент $c_{j_\mu} \in U$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такой элемент $c'_{j'_\mu} \in U'$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны элементы $c_{j_1}, \dots, c_{j_k} \in U$, а также элементы $c'_{j'_1}, \dots, c'_{j'_k} \in U'$. Некоторые из этих элементов могут совпадать. Выберем из них только различные: $c_{h_1}, \dots, c_{h_l}, c'_{h'_1}, \dots, c'_{h'_l}$, $l \leq k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A} \downarrow \{c_{h_1}, \dots, c_{h_l}\} \cong \mathcal{B} \downarrow \{c'_{h'_1}, \dots, c'_{h'_l}\}.$$

В 1960 г. А. Эренфойхт (см. [2]–[4]) сформулировал и доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Консерватор одержит победу в игре $\text{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ тогда и только тогда, когда для любого класса структур $\mathcal{C}$ над некоторой сигнатурой S , определяемого замкнутой формулой φ первого порядка и глубины k , справедливо $((\mathcal{A} \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \in \mathcal{C}))$.*

1.2. Случайные графы и законы нуля или единицы. Пусть N является натуральным числом, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V = \{1, \dots, N\}$. Назовем *случайным графом* вероятностное пространство $G(N, p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{P}_{N,p})$, где

$$\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}, \quad \mathcal{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2 - |E|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа в пространстве $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин (см. [5], [6]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N , причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \rightarrow \infty$.

Свойства графов первого порядка (классы $\mathcal{C} \subseteq \Omega_N$) определяются формулами первого порядка, которые строятся с помощью символов отношения $\sim, =$, логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных $x, y, x_1, \dots$, кванторов $\forall, \exists$.

Рассматриваются опять же только замкнутые формулы. Символ отношения $\sim$ арности 2 выражает свойство двух вершин быть связанными ребром. Будем говорить о событии *граф G обладает свойством L* , понимая под этим элемент $\mathcal{F}_N$, являющийся множеством всех графов из Ω_N , которые обладают свойством L . Будем обозначать это событие $G \models L$. Также в дальнейшем, если $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 1$, будем говорить, что случайный граф *почти наверное* обладает свойством L .

Случайный граф подчиняется *закону нуля или единицы* (см. [7]–[11]), если для любого свойства L первого порядка выполняется одно из двух условий

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 1.$$

В 1969 г. Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиюгонький и В. А. Таланов (см. [8]) получили следующий закон нуля или единицы, который в 1976 г. был независимо доказан Р. Фагиным (см. [9]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Тогда случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

Также в статье [10] С. Шелла и Дж. Спенсер описали результат, в котором расширен класс функций, подчиняющихся закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p(N) = N^{-\alpha}$, где α иррациональное, $0 < \alpha < 1$. Тогда случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

В следующем параграфе мы сформулируем еще одну задачу подобного типа, которая мотивирована классическими вопросами комбинаторной геометрии (см. [12], [13]) и которой мы будем заниматься в дальнейшем.

§ 2. Постановка новой задачи

2.1. Ограничения на количество различных кванторов в формулах и новая игра. Пусть определена некоторая сигнатура $S = (R_1, \dots, R_s)$ и фиксировано натуральное число j . Рассмотрим формулы над сигнатурой S , построенные с помощью: символов из S ; символа отношения $=$; логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$; переменных $x, y, x_1, \dots$; кванторов $\forall, \exists$; причем если глубина формулы больше j , то в формуле, приведенной к предваренной нормальной форме, не могут присутствовать различные кванторы (т.е. в записи формулы участвует либо только квантор $\exists$, либо только квантор $\forall$).

Тот факт, что формула именно в предваренной нормальной форме должна содержать одинаковые кванторы, является значимым. Так, если вынести в начало кванторы в формуле

$$(\exists x R_1(x)) \Rightarrow (\exists x R_2(x)),$$

то получится формула

$$\exists x \forall y (R_2(x) \vee (\neg R_1(y))),$$

которая будет содержать разные кванторы. Заметим, что в предваренной нормальной форме глубина формулы может быть и больше, чем до приведения к этой форме. Так, например, у формулы $(\exists x R_1(x)) \wedge (\exists y R_2(y))$ глубина 1, а у ее предваренной нормальной формы $\exists x \exists y (R_1(x) \wedge R_2(y))$ глубина 2. Будем обозначать любую только что определенную нами формулу φ_j .

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – две S -структуры. Определим *ослабленную j -игру Эренфойхта* $\text{EHR}_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и фиксированным числом раундов k . Она будет отличаться от игры $\text{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ только

тем, что если $k > j$, то Новатор не имеет права в каждом раунде выбирать структуру, из которой затем он будет выбирать элемент. Он волен выбирать структуру, из которой впоследствии будет выбирать элементы, только в первом раунде. Во всех последующих раундах он обязан выбирать элемент только из выбранной в первом раунде структуры. Если $k \leq j$, то правила игры остаются прежними.

2.2. Дистанционные графы и ослабленный j -закон нуля или единицы. Если при определении случайного графа считать, что разные пары вершин соединены независимо друг от друга с различными вероятностями, т.е. ребро $\{x_i, x_j\}$, $1 \leq i, j \leq N$, проведено с вероятностью $p_{ij} \in [0, 1]$, то будем обозначать такое вероятностное пространство $G(N, p_{ij})$. Одним из важнейших примеров этого случайного графа является случайный граф $G(\mathcal{G}_N, p)$, где $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$ – неориентированный граф на N вершинах без петель и кратных ребер. А именно, $G(\mathcal{G}_N, p) = G(N, p_{ij})$, коль скоро

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \{x_i, x_j\} \in \mathcal{E}_N, \\ 0, & \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{E}_N. \end{cases}$$

Иными словами, $G(\mathcal{G}_N, p)$ – это вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p) = (\Omega_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{G}_N} &= \{\mathcal{G}_N^0 = (\mathcal{V}_N^0, \mathcal{E}_N^0) : \mathcal{V}_N^0 = \mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N^0 \subseteq \mathcal{E}_N\}, \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} &= 2^{\Omega_{\mathcal{G}_N}}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}(\mathcal{G}_N^0) = p^{|\mathcal{E}_N^0|} (1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |\mathcal{E}_N^0|}. \end{aligned}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n = 4k$. Положим $N = C_n^{n/2}$. Рассмотрим граф $G_N^{\text{dist}} = (V_N^{\text{dist}}, E_N^{\text{dist}})$, в котором

$$\begin{aligned} V_N^{\text{dist}} &= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2} \right\}, \\ E_N^{\text{dist}} &= \{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_N^{\text{dist}} \times V_N^{\text{dist}} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k \}, \end{aligned}$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ – евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Заметим, что $|V_N^{\text{dist}}| = N$.

Рассматриваемые графы называются *дистанционными* (см. [14]), поскольку их ребра отвечают тем парам их вершин, которые отстоят друг от друга на некоторое наперед заданное расстояние в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрение такого рода графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [12], [13]). Впервые полный дистанционный граф в контексте комбинаторной геометрии рассмотрели в 1981 г. П. Франкл и Р. М. Уилсон. С помощью этого графа они показали, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ растет экспоненциально (см. [15]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи применили результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра (см. [13] и [16]). Таким образом, изучение внутренней структуры дистанционного графа и его

подграфов играет исключительно важную роль. Наши результаты показывают, в частности, что любой подграф либо содержится в почти всех дистанционных графах, полученных из G_N^{dist} удалением ребер, либо не содержится в почти всех таких дистанционных графах.

В настоящей работе мы будем рассматривать случайные дистанционные графы $G(G_N^{\text{dist}}, p)$. Мы доказали, что аналог теоремы 2 для них не выполнен. Однако нами получены и положительные результаты. Для их формулировки нам потребуется определение ослабленного j -закона нуля или единицы.

Пусть $\{\mathcal{G}_{N_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность неориентированных графов без петель и кратных ребер, $|V(\mathcal{G}_{N_i})| = N_i$. Будем говорить, что *последовательность случайных графов $\{G(\mathcal{G}_{N_i}, p(N_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется ослабленному j -закону нуля или единицы*, если для любого свойства L_j , определенного замкнутой формулой φ_j , выполняется одно из двух условий

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{N_i}, p}(\mathcal{G} \models L_j) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{N_i}, p}(\mathcal{G} \models L_j) = 1.$$

Вернемся к случайным дистанционным графам. Пусть снова $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $N = C_n^{m/2} = N(k)$. Рассмотрим последовательность случайных дистанционных графов $\{G(G_{N(k)}^{\text{dist}}, p(N(k)))\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Будем говорить, что *случайный дистанционный граф подчиняется ослабленному j -закону нуля или единицы*, если этому закону подчиняется последовательность $\{G(G_{N(k)}^{\text{dist}}, p(N(k)))\}_{k \in \mathbb{N}}$.

§ 3. Формулировка результатов

Прежде всего приведем аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть j, k – фиксированные натуральные числа. Консерватор одержит победу в игре $\text{EHR}_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ тогда и только тогда, когда для любого класса структур $\mathcal{C}$ над некоторой сигнатурой S , определяемого замкнутой формулой φ_j глубины k , справедливо $((\mathcal{A} \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \in \mathcal{C}))$.

Теперь сформулируем основной результат о случайных дистанционных графах.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Тогда случайный дистанционный граф подчиняется ослабленному 3-закону нуля или единицы.

Этот результат говорит о том, что ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов имеет место. Из следующего результата легко заметить, что в случае дистанционных графов ослабление закона существенно, так как обычный закон для них не выполнен.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть также фиксировано $k \in \{2, 3\}$ и последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ определена следующим образом: $n_i = 4k! \cdot i$. Рассмотрим произвольную последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, которая удовлетворяет следующему условию:

$$\forall i \exists j_1, j_2 \quad ((j_1 > i) \wedge (j_2 > i) \wedge (4(k-1)! \mid m_i) \wedge (\neg(4k! \mid m_{j_1})) \wedge (4k! \mid m_{j_2})).$$

Рассмотрим, наконец, произвольную последовательность $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ вида $t_i = 4k!i + 4(k-1)!j$, где при каждом i величина j – это любое число из множества $\{1, \dots, k-1\}$.

Для любого натурального i определим $N_i = C_{n_i}^{n_i/2}$, $M_i = C_{m_i}^{m_i/2}$, $T_i = C_{t_i}^{t_i/2}$. Тогда последовательности случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{G(G_{T_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняются ослабленному $(k+2)$ -закону нуля или единицы, а последовательность $\{G(G_{M_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ослабленному $(k+2)$ -закону нуля или единицы не подчиняется.

Таким образом, для случайных дистанционных графов выполнен 3-закон. Если $8 \mid n$, то выполнен 4-закон, если же $24 \mid n$, то выполнен 5-закон.

§ 4. Доказательство теорем

4.1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность неориентированных графов без петель и кратных ребер, $|V(\mathcal{G}_i)| = i$, при этом для любых различных $i, j \in \mathbb{N}$ выполнено $V(\mathcal{G}_i) \cap V(\mathcal{G}_j) = \emptyset$. Пусть задана некоторая функция $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. Рассмотрим вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p(N)) \times G(\mathcal{G}_M, p(M)) = (\Omega_{\mathcal{G}_N} \times \Omega_{\mathcal{G}_M}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} \times \mathcal{F}_{\mathcal{G}_M}, \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}),$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}(G_N^0, G_M^0) = \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}(G_N^0) \mathcal{P}_{\mathcal{G}_M, p}(G_M^0)$ для $G_N^0 \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N}$, $G_M^0 \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}_M}$.

Будем говорить, что граф G обладает свойством полного расширения уровня s , если для любых различных вершин $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b$ графа G , где $a + b \leq s$, найдется такая вершина x , что $\{x, u_i\} \in E(G)$, $1 \leq i \leq a$, и $\{x, v_j\} \notin E(G)$, $1 \leq j \leq b$ (см. [7]).

Справедливы следующие утверждения (см. [7], [17]).

ЛЕММА 1. Если для любого натурального t выполнено

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}(\text{Консерватор победит в игре EHR}(G, H, t)) = 1,$$

то для случайного графа $G(\mathcal{G}_N, p)$ выполнен закон нуля или единицы.

ЛЕММА 2. Если для любого натурального $t \leq j$ выполнено

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, G_M^{\text{dist}}, p}(\text{Консерватор победит в игре EHR}_j(G, H, t)) = 1,$$

то для случайного графа $G(G_N^{\text{dist}}, p)$ выполнен ослабленный j -закон нуля или единицы.

На самом деле верно более общее утверждение.

ЛЕММА 3. Если для последовательности $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и любого натурального $t \leq j$

$$\lim_{i_1, i_2 \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{N_{i_1}}^{\text{dist}}, G_{N_{i_2}}^{\text{dist}}, p}(\text{Консерватор победит в игре EHR}_j(G, H, t)) = 1,$$

то последовательность случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется ослабленному j -закону нуля или единицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и для данных графов G и H выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $s > j$ и в графах G, H мы можем выбрать соответственно такие индуцированные подграфы $\tilde{G}, \tilde{H}$, для которых выполнено свойство полного расширения уровня $s - 1$;
- 2) $s \leq j$ и графы G и H обладают свойством полного расширения уровня $s - 1$.

Тогда Консерватор победит в игре $\text{EHR}_j(G, H, s)$.

Также в дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $0 < \mu, \nu < 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда при достаточно больших n выполнено неравенство $C_{[\mu n]}^{[\nu \mu n]} > \gamma^n$, где $\gamma > 1$.

4.2. Доказательство теоремы 4. Пусть задана сигнатура $S = (R_1, \dots, R_s)$ и натуральные числа j, k . Пусть $\mathcal{A} = (U, R_1, \dots, R_s)$, $\mathcal{B} = (U', R'_1, \dots, R'_s)$ — две S -структуры. Заметим, что если $k < j$, то утверждение теоремы явно вытекает из теоремы 1. Заметим также, что теперь мы можем считать, что $j = 1$. При этом k — любое натуральное число, т.е. формулы φ_j в предваренной нормальной форме могут иметь любое количество одинаковых кванторов.

Итак, пусть $k \geq 1$ и Консерватор побеждает в игре $\text{EHR}_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$. Рассмотрим произвольную замкнутую формулу φ_1 глубины k , определяющую класс $\mathcal{C}$. Покажем, что либо обе структуры принадлежат этому классу, либо обе не принадлежат. Пусть для определенности в записи формулы участвуют только кванторы $\exists$. В противном случае рассмотрим формулу $\neg \varphi_1$. Запишем $\varphi_1 = \exists x \varphi_1^{k-1}(x)$, где формула φ_1^{k-1} имеет глубину $k - 1$. Предположим, что $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \notin \mathcal{C}$. Тогда существует такой элемент $c_1 \in U$, что формула $\varphi_1^{k-1}(c_1)$ истинна на структуре $\mathcal{A}$ и для любого элемента $c'_1 \in U'$ формула $\varphi_1^{k-1}(c'_1)$ ложна на структуре $\mathcal{B}$. Пусть Новатор первым ходом выбирает элемент c_1 . Консерватор в ответ выбирает некоторый элемент $c'_1 \in U'$. Будем говорить, что формула $\varphi_1^{k-1}(x)$ различает элементы c_1, c'_1 . Рассуждая по индукции, мы получим, что Новатор имеет выигрышную стратегию. Действительно, в конце концов окажется, что формула $\varphi_1^0(x_1, \dots, x_l)$, не содержащая кванторов, различает элементы $c_1, \dots, c_l$, выбранные Новатором, и элементы $c'_1, \dots, c'_l$, выбранные Консерватором. Это и означает, что Новатор победит.

Докажем теперь, что у Консерватора есть выигрышная стратегия, коль скоро $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}$. Несложно показать, что количество различных с точностью до эквивалентности формул данной глубины, имеющих определенное число свободных переменных, конечно (см. [2]). Пусть Новатор выбрал произвольный элемент в одной из структур (скажем, $c_1 \in U$). Рассмотрим все истинные на структуре $\mathcal{A}$ и на наборе c_1 формулы глубины $k - 1$ с одной свободной переменной, содержащие в предваренной нормальной форме только квантор $\exists$. Рассмотрим далее формулу, в которой после $\exists x_1$ идет конъюнкция всех таких формул. Получим формулу глубины k . Легко заметить, что эта формула в предваренной нормальной форме будет содержать только кванторы $\exists$. Эта формула истинна как на $\mathcal{A}$, так и на $\mathcal{B}$, т.е. существует такой элемент $c'_1 \in U'$, что все формулы глубины $k - 1$ с одной свободной переменной, содержащие

в предваренной нормальной форме только квантор $\exists$ и истинные на структуре $\mathcal{A}$ на наборе c_1 , будут истинны и на структуре $\mathcal{B}$ на наборе c'_1 . Тогда Консерватор выберет элемент c'_1 .

Рассуждая по индукции, получим, что если Новатор выбрал элементы $c_1, \dots, c_k$, то существует такой элемент $c'_k \in U'$, что все формулы глубины 0 с k свободными переменными, истинные на наборе $c_1, \dots, c_k$, будут истинны и на наборе $c'_1, \dots, c'_k$ (элементы $c'_1, \dots, c'_{k-1}$ уже выбраны Консерватором). Тогда Консерватор выберет c'_k .

Если предположить, что существуют такие $i_1, \dots, i_{a_m} \in \{1, \dots, k\}$ и предикат $R_m \in S$, для которого $R_m(c'_{i_1}, \dots, c'_{i_{a_m}}) = 1$, но $R_m(c_{i_1}, \dots, c_{i_{a_m}}) = 0$, то окажется, что формула $\neg R_m(x_1, \dots, x_{a_m})$ истинна на наборе $c_{i_1}, \dots, c_{i_{a_m}}$, а следовательно, она истинна и на наборе $c'_{i_1}, \dots, c'_{i_{a_m}}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

4.3. Доказательство теоремы 5. Заметим сначала, что в [18] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Тогда для случайных дистанционных графов $G(G_N^{\text{dist}}, p)$ выполняется ослабленный 1-закон нуля или единицы.

Значит, в силу леммы 2 и утверждения 1 остается показать, что для случайного графа $G(G_N^{\text{dist}}, p(N))$ почти наверное выполнены свойства полного расширения уровней 1 и 2. Осуществим вспомогательные комбинаторные конструкции.

Сначала для каждой вершины $\mathbf{z}_1 \in V(G_N^{\text{dist}})$ определим множество W_1 таких вершин $\mathbf{z}_2 \in V(G_N^{\text{dist}})$, что $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$. Ясно, что $|W_1| = (C_{n/2}^{n/4})^2 > \gamma_1^n$, $\gamma_1 > 1$, в силу утверждения 2.

Теперь для любых двух вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V(G_N^{\text{dist}})$ определим множество W_2 таких вершин $\mathbf{z}_3 \in V(G_N^{\text{dist}})$, что $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_2 \sim \mathbf{z}_3$. Покажем, что $|W_2| > \gamma_2^n$, $\gamma_2 > 1$. Действительно, перенумеруем координаты вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_4}). \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n/2} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{n/2}$

Итак, координаты вершин разбились на четыре группы. Пусть $\mathbf{z}_3$ имеет y_j единиц в j -й группе и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_4)$. Тогда если $\mathbf{y} = (x_1/2, x_2/2, x_3/2, x_4/2)$ или $\mathbf{y} = ((x_1 + 1)/2, (x_2 - 1)/2, (x_3 - 1)/2, (x_4 + 1)/2)$, то $\mathbf{z}_3 \in W_2$. В силу того что $x_1 + x_2 = n/2$, получаем либо $x_1 \geq n/4$, либо $x_2 \geq n/4$. Следовательно, $|W_2| \geq C_{n/4}^{[n/16]} > \gamma_2^n$ в силу утверждения 2.

Вернемся к случайным графам и свойству полного расширения. Пусть $s \in \{1, 2\}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [0, s]$, $b = s - a$. Пусть $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$ — вершины графа G_N^{dist} . Тогда существует γ^n , $\gamma > 1$, вершин, соединенных с каждой из них. Пусть $\mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p(N)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b})$ — вероятность того, что не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$.

Пусть $\varepsilon = \min(p, 1 - p)$. Тогда выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p(N)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b}) \leq (1 - \varepsilon^s)^{\gamma^n} \sim \exp(-\varepsilon^s \gamma^n) < \exp(-\varepsilon^s N^c),$$

где $c > 0$ – некоторая константа. Поскольку $pN^\alpha \rightarrow \infty$ и $(1 - p)N^\alpha \rightarrow \infty$ для каждого $\alpha > 0$, то $\varepsilon N^{c/(2s)} \rightarrow \infty$. Значит,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p(N)} \left(\bigvee_{a, b \in \mathbb{Z}_+, a+b \leq s} \bigvee_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b \in V(G_N^{\text{dist}})} E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b} \right) \\ \leq \lim_{N \rightarrow \infty} s^2 N^s \exp(-\varepsilon^s N^c) = \lim_{N \rightarrow \infty} s^2 N^s \exp(-N^{c/2} (\varepsilon N^{c/(2s)})^s) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4.4. Доказательство теоремы 6. Случай $k = 2$.

ЛЕММА 4. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1 - p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть, кроме того, задана последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Пусть для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $4 \mid n_i$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$. Для любого натурального i определим $N_i = C_{n_i}^{n_i/2}$. Пусть также найдется такая константа $\gamma_3 > 1$, что для любого графа из последовательности $\{G_{N_i}^{\text{dist}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено свойство

$$\forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 \quad (|\{z_4 : ((z_1 \sim z_4) \wedge (z_2 \sim z_4) \wedge (z_3 \sim z_4))\}| > \gamma_3^{n_i}).$$

Тогда последовательность случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется ослабленному 4-закону нуля или единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как теорема 5 уже доказана, нам достаточно убедиться, что последовательность случайных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ почти наверное подчиняется свойству полного расширения уровня 3 (см. лемму 3 и утверждение 1). Пусть $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b = 3 - a$. Пусть $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$ – вершины графа $G_{N_i}^{\text{dist}}$. Тогда в силу условия леммы существует $\gamma_3^{n_i}$, $\gamma_3 > 1$, вершин, соединенных с каждой из них. Пусть $\mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b})$ – вероятность того, что не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$. Пусть $\varepsilon = \min(p, 1 - p)$. Тогда выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b}) \leq (1 - \varepsilon^3)^{\gamma_3^{n_i}} \sim \exp(-\varepsilon^3 \gamma_3^{n_i}) < \exp(-\varepsilon^3 N_i^c), \quad (1)$$

где $c > 0$ – некоторая константа. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)} \left(\bigvee_{a, b \in \mathbb{Z}_+, a+b \leq 3} \bigvee_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b \in V(G_{N_i}^{\text{dist}})} E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b} \right) \\ \leq \lim_{i \rightarrow \infty} 9N_i^3 \exp(-\varepsilon^3 N_i^c) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть n – натуральное число, $8 \mid n$. Положим $N = C_n^{n/2}$. Тогда существует такая константа $\gamma > 1$, что при достаточно больших n для любых трех вершин полного дистанционного графа G_N^{dist} найдется γ^n вершин, соединенных ребром с каждой из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует не менее $C_{n/8}^{[n/32]}$ таких вершин (см. [17]). В силу утверждения 2 получаем $C_{n/8}^{[n/32]} > \gamma^n$, $\gamma > 1$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 6 (в случае $k = 2$) относительно последовательности $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i))\}$ сразу следует из лемм 4 и 5.

Рассмотрим теперь последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Каждый ее элемент делится на 4, однако в ней существуют элемент со сколь угодно большим номером, делящийся на 8, и элемент со сколь угодно большим номером, не делящийся на 8. Для доказательства того, что эта последовательность не подчиняется ослабленному 4-закону нуля или единицы (см. [17]), достаточно для каждого элемента $m_j = 4k_j$, не делящегося на 8, рассмотреть вершины

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_3 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{k_j}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_j}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_j}). \end{aligned}$$

Действительно, в графе G_N^{dist} не существует четвертой вершины, соединенной с каждой из них. Поэтому по одной подпоследовательности нужная нам вероятность стремится к 1, по другой – к 0. Подробности можно найти в [17].

Рассмотрим наконец последовательность $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. В данном случае ($k = 2$) она имеет вид $t_i = 8i + 4$. Рассмотрим любые три вершины графа $G_{T_i}^{\text{dist}}$. Перенумеруем их координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_3 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{k_i^1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_i^2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_i^3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_i^4}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_i^5}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_i^6}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_i^7}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_i^8}). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{k}_i = (k_i^1, k_i^2, k_i^3, k_i^4, k_i^5, k_i^6, k_i^7, k_i^8)$.

Сформулируем утверждение, доказанное в [17].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ и вектора $\mathbf{k}_i$ выполнены следующие свойства.

- 1) В графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$ не найдется ни одной вершины, соединенной с каждой из вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$, в том и только том случае, когда выполнено одно из равенств

$$\mathbf{k}_i = \left(\frac{t_i}{4}, 0, 0, \frac{t_i}{4}, 0, \frac{t_i}{4}, \frac{t_i}{4}, 0 \right), \quad \mathbf{k}_i = \left(0, \frac{t_i}{4}, \frac{t_i}{4}, 0, \frac{t_i}{4}, 0, 0, \frac{t_i}{4} \right).$$

- 2) Если ни одно из этих равенств не выполнено, то найдется γ_3^n вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ в графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$, причем γ_3 не зависит от выбора вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ и $\gamma_3 > 1$.

Подчеркнем, что для доказательства утверждения 3 важно, что $t_i = 8i + 4$, т.е. t_i делится на 4, но $t_i/4$ нечетно.

Как следствие из этого утверждения можно заключить, что если не найдется вершины, соединенной с $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ в графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$, то в этом графе вершины $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ попарно соединены ребрами.

Для доказательства теоремы 6 в случае последовательности $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ мы, как обычно, применим лемму 3. Однако на сей раз мы не сможем воспользоваться утверждением 1, так как в силу утверждения 3 свойство полного расширения уровня 3 в данном случае почти наверное не выполнено. Ниже мы опишем более сложное свойство, которое окажется выполненным почти наверное, и на его основе построим выигрышную стратегию Консерватора.

Пусть G – некоторый граф. Будем говорить, что вершины z_1, z_2, z_3 этого графа образуют *особенную тройку вершин*, если в нем не найдется четвертой вершины, соединенной с каждой из указанных трех. Скажем, что граф $G = (V, E)$ обладает *3-свойством*, если для него выполнены следующие условия.

- 1) Если тройка z_1, z_2, z_3 не является особенной, то для любых таких целых неотрицательных a, b , что $a + b = 3$, и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_{a+b}$ из $\{1, 2, 3\}$ найдется такая вершина z_4 , что $\{z_4, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_4, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq a + b$.
- 2) Пусть H_4 – произвольный граф на четырех вершинах h_1, h_2, h_3, h_4 , у которого $h_3 \sim h_4$. Тогда для любой вершины z_1 графа G найдутся такие вершины z_2, z_3, z_4 , что тройки z_1, z_2, z_3 и z_1, z_2, z_4 являются особенными и $G|_{\{z_1, z_2, z_3, z_4\}} \cong H_4$ (здесь $G|_{\{z_1, z_2, z_3, z_4\}} = G \downarrow \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$). При этом для любой вершины $z \in V \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ тройка z_1, z_2, z не является особенной.
- 3) Для любой вершины z_1 графа G найдется такая вершина z_2 , что для любой вершины z_3 тройка z_1, z_2, z_3 не является особенной. Если вершины z_1 и z_2 соединены ребром, то найдется вершина z_3 , образующая с ними особенную тройку.
- 4) Для любых вершин z_1, z_2 графа G , любых таких целых неотрицательных a, b , что $a + b = 2$, и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_{a+b} \in \{1, 2\}$ найдется такая вершина z_3 , что $\{z_3, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_3, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq a + b$, и тройка z_1, z_2, z_3 не является особенной.
- 5) Если тройка z_1, z_2, z_3 является особенной, то для любого $a \in \{0, 1, 2\}$ и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_3 \in \{1, 2, 3\}$ в графе G существует такая вершина z_4 , что справедливо $\{z_4, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_4, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq 3$.

Рассмотрим случайный граф $G(G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i))$ и множество $\mathcal{F}_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Пусть $\mathcal{S}_3 \in \mathcal{F}_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$ – это множество всех графов, обладающих 3-свойством.

ЛЕММА 6. *Выполнено равенство*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_3) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем, 3-свойство определяется пятью условиями. Пусть $\mathcal{S}_3^l$ – множество графов, для которых выполнено l -е условие 3-свойства.

Рассмотрим сначала $\mathcal{S}_3^3$. Заметим сразу, что вторая часть условия 3) выполнена вообще для всех $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. В самом деле, пусть $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$ в графе $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Тогда эти вершины смежны и в полном дистанционном графе (т.е. в графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$), а следовательно, найдется вершина, образующая с ними особенную тройку, как в полном графе, так и в графе G . В то же время для любой вершины графа $G_{T_i}^{\text{dist}}$ найдется вершина, с ней не соединенная (в полном графе), а из

таких двух вершин нельзя составить особенную тройку в полном дистанционном графе. Это значит, что для полного графа первая часть условия 3) также справедлива. То есть с учетом утверждения 3 для любой вершины $\mathbf{z}_1$ существует такая вершина $\mathbf{z}_2$, что для любой вершины $\mathbf{z}_3$ найдется $\gamma_3^{t_i}$ вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ в графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\forall \mathbf{z}_1 \exists \mathbf{z}_2 \forall \mathbf{z}_3 ((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ не особенная})) \\ & \geq \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \\ & \quad (((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ не особенная в } G_{T_i}^{\text{dist}}) \Rightarrow ((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ не особенная}))). \end{aligned}$$

Перейдем к отрицаниям событий. Получим

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\exists \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \\ & \quad (((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ не особенная в } G_{T_i}^{\text{dist}}) \wedge ((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ особенная}))) \\ & \leq T_i^3 (1 - p^3) \gamma_3^{t_i} \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_3^3) = 1$.

Перейдем к $\mathcal{S}_3^1$. Пусть $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$ и в графе G тройка $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ не является особенной. Следовательно, существует вершина, соединенная с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$. Более того, в силу утверждения 3 в полном дистанционном графе существует $\gamma_3^{t_i}$, $\gamma_3 > 1$, вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$. Пусть $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b = 3 - a$. Пусть $\mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(E_{\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}, \mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}})$ – вероятность того, что не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}$. Пусть $\varepsilon = \min(p, 1 - p)$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)} \left(\bigvee_{a \in \{0, 1, 2, 3\}, l_1, \dots, l_a \in \{1, 2, 3\}} E_{\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}, \mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}} \right) \\ & \leq \lim_{i \rightarrow \infty} 8T_i^3 (1 - \varepsilon^3) \gamma_3^{t_i} = 0; \end{aligned}$$

здесь в объединении участвуют все неособенные тройки $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$. В итоге $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_3^1) = 1$.

Обсудим построение множества $\mathcal{S}_3^2$. В силу утверждения 3 для любых двух вершин $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$, соединенных ребром в полном графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$, найдется ровно две вершины, каждая из которых образует особенную тройку вместе с $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$, а значит, эти вершины образуют две особенные тройки и в графе $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Для любой вершины $\mathbf{z}_1$ найдется не менее чем $\gamma_1^{t_i}$ вершин, соединенных с $\mathbf{z}_1$ в полном дистанционном графе. Следовательно, найдется не менее чем $\gamma_1^{t_i}/3$ различных троек $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ (т.е. у любых двух не совпадает ни одна вершина). Пусть в графе H_4 проведено a ребер. Тогда вероятность того, что подходящих вершин $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ не найдется, не больше $(1 - p^a(1 - p)^{5-a})^{\frac{1}{3}\gamma_1^{t_i}}$. Кроме того, в силу утверждения 3 для любой вершины $\mathbf{z} \in V \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ тройка $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}$ не является особенной в $G_{T_i}^{\text{dist}}$. При доказательстве того, что условие 3) почти

наверное выполнено, мы показали, что вероятность того, что найдется особенная тройка, являющаяся неособенной в $G_{T_i}^{\text{dist}}$, стремится к 0. Следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_3^2) = 1$.

Обратимся к условию 4). Пусть $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ – две произвольные вершины графа G . Следовательно, в полном дистанционном графе найдется не меньше чем $\gamma_2^{t_i} - 2$ вершин, с ними соединенных и не образующих с ними особенную тройку. Тогда в силу стандартных рассуждений $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_3^4) = 1$.

Для обоснования почти намерное справедливости условия 5) достаточно заметить, что для любых двух вершин в особенной тройке в полном графе существует γ_2^n вершин, соединенных с каждой из этих двух. После этого нужно опять воспользоваться стандартными рассуждениями.

Тем самым, лемма 6 доказана.

Теперь применим лемму 3. Опишем выигрышную стратегию Консерватора. Пусть $G_1 \in \Omega_{G_{T_1}^{\text{dist}}}$, $G_2 \in \Omega_{G_{T_2}^{\text{dist}}}$. Пусть, кроме того, для графов G_1 и G_2 выполнено 3-свойство.

Первый ход. Пусть Новатор выбирает $\mathbf{z}_1^1 \in V(G_1)$. Тогда Консерватор выбирает произвольную вершину $\mathbf{z}_2^1 \in V(G_2)$.

Второй ход. Пусть Новатор на втором ходу выбирает, скажем, вершину $\mathbf{z}_2^2 \in V(G_2)$. Пусть для любой вершины $\mathbf{z}_2 \in V(G_2)$ тройка $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{z}_2$ не является особенной. Так как $G_2 \in \mathcal{S}_3^3$, вершины $\mathbf{z}_2^1$ и $\mathbf{z}_2^2$ не соединены ребром. В силу того, что $G_1 \in \mathcal{S}_3^3$, Консерватор сможет выбрать такую вершину $\mathbf{z}_1^2 \in V(G_1)$, что для любой вершины $\mathbf{z}_1 \in V(G_1)$ тройка $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{z}_1$ не является особенной и вершины $\mathbf{z}_1^1$ и $\mathbf{z}_1^2$ также не соединены ребром.

Если же Новатор на втором ходу выбирает такую вершину $\mathbf{z}_2^2$, что существуют две вершины $\mathbf{z}_2^{3,1}$ и $\mathbf{z}_2^{3,2}$, образующие с вершинами $\mathbf{z}_2^1$ и $\mathbf{z}_2^2$ две особенные тройки, то, поскольку $G_1 \in \mathcal{S}_3^3$, Консерватор сможет найти вершину $\mathbf{z}_1^2$, для которой существуют ровно две вершины $\mathbf{z}_1^{3,1}$ и $\mathbf{z}_1^{3,2}$, образующие с вершинами $\mathbf{z}_1^1$ и $\mathbf{z}_1^2$ две особенные тройки. При этом существует такое взаимно однозначное отображение $\{\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{z}_1^{3,1}, \mathbf{z}_1^{3,2}\} \rightarrow \{\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{z}_2^{3,1}, \mathbf{z}_2^{3,2}\}$, что как оно само, так и обратное ему сохраняют порядок вершин и все ребра, за исключением, быть может, $\{\mathbf{z}_1^{3,1}, \mathbf{z}_1^{3,2}\}$.

Третий ход. Если Новатор на третьем ходу выбирает такую вершину $\mathbf{z}_1^3$, что тройка $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{z}_1^3$ не является особенной, то опять же в силу того, что $G_2 \in \mathcal{S}_3^4$, Консерватор найдет такую вершину $\mathbf{z}_2^3$, что тройка $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{z}_2^3$ не является особенной и между этими вершинами проведены необходимые для победы ребра.

Если же Новатор на третьем ходу выбирает вершину $\mathbf{z}_1^3 = \mathbf{z}_1^{3,l}$, где $l \in \{1, 2\}$, то Консерватор выберет вершину $\mathbf{z}_2^{3,l}$.

Четвертый ход. Пусть Новатор выбирает вершину $\mathbf{z}_1^4 \in V(G_1)$. Если тройка $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{z}_1^3$ не является особенной, то в силу того, что $G_2 \in \mathcal{S}_3^4$, Консерватор сможет найти подходящую ему вершину $\mathbf{z}_2^4$.

В противном случае пусть, скажем, вершины $\mathbf{z}_1^3$ и $\mathbf{z}_1^4$ не соединены ребрами; тогда в силу того, что $G_2 \in \mathcal{S}_3^5$, для вершин $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{z}_2^3$ найдется такая вершина $\mathbf{z}_2^4$ (ее и выберет Консерватор), что те из пар $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^4$ и $\mathbf{z}_2^2, \mathbf{z}_2^4$ соединены ребрами, которые необходимы.

В силу того, что 3-свойство почти намерное выполнено, Консерватор почти намерное победит. Таким образом, для случая $k = 2$ теорема 6 доказана.

4.5. Доказательство теоремы 6. Случай $k = 3$. Опишем сначала структуру доказательства теоремы. Как и в случае $k = 2$, нам нужно доказать три утверждения: для последовательности $\{n_i\}$, последовательности $\{m_i\}$ и последовательности $\{t_i\}$. Сначала обратимся к последовательности $\{n_i\}$ и сведем задачу к задаче о системах линейных уравнений, которую в виде леммы сформулируем в п. 4.5.1, а докажем в п. 4.5.2. Утверждение теоремы о последовательности $\{m_i\}$ докажем с помощью подходящего примера в п. 4.5.1. Случай последовательности $\{t_i\}$ мы сформулируем в виде отдельной леммы в п. 4.5.1 и докажем в п. 4.5.4. В п. 4.5.3 сформулируем необходимые следствия из леммы о системах линейных уравнений, которые помогут нам завершить доказательство теоремы для случая последовательности $\{n_i\}$ и доказать лемму о последовательности $\{t_i\}$ в п. 4.5.4.

4.5.1. *Начало доказательства.* Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}, \quad (3)$$

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16})^T, \quad \forall i \in \{1, \dots, 16\} \quad \left(x_i \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x_i \leq \frac{n}{2} \right),$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T, \quad \forall i \in \{1, \dots, 16\} \quad \left(x_i \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq y_i \leq \frac{n}{4} \right),$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)^T, \quad \mathbf{b} = \left(\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4} \right)^T.$$

Рассмотрим все пары соседних строк матрицы A (их всего четыре). При помощи некоторой перестановки координат мы можем получить одну строку из другой. Так, скажем, строку $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ можно получить из строки $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ при помощи перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 & 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим четыре перестановки $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, построенных по этому правилу, т.е. если единицы и нули стоят на одинаковых местах, то соответствующие номера при перестановке остаются на месте. Если же в первой строке на некотором месте стоит 1, а во второй стоит 0, то ищется ближайший больший номер (еще не использующийся в перестановке), которому соответствует 0 в первой строке и 1 во второй, и эти два номера образуют транспозицию. Заметим, что π_i переставляет строки с номерами i и $i + 1$, а остальные строки оставляет на месте. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16})^T$. Тогда положим $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(16)})^T$.

Рассмотрим перестановку

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим группу $\Pi = \langle \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \rangle$ относительно операции композиции $\circ$, порожденную перестановками $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

ЛЕММА 7. *Если $\mathbf{x}$ является решением системы (3), то ее решением также являются векторы $\mathbf{x}_\pi, \pi \in \Pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему (3). Поменяем i -ю и $(i+1)$ -ю строки матрицы A , а также i -й и $(i+1)$ -й элементы вектора $\mathbf{a}$ (он при этом не поменяется). Тогда вектор $\mathbf{x}$, являющийся решением системы (3), будет также и решением новой системы. Теперь применим перестановку π_i к столбцам матрицы и к элементам вектора $\mathbf{x}$. В результате этого система примет прежний вид. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_{\pi_i}$ при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ тоже является решением нашей системы.

Сложим теперь первые две строки матрицы A и вычтем из этой суммы по очереди третью, четвертую и пятую строки. Кроме того, поменяем местами первые две строки. В результате сведем систему (3) к системе

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_{16})^T$$

$$= \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)^T.$$

Применим теперь перестановку π_0 к столбцам матрицы A и элементам вектора $\mathbf{x}$. В результате мы придем к полученной выше системе, а следовательно, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_{\pi_0}$ являются решением системы (3) одновременно. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Выполнены следующие утверждения.*

- 1) Если $24 \mid n$, то для любого решения $\mathbf{x}$ системы (3) существует такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что $\forall i \in \{1, \dots, 16\} (y_i \leq x_i)$.
- 2) Если $n \equiv 8 \pmod{24}$, то для любого решения $\mathbf{x}$ системы (3) существует такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что $\forall i \in \{1, \dots, 16\} (y_i \leq x_i)$ тогда и только тогда, когда $\forall \pi \in \Pi$

$$\left(\left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n+4}{6}, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n-2}{3}, 1 \right)^T \right) \right. \\ \left. \wedge \left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n-2}{6}, 1, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n+1}{3}, 0 \right)^T \right) \right).$$

- 3) Если $n \equiv 16 \pmod{24}$, то для любого решения $\mathbf{x}$ системы (3) существует такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что $\forall i \in \{1, \dots, 16\}$ ($y_i \leq x_i$) тогда и только тогда, когда $\forall \pi \in \Pi$

$$\left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n+2}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{n-1}{3}, 0, \frac{n-4}{6}, \frac{n-4}{6}, 1, \frac{n+2}{6}, 0, 0, 0 \right)^T \right).$$

Лемму 8 мы докажем в п. 4.5.2, а в п. 4.5.3 покажем, что из ее доказательства можно заключить, что выполнены условия следующей леммы.

ЛЕММА 9. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть, кроме того, задана последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Пусть для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $8 \mid n_i$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$. Для любого натурального i определим $N_i = C_{n_i}^{n_i/2}$. Пусть также найдется такая константа $\gamma_4 > 1$, что для любого графа из последовательности $\{G_{N_i}^{\text{dist}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполняется свойство

$$\forall \mathbf{z}_1 \forall \mathbf{z}_2 \forall \mathbf{z}_3 \forall \mathbf{z}_4 \quad (|\{\mathbf{z}_5 : ((\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_2 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_3 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_4 \sim \mathbf{z}_5))\}| > \gamma_4^{n_i}).$$

Тогда последовательность случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ почти наверное подчиняется ослабленному 5-закону нуля или единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как лемма 4 уже доказана, достаточно убедиться в том, что последовательность случайных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ почти наверное удовлетворяет свойству полного расширения уровня 4 (см. лемму 3 и утверждение 1). Пусть $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b = 4 - a$. Пусть $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$ – вершины графа $G_{N_i}^{\text{dist}}$. Тогда в силу условия леммы существует $\gamma_4^{n_i}$, $\gamma_4 > 1$, вершин, соединенных с каждой из них. Пусть $\mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b})$ – вероятность того, что не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b$. Пусть $\varepsilon = \min(p, 1-p)$. Тогда выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)}(E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b}) \leq (1 - \varepsilon^4)^{\gamma_4^{n_i}} \sim \exp(-\varepsilon^4 \gamma_4^{n_i}) < \exp(-\varepsilon^4 N_i^c),$$

где $c > 0$ – некоторая константа. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i)} \left(\bigvee_{a, b \in \mathbb{Z}_+, a+b \leq 4} \bigvee_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b \in V(G_{N_i}^{\text{dist}})} E_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_b} \right) \\ \leq \lim_{i \rightarrow \infty} 16 N_i^4 \exp(-\varepsilon^4 N_i^c) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Рассмотрим последовательность $n_i = 24i$ из теоремы 6 (случай $k = 3$). Очевидно, она попадает в условия п. 1) леммы 8. Значит, она удовлетворяет и требованиям леммы 9 (см. п. 4.5.3).

Таким образом, последовательность $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p(N_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ из теоремы 6 (случай $k = 3$) подчиняется ослабленному 5-закону нуля или единицы, т.е. первая часть теоремы 6 доказана.

Теперь обратимся к последовательности $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Пусть G_M^{dist} – граф на M вершинах, $M = C_m^{m/2}$, $m = 8a$ и $3 \nmid a$. Рассмотрим свойство L_5 :

$$\forall \mathbf{z}_1 \forall \mathbf{z}_2 \forall \mathbf{z}_3 \forall \mathbf{z}_4 \exists \mathbf{z}_5 \quad ((\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_2 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_3 \sim \mathbf{z}_5) \wedge (\mathbf{z}_4 \sim \mathbf{z}_5)).$$

Пусть $m \equiv 8 \pmod{24}$. Рассмотрим четыре вершины графа G_M^{dist} :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{z}_3 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{z}_4 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{m+1}{3}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-2}{6}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-2}{6}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-2}{6}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{m-2}{6}}, 0). \end{aligned}$$

Пусть теперь $m \equiv 16 \pmod{24}$. Рассмотрим четыре вершины графа G_M^{dist} :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_3 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_4 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{m-1}{3}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-4}{6}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-4}{6}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{m-4}{6}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{m+2}{6}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{m+2}{6}}). \end{aligned}$$

Легко заметить, что в обоих случаях не найдется вершины, соединенной с каждой из $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$. Следовательно, найдутся такие последовательности $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{l_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, что выполнены равенства

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{M_{i_j}, p}(G(G_{M_{i_j}}^{\text{dist}}, p) \models L_5) = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{M_{l_l}, p}(G(G_{M_{l_l}}^{\text{dist}}, p) \models L_5) = 1.$$

Тем самым, доказана вторая часть теоремы 6.

Осталось рассмотреть случай последовательности $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Этот случай завершает доказательство теоремы 6, сформулируем его в виде отдельной леммы, которую докажем в п. 4.5.4.

ЛЕММА 10. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть также последовательность $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ определена следующим образом: $\forall i \in \mathbb{N} \quad ((24 \nmid t_i) \wedge (8 \mid t_i))$. Для любого натурального i определим $T_i = C_{t_i}^{t_i/2}$. Тогда для последовательности случайных дистанционных графов $\{G(G_{T_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполняется ослабленный 5-закон нуля или единицы.

Обратимся теперь к доказательству леммы 8.

4.5.2. Доказательство леммы 8. Пусть $\mathbf{x}$ – некоторое решение системы (3). Для любого $j \in \{1, \dots, 8\}$ два его элемента x_{2j-1} и x_{2j} будем называть *соседними*. Положим $x_j^i = x_{2^{4-i}(j-1)+1} + \dots + x_{2^{4-i}j}$, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}$, и $\mathbf{x}^i = (x_1^i, \dots, x_{2^i}^i)^T$. В частности, для любого $j \in \{1, \dots, 16\}$ справедливо равенство $x_j = x_j^4$. Для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ определим вектор $\mathbf{r}^i$, составленный из наименьших неотрицательных вычетов по модулю 4 координат вектора $\mathbf{x}^i$. Иными словами, $\mathbf{r}^i = (r_1^i, \dots, r_{2^i}^i)^T$, где для любого $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}$ справедливы соотношения $x_j^i \equiv r_j^i \pmod{4}$ и $r_j^i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Определим, кроме того, при тех же значениях i векторы $\mathbf{R}^i$, которые отличаются от векторов $\mathbf{r}^i$ заменой модуля 4 на модуль 12. Иначе говоря, $\mathbf{R}^i = (R_1^i, \dots, R_{2^i}^i)^T$, где для любого $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}$ справедливы соотношения $x_j^i \equiv R_j^i \pmod{12}$ и $R_j^i \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$. Аналогично, для решений системы (4) введем обозначение $y_j^i = y_{2^{4-i}(j-1)+1}^i + \dots + y_{2^{4-i}j}^i$, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}$, и положим $\mathbf{y}^i = (y_1^i, \dots, y_{2^i}^i)^T$. Обозначим также множество $\{x_1, x_3, \dots, x_{15}\}$ через X_- , множество $\{x_2, x_4, \dots, x_{16}\}$ – через X_+ , $X = X_- \cup X_+$. Пусть, наконец, $4\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, делящихся на 4; $2 + 4\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных четных чисел, не делящихся на 4. Разобьем доказательство леммы на случаи, как показано на схеме (рис. 1).

Рис. 1

Знаком $+$ на схеме обозначено четное число, знаком $-$ обозначено нечетное. На первых трех уровнях схемы (до появления символа l) рассматриваются различные случаи четности чисел x_j^i . На первом уровне возможна только одна ситуация – числа x_1^1, x_2^1 четные. Действительно, так как $\mathbf{x}$ – решение системы (3), справедливы равенства $x_1^1 = x_1 + \dots + x_8 = n/2$, $x_2^1 = x_9 + \dots + x_{16} = n/2$. При этом число $n/2$ является четным.

Числа $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ могут быть либо все нечетными, либо все четными (случаи 1 и 2). Действительно, в силу (3) справедливы равенства $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_3^2 = x_3^2 + x_4^2 = n/2$. Следовательно, $x_2^2 = x_3^2 = n/2 - x_1^2 = n/2 - x_4^2$, при этом число $n/2$ является четным. Легко заметить, что среди чисел x_1^3, x_2^3 ,

$x_3^3, x_4^3, x_5^3, x_6^3, x_7^3, x_8^3$ не может быть ровно двух чисел одинаковой четности. Следовательно, количество вариантов расположения четных и нечетных чисел $x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5^3, x_6^3, x_7^3, x_8^3$ равно 16. Мы рассматриваем только пять из них (случаи 1.1, 1.2, 2.1–2.3), так как все остальные варианты сводятся к этим, если в соответствии с леммой 7 применить к числам $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ некоторую перестановку $\pi \in \Pi$. Пусть l – это количество нечетных чисел в множестве X_- . В зависимости от значения l случаи 2.1–2.3 разобьются на подслучаи. В ходе доказательства леммы возникнут еще некоторые разбиения на подслучаи, мы их обсудим уже непосредственно при встрече с ними.

Итак, обратимся к случаю 1.1 – числа $x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5^3, x_6^3, x_7^3, x_8^3$ четные.

Случай 1.1. Пусть $y_j^3 = x_j^3/2$, где $j \in \{1, \dots, 8\}$. Нужно показать, что можно подобрать такие $y_s, s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T$ является решением системы (4), $y_s \leq x_s$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$. Заметим, что при любом выборе y_s , удовлетворяющих последнему условию, вектор $\mathbf{y}$ является решением первых четырех уравнений системы (4).

Если x_j четное, то положим $y_j = x_j/2$. Так как $\mathbf{x}$ удовлетворяет последнему уравнению системы (3), то $x_1 + x_3 + \dots + x_{15} \equiv 0 \pmod{2}$. Следовательно, нечетных чисел в множестве X_- четное количество (пусть x_{2j-1} нечетное тогда и только тогда, когда $j \in J$). Поэтому мы сможем присвоить половине элементов из множества $\{y_j\}_{j \in J}$ значения $(x_j - 1)/2$ (при этом $y_{j+1} := (x_{j+1} + 1)/2$), а второй половине – значения $(x_j + 1)/2$ (при этом $y_{j+1} := (x_{j+1} - 1)/2$).

Случай 1.2. Будем искать вектор $\mathbf{y}^3 = (y_1^3, \dots, y_8^3)^T = (f_1(x_1^3), \dots, f_8(x_8^3))^T = f(\mathbf{x}^3)$ среди следующих четырех векторов:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\iota}{2}, -\frac{\iota}{2}, -\frac{\iota}{2}, \frac{\iota}{2}\right)^T, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\iota}{2}, -\frac{\iota}{2}, \frac{\iota}{2}, -\frac{\iota}{2}\right)^T, \quad (6)$$

где $\iota \in \{-1, 1\}$. При этом мы подбираем вектор $\mathbf{y}^3$ так, чтобы для него существовал вектор $\mathbf{y}$, являющийся таким решением системы (4), что для любых $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ справедливы соотношения $y_s \leq x_s$, $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$. Заметим снова, что при любом выборе y_s , удовлетворяющих последнему условию, вектор $\mathbf{y}$ является решением первых четырех уравнений системы (4).

Если все числа из множества X_- четные, то выбираем произвольный вектор $\mathbf{y}^3$ из (5), (6) и полагаем $y_{2j-1} = x_{2j-1}/2$, $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Если же среди этих чисел есть нечетные (x_{2j-1} нечетное тогда и только тогда, когда $j \in J$), то легко заметить, что найдется хотя бы один из векторов (5), (6), для которого $\sum_{j \in J} y_j^3 = (\sum_{j \in J} x_j^3)/2$. Пусть тогда $y_{2j-1} = f_j(x_{2j-1})$, $y_{2j} = x_{2j}/2$, если $j \in J$. В противном случае положим $y_{2j-1} = x_{2j-1}/2$, $y_{2j} = f_j(x_{2j})$.

Случай 2.1. Положим

$$\mathbf{y}^3 = (f_1(x_1^3), \dots, f_8(x_8^3))^T = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T.$$

Мы, как и раньше, хотим подобрать вектор $\mathbf{y}$, являющийся таким решением системы (4), что для любых $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ справедливы соотношения $y_s \leq x_s$, $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$.

Случай 2.1.1. Если $l \in \{0, 4, 6, 8\}$, то мы можем выполнить утверждение леммы, положив $y_{2i-1} = x_{2i-1}/2$ в случае, когда x_{2i-1} четное, $y_{2i-1} = f_i(x_{2i-1})$ в случае, когда x_{2i-1} нечетное, и $i \in \{2, 3, 6, 7\}$ и $y_{2i-1} = (x_{2i-1} \pm 1)/2$ во всех остальных случаях.

Случай 2.1.2. Пусть среди чисел множества X_- нечетными являются только, скажем, числа x_3 , x_{13} (если нечетными являются x_5 , x_{11} , то можно применить перестановку π_1 , ведь $\pi_1(5) = 13$, $\pi_1(11) = 3$). Здесь мы не сможем поступить так же, как в предыдущем случае, потому что $f_2(x_3) = (x_3 - 1)/2$, $f_7(x_{13}) = (x_{13} - 1)/2$. Тогда $\sum_{j \in \{1, 3, \dots, 15\}} y_j = n/4 - 1$. Если же нечетными являются, скажем, числа x_5 , x_{13} или одно из этих чисел принадлежит множеству $\{x_1, x_7, x_9, x_{15}\}$, то мы сможем поступить так же, как в случае 2.1.1.

Итак, будем считать, что в множестве X числа x_3 , x_6 , x_{12} , x_{13} являются нечетными, а все остальные – четными. Ниже нас будут интересовать элементы множества X , которые являются числами из множества $2 + 4\mathbb{Z}_+$. В зависимости от того, что это за элементы и в каком они количестве, случай 2.1.2 разобьется на несколько подслучаев. Заранее рассмотрим случаи, когда в множестве X не более одного или не менее пяти таких элементов, а также случай, когда хотя бы одно из чисел r_4^4 , r_5^4 , r_{11}^4 , r_{14}^4 равно 2.

Предположим сначала, что все четные числа множества X делятся на 4. Тогда в силу того, что $\mathbf{x}$ является решением системы (3), $n/2 \equiv 0 \pmod{4}$ и в множестве X только числа x_3 , x_6 , x_{12} , x_{13} являются нечетными, выполнено $x_3 + x_{13} \equiv x_3 + x_6 \equiv x_3 + x_{12} \equiv x_6 + x_{13} \equiv 0 \pmod{4}$. Однако это невозможно, опять-таки в силу нечетности чисел x_3 , x_6 , x_{12} , x_{13} . Следовательно, среди чисел множества X есть число $x_h \in 2 + 4\mathbb{Z}_+$, т.е. $r_h^4 = 2$.

Предположим теперь, что соседним для x_h является нечетное число. Поскольку мы находимся в рамках случая 2.1, это равносильно предположению о том, что хотя бы одно из чисел r_4^4 , r_5^4 , r_{11}^4 , r_{14}^4 равно 2. Если $x_h \in X_-$, то положим $y_h = (x_h + 2)/2$, $y_{h+1} = (x_{h+1} - 1)/2$, а с остальными элементами вектора $\mathbf{y}$ поступим так же, как в случае 2.1.1. Если же $x_h \in X_+$, то положим $y_h = (x_h - 2)/2$, $y_{h-1} = (x_{h-1} + 1)/2$ (в этом случае x_{h-1} является одним из двух нечетных чисел x_3 и x_{13} , поэтому для второго нечетного числа x_{17-h} мы сможем положить $y_{17-h} = (x_{17-h} - 1)/2$).

На очереди случай, когда в множестве X ровно один элемент или не менее пяти элементов из множества $2 + 4\mathbb{Z}_+$. При этом мы можем считать, что $r_4^4 = r_5^4 = r_{11}^4 = r_{14}^4 = 0$. Допустим, в X ровно один элемент из $2 + 4\mathbb{Z}_+$. Как и прежде, обозначим его x_h . В рамках текущего случая это означает, что соседним для x_h является четное число. Покажем, что среди чисел x_1 , x_2 , x_7 , x_8 , x_9 , x_{10} , x_{15} , x_{16} есть еще хотя бы одно число $x_k \in 2 + 4\mathbb{Z}_+$. Предположим, что среди чисел из множества X все числа, кроме x_h и нечетных, делятся на 4. Значит, среди чисел r_1^3 , r_4^3 , r_5^3 , r_8^3 ровно три числа равны нулю, числа r_2^3 , r_3^3 , r_6^3 , r_7^3 нечетные. Из трех уравнений системы (3) можно заключить, что $r_2^3 = r_3^3 = r_6^3 = r_7^3$. Но, с другой стороны, справедливо $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3 \equiv r_5^3 + r_6^3 + r_7^3 + r_8^3 \equiv 0 \pmod{4}$. Это невозможно, так как только одно из чисел r_1^3 , r_4^3 , r_5^3 , r_8^3 равно 2.

Итак, у нас есть не менее пяти чисел из $2 + 4\mathbb{Z}_+$. По принципу Дирихле два из них – x_h и x_k – соседние. Пусть $k > h$. Положим $y_h = (x_h + 2)/2$,

$y_k = (x_k - 2)/2$, а с остальными элементами вектора $\mathbf{y}$ поступим так же, как в случае 2.1.1.

Заметим, что теперь мы можем не только не рассматривать случаи, в которых два соседних числа не делятся на 4, но и случаи, в которых два соседних числа отличны от 0. Такие случаи аналогичны только что разобранным нами. Итак, нам осталось рассмотреть случаи, когда среди чисел $x_1, x_2, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{15}, x_{16}$ есть два, три или четыре числа из множества $2 + 4\mathbb{Z}_+$, причем в каждой паре $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_8), (x_9, x_{10}), (x_{11}, x_{12}), (x_{13}, x_{14}), (x_{15}, x_{16})$ хотя бы одно число равно 0.

1) Рассмотрим случай, когда в множестве X ровно два элемента являются четными, не делящимися на 4 числами. Пусть это элементы x_h, x_k и $h < k$. Пусть для начала числа h и k одинаковой четности (нечетные для определенности). Действительно, мы можем считать их нечетными в силу того, что при сделанных предположениях как в множестве X_- , так и в множестве X_+ ровно два нечетных числа, а значит, мы можем применить перестановку π_0 , которая поменяет местами элементы вектора $\mathbf{x}$ с четными и нечетными номерами, после чего применить перестановку π_1 , чтобы нечетными стали числа x_3 и x_{13} . Заметим, что при применении этих перестановок мы остаемся в случае 2.1.

Пусть $h = 1, k = 7$ или $h = 9, k = 15$ (здесь и ниже в подобных ситуациях будем рассматривать только первый из таких случаев в силу того, что можно подобрать нужную перестановку; в данном случае, например, нужно применить перестановку π_0 , а затем перестановку π_4). Тогда выполнено равенство $\mathbf{r}^4 = (2, 0, r_3^4, 0, 0, r_6^4, 2, 0, 0, 0, 0, r_{12}^4, r_{13}^4, 0, 0, 0)$, где $r_3^4, r_6^4, r_{12}^4, r_{13}^4 \in \{1, 3\}$.

Предположим сначала, что $x_3 = 1, x_9 = x_{10} = x_{15} = x_{16} = 0$. Мы считаем, что числа, соседние с отличными от нуля, равны нулю. Тогда в силу условия леммы выполнена система

$$\begin{cases} x_1 + x_{12} = \frac{n}{2} - 1, \\ x_1 + x_7 + x_{13} = \frac{n}{2} - 1, \\ x_1 + x_6 + x_7 = \frac{n}{2} - 1, \\ x_7 + x_{12} = \frac{n}{2} - 1, \\ x_6 + x_7 + x_{13} = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $x_6 = x_{13} = (n + 2)/6, x_1 = x_7 = (n - 4)/6, x_{12} = (n - 1)/3$. В силу того что n делится на 8, равенства возможны тогда и только тогда, когда $n \equiv 16 \pmod{24}$.

Элементарный перебор остальных вариантов ($x_3 \geq 3, x_9 \geq 4, x_{10} \geq 4, x_{15} \geq 4, x_{16} \geq 4$) показывает, что в рассматриваемом случае всегда можно подобрать нужный вектор $\mathbf{y}$.

Если $h = 1, k = 9$, то положим

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \left(1, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -1, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^T.$$

Случай $h = 1, k = 15$ невозможен в силу условия леммы. Действительно, в этом случае $r_3 \equiv r_6 \equiv r_{12} \equiv r_{13} \pmod{4}$ и $4 + r_3 + r_{13} \equiv 0 \pmod{4}$. Следовательно, x_3, x_{13} — числа четные. Получили противоречие.

Пусть теперь h и k – числа различной четности. Нам достаточно рассмотреть случай, когда число h нечетное, в силу того, что можно рассмотреть перестановку $\pi_0 \circ \pi_1$. Опять же будем рассматривать только три случая: $h = 1, k = 8$; $h = 1, k = 10$; $h = 1, k = 16$. Из условия леммы следует, что $r_1^4 + r_3^4 + \dots + r_{13}^4 \equiv 0 \pmod{4}$. Значит, $r_3^4 + r_{13}^4 \equiv 2 \pmod{4}$.

Если $h = 1, k = 8$, то $r_3^4 + r_{12}^4 \equiv 2 \pmod{4}$, $r_{12}^4 + r_{13}^4 \equiv 0 \pmod{4}$. Получили противоречие, так как числа $r_3^4, r_{12}^4, r_{13}^4$ нечетные.

Если же $h = 1, k = 10$, то $r_3^4 + r_{12}^4 \equiv 0 \pmod{4}$, $r_3^4 + r_{13}^4 \equiv 2 \pmod{4}$. Снова получили противоречие. Поэтому возможен только случай $h = 1, k = 16$. В этом случае воспользуемся равенством

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \left(1, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)^T.$$

Итак, если в случае 2.1.2, 1) или $n \equiv 8 \pmod{24}$, или $n \equiv 0 \pmod{24}$, или не найдется такой перестановки $\pi \in \Pi$, что справедливо равенство

$$\mathbf{x}_\pi = \left(\frac{n-4}{6}, 0, 1, 0, 0, \frac{n+2}{6}, \frac{n-4}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n-1}{3}, \frac{n+2}{6}, 0, 0, 0\right)^T,$$

то найдется такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что для всякого $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$ справедливо неравенство $y_s \leq x_s$.

2) Пусть количество элементов в множестве X , являющихся четными и не делящимися на 4 числами, равно трем. Как и в случае 2.1.2, 1), мы считаем, что эти элементы находятся среди $x_1, x_2, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{15}, x_{16}$, причем любые два из них не являются соседними. Тогда среди чисел $r_1^3, r_4^3, r_5^3, r_8^3$ ровно три равны 2. Следовательно, в каждой паре наборов $\{(r_1^3, r_2^3, r_3^3, r_4^3), (r_5^3, r_6^3, r_7^3, r_8^3)\}$, $\{(r_1^3, r_2^3, r_5^3, r_6^3), (r_3^3, r_4^3, r_7^3, r_8^3)\}$, $\{(r_1^3, r_3^3, r_5^3, r_7^3), (r_2^3, r_4^3, r_6^3, r_8^3)\}$ найдется ровно один набор, в котором ровно одно число равно 0. Тогда $r_2^3 = r_3^3 = r_6^3 = r_7^3$. Но, с другой стороны, в паре наборов $\{(r_1^3, r_2^3, r_3^3, r_4^3), (r_5^3, r_6^3, r_7^3, r_8^3)\}$ найдется набор, в котором ровно два числа равны 2. Следовательно, либо $r_2^3 + r_3^3 \equiv 0 \pmod{4}$, либо $r_6^3 + r_7^3 \equiv 0 \pmod{4}$. Получили противоречие.

3) Пусть количество элементов в множестве $\{x_1, x_2, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{15}, x_{16}\}$, являющихся четными и не делящимися на 4 числами, равно четырем, причем любые два таких элемента не являются соседними. Тогда

$$\mathbf{r}^3 = (2, r_2^3, r_3^3, 2, 2, r_6^3, r_7^3, 2)^T.$$

Следовательно, $r_2^3 = r_7^3 = 4 - r_3^3 = 4 - r_6^3$.

Пусть количество элементов в множестве X_- , являющихся четными и не делящимися на 4 числами, равно либо нулю, либо двум, либо четырем. Тогда $r_2^3 + r_7^3 \equiv 0 \pmod{4}$. Получили противоречие.

Таким образом, либо в множестве X_- один элемент указанного выше вида, либо их три. В силу того что мы можем подобрать нужную перестановку, будем считать, что такой элемент один, причем это элемент x_{2j-1} . Тогда положим

$$\mathbf{y}^3 = g(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(g_1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, g_4, g_5, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, g_8\right)^T,$$

где $g_i = 0$ при $i \in \{1, 4, 5, 8\} \setminus \{j, 9-j\}$; $g_j = g_{9-j} = 1$. Кроме того, положим $y_{2s-1} = g_s(x_{2s-1})$ при $s \notin \{3, 6, 9-j\}$; $y_{2s-1} = (x_{2s-1})/2$ при $s \in \{3, 6, 9-j\}$.

Итак, мы разобрали первый случай распределения четных и нечетных чисел среди $x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5^3, x_6^3, x_7^3, x_8^3$ при условии, что каждое из чисел $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ является нечетным. Обратимся к оставшимся двум случаям.

Случай 2.2. Числа x_1^3, x_7^3 являются четными, x_3^3, x_5^3 – нечетными. Так как вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (3), то хотя бы одно из чисел $r_1^3, r_4^3, r_6^3, r_7^3$ равно 2. Оговорим общее условие для всех подслучаев, чтобы каждый раз его не обсуждать. В силу того что $\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\pi_0 \circ \pi_1}$ и $\mathbf{x}_{\pi_2}$ являются решениями системы (3) одновременно (при этом при применении перестановок $\pi_0 \circ \pi_1$ и π_2 мы остаемся в случае 2.2), достаточно рассмотреть случай, когда $r_1^3 = 2$, т.е. $x_1^3 \in 2 + 4\mathbb{Z}_+$.

Случай 2.2.1. Пусть все числа из множества X_- являются четными. Предположим, что найдется такое $j \in \{1, 4, 6, 7\}$, что $x_{2j} > 0$. Рассмотрим перестановку из Π , которая переведет x_{2j} в x_2 и оставит нас в случае 2.1 (т.е. нам здесь не важно, что r_1^3 может перестать быть равным 2). Затем положим

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \left(0, 1, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Поэтому далее будем считать, что $x_2^4 = x_8^4 = x_{12}^4 = x_{14}^4 = 0$. Следовательно, мы также будем считать, что $r_1^4 = 2$. Заметим, что в силу того, что $x_1 + x_3 + \dots + x_{15} \equiv 0 \pmod{4}$, среди чисел множества X_- помимо x_1 найдется еще хотя бы одно число x_{2h-1} из множества $2 + 4\mathbb{Z}_+$.

Элемент x_{2h-1} множества X может быть либо соседним с нечетным (т.е. $h \in \{2, 3, 5, 8\}$), либо соседним с четным (т.е. $h \in \{4, 6, 7\}$). Предположим, что найдется такой $h \in \{2, 3, 5\}$, при котором элемент x_{2h-1} отличен от 0. Соседний элемент с x_{2h-1} является нечетным, поэтому мы сможем подобрать такую перестановку из Π , которая оставит нас в случае 2.2.1, оставит на месте элемент x_1 и переведет x_{2h-1} в x_3 . Применим эту перестановку, после чего положим

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \left(1, 0, -1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^T. \quad (7)$$

Пусть теперь $h \in \{4, 6, 7\}$. Тогда в силу нашего предположения $x_{2h} = 0$. Снова рассмотрим такую перестановку, что $h = 4$. Тогда справедливы равенства $r_1^3 = r_4^3 = 2$. В силу того что вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (3), ровно одно из чисел x_6^3, x_7^3 не делится на 4. Это означает, что хотя бы одно из чисел $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ не делится на 4. Если это элемент X_+ , то этот случай уже разобран нами. Если же это элемент X_- , то существует еще хотя бы один не делящийся на 4 элемент X_- . Если этот элемент является соседним с нечетным, то этот случай мы тоже разобрали. Остается только один вариант: как число x_{11} , так и число x_{13} не делятся на 4. Но ровно одно из чисел x_6^3, x_7^3 не делится на 4. Тогда одно из чисел x_{12}, x_{14} не делится на 4, а этот случай уже разобран нами.

Обратимся к последнему случаю, $h = 8$. Предположим, что хотя бы один из элементов x_7, x_{11}, x_{13} отличен от 0. Тогда совершим перестановку, которая поставит на место x_1 этот элемент и оставит нас в случае 2.2. При этой перестановке элемент x_{15} займет место одного из элементов x_3, x_5, x_9 . Применим теперь такую перестановку, чтобы этот элемент занял место элемента x_3 , элементы x_1 и x_2 остались на месте и мы не покинули рассматриваемый нами случай 2.2. Тогда искомым вектор $\mathbf{y}$ задается равенством (7). Исключим

все предыдущие случаи и воспользуемся тем, что $\mathbf{x}$ – решение системы (3). Получим, что для компонент вектора $\mathbf{x}$ выполнена система

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 = \frac{n}{2}, \\ x_1 + x_4 + x_{10} = \frac{n}{2}, \\ x_1 + x_6 + x_{10} = \frac{n}{2}, \\ x_1 + x_{15} = \frac{n}{2}, \\ x_{10} + x_{15} + x_{16} = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Пусть $x_4 = x$, тогда справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \left(\frac{n}{2} - 2x, 0, 0, x, 0, x, 0, 0, 0, x, 0, 0, 0, 0, 2x, \frac{n}{2} - 3x \right)^T.$$

Положим

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -1, \frac{3}{2} \right)^T.$$

Для того чтобы вектор $\mathbf{y}$ был таким решением системы (4), что для всякого $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$ справедливо неравенство $y_s \leq x_s$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x_{16} \geq 3$. Предположим, что $x_{16} = 1$. Тогда $x = (n - 2)/16$. В силу того что n делится на 8, это равенство возможно тогда и только тогда, когда $n \equiv 8 \pmod{24}$.

Итак, если в случае 2.2.1 или $n \equiv 16 \pmod{24}$, или $n \equiv 0 \pmod{24}$, или не найдется такой перестановки $\pi \in \Pi$, что справедливо равенство

$$\mathbf{x}_\pi = \left(\frac{n+4}{6}, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n-2}{3}, 1 \right)^T,$$

то найдется такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что для всякого $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$ справедливо неравенство $y_s \leq x_s$.

Случай 2.2.2. Пусть теперь среди чисел множества X_- ровно два нечетных. Напомним, что мы считаем справедливым равенство $r_1^3 = 2$. Этот случай несколько сложнее, чем случай 2.2.1. Поэтому мы разобьем его на две части. В первой части мы будем считать, что число r_1^4 не равно 2, во втором – что оно равно 2.

1) Итак, пусть r_1^4 не равно 2. Пусть, далее, найдется такое h , что число x_{2h-1} нечетно, а число x_{2h} четно, причем $x_{2h} \geq 2$. Положим

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \left(\frac{x_1^3 + 2}{2}, \frac{x_2^3 - 1}{2}, \frac{x_3^3 - 1}{2}, \frac{x_4^3}{2}, \frac{x_5^3 - 1}{2}, \frac{x_6^3}{2}, \frac{x_7^3}{2}, \frac{x_8^3 + 1}{2} \right)^T.$$

Если $h \neq 8$, то возьмем $y_{2h-1} = (x_{2h-1} + 1)/2$, $y_{2h} = (x_{2h} - 2)/2$, а для всех остальных $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$, $j \neq h$, либо $y_{2j-1} = f_j(x_{2j-1})$, либо $y_{2j} = f_j(x_{2j})$. Если $h = 8$, то определим вектор $\mathbf{y}$ равенствами $y_{2j-1} = f_j(x_{2j-1})$, $y_{2j} = f_j(x_{2j})$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Предположим теперь, что либо некоторые два соседних числа нечетны, либо некоторые два соседних числа четны и отличны от 0. В этих случаях, рассуждая аналогично, мы также сможем подобрать искомый вектор $\mathbf{y}$.

Итак, некоторую часть случаев мы рассмотрели. Оставшиеся ситуации разберем отдельно в предположении, что $r_1^4 = 0$, и отдельно в предположении, что r_1^4 нечетно.

Пусть $r_1^4 = 0$. Тогда если хотя бы один из двух элементов множества X_- , являющихся нечетными числами, не принадлежит множеству $\{x_3, x_5, x_9\}$, то опять же несложно подобрать вектор $\mathbf{y}$ при помощи определенного выше вектора $f(\mathbf{x}^3)$. Пусть теперь оба элемента множества X_- , являющиеся нечетными числами, принадлежат множеству $\{x_3, x_5, x_9\}$. Рассмотрим перестановку, которая оставит на месте элементы x_1, x_2 , а нечетные элементы переведет в x_3, x_5 . После этого последовательно применим перестановки $\pi_4, \pi_3, \pi_2, \pi_1, \pi_2$. Мы окажемся в случае 2.1, для которого лемма уже доказана.

Пусть теперь $r_1^4 \in \{1, 3\}$. Если второе нечетное число это не x_{15} , то снова рассмотрим вектор $f(\mathbf{x}^3)$ и положим $y_1 = (x_1 + 1)/2$, $y_2 = (x_2 + 1)/2$. Пусть x_{15} нечетное. Если найдется такое $j \in \{3, 5, 9\}$, что $x_j \in 2 + 4\mathbb{Z}_+$, то опять же рассмотрим вектор $f(\mathbf{x}^3)$ и положим $y_1 = (x_1 + 1)/2$, $y_j = (x_j - 2)/2$, $y_{15} = (x_j + 1)/2$.

Если найдется такое j , что x_{2j-1} четное, $x_{2j-1} \geq 2$ и $x_{2j} = 0$, то положим $y_j^3 = (x_j^3 + 2)/2$; с остальными элементами вектора $\mathbf{y}^3$ поступим так же, как если бы мы изначально рассматривали в качестве четного и не делящегося на 4 числа не x_1^3 , а x_j^3 . А с элементами вектора $\mathbf{y}$ поступим обычным образом (при этом $y_1 = (x_1 - 1)/2$, $y_{2j-1} = (x_{2j-1} + 2)/2$, $y_{15} = (x_{15} - 1)/2$).

Если же, наоборот, найдется такое j , что x_{2j} четное, $x_{2j-1} = 0$ и $x_{2j} \geq 2$, то возьмем тот же вектор $\mathbf{y}^3$; с элементами вектора $\mathbf{y}$ поступим обычным способом ($y_1 = (x_1 + 1)/2$, $y_{2j-1} = x_{2j-1}/2$, $y_{2j} = (x_{2j} + 2)/2$, $y_{15} = (x_{15} - 1)/2$).

Осталось рассмотреть случай, когда для любого $j \in \{4, 6, 7\}$ справедливы равенства $x_{2j-1} = 0$ и $x_{2j} = 0$. Рассмотрим возможные значения для элементов x_1, x_2 . Если $x_2 \geq 3$, то просто положим $y_2 = (x_2 + 3)/2$, после чего воспользуемся вектором $\mathbf{y}^3$. Если $x_2 = 1$, то справедлива система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 = \frac{n}{2} - 1, \\ x_1 + x_4 + x_{10} = \frac{n}{2} - 1, \\ x_1 + x_6 + x_{10} = \frac{n}{2} - 1, \\ x_1 + x_{15} = \frac{n}{2}, \\ x_{10} + x_{15} = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = x_4 = x_6 = x_{10} = (n - 2)/6$, $x_{15} = (n + 1)/3$. Таким образом, если в случае 2.2.1 или $n \equiv 16 \pmod{24}$, или $n \equiv 0 \pmod{24}$, или не найдется такой перестановки $\pi \in \Pi$, что справедливо равенство

$$\mathbf{x}_\pi = \left(\frac{n-2}{6}, 1, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n+1}{3}, 0 \right)^T,$$

то найдется такое решение $\mathbf{y}$ системы (4), что для всякого $s \in \{1, 2, \dots, 16\}$ справедливо неравенство $y_s \leq x_s$.

2) Обратимся к случаю $r_1^4 = 2$. Рассмотрим

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Общая идея следующая: если с помощью этого вектора при условии, что $y_1 = (x_1 + 2)/2$, не получается подобрать вектор $\mathbf{y}^4$, то положим $y_1 = (x_1)/2$, после чего мы сможем подобрать вектор $\mathbf{y}^4$.

Вектор $\mathbf{y}^4$ строится с помощью рассмотренного вектора $\mathbf{y}^3$ в следующих ситуациях: если число x_{15} является четным; если число x_{15} является нечетным, существуют два соседних элемента $x_{2j-1} \geq 2$ и $x_{2j} \geq 2$; второе нечетное число x_{2h-1} является элементом множества $\{x_7, x_{11}, x_{13}\}$, найдется такое $j \neq 1$, при котором четное число x_{2j-1} не делится на 4 и справедливо равенство $x_{2j} = 0$; x_{2h-1} является элементом множества $\{x_7, x_{11}, x_{13}\}$, найдется такое $j \in \{4, 6, 7\}$, что $x_{2j-1} = 0$ и x_{2j} не делится на 4. Случай $x_{2h-1} \in \{x_3, x_5, x_9\}$ сводится к разобранному случаю 2.2.2, 1) применением перестановки $\pi_4 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_3$.

Случай 2.2.3. В множестве X_- ровно четыре нечетных числа. Перечислим сначала случаи, в которых можно подобрать такие y_s , $s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T$ является решением системы (4), $y_s \leq x_s$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$, где

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \left(\frac{x_1^3 + 2}{2}, \frac{x_2^3 - 1}{2}, \frac{x_3^3 - 1}{2}, \frac{x_4^3}{2}, \frac{x_5^3 - 1}{2}, \frac{x_6^3}{2}, \frac{x_7^3}{2}, \frac{x_8^3 + 1}{2}\right)^T.$$

Это следующие случаи: хотя бы одно из чисел x_3, x_5, x_9 является четным; одно из чисел x_4, x_6, x_8 отлично от нуля; число x_1 не меньше чем 2; существуют два соседних четных элемента, отличных от 0.

Итак, мы можем считать, что числа x_3, x_5, x_9 являются нечетными. Пусть четвертое нечетное число это не x_{15} . Предположим, что найдется такое $j \in \{4, 6, 7\}$, что число x_j^3 отлично от нуля. Тогда рассмотрим перестановку π , которая оставит нас в случае 2.2.3 и поставит x_j^3 на место x_1^3 . Положим $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(16)})^T$. Тогда мы сможем подобрать такие $y_{\pi(s)}$, $s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y}_\pi = (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(16)})^T$ является решением системы (4), $y_{\pi(s)} \leq x_{\pi(s)}$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{\pi(2j-1)} + y_{\pi(2j)} = y_{\pi(j)}^3$, где

$$\mathbf{y}_\pi^3 = f(\mathbf{x}_\pi^3) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_\pi^3 + \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Пусть теперь для любого $j \in \{4, 6, 7\}$ справедливо равенство $x_j^3 = 0$. Тогда четвертое нечетное число – это x_1 . Следовательно,

$$\mathbf{r}^4 = (r, r, r, 0, r, 0, 0, 0, r, 0, 0, 0, 0, 0, 4 - r)$$

и в множестве X_+ ровно два нечетных элемента, т.е. благодаря перестановке $\pi_4 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_3$ мы окажемся в уже рассмотренном случае 2.2.2.

Если числа x_3, x_5, x_9, x_{15} нечетные, то в множестве X_+ все элементы четные, т.е. благодаря перестановке $\pi_4 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_3$ мы окажемся в уже рассмотренном случае 2.2.1.

Случай 2.2.4. Если в множестве X_- не менее шести нечетных элементов, то можно с легкостью подобрать такие y_s , $s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T$ является решением системы (4), $y_s \leq x_s$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$, где

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \left(\frac{x_1^3 + 2}{2}, \frac{x_2^3 - 1}{2}, \frac{x_3^3 - 1}{2}, \frac{x_4^3}{2}, \frac{x_5^3 - 1}{2}, \frac{x_6^3}{2}, \frac{x_7^3}{2}, \frac{x_8^3 + 1}{2} \right)^T.$$

Обратимся к последнему, третьему подслучаю случая 2.

Случай 2.3. Элементы x_1^3 , x_3^3 , x_5^3 , x_7^3 являются четными.

Случай 2.3.1. Если в множестве X_- все элементы являются четными числами или хотя бы четыре из них нечетные, то положим

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)^T.$$

Далее мы с легкостью сможем подобрать такие y_s , $s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T$ является решением системы (4), $y_s \leq x_s$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$.

Случай 2.3.2. Пусть в множестве X_- два нечетных числа x_{2j-1} и x_{2k-1} . Если хотя бы один из этих элементов не принадлежит множеству $\{x_3, x_5, x_9, x_{15}\}$, то в множестве X_+ не менее, чем четыре нечетных элемента, т.е. благодаря перестановке $\pi_4 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_3$ мы окажемся в уже рассмотренном случае 2.3.1. Если один из нечетных элементов множества X_- принадлежит множеству $\{x_3, x_{15}\}$, а второй – множеству $\{x_7, x_{11}\}$, то положим

$$\mathbf{y}^3 = f(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + \left(0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)^T$$

и вновь легко подберем такие y_s , $s \in \{1, \dots, 16\}$, что вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})^T$ является решением системы (4), $y_s \leq x_s$ и при $j \in \{1, \dots, 8\}$ справедливо равенство $y_{2j-1} + y_{2j} = y_j^3$.

Таким образом, нас будут интересовать случаи, когда нечетными являются либо числа x_3 , x_{15} , либо числа x_7 , x_{11} . При этом второй случай сводится к первому перестановкой π_1 .

Итак, пусть числа x_3 , x_{15} нечетные. Тогда перестановка π_4 переместит нас в уже рассмотренный случай 2.2.

Пункт 1) леммы 8 уже доказан. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что если $n \equiv 8 \pmod{24}$ и справедливо одно из равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(\frac{n+4}{6}, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n-2}{3}, 1 \right)^T, \\ \mathbf{x} &= \left(\frac{n-2}{6}, 1, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n+1}{3}, 0 \right)^T \end{aligned}$$

или если $n \equiv 16 \pmod{24}$ и справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \left(\frac{n+2}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{n-1}{3}, 0, \frac{n-4}{6}, \frac{n-4}{6}, 1, \frac{n+2}{6}, 0, 0, 0 \right)^T,$$

то не существует такого решения $\mathbf{y}$ системы (4), что для любого $s \in \{1, \dots, 16\}$ выполнено неравенство $y_s \leq x_s$.

Лемма 8 доказана.

4.5.3. *Следствия из леммы 8.* Пусть n делится на 8, число N задается равенством $N = C_n^{n/2}$. Пусть, кроме того, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ – четыре произвольные вершины графа G_N^{dist} . Перенумеруем их координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, \\ &\quad 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \\ &\quad 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_3 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \\ &\quad 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_4 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_4}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_5}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_6}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_7}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_8}, \\ &\quad \underbrace{1, \dots, 1}_{x_9}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_{10}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_{11}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_{12}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_{13}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_{14}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_{15}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_{16}}). \end{aligned}$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{16})^T$.

Справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть либо $24 \mid n$, либо $n \equiv 8 \pmod{24}$ и для любого $\pi \in \Pi$ справедливо свойство

$$\left(\left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n+4}{6}, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n-2}{3}, 1 \right)^T \right) \right. \\ \left. \wedge \left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n-2}{6}, 1, 0, \frac{n-2}{6}, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, \frac{n-2}{6}, 0, 0, 0, 0, \frac{n+1}{3}, 0 \right)^T \right) \right),$$

либо $n \equiv 16 \pmod{24}$ и для любого $\pi \in \Pi$ справедливо свойство

$$\left(\mathbf{x}_\pi \neq \left(\frac{n+2}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{n-1}{3}, 0, \frac{n-4}{6}, \frac{n-4}{6}, 1, \frac{n+2}{6}, 0, 0, 0 \right)^T \right).$$

Тогда существует такое число $\gamma_4 > 1$, что при достаточно больших n для любых четырех вершин графа G_N^{dist} найдутся γ_4^n вершин, соединенных ребром с каждой из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 8 можно заметить, что для любого вектора $\mathbf{x}$, удовлетворяющего системе (3), найдется такой вектор $\mathbf{y}$, удовлетворяющий системе (4), что

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, 16\} \quad \left(y_j = \frac{x_j + \delta_j}{2} \wedge y_j \leq x_j \wedge |\delta_j| \leq 11 \wedge \delta_j \in \mathbb{N} \right).$$

Вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16})$, разумеется, удовлетворяет системе (3), и для него найдется описанный выше вектор $\mathbf{y}$. Так как найдется такое натуральное i ,

что $x_i \geq n/16$ и выполнено неравенство $(x_i - 11)/2 \leq y_i \leq (x_i + 11)/2$, то при достаточно больших n искомое количество вершин не меньше чем $C_{[n/16]}^{[n/64]}$. Следствие доказано в силу утверждения 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $n > 8$. Тогда если среди четырех вершин графа G_N^{dist} есть хотя бы одна пара, соединенная ребром, то найдется пятая вершина, соединенная ребром с каждой из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{z}_2 &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1^2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_2^2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{x_3^2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_4^2}).\end{aligned}$$

Справедливы равенства $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = n/4$. Предположим, что не найдется пятой вершины, отвечающей условию леммы. Тогда в силу леммы 8 найдется хотя бы одно такое i , что $x_i^2 \geq (n - 2)/3$. Получили противоречие.

В п. 4.5.4 мы будем доказывать лемму 10 и, как обычно, применим лемму 3. Однако на сей раз мы не сможем воспользоваться утверждением 1, так как в силу утверждения 3 свойство полного расширения уровня 4 в данном случае почти наверное не выполнено. Ниже мы опишем более сложное свойство, которое окажется выполненным почти наверное, и на его основе построим выигрышную стратегию Консерватора.

Пусть G – некоторый граф. Будем говорить, что вершины z_1, z_2, z_3, z_4 этого графа образуют *особенную четверку вершин*, если в нем не найдется пятой вершины, соединенной с каждой из указанных трех. Скажем, что граф $G = (V, E)$ обладает *4-свойством*, если выполнены следующие условия:

- 1) если четверка z_1, z_2, z_3, z_4 не является особенной, то для любых таких целых неотрицательных a, b , что $a + b = 4$, и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_{a+b}$ из $\{1, 2, 3, 4\}$ найдется такая вершина z_5 , что $\{z_5, z_{l_k}\} \in E$ для всех $k \in \{1, \dots, a\}$ и $\{z_5, z_{l_k}\} \notin E$ для всех $k \in \{a + 1, \dots, a + b\}$;
- 2) для любой вершины z_1 графа G найдутся такие вершины z_2, z_3, z_4 , что четверка z_1, z_2, z_3, z_4 является особенной;
- 3) если вершины z_1 и z_2 соединены ребром, то не найдется таких вершин z_3, z_4 , что четверка z_1, z_2, z_3, z_4 является особенной;
- 4) для любого $i \in \{1, 2\}$ и любых вершин $z_1, \dots, z_i$ графа G найдется такая вершина z_{i+1} , что для любых вершин $z_{i+2}, \dots, z_4$ четверка z_1, z_2, z_3, z_4 не является особенной и для любых таких целых неотрицательных a, b , что $a + b = i$, и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_{a+b} \in \{1, \dots, i\}$ справедливо $\{z_{i+1}, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_{i+1}, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq a + b$;
- 5) для любых вершин z_1, z_2, z_3 графа G найдется такая вершина z_4 , что четверка z_1, z_2, z_3, z_4 не является особенной и для любых таких целых неотрицательных a, b , что $a + b = 3$, и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_{a+b} \in \{1, 2, 3\}$ справедливо $\{z_4, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_4, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq a + b$;
- 6) если четверка z_1, z_2, z_3, z_4 является особенной, то в графе G существует такая вершина z_5 , что для любого $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и любых различных $l_1, \dots, l_a, l_{a+1}, \dots, l_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ справедливо $\{z_5, z_{l_k}\} \in E$, $1 \leq k \leq a$, и $\{z_5, z_{l_k}\} \notin E$, $a + 1 \leq k \leq 4$.

Рассмотрим случайный граф $G(G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i))$ и множество $\mathcal{F}_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Пусть $\mathcal{S}_4 \in \mathcal{F}_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$ – это множество всех графов, обладающих 4-свойством.

ЛЕММА 11. *Выполнено равенство*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем, 4-свойство определяется шестью условиями. Пусть $\mathcal{S}_4^l$ – множество графов, для которых выполнено l -е условие 4-свойства.

Рассмотрим $\mathcal{S}_4^1$. Пусть $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$ и в графе G четверка $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ не является особенной. Следовательно, существует вершина, соединенная с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$. Более того, в силу следствия 1 в полном дистанционном графе существует $\gamma_4^{t_i}$, $\gamma_4 > 1$, вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$. Пусть $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b = 4 - a$. Пусть $\mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(E_{\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}, \mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}})$ – вероятность того, что не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}$. Пусть $\varepsilon = \min(p, 1 - p)$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)} \left(\bigvee_{a \in \{0, 1, 2, 3\}, l_1, \dots, l_a \in \{1, 2, 3\}} E_{\mathbf{z}_{l_1}, \dots, \mathbf{z}_{l_a}, \mathbf{z}_{l_{a+1}}, \dots, \mathbf{z}_{l_{a+b}}} \right) \\ & \leq \lim_{i \rightarrow \infty} 16T_i^4 (1 - \varepsilon^4)^{\gamma_4^{t_i}} = 0; \end{aligned}$$

здесь в объединении участвуют все неособенные тройки $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$. В итоге

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4^1) = 1.$$

Обсудим построение множества $\mathcal{S}_4^2$. В силу следствия 1 для любой вершины $\mathbf{z}_1$ в полном графе $G_{T_i}^{\text{dist}}$ найдутся вершины $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$, для которых любая пятая вершина не будет с ними соединена в этом графе. А значит, вершины $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ образуют особенную четверку и в графе $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Следовательно, для каждого i справедливо равенство

$$\mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4^2) = 1.$$

Перейдем к $\mathcal{S}_4^3$. Пусть $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$ в графе $G \in \Omega_{G_{T_i}^{\text{dist}}}$. Тогда эти вершины соединены ребром и в полном дистанционном графе, а следовательно, в силу следствия 2 не найдется вершин, образующих с ними особенную четверку в полном графе. В силу следствия 1 в полном дистанционном графе существует $\gamma_4^{t_i}$, $\gamma_4 > 1$, вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\exists \mathbf{z}_3 \exists \mathbf{z}_4 ((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4) \text{ особенная})) \leq 4T_i^2 (1 - \varepsilon^2)^{\gamma_4^{t_i}}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\exists \mathbf{z}_1 \dots \exists \mathbf{z}_4 ((\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2) \wedge ((\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4) \text{ особенная}))) \leq 4T_i^4 (1 - \varepsilon^2)^{\gamma_4^{t_i}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4^3) = 1.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{S}_4^4$. Для любых вершин $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i$ графа $G_{T_i}^{\text{dist}}$ найдется вершина, соединенная с каждой из них (в полном графе), а из таких $i + 1$ вершин нельзя составить особенную четверку в полном дистанционном графе. То есть для любых вершин $\mathbf{z}_{i+2}, \dots, \mathbf{z}_4$ найдется γ^{t_i} , $\gamma > 1$, вершин, соединенных в полном графе с каждой из $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{i+1}$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство почти наверное справедливости первого условия. В итоге

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4^4) = 1.$$

Обратимся к условию $\mathcal{S}_4^5$. Пусть $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ – три произвольные вершины графа G . Следовательно, в полном дистанционном графе найдется не меньше чем $\gamma_3^{t_i}$ вершин, с ними соединенных и не образующих с ними особенную четверку. Тогда в силу стандартных рассуждений

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_{T_i}^{\text{dist}}, p(T_i)}(\mathcal{S}_4^5) = 1.$$

Для обоснования почти наверное справедливости последнего, шестого свойства достаточно заметить, что для любых трех вершин в особенной четверке в полном графе существует γ_3^n вершин, соединенных с каждой из этих трех. После этого нужно снова воспользоваться стандартными рассуждениями.

Тем самым, лемма 11 доказана.

Итак, нам осталось доказать последнюю часть теоремы 6, которую мы сформулировали в виде леммы 10.

4.5.4. Доказательство леммы 10. Применим лемму 3. Опишем выигрышную стратегию Консерватора. Пусть $G_1 \in \Omega_{G_{T_{i_1}}^{\text{dist}}}$, $G_2 \in \Omega_{G_{T_{i_2}}^{\text{dist}}}$. Пусть, кроме того, для графов G_1 и G_2 выполнено 4-свойство.

Первый ход. Пусть Новатор выбирает $\mathbf{z}_1^1 \in V(G_1)$. Тогда Консерватор выбирает произвольную вершину $\mathbf{z}_2^1 \in V(G_2)$.

Второй ход. Пусть Новатор на втором ходу выбирает, скажем, вершину $\mathbf{z}_2^2 \in V(G_2)$. Пусть для любых вершин $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in V(G_2)$ четверка $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ не является особенной. Так как $G_1 \in \mathcal{S}_4^4$, Консерватор сможет выбрать такую вершину $\mathbf{z}_1^2 \in V(G_1)$, что для любых вершин $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V(G_1)$ четверка $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ не является особенной и вершины $\mathbf{z}_1^1$ и $\mathbf{z}_1^2$ соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины $\mathbf{z}_2^1$ и $\mathbf{z}_2^2$.

Пусть, напротив, Новатор на втором ходу выбирает вершину $\mathbf{z}_2^2$, для которой существуют такие вершины $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in V(G_2)$, что четверка $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ является особенной. Так как $G_2 \in \mathcal{S}_4^3$, то вершины $\mathbf{z}_2^1, \mathbf{z}_2^2$ не соединены ребром. Так как $G_1 \in \mathcal{S}_4^2$, то Консерватор сможет выбрать вершину $\mathbf{z}_1^2 \in V(G_1)$, для которой существуют такие вершины $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V(G_1)$, что четверка $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ является особенной. Так как $G_1 \in \mathcal{S}_4^3$, то вершины $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2$ тоже не соединены ребром.

Третий ход. Он практически ничем не отличается от второго хода, рассуждения аналогичны и тоже опираются на условия 2)–4).

Четвертый ход. Пусть Новатор выбирает, скажем, вершину $z_1^4 \in V(G_1)$. Если четверка $z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_1^4$ не является особенной, то так как $G_2 \in \mathcal{S}_4^5$, Консерватор сможет выбрать такую вершину $z_2^4 \in V(G_2)$, что четверка $z_2^1, z_2^2, z_2^3, z_2^4$ не является особенной и $G_1|_{\{z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_1^4\}} \cong G_2|_{\{z_2^1, z_2^2, z_2^3, z_2^4\}}$.

Если же Новатор выбирает такую вершину $z_1^4 \in V(G_1)$, что четверка $z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_1^4$ является особенной, то так как $G_2 \in \mathcal{S}_4^2$, Консерватор сможет выбрать такую вершину $z_2^4 \in V(G_2)$, что четверка $z_2^1, z_2^2, z_2^3, z_2^4$ не является особенной. Так как $G_1, G_2 \in \mathcal{S}_4^4$, то как вершины $z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_1^4$, так и вершины $z_2^1, z_2^2, z_2^3, z_2^4$ попарно не соединены ребром.

Пятый ход. Пусть Новатор выбирает, скажем, вершину $z_1^5 \in V(G_1)$. Если четверка $z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_1^5$ не является особенной, то так как $G_2 \in \mathcal{S}_4^1$, Консерватор сможет найти подходящую вершину z_2^5 .

В противном случае пусть, скажем, вершины z_1^4 и z_1^5 не соединены ребром. Тогда в силу того, что $G_2 \in \mathcal{S}_4^6$, для вершин $z_2^1, z_2^2, z_2^3, z_2^4$ найдется такая вершина z_2^5 (ее и выберет Консерватор), что соединены ребрами те из пар (z_2^1, z_2^5) , (z_2^2, z_2^5) и (z_2^3, z_2^5) , которые необходимы.

В силу того что 4-свойство почти наверное выполнено, Консерватор почти наверное победит.

Лемма 10 доказана.

Список литературы

- [1] В. А. Успенский, Н. К. Верецагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 1997.
- [2] Н. К. Верецагин, А. Шень, *Лекции по математической логике и теории алгоритмов*, т. 2: *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000.
- [3] A. Ehrenfeucht, "An application of games to the completeness problem for formalized theories", *Fund. Math.*, **49** (1961), 129–141.
- [4] Th. Shwentsick, "On winning Ehrenfeucht games and monadic NP", *Ann. Pure Appl. Logic*, **79**:1 (1996), 61–92.
- [5] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2004; англ. пер.: V. F. Kolchin, *Random graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [6] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [7] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [8] Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький, В. А. Таланов, "Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов", *Кибернетика*, **2** (1969), 17–27.
- [9] R. Fagin, "Probabilities on finite models", *J. Symbolic Logic*, **41**:1 (1976), 50–58.
- [10] S. Shelah, J. Spencer, "Zero-one laws for sparse random graphs", *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.
- [11] М. Е. Жуковский, "Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной", *Докл. РАН*, **436**:1 (2011), 14–18; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, "Zero-one laws for first-order formulas with a bounded quantifier depth", *Dokl. Math.*, **83**:1 (2011), 8–11.
- [12] А. М. Райгородский, "Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств", *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii,

- “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [13] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [14] А. М. Райгородский, К. А. Михайлов, “О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ ”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 63–80; англ. пер.: К. А. Mikhailov, A. M. Raigorodskii, “On the Ramsey numbers for complete distance graphs with vertices in $\{0, 1\}^n$ ”, *Sb. Math.*, **200**:12 (2009), 1789–1806.
- [15] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [16] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.
- [17] М. Е. Жуковский, “Ослабленные законы “нуля или единицы” для случайных дистанционных графов”, *Докл. РАН*, **430**:3 (2010), 314–317; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “The weak zero-one laws for the random distance graphs”, *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 51–54.
- [18] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *ТВП*, **55**:2 (2010), 344–349; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “The weak zero-one law for the random distance graphs”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:2 (2011), 356–360.

М. Е. Жуковский (М. Е. Zhukovskii)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступила в редакцию
25.02.2010 и 21.08.2011