Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Подкорытов, Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 95–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:33:33

УДК 515.142.424

С. С. Подкорытов

Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае

Пусть X, Y – клеточные пространства, U – абелева группа, $f: [X, Y] \rightarrow U$ – гомотопический инвариант. По определению инвариант f имеет порядок не выше r , если для непрерывного отображения $a: X \rightarrow Y$ характеристическая функция r -й декартовой степени его графика $\mathbb{Z}$ -линейно определяет величину $f([a])$. Доказано, что в стабильном случае (т.е. когда $\dim X < 2n - 1$, а Y является $(n - 1)$ -связным для некоторого натурального n) при условии конечности клеточного пространства X порядок инварианта f равен его степени относительно фильтрации Кёртиса группы $[X, Y]$.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: инварианты конечного порядка, стабильные гомотопии, фильтрация Кёртиса.

§ 1. Введение

Порядок гомотопического инварианта. Пусть даны пространства X и Y . Пусть E_r – группа всех функций $(X \times Y)^r \rightarrow \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Для отображения $a \in C(X, Y)$ обозначим через $\Gamma_a \subset X \times Y$ его график, а через $I_r(a) \in E_r$ – характеристическую функцию множества $\Gamma_a^r \subset (X \times Y)^r$. Пусть $D_r \subset E_r$ – подгруппа, порожденная функциями $I_r(a)$, $a \in C(X, Y)$.

Пусть даны абелева группа U и отображение $f: [X, Y] \rightarrow U$. Определим **порядок** отображения f , $\text{ord } f \in \hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, как инфимум тех $r \in \mathbb{N}$, для которых существует такой гомоморфизм $l: D_r \rightarrow U$, что $f([a]) = l(I_r(a))$, $a \in C(X, Y)$ (если таких r нет, то $\text{ord } f = \inf \emptyset = \infty$).

Основной результат. Предположим, что X – конечное клеточное пространство, Y – клеточное пространство, причем $\dim X \leq m$, Y – $(n - 1)$ -связно и $m < 2n - 1$ (стабильный случай). Множество $[X, Y]$ канонически становится абелевой группой. Определена фильтрация Кёртиса $B = (B_s)_{s=1}^\infty$, $[X, Y] = B_1 \supset B_2 \supset \dots$ (см. § 3). Известно (см. [1; теорема 1.4]), что $B_s = 0$ при $s > 2^{m-n}$. Определена степень отображения f относительно фильтрации B , $\deg_B f \in \hat{\mathbb{N}}$ (см. ниже). Если f – ненулевой гомоморфизм, то $\deg_B f$ равна наибольшему s , для которого $f|_{B_s} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Имеет место следующее равенство: $\text{ord } f = \deg_B f$.*

Неравенство $\text{ord } f \leq \deg_B f$ доказывается просто, ключевое место здесь – алгебраическая лемма 5.1 и следующая из нее лемма 7.1. Параграфы 8–16 нужны только для доказательства обратного неравенства. Как известно (см. [2]), если $X = S^m$, а f – гомоморфизм, то $\text{ord } f < \infty$.

Равносильность неравенств $\text{ord } f \leq 1$ и $\deg_B f \leq 1$ следует из характеристики инвариантов первого порядка (см. [3; теорема II]). Теорема 8 из работы [4] наглядно иллюстрирует эту характеристику для $Y = S^1$. Аналогичные соображения показывают, что степень стабильного инварианта Хопфа $[S^{n+1}, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$, больше единицы. Степень Брауэра $[S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$ имеет порядок один. Для доказательства можно взять топологическую абелеву группу гомотопического типа $K(\mathbb{Z}, n)$ (см. [5]) и сослаться на следующую лемму.

ЛЕММА 1.2. Пусть M – топологическая абелева группа, $c: Y \rightarrow M$ – непрерывное отображение, $c_*: [X, Y] \rightarrow [X, M]$ – индуцированное отображение. Тогда $\text{ord } c_* \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \subset E_1$ – подгруппа, образованная теми функциями $e: X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$, для которых при любом $x \in X$ множество $\{y \in Y: e(x, y) \neq 0\}$ конечно. Очевидно, что $D_1 \subset F$. Введем гомоморфизм $k: F \rightarrow M^X$

$$k(e)(x) = \sum_{y \in Y} e(x, y)c(y), \quad x \in X, \quad e \in F.$$

Для $a \in C(X, Y)$ имеем $k(I_1(a)) = c \circ a \in C(X, M) \subset M^X$. Поэтому $k(D_1) \subset C(X, M)$. Введем гомоморфизм $l: D_1 \rightarrow [X, M]$, $l(e) = [k(e)]$. Для $a \in C(X, Y)$ имеем $l(I_1(a)) = [c \circ a] = c_*([a])$.

Степень отображения абелевых групп относительно фильтрации. Пусть даны абелевы группы T, U , отображение $f: T \rightarrow U$ и фильтрация $P = (P_s)_{s=1}^\infty$ группы T : $T = P_1 \supset P_2 \supset \dots$. Определим *степень отображения* f относительно P , $\deg_P f \in \mathbb{N}$, как инфимум таких $r \in \mathbb{N}$, что для любых $t_1, \dots, t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$, где $t_l \in P_{s_l}$ и $s_1 + \dots + s_k > r$, выполнено

$$\sum_{e_1, \dots, e_k=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_k} f(e_1 t_1 + \dots + e_k t_k) = 0.$$

§ 2. Предварительный материал

Симплициальная теория. О (ко)симплициальных объектах см. [6], [7]. Симплициальное отображение между пунктированными симплициальными множествами называем *связанным*, если оно сохраняет пунктировку. Симплициальную абелеву группу D называем *свободной*, если абелевы группы D_n , $n \in \mathbb{N}$, свободны. Для симплициального множества E обозначим через $E_{(m)} \subset E$, $m \in \mathbb{N}$, его m -остов.

Полиэдры. Полиэдр L – конечное множество аффинных симплексов в $\mathbb{R}^\infty$, удовлетворяющее “аксиомам симплициального комплекса” и снабженное линейным порядком вершин каждого симплекса так, что порядок вершин любого симплекса индуцирует порядок вершин каждой его грани. Тело $|L|$ полиэдра L – это объединение его симплексов. Полиэдральное тело – это тело полиэдра.

Морфизмы полиэдров. Для полиэдров K, L отображение $f: K \rightarrow L$ называем *морфизмом*, если образ вершины – вершина, образ симплекса – выпуклая оболочка образов его вершин и нестрогий порядок вершин сохраняется. Морфизм $f: K \rightarrow L$ индуцирует непрерывное отображение $|f|: |K| \rightarrow |L|$.

Порождение. Симплекс $y \in L$ порождает подполиэдр $\bar{y} \subset L$. Множество $T \subset L$ порождает подполиэдр $\bar{T} \subset L$.

Малые множества. Множество $T \subset L$ называется *малым*, если существует симплекс $y \in L$ с $\bar{y} \supset T$; наименьший такой симплекс *натянут на T* .

Расстояние ρ_L . Пусть $\rho_L(x, y) \in \hat{\mathbb{N}}$ – инфимум длин цепочек ребер, соединяющих $x, y \in L$. (Ориентация ребер не учитывается; длина цепочки – это число ее звеньев.) Если $\rho_L(x, y) < a$, $\rho_L(y, z) < b$, $x, y, z \in L$, $a, b \in \mathbb{N}$, то $\rho_L(x, z) < a + b$.

Окрестности O_L . Пусть

$$O_L(y, d) = \{z \in L : \rho_L(y, z) < d\}, \quad y \in L, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Для множества $T \subset L$ пусть $O_L(T, d)$ – объединение множеств $O_L(y, d)$, $y \in T$.

Разделенность ε_L . Пусть $\varepsilon_L(T) = \inf\{\rho_L(x, y) : x, y \in T, x \neq y\} \in \hat{\mathbb{N}}$ для $T \subset L$.

Подразделения. Для полиэдра L введем полиэдр δL – его барицентрическое подразделение, снабженное таким порядком: чем больше размерность симплекса, тем старше его барицентр. Пусть $\varphi_L : \delta L \rightarrow L$ – морфизм, посылающий барицентр каждого симплекса в его старшую вершину, $\delta' L$ – барицентрическое подразделение полиэдра L , снабженное обратным порядком, $\varphi'_L : \delta' L \rightarrow L$ – морфизм, посылающий барицентр каждого симплекса в его младшую вершину. Пусть $\Delta L = \delta' \delta L$, $\Phi_L = \varphi_L \circ \varphi'_L : \Delta L \rightarrow L$. Отображение $|\Phi_L| : |L| = |\Delta L| \rightarrow |L|$ гомотопно тождественному отображению. Образ звезды любого симплекса полиэдра ΔL при морфизме Φ_L мал. Поэтому если $\rho_{\Delta L}(x, y) \leq 2d$, $x, y \in \Delta L$, $d \in \mathbb{N}$, то $\rho_L(\Phi_L(x), \Phi_L(y)) \leq d$.

Пустой симплекс. Пусть $L^\circ = L \cup \{\emptyset\}$ для полиэдра L . Будем считать, что пустой симплекс порождает пустой подполиэдр: $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Для $x, y \in L^\circ$ имеем $x \cap y \in L^\circ$.

Пополнение. Полиэдр L определяет симплициальное множество $\hat{L}$ (добавление вырожденных симплексов). Имеем $L \subset \hat{L}_0 \cup \hat{L}_1 \cup \dots$. Пространства $|L|$ и $|\hat{L}|$ канонически гомеоморфны. Морфизм $f : K \rightarrow L$ полиэдров индуцирует симплициальное отображение $\hat{f} : \hat{K} \rightarrow \hat{L}$. Отображение $f \mapsto \hat{f}$ биективно.

Сечения. Для полиэдра L и симплициального множества E обозначим через $E(L)$ множество симплициальных отображений $v : \hat{L} \rightarrow E$ (называемых *сечениями*). Сечение $v \in E(L)$ индуцирует отображение $|v| \in C(|L|, |E|)$. Для подполиэдра $K \subset L$ определено сужение $v|_K \in E(K)$. Для морфизма $f : K \rightarrow L$ (K – полиэдр) композиция $v \circ f \in E(K)$. Симплициальное отображение $t : D \rightarrow E$ (E – симплициальное множество) индуцирует отображение $t_\# : D(L) \rightarrow E(L)$. Для сечения $v \in G(L)$ (G – симплициальная группа) пусть $\sigma(v) = \{y \in L : v|_{\bar{y}} \neq 1\}$.

Квазисечения. Пусть для множества $T \subset L$ и симплициального множества E

$$E_T = \prod_{y \in T} E(\bar{y}).$$

Пусть $v|_T = (v|_{\bar{y}})_{y \in T} \in E_T$ для $v \in E(L)$. Для элемента $w \in E_L$ (называемого *квазисечением*) и морфизма полиэдров $f : K \rightarrow L$ определим композицию

$w \circ f \in E_K$ следующим правилом:¹

$$(w \circ f)_x = w_{f(x)} \circ (f|_{\bar{x} \rightarrow \overline{f(x)}}), \quad x \in K.$$

Имеем отображение $f^\# : E_L \rightarrow E_K$, $f^\#(w) = w \circ f$. Для симплициального отображения $t : D \rightarrow E$ (D – симплициальное множество) и квазисечения $v \in D_L$ определена композиция $t \circ v \in E_L$.

Свободные группы. Для множества E с отмеченным элементом $*$ имеем группу FE , заданную образующими $\underline{e}$, $e \in E$ и соотношением $\underline{*} = 1$. Отображение $i : E \rightarrow FE$, $i(e) = \underline{e}$, назовем *каноническим*.

Нижний центральный ряд и абелианизация. Для группы G обозначим через $(\gamma_s G)_{s=1}^\infty$ ее нижний центральный ряд (см. [1; п. 1.3]), $G^+ = G/\gamma_2 G$.

Свободные абелевы группы. Для множества E имеем абелеву группу $\langle E \rangle$ с базисом $(\langle e \rangle)_{e \in E}$. Отображение $j : E \rightarrow \langle E \rangle$, $j(e) = \langle e \rangle$, назовем *каноническим*. Пусть $\langle E \rangle_\Delta$ – ядро гомоморфизма $\langle E \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$, $\langle e \rangle \mapsto 1$. Отображение $t : D \rightarrow E$ (D – множество) индуцирует гомоморфизм $\langle t \rangle : \langle D \rangle \rightarrow \langle E \rangle$.

Пусть даны полиэдр L , симплициальное множество E и элемент $V \in \langle E(L) \rangle$. Пусть $|V| \in \langle C(|L|, |E|) \rangle$ – образ элемента V при гомоморфизме, индуцированном отображением² $|\cdot| : E(L) \rightarrow C(|L|, |E|)$. Для подполиэдра $K \subset L$ аналогично определяется элемент $V|_K \in \langle E(K) \rangle$, для множества $T \subset L$ – элемент $V|_T \in \langle E_T \rangle$, для пространств X, Y и элемента $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ – элемент $[A] \in \langle [X, Y] \rangle$, для множества $Z \subset X$ – элемент $A|_Z \in \langle C(Z, Y) \rangle$.

Для симплициальной группы G и элемента $V \in \langle G(L) \rangle$,

$$V = \sum_{v \in G(L)} m_v \langle v \rangle, \quad m_v \in \mathbb{Z},$$

обозначим

$$\Sigma(V) = \bigcup_{v \in G(L) : m_v \neq 0} \sigma(v).$$

Групповые кольца. Для группы G $\langle G \rangle$ – групповое кольцо группы G , $\langle G \rangle_\Delta$ – его (двусторонний) идеал. Для $s \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ идеал $\langle G \rangle_\Delta^s$ аддитивно порожден всеми элементами вида $(\langle g_1 \rangle - 1) \cdots (\langle g_s \rangle - 1)$, $g_1, \dots, g_s \in G$.

Симплициальное применение. Естественные конструкции можно применять к симплициальным объектам послойно. Для пунктированного симплициального множества E имеем симплициальную группу FE и каноническое симплициальное отображение $i : E \rightarrow FE$. Отображение i – модель канонического отображения пунктированного пространства в пространство петель его надстройки (*модель Милнора*, см. [6; раздел V.6]). Для симплициальной группы G имеем симплициальную абелеву группу G^+ , симплициальное кольцо $\langle G \rangle$, каноническое симплициальное отображение $j : G \rightarrow \langle G \rangle$ и симплициальные подгруппы $\gamma_s G \subset G$, $s \in \mathbb{N}_+$, и $\langle G \rangle_\Delta^s \subset \langle G \rangle$, $s \in \mathbb{N}$.

Сведения. Пусть L – полиэдр, G – симплициальная группа, а $j : G \rightarrow \langle G \rangle$ – каноническое отображение. Кольцевой гомоморфизм $J : \langle G(L) \rangle \rightarrow \langle G \rangle(L)$, $J(\langle v \rangle) = j \circ v$, назовем *сведением*.

¹Если дано отображение $t : X \rightarrow Y$ и $t(A) \subset B$, где $A \subset X$, $B \subset Y$, то $t|_{A \rightarrow B}$ обозначает отображение $A \rightarrow B$, $x \mapsto t(x)$.

²Здесь $|\cdot| : v \mapsto |v|$. Далее используются обозначения $?|_T : v \mapsto v|_T$ и т.п.

§ 3. Фильтрация Кёртиса в стабильном случае

Пусть даны клеточные пространства X и Y , $\dim X \leq m$, пространство Y является $(n-1)$ -связным и $m < 2n-1$. Построим фильтрацию $B = (B_s)_{s=1}^{\infty}$ абелевой группы $[X, Y]$, $[X, Y] = B_1 \supset B_2 \supset \dots$, так называемую *фильтрацию Кёртиса* (частный случай фильтрации, введенной в [1; п. 1.6]). Возьмем симплициальное множество E и гомотопическую эквивалентность $k: Y \rightarrow |E|$. Пунктируем E и введем симплициальную группу $G = FE$. По теореме Фрейденталя каноническое симплициальное отображение $i: E \rightarrow G$ является $(2n-1)$ -связным. Отображение $h = |i| \circ k: Y \rightarrow |G|$ тоже $(2n-1)$ -связно. Пусть $j_s: \gamma_s G \rightarrow G$, $s \in \mathbb{N}_+$, – симплициальные гомоморфизмы включения. Для $s \in \mathbb{N}_+$ имеем следующую цепочку групп и гомоморфизмов:

$$[X, Y] \xrightarrow{h_*} [X, |G|] \xleftarrow{|j_s|_*} [X, |\gamma_s G|].$$

Так как $m < 2n-1$, то h_* – изоморфизм. Пусть $B_s = h_*^{-1}(\text{im } |j_s|_*)$. (Фильтрация B не зависит от выбора E и k .)

§ 4. Лемма о кольцах Ли

Пусть U – функтор универсального обертывающего кольца.

ЛЕММА 4.1. *Пусть даны кольца Ли L и M , свободные как абелевы группы, и инъективный гомоморфизм $k: L \rightarrow M$. Тогда гомоморфизм $Uk: UL \rightarrow UM$ инъективен.*

Эту лемму легко доказать, используя теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. [8; часть I, гл. III, теорема 4.3]).

§ 5. Лемма о групповых кольцах

Пусть даны группы V, W и гомоморфизм $t: V \rightarrow W$. Имеем кольцевой гомоморфизм $\langle t \rangle: \langle V \rangle \rightarrow \langle W \rangle$. Обозначим через $I_s \subset \langle V \rangle$, $s \in \mathbb{N}$, подгруппу, порожденную всеми элементами вида $(v_1' - 1) \cdots (v_k' - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $v_l \in t^{-1}(\gamma_{s_l} W)$ и $s_1 + \dots + s_k \geq s$. Легко видеть, что I_s – идеалы, $I_s \supset I_{s+1}$ и $I_r I_s \subset I_{r+s}$.

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что W – произведение конечного числа свободных групп. Тогда $\langle t \rangle^{-1}(\langle W \rangle_{\Delta}^s) = I_s$, $s \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $w \in \gamma_s W$, то $\langle w' \rangle - 1 \in \langle W \rangle_{\Delta}^s$ (это верно для любой группы W (см. [9; гл. III, следствие 1.3])). Отсюда следует включение $\langle t \rangle^{-1}(\langle W \rangle_{\Delta}^s) \supset I_s$.

Введем градуированные кольца P с однородными компонентами $P_s = I_s / I_{s+1}$, $s \geq 0$, и Q , $Q_s = \langle W \rangle_{\Delta}^s / \langle W \rangle_{\Delta}^{s+1}$. Так как $\langle t \rangle(I_s) \subset \langle W \rangle_{\Delta}^s$, то гомоморфизм $\langle t \rangle$ индуцирует гомоморфизм градуированных колец $l: P \rightarrow Q$. Мы покажем, что гомоморфизм l инъективен. Тогда индукцией по s с применением леммы о пяти гомоморфизмах получим, что индуцированный гомоморфизм $\langle V \rangle / I_s \rightarrow \langle W \rangle / \langle W \rangle_{\Delta}^s$ инъективен, т.е. нужное равенство.

Введем градуированные кольца Ли L , $L_s = t^{-1}(\gamma_s W) / t^{-1}(\gamma_{s+1} W)$, и M , $M_s = \gamma_s W / \gamma_{s+1} W$, $s \geq 1$; произведение индуцируется групповым коммутированием (см. [9; гл. VIII, теорема 6.2]). Гомоморфизм t индуцирует гомоморфизм градуированных колец Ли $k: L \rightarrow M$, очевидно, инъективный.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{k} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ P & \xrightarrow{l} & Q \end{array}$$

где f и g – представления с компонентами

$$\begin{aligned} f_s: L_s &\rightarrow P_s, & f_s(v) &= 'v' - 1, & v &\in t^{-1}(\gamma_s W), \\ g_s: M_s &\rightarrow Q_s, & g_s(w) &= 'w' - 1, & w &\in \gamma_s W. \end{aligned}$$

Продолжая представления f и g до гомоморфизмов универсальных обертывающих колец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} UL & \xrightarrow{Uk} & UM \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{g} \\ P & \xrightarrow{l} & Q \end{array}$$

Из [9; гл. VIII, теорема 6.2] следует, что $\tilde{g}$ – изоморфизм. По [8; следствие I.4.6.2] M свободно как абелева группа. По лемме 4.1 гомоморфизм Uk инъективен. Кольцо P порождено элементами вида $'v' - 1 \in P_s$, где $s \in \mathbb{N}_+$, $v \in t^{-1}(\gamma_s W)$. Они лежат в образе представления f и, следовательно, гомоморфизма $\tilde{f}$, который поэтому сюръективен. Значит, гомоморфизм l инъективен. (А $\tilde{f}$ – изоморфизм).

§ 6. Идеалы группового кольца произведения групп

Пусть дан конечный набор $(G_i)_{i \in I}$ групп. Для $J \subset I$ пусть

$$G_J = \prod_{i \in J} G_i,$$

$p_J: G_I \rightarrow G_J$ – гомоморфизм проекции. Имеем кольцевые гомоморфизмы $\langle p_J \rangle: \langle G_I \rangle \rightarrow \langle G_J \rangle$.

ЛЕММА 6.1. Для $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\bigcap_{\#J < s} \ker \langle p_J \rangle \subset \langle G_I \rangle_\Delta^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\langle G_I \rangle = \bigotimes_{i \in I} \langle G_i \rangle.$$

Так как $\langle G_i \rangle = \langle G_i \rangle_\Delta \oplus \langle 1 \rangle$, то

$$\langle G_I \rangle = \bigoplus_{J \subset I} S(J), \quad S(J) = \bigotimes_{i \in I} T_i(J),$$

где подгруппа $T_i(J) \subset \langle G_i \rangle$ есть $\langle G_i \rangle_\Delta$ при $i \in J$ и $\langle 1 \rangle$ в противном случае. Очевидно, $\langle p_J \rangle | S(J')$ есть мономорфизм при $J' \subset J$ и нуль при $J' \not\subset J$. Отсюда

$$\bigcap_{\#J < s} \ker \langle p_J \rangle = \bigoplus_{\#J \geq s} S(J).$$

Осталось заметить, что $S(J) \subset \langle G_I \rangle_\Delta^{\#J}$.

§ 7. Функции η и θ

Пусть даны полиэдр L и симплицальная группа G . Имеем гомоморфизм $?||_L: G(L) \rightarrow G_L$. Для $V \in \langle G(L) \rangle$ обозначим

$$\eta(V) = \sup\{s \in \mathbb{N} : V||_L \in \langle G_L \rangle_\Delta^s\} \in \widehat{\mathbb{N}}.$$

Для $s \in \mathbb{N}$ введем подгруппу $I_s \subset \langle G(L) \rangle$, порожденную всеми элементами вида $(v_1 - 1) \cdots (v_k - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $v_l \in (\gamma_{s_l} G)(L) \subset G(L)$ и $s_1 + \cdots + s_k \geq s$. (Это идеал.)

ЛЕММА 7.1. *Предположим, что группы G_n , $n \in \mathbb{N}$, свободны. Тогда $\{V \in \langle G(L) \rangle : \eta(V) \geq s\} = I_s$, $s \in \mathbb{N}$.*

Утверждение следует из леммы 5.1.

Для симплицального множества E и элемента $V \in \langle E(L) \rangle$ обозначим

$$\theta(V) = \inf\{\#T : T \subset L, V||_T \neq 0\} \in \widehat{\mathbb{N}}.$$

ЛЕММА 7.2. *Для $V \in \langle G(L) \rangle$ имеем $\theta(V) \leq \eta(V)$.*

Это утверждение следует из леммы 6.1.

§ 8. Произведение аффинных функций

ЛЕММА 8.1. *Пусть даны группа V , кольцо H и гомоморфизмы $a_1, \dots, a_r: V \rightarrow H$ (в аддитивную группу; $r \in \mathbb{N}$). Введем аддитивный гомоморфизм $Q: \langle V \rangle \rightarrow H$,*

$$Q(v) = \prod_{s=1}^r (1 + a_s(v)).$$

Тогда $Q||\langle V \rangle_\Delta^{r+1} = 0$.

Это утверждение следует из [9; гл. V, теорема 2.1].

§ 9. Строгие и r -строгие гомоморфизмы

Пусть даны группы V и W . Аддитивный гомоморфизм $h: \langle V \rangle \rightarrow \langle W \rangle$ называем *строгим*, если $h(\langle V \rangle_\Delta^s) \subset \langle W \rangle_\Delta^s$ для всех $s \in \mathbb{N}$, и *r -строгим*, если это верно при $s \leq r$, $r \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 9.1. *Пусть дан гомоморфизм $t: V \rightarrow W$. Тогда гомоморфизм $\langle t \rangle: \langle V \rangle \rightarrow \langle W \rangle$ строг.*

ЛЕММА 9.2. Пусть даны r -строгие гомоморфизмы $f, g: \langle V \rangle \rightarrow \langle W \rangle$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда гомоморфизм $h: \langle V \rangle \rightarrow \langle W \rangle$, $h(v) = f(v)g(v)$, r -строг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $s \in \mathbb{N}_+$, $s \leq r$, и $v_1, \dots, v_s \in V$. Пусть $x_t = v_t - 1 \in \langle V \rangle_\Delta$. Покажем, что $h(x_1 \cdots x_s) \in \langle W \rangle_\Delta^s$. Имеем

$$\begin{aligned}
 (-1)^s h(x_1 \cdots x_s) &= \sum_{e_1, \dots, e_s=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_s} h(v_1^{e_1} \cdots v_s^{e_s}) \\
 &= \sum_{e_1, \dots, e_s=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_s} f(v_1^{e_1} \cdots v_s^{e_s}) g(v_1^{e_1} \cdots v_s^{e_s}) \\
 &= \sum_{e_1, \dots, e_s=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_s} f\left(\prod_{t=1}^s (1 + e_t x_t)\right) g\left(\prod_{t=1}^s (1 + e_t x_t)\right) \\
 &= \sum_{e_1, \dots, e_s=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_s} \left(\sum_{a_1, \dots, a_s=0,1} e_1^{a_1} \cdots e_s^{a_s} f(x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}) \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{b_1, \dots, b_s=0,1} e_1^{b_1} \cdots e_s^{b_s} g(x_1^{b_1} \cdots x_s^{b_s}) \right) \\
 &= \sum_{a_1, b_1, \dots, a_s, b_s=0,1} \left(\sum_{e_1, \dots, e_s=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_s} e_1^{a_1+b_1} \cdots e_s^{a_s+b_s} \right) f(x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}) \\
 &\quad \times g(x_1^{b_1} \cdots x_s^{b_s}).
 \end{aligned}$$

Зафиксируем $a_1, b_1, \dots, a_s, b_s$ и покажем, что соответствующее слагаемое внешней суммы принадлежит $\langle W \rangle_\Delta^s$. Пусть $a = a_1 + \dots + a_s$, $b = b_1 + \dots + b_s$. Так как $a, b \leq s \leq r$, а гомоморфизмы f, g являются r -строгими, то

$$f(x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}) g(x_1^{b_1} \cdots x_s^{b_s}) \in \langle W \rangle_\Delta^{a+b}.$$

Если $a + b \geq s$, то этого достаточно. Иначе есть такое t , что $a_t = b_t = 0$. Тогда величина $e_1^{a_1+b_1} \cdots e_s^{a_s+b_s}$ не зависит от e_t и поэтому внутренняя сумма равна нулю.

§ 10. Групповое кольцо свободной группы

Пусть E – пунктированное множество, $G = FE$, а $i: E \rightarrow G$ – каноническое отображение. Для $s \in \mathbb{N}$ введем пунктированное множество $E^{\wedge s} = E \wedge \cdots \wedge E$ ($E^{\wedge 0} = 0$ -сфера) и гомоморфизм $k_s: \langle E^{\wedge s} \rangle_\Delta \rightarrow \langle G \rangle_\Delta^s$,

$$k_s((e_1, \dots, e_s)' - '*') = \prod_{t=1}^s (\underline{e_t}' - 1),$$

где $*$ $\in E^{\wedge s}$ – отмеченный элемент. Согласно [9; гл. VIII, теорема 6.2] композиция

$$\langle E^{\wedge s} \rangle_\Delta \xrightarrow{k_s} \langle G \rangle_\Delta^s \xrightarrow{\text{проекция}} \langle G \rangle_\Delta^s / \langle G \rangle_\Delta^{s+1}$$

– изоморфизм. Таким образом, $\langle G \rangle_\Delta^s = D^s \oplus \langle G \rangle_\Delta^{s+1}$, где $D^s \cong \langle E^{\wedge s} \rangle_\Delta$.

§ 11. Подъем симплициального гомоморфизма

ЛЕММА 11.1. Пусть дана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{s} & P \end{array}$$

симплициальных абелевых групп и гомоморфизмов. Предположим, что группа D свободна и m -связна, $m \in \mathbb{N}$, а гомоморфизм f сюръективен. Тогда существует такой симплициальный гомоморфизм $t: D \rightarrow Q$, что $f \circ t|_{D_{(m)}} = s|_{D_{(m)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Знаком $\heartsuit$ обозначаем функтор нормализации Дольда–Кана (см. [6; гл. III, раздел 2]). Комплекс $D^\heartsuit$ свободен. Поэтому $D^\heartsuit = C^0 \oplus C^1 \oplus \dots$, где C^n – свободный комплекс с $C_i^n = 0$ при $i \neq n, n+1$ и инъективным дифференциалом $\partial: C_{n+1}^n \rightarrow C_n^n$. Комплекс $D^\heartsuit$ m -связен. Поэтому при $n \leq m$ дифференциал $\partial: C_{n+1}^n \rightarrow C_n^n$ – изоморфизм. Морфизм $f^\heartsuit: Q^\heartsuit \rightarrow P^\heartsuit$ сюръективен. Поэтому для $n \leq m$ есть такой морфизм $g^n: C^n \rightarrow Q^\heartsuit$, что $f^\heartsuit \circ g^n = s^\heartsuit|_{C^n}$. Введем морфизм $h: D^\heartsuit \rightarrow Q^\heartsuit$, полагая $h|_{C^n}$ равным g^n при $n \leq m$ и равным нулю при $n > m$. Очевидно, $(f^\heartsuit \circ h)_n = s_n^\heartsuit$ при $n \leq m$. Соответствие Дольда–Кана дает симплициальный гомоморфизм $t: D \rightarrow Q$ с $t^\heartsuit = h$. Он имеет нужное свойство.

§ 12. Функция μ_L

Пусть L – полиэдр. Для $x \in L^\circ$ определим

$$\mu_L(x) = 1 - \chi(\text{lk}_L x),$$

где χ – эйлерова характеристика, lk – линк; считаем, что $\text{lk}_L \emptyset = L$.

ЛЕММА 12.1. Для $y, z \in L^\circ$ имеем

$$\sum_{x \in L^\circ: x \cap y = z} \mu_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = z, \\ 0 & \text{при } y \neq z. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $t \in L^\circ$ имеем

$$\sum_{x \in L^\circ: x \subset t, x \cap y = z} (-1)^{\dim x} = \begin{cases} (-1)^{\dim z} & \text{при } z \subset t \subset y, \\ 0 & \text{в иных случаях} \end{cases}$$

(считаем, что $\dim \emptyset = -1$). Для $x \in L^\circ$ имеем

$$\chi(\text{lk}_L x) = \sum_{t \in L^\circ: x \subsetneq t} (-1)^{\dim t - \dim x - 1}$$

и, значит,

$$\mu_L(x) = \sum_{t \in L^\circ: x \subset t} (-1)^{\dim t - \dim x}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in L^\circ : x \cap y = z} \mu_L(x) &= \sum_{x, t \in L^\circ : x \subset t, x \cap y = z} (-1)^{\dim t - \dim x} \\
 &= \sum_{t \in L^\circ} (-1)^{\dim t} \sum_{x \in L^\circ : x \subset t, x \cap y = z} (-1)^{\dim x} \\
 &= \sum_{t \in L^\circ : z \subset t \subset y} (-1)^{\dim t + \dim z} = \begin{cases} 1 & \text{при } y = z, \\ 0 & \text{при } y \neq z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

§ 13. Фигура симплициальной группы

Модель расслоения путей. Введем косимплициальное симплициальное пунктированное множество³ B : пусть B_m^n , $m, n \in \mathbb{N}$, – множество нестрого возрастающих частичных отображений $b: [m] \dashrightarrow [n]$ (имеем $\text{dom } b \subset [m]$) с отмеченным элементом o_m^n , $\text{dom } o_m^n = \emptyset$; структурные отображения очевидные (ср. определение косимплициального симплициального множества Δ в [6; гл. VIII, раздел 1]). Имеем пунктированное симплициальное множество B^n , $n \in \mathbb{N}$.

Пусть дана симплициальная группа G . Введем симплициальную группу $\tilde{G}$ (фигуру группы G): пусть $\tilde{G}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – группа связанных симплициальных отображений $B^n \rightarrow G$; структурные гомоморфизмы индуцируются косимплициальной структурой.

ЛЕММА 13.1. *Пространство $|\tilde{G}|$ стягиваемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть симплициальное множество I – стандартный 1-симплекс: I_n , $n \in \mathbb{N}$, – множество нестрого возрастающих отображений $s: [n] \rightarrow [1]$. Набор отображений $I_n \times B_m^n \rightarrow B_m^n$, $(s, b) \mapsto b|(s \circ b)^{-1}(1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, индуцирует стягивающую гомотопию $I \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$.

Вычисление на элементах $i_n \in B_n^n$, $i_n = \text{id}: [n] \rightarrow [n]$, дает симплициальный гомоморфизм $p: \tilde{G} \rightarrow G$ (проекцию).

ЛЕММА 13.2. *Предположим, что $G_0 = 1$. Тогда гомоморфизм p сюръективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем элемент $g \in G_n$, $n \in \mathbb{N}$. Нужно найти элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}_n$ с $p_n(\tilde{g}) = g$, т.е. связанное симплициальное отображение $\tilde{g}: B^n \rightarrow G$ с $\tilde{g}_n(i_n) = g$. Пусть $V \subset B^n$ – симплициальное подмножество, порожденное элементами i_n и $l_n \in B_1^n$, $\text{dom } l_n = \{0\}$, $l_n(0) = 0$. Это – букет стандартных n -симплекса и 1-симплекса. Введем симплициальное отображение $f: V \rightarrow G$, $f_n(i_n) = g$, $f_1(l_n) = 1$. Так как V стягиваемо, а G – множество Кана (см. [6; гл. I, раздел 3]), то отображение f продолжается на B^n , что дает нужное $\tilde{g}$.

Продолжение сечений. Пусть L – полиэдр. Возьмем симплексы $x, y \in L$ размерностей r, s соответственно. Пусть $i: [r] \rightarrow L$, $j: [s] \rightarrow L$ – возрастающие нумерации их вершин. Имеем частичное отображение $t = i^{-1} \circ j: [s] \dashrightarrow [r]$. Для связанного симплициального отображения $\tilde{g}: B^r \rightarrow G$ введем связанное

³То есть косимплициальный объект категории симплициальных пунктированных множеств (см. [7; гл. II, определение 2.4], [6; гл. VII]).

симплициальное отображение $e_{xy}(\tilde{g}): B^s \rightarrow G$, для $b: [m] \dashrightarrow [s]$, $m \in \mathbb{N}$, полагая $e_{xy}(\tilde{g})_m(b) = \tilde{g}_m(t \circ b)$ (композиция частичных отображений понимается в обычном смысле). Этим задан гомоморфизм $e_{xy}: \tilde{G}_r \rightarrow \tilde{G}_s$.

Для $x \in L$, $\dim x = r$, введем гомоморфизм $E_x: \tilde{G}(\bar{x}) \rightarrow \tilde{G}(L)$, полагая $E_x(v)_s(y) = e_{xy}(v_r(x))$, $y \in L$, $\dim y = s$. Распространим это построение на случай $x \in L^\circ$, полагая $E_\emptyset(1) = 1$ (имеем $\tilde{G}(\bar{\emptyset}) = 1$).

ЛЕММА 13.3. Для $x \in L^\circ$, $v \in \tilde{G}(\bar{x})$ имеем

- а) $E_x(v)|_{\bar{x}} = v$;
- б) $E_x(v)|_{\bar{y}} = E_{x \cap y}(v|_{\bar{x} \cap \bar{y}})|_{\bar{y}}$, $y \in L^\circ$;
- в) $\sigma(E_x(v)) \subset O_L(x, 1)$ при $x \neq \emptyset$.

Реализация. Пусть $\tilde{J}: \langle \tilde{G}(L) \rangle \rightarrow \langle \tilde{G} \rangle(L)$, $\tilde{J}_x: \langle \tilde{G}(\bar{x}) \rangle \rightarrow \langle \tilde{G} \rangle(\bar{x})$, $x \in L$, — сведения. Очевидно, $\tilde{J}_x$ — изоморфизмы. Введем аддитивный гомоморфизм $R: \langle \tilde{G} \rangle(L) \rightarrow \langle \tilde{G}(L) \rangle$,

$$R(w) = \sum_{x \in L} \mu_L(x) (\langle E_x \rangle \circ \tilde{J}_x^{-1})(w|_{\bar{x}})$$

(реализацию). Имеем $R(\langle \tilde{G} \rangle_\Delta(L)) \subset \langle \tilde{G}(L) \rangle_\Delta$.

ЛЕММА 13.4. Для $w \in \langle \tilde{G} \rangle_\Delta(L)$ выполнено $\tilde{J}(R(w)) = w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in L^\circ$ введем гомоморфизм $H_z: \langle \tilde{G} \rangle(\bar{z}) \rightarrow \langle \tilde{G}(L) \rangle$, полагая $H_z = \langle E_z \rangle \circ \tilde{J}_z^{-1}$, $z \neq \emptyset$, и $H_\emptyset = 0$. Из п. б) леммы 13.3 следует, что для $x, y \in L^\circ$, $u \in \langle \tilde{G} \rangle_\Delta(\bar{x})$ выполнено $H_x(u)|_{\bar{y}} = H_{x \cap y}(u|_{\bar{x} \cap \bar{y}})|_{\bar{y}}$. Для $y \in L$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}(R(w))|_{\bar{y}} &= \tilde{J}_y(R(w)|_{\bar{y}}) = \sum_{x \in L^\circ} \mu_L(x) \tilde{J}_y(H_x(w|_{\bar{x}})|_{\bar{y}}) \\ &= \sum_{x \in L^\circ} \mu_L(x) \tilde{J}_y(H_{x \cap y}(w|_{\bar{x} \cap \bar{y}})|_{\bar{y}}) \\ &= \sum_{z \in L^\circ} \left(\sum_{x \in L^\circ: x \cap y = z} \mu_L(x) \right) \tilde{J}_y(H_z(w|_{\bar{z}})|_{\bar{y}}) \stackrel{\text{лемма 12.1}}{=} \tilde{J}_y(H_y(w|_{\bar{y}})|_{\bar{y}}) \\ &= \tilde{J}_y(\langle E_y \rangle(\tilde{J}_y^{-1}(w|_{\bar{z}}))|_{\bar{y}}) \stackrel{\text{п. а) леммы 13.3}}{=} \tilde{J}_y(\tilde{J}_y^{-1}(w|_{\bar{z}})) = w|_{\bar{y}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 13.5. Для $w \in \langle \tilde{G} \rangle(L)$ имеем $\Sigma(R(w)) \subset O_L(\sigma(w), 1)$.

Это утверждение следует из п. в) леммы 13.3.

ЛЕММА 13.6. Имеем $R(\langle \tilde{G} \rangle_\Delta^s(L)) \subset \langle \tilde{G}(L) \rangle_\Delta^s$, $s \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $w \in \langle \tilde{G} \rangle_\Delta^s(L)$, $x \in L$ имеем

$$w|_{\bar{x}} \in \langle \tilde{G} \rangle_\Delta^s(\bar{x}), \quad \tilde{J}_x^{-1}(w|_{\bar{x}}) \in \langle \tilde{G}(\bar{x}) \rangle_\Delta^s$$

и $\langle E_x \rangle(\tilde{J}_x^{-1}(w|_{\bar{x}})) \in \langle \tilde{G}(L) \rangle_\Delta^s$ по лемме 9.1. Суммируя по $x \in L$, получаем $R(w) \in \langle \tilde{G}(L) \rangle_\Delta^s$.

§ 14. Дробления

Пусть L – полиэдр и D – симплициальная абелева группа. Набор гомоморфизмов $(h_z: D(\bar{z}) \rightarrow D(L))_{z \in L}$ называем *дроблением*, если для $w \in D(L)$ имеем

$$\sum_{z \in L} h_z(w|_{\bar{y}}) = w$$

и $\sigma(h_z(w)) \subset O_L(z, 1)$ для всех $z \in L$.

ЛЕММА 14.1. *Предположим, что $\dim L \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, а группа D свободна и m -связна. Тогда существует дробление $(h_z: D(\bar{z}) \rightarrow D(L))_{z \in L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соответствием Дольда–Кана. Есть разложение $D = D^0 \oplus D^1 \oplus \dots$, где D^n – симплициальная абелева группа, нормализация C^n которой сосредоточена в размерностях $n, n+1$ и имеет инъективный дифференциал $\partial: C^n_{n+1} \rightarrow C^n_n$ (ср. с доказательством леммы 11.1). Достаточно для каждого n построить дробление $(h^n_z: D^n(\bar{z}) \rightarrow D^n(L))_{z \in L}$. Если $n \leq m$, то $\partial: C^n_{n+1} \rightarrow C^n_n$ – изоморфизм, так как группа D является m -связной. Поэтому сечения на полиэдре со значениями в D^n – то же самое, что n -коцепи на нем с коэффициентами в C^n_n . При $\dim z = n$ пусть h^n_z – гомоморфизм продолжения коцепи нулем; в иных случаях пусть $h^n_z = 0$. Если $n > m$, то $D^n(L) = 0$ (так как $\dim L \leq m$) и есть нулевое дробление.

§ 15. Модификация набора сечений

Фиксируем числа $b_1, \dots, b_5$, $c \in \mathbb{N}$, каждое из которых достаточно велико относительно предыдущих, а именно, $b_1 \geq 2$, $b_2 \geq b_1 + 2$, $b_3 \geq 2b_2$, $b_4 \geq 2b_1 + b_3$, $b_5 \geq 2b_2 + b_4$, $2^{c-1} \geq 2b_5 + 1$.

Морфизм $e: L \rightarrow K$. Пусть дан полиэдр K , $\dim K \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $L = \Delta^c K$, $e = \Phi_K \circ \dots \circ \Phi_{\Delta^{c-1}K}: L \rightarrow K$. Для $z \in L$ множество $e(O_L(z, b_5)) \subset K$ мало (это следует из свойств операции Δ и неравенства $2^{c-1} \geq 2b_5 + 1$).

Морфизмы e_z . Возьмем симплекс $z \in L$. Так как $b_2 \leq b_5$, то множество $e(O_L(z, b_2))$ мало. Пусть $x \in K$ – натянутый на него симплекс, $u \in K$ – старшая вершина симплекса x . Построим морфизм $e_z: L \rightarrow K$ со следующими свойствами:

- 1) $e_z(O_L(z, b_1)) = \{u\}$;
- 2) $e_z(O_L(z, b_2)) \subset \bar{x}$;
- 3) e_z совпадает с e вне $O_L(z, b_2)$.

Пусть $L_1 = \delta \Delta^{c-1} K$. Имеем $L = \delta' L_1$. Пусть $B_1 \subset L_1$ – подполиэдр, порожденный симплексами, центры которых (будучи вершинами полиэдра L) принадлежат множеству $O_L(z, b_1 + 1)$. Пусть $B = \delta' B_1$. Тогда $B \subset L$ – подполиэдр. Имеем $O_L(z, b_1) \subset B$ и $O_L(B, 1) \subset O_L(z, b_2)$, так как $b_2 \geq b_1 + 2$. У полиэдра L нет ребер, выходящих и направленных из B . Зададим морфизм e_z , для вершины $t \in L$ полагая $e_z(t)$ равным u при $t \in B$ и равным $e(t)$ при $t \notin B$. Легко проверить корректность задания этого морфизма и наличие у него нужных свойств.

Морфизмы e_Z . Возьмем множество $Z \subset L$ с $\varepsilon_L(Z) \geq b_3$. Зададим морфизм $e_Z: L \rightarrow K$ следующими условиями:

- 1) для $z \in Z$ морфизм e_Z совпадает с e_z на $O_L(z, b_2)$;
- 2) e_Z совпадает с e вне $O_L(Z, b_2)$.

Так как $b_3 \geq 2b_2$, то задание этого морфизма корректно.

Симплициальные группы G и D . Пусть дано $(n-1)$ -связное симплициальное множество E с одной вершиной, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $m \leq 2n-1$. Пусть $G = FE$, $i: E \rightarrow G$ и $j: G \rightarrow \langle G \rangle$ – канонические симплициальные отображения, симплициальный гомоморфизм $q: G \rightarrow G^+$ – проекция. Нам понадобятся разложение $\langle G \rangle \cong \langle 1 \rangle \oplus G^+ \oplus D$ и связанные с ним симплициальные гомоморфизмы. Пусть $d: \langle G \rangle \rightarrow \langle G \rangle$ – симплициальный гомоморфизм, тождественный на $\langle G \rangle_\Delta$ и нулевой на $\langle 1 \rangle$. Зададим симплициальные гомоморфизмы $f: \langle G \rangle \rightarrow G^+$ условием $f \circ j = q$ и $g: G^+ \rightarrow \langle G \rangle$ условием $g \circ q \circ i = d \circ j \circ i$. Имеем $f \circ g = \text{id}$. Пусть $D = \langle G \rangle_\Delta^2 \subset \langle G \rangle$, $k: D \rightarrow \langle G \rangle$ – включение. Зададим симплициальный гомоморфизм $l: \langle G \rangle \rightarrow D$ условием $k \circ l + g \circ f = d$. Имеем $l \circ k = \text{id}$. Изобразим построенные отображения на следующей диаграмме.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{i} & G & & \\
 & & \downarrow j & \searrow q & \\
 D & \xrightarrow{k} & \langle G \rangle & \xrightarrow{f} & G^+ \\
 & \nwarrow l & \swarrow g & &
 \end{array}$$

Группа D свободна. По теореме Фрейденшталя отображение $i: E \rightarrow G$ является $(2n-1)$ -связным. Так как $m \leq 2n-1$, то оно m -связно. Используя теорему Дольда–Тома, получаем, что симплициальный гомоморфизм $\langle i \rangle: \langle E \rangle \rightarrow \langle G \rangle$ является m -связным. Легко понять, что $(\langle i \rangle, k): \langle E \rangle \oplus D \rightarrow \langle G \rangle$ – изоморфизм. Поэтому группа D является m -связной.

Для $s \in \mathbb{N}$ введем симплициальную подгруппу $D^{(s)} \subset D$, равную $\langle G \rangle_\Delta^s$ при $s \geq 2$ и равную D при $s < 2$.

Разложение группы D . Пусть дано число $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Используя последнюю формулу в § 10, запишем разложение $D = D^2 \oplus \dots \oplus D^r$, в котором $\langle G \rangle_\Delta^s = D^s \oplus \dots \oplus D^r$, $s = 2, \dots, r$. (Имеем $D^s \cong \langle E^{\wedge s} \rangle_\Delta$ при $s < r$ и $D^r = \langle G \rangle_\Delta^r$.) Так как группа D свободна и m -связна, то группы D^s свободны и m -связны.

Дробление h . По лемме 14.1 для каждого $s = 2, \dots, r$ есть дробление $(h_z^s: D^s(\bar{z}) \rightarrow D^s(L))_{z \in L}$. Объединяя их, получаем дробление $(h_z: D(\bar{z}) \rightarrow D(L))_{z \in L}$. Имеем $h_z(D^{(s)}(\bar{z})) \subset D^{(s)}(L)$, $s \in \mathbb{N}$, $s \leq r$.

Симплициальный гомоморфизм X . Пусть $\tilde{G}$ – фигура группы G , $p: \tilde{G} \rightarrow G$ – проекция. По лемме 13.2 гомоморфизм p сюръективен. Поэтому для симплициального гомоморфизма $\langle p \rangle: \langle \tilde{G} \rangle \rightarrow \langle G \rangle$ имеем $\langle p \rangle(\langle \tilde{G} \rangle_\Delta^s) = \langle G \rangle_\Delta^s$, $s \in \mathbb{N}$. Применяя лемму 11.1 к каждой компоненте D^s разложения группы D , получаем симплициальный гомоморфизм $X: D \rightarrow \langle \tilde{G} \rangle$ со следующими свойствами:

- 1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & \langle \tilde{G} \rangle \\
 & \nearrow X|_{D(m)} & \downarrow \langle p \rangle \\
 D(m) & \xrightarrow{\text{включение}} & \langle G \rangle
 \end{array}$$

коммутативна;

- 2) $X(D^{(s)}) \subset \langle \tilde{G} \rangle_\Delta^s$, $s \in \mathbb{N}$, $s \leq r$.

Имеем $\text{im } X \subset \langle \tilde{G} \rangle_\Delta$.

Гомоморфизм V . Пусть $J: \langle G(L) \rangle \rightarrow \langle G \rangle(L)$ – сведение, $R: \langle \tilde{G} \rangle(L) \rightarrow \langle \tilde{G}(L) \rangle$ – реализация. Введем композицию

$$V: D(L) \xrightarrow{X_{\#}} \langle \tilde{G} \rangle(L) \xrightarrow{R} \langle \tilde{G}(L) \rangle \xrightarrow{\langle p_{\#} \rangle} \langle G(L) \rangle.$$

Имеем $\text{im } V \subset \langle G(L) \rangle_{\Delta}$.

ЛЕММА 15.1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & & \langle G(L) \rangle \\ & \nearrow V & \downarrow J \\ D(L) & \xrightarrow{k_{\#}} & \langle G \rangle(L) \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{J}: \langle \tilde{G}(L) \rangle \rightarrow \langle \tilde{G} \rangle(L)$ – сведение. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \langle \tilde{G} \rangle(L) & \xrightarrow{R} & \langle \tilde{G}(L) \rangle & \xrightarrow{\langle p_{\#} \rangle} & \langle G(L) \rangle \\ \uparrow X_{\#} & & \downarrow \tilde{J} & & \downarrow J \\ D(L) & \xrightarrow{X_{\#}} & \langle \tilde{G} \rangle(L) & \xrightarrow{\langle p \rangle_{\#}} & \langle G \rangle(L) \end{array}$$

коммутативна (используем лемму 13.4, учитывая, что $\text{im } X \subset \langle \tilde{G} \rangle_{\Delta}$). Имеем $J \circ V = \langle p \rangle_{\#} \circ X_{\#} = k_{\#}$ по свойству 1) гомоморфизма X .

ЛЕММА 15.2. Для $w \in D(L)$ выполнено $\Sigma(V(w)) \subset O_L(\sigma(w), 1)$.

Это утверждение следует из леммы 13.5.

ЛЕММА 15.3. Имеем $V(D^{(s)}(L)) \subset \langle G(L) \rangle_{\Delta}^s$, $s \in \mathbb{N}$, $s \leq r$.

Это утверждение следует из свойства 2) гомоморфизма X и лемм 13.6 и 9.1.

Отображения P_z, P . Для $z \in L$ введем отображение $P_z: G(K) \rightarrow \langle G(L) \rangle$, $P_z(u) = (V \circ h_z)(l \circ j \circ u \circ e|_{\bar{z}})$. Имеем $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_{\Delta}$, так как $\text{im } V \subset \langle \tilde{G}(L) \rangle_{\Delta}$; кроме того, $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$ (по определению дробления, лемме 15.2 и неравенству $b_1 \geq 2$).

Введем отображение $P: G(K) \rightarrow \langle G(L) \rangle$, $P(u) = V(l \circ j \circ u \circ e)$. Тогда

$$\sum_{z \in L} P_z(u) = P(u).$$

Гомоморфизм M . Введем аддитивный гомоморфизм $M: \langle G(K) \rangle \rightarrow \langle G(L) \rangle$,

$$M(\cdot u) = \sum_{Z \subset L: \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} \cdot u \circ e_Z \cdot \prod_{z \in Z} P_z(u).$$

Здесь и далее считаем, что порядок сомножителей под знаком $\prod$ определяется некоторым фиксированным порядком на L (впрочем, можно понять, что во всех формулах сомножители коммутируют).

ЛЕММА 15.4. Для $U \in \langle G(K) \rangle$ имеем $\theta(M(U)) \geq \min(\theta(U) + 1, \eta(U))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\theta(U) \geq s - 1$, $\eta(U) \geq s$, $s \in \mathbb{N}_+$, и покажем, что $\theta(M(U)) \geq s$. Возьмем множество $T \subset L$ с $\#T < s$ и покажем, что $M(U)|_T = 0$.

Рассмотрим случай $\varepsilon_L(T) \geq b_4$. Пусть $I = \{Z \subset L : \varepsilon_L(Z) \geq b_3\}$. Имеем

$$M('u')|_T = \sum_{Z \in I} (-1)^{\#Z} 'u \circ e_Z'|_T \prod_{z \in Z} P_z(u)|_T, \quad u \in G(K).$$

Множества $O_L(y, b_1)$, $y \in T$ (назовем их шариками), не пересекаются; расстояние (ρ_L) между симплексами разных шариков не меньше b_3 (так как $b_4 \geq 2b_1 + b_3$). Расстояние между симплексами одного шарика меньше b_3 , так как $b_3 \geq 2b_1$. Пусть I_0 – множество множеств $Z \subset L$, лежащих в объединении шариков и имеющих в каждом не более одного симплекса. Покажем, что сумму по $Z \in I$ можно заменить на сумму по $Z \in I_0$. Имеем $I_0 \subset I$. Если $Z \in I \setminus I_0$, то существует симплекс $z \in Z \setminus O_L(T, b_1)$; тогда $P_z(u)|_T = 0$, так как $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_\Delta$, а $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$, но $O_L(z, b_1) \cap T = \emptyset$. Поэтому соответствующее слагаемое равно нулю.

Пусть

$$I'_0 = \prod_{S \subset T} W_S,$$

где W_S – множество таких отображений $w: S \rightarrow L$, что $w(y) \in O_L(y, b_1)$, $y \in T$. Имеем биекцию $I'_0 \rightarrow I_0$, $(S, w) \mapsto w(S)$. Поэтому

$$M('u')|_T = \sum_{(S, w) \in I'_0} (-1)^{\#S} 'u \circ e_{w(S)}'|_T \prod_{y \in S} P_{w(y)}(u)|_T.$$

Пусть $t_y: G(\bar{y}) \rightarrow G_T$, $y \in T$, – канонический мономорфизм сомножителя в произведение. Покажем, что для $(S, w) \in I'_0$ выполнено

$$(u \circ e_{w(S)})|_T = \prod_{y \in T \setminus S} t_y(u \circ e|_{\bar{y}}).$$

Если $y \in S$, то $y \in O_L(w(y), b_1)$ и морфизм $e_{w(S)}$ посылает симплекс y в вершину полиэдра K . Тогда $u \circ e_{w(S)}|_{\bar{y}} = 1$, так как $G_0 = 1$. Если $y \in T \setminus S$, то $y \notin O_L(w(S), b_2)$ (так как $b_4 \geq b_1 + b_2$) и $e_{w(S)}|_{\bar{y}} = e|_{\bar{y}}$. Из сказанного выше следует требуемое равенство.

Для $(S, w) \in I'_0$, $y \in S$ имеем $P_{w(y)}(u)|_T = \langle t_y \rangle (P_{w(y)}(u)|_{\bar{y}})$. Это следует из того, что $\Sigma(P_{w(y)}(u)) \subset O_L(w(y), b_1)$, а $O_L(w(y), b_1) \cap T = \{y\}$, так как $b_4 \geq 2b_1$.

Итак,

$$\begin{aligned} M('u')|_T &= \sum_{(S, w) \in I'_0} (-1)^{\#S} \left(\prod_{y \in T \setminus S} 't_y(u \circ e|_{\bar{y}})' \right) \left(\prod_{y \in S} \langle t_y \rangle (P_{w(y)}(u)|_{\bar{y}}) \right) \\ &= \sum_{S \subset T} (-1)^{\#S} \left(\prod_{y \in T \setminus S} 't_y(u \circ e|_{\bar{y}})' \right) \left(\sum_{w \in W_S} \prod_{y \in S} \langle t_y \rangle (P_{w(y)}(u)|_{\bar{y}}) \right) \\ &= \sum_{S \subset T} (-1)^{\#S} \left(\prod_{y \in T \setminus S} \langle t_y \rangle ('u \circ e'|_{\bar{y}}) \right) \left(\prod_{y \in S} \sum_{z \in O_L(y, b_1)} \langle t_y \rangle (P_z(u)|_{\bar{y}}) \right) \end{aligned}$$

$$= \prod_{y \in T} \langle t_y \rangle \left(\langle u \circ e' \rangle|_{\bar{y}} - \sum_{z \in O_L(y, b_1)} P_z(u)|_{\bar{y}} \right).$$

В последней сумме область суммирования можно расширить до $z \in L$, потому что при $z \in L \setminus O_L(y, b_1)$ имеем $P_z(u)|_{\bar{y}} = 0$, так как $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_\Delta$, а $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$, но $O_L(z, b_1) \cap \bar{y} = \emptyset$ при таком z . Получаем

$$M(\langle u' \rangle)|_T = \prod_{y \in T} \langle t_y \rangle (\langle u \circ e' \rangle|_{\bar{y}} - P(u)|_{\bar{y}}).$$

Пусть $J_y: \langle G(\bar{y}) \rangle \rightarrow \langle G(\bar{y}) \rangle$, $y \in T$, – сведение. Очевидно, что это изоморфизм. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \langle G(L) \rangle & \xrightarrow{?|_{\bar{y}}} & \langle G(\bar{y}) \rangle \\ & \nearrow V & \downarrow J & & \downarrow J_y \\ D(L) & \xrightarrow{k\#} & \langle G \rangle(L) & \xrightarrow{?|_{\bar{y}}} & \langle G \rangle(\bar{y}) \end{array}$$

(используем лемму 15.1). Имеем

$$\begin{aligned} J_y(\langle u \circ e' \rangle|_{\bar{y}} - P(u)|_{\bar{y}}) &= J_y(\langle u \circ e' \rangle|_{\bar{y}} - V(l \circ j \circ u \circ e)|_{\bar{y}}) \\ &= j \circ u \circ e|_{\bar{y}} - k \circ l \circ j \circ u \circ e|_{\bar{y}} = 1 + g \circ f \circ j \circ u \circ e|_{\bar{y}} = 1 + g \circ q \circ u \circ e|_{\bar{y}}. \end{aligned}$$

Введем гомоморфизм $a_y: G_K \rightarrow \langle G_T \rangle$ (в аддитивную группу), $a_y(v) = (\langle t_y \rangle \circ J_y^{-1})(g \circ q \circ v \circ e)_y$. Имеем

$$M(\langle u' \rangle)|_T = \prod_{y \in T} (1 + a_y(u|_K)).$$

Так как $\eta(U) > \#T$, то по лемме 8.1 получаем, что $M(U)|_T = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_L(T) < b_4$. Есть разные симплексы $y_0, y_1 \in T$ с $\rho_L(y_0, y_1) < b_4$. Для каждого $y \in T \setminus \{y_1\}$ рассмотрим симплекс $x \in K$, натянутый на множество $e(O_L(y, b_5))$. Пусть $S \subset K$ – множество этих симплексов. Имеем $\#S < s - 1$. Для каждого $y \in T$ существует такой $y' \in T \setminus \{y_1\}$, что $O_L(y, 2b_2) \subset O_L(y', b_5)$: можно положить y' равным y_0 при $y = y_1$ и y при $y \neq y_1$ (используем то, что $b_5 \geq 2b_2 + b_4$). Поэтому для любого $y \in T$ существует такой $x \in S$, что $e(O_L(y, 2b_2)) \subset \bar{x}$. Пусть $e' = e|_{\overline{O_L(T, b_1)} \rightarrow \bar{S}}$ (используем то, что $b_1 \leq 2b_2$).

Возьмем множество $Z \subset L$, $\varepsilon_L(Z) \geq b_3$. Покажем, что $e_Z(\bar{T}) \subset \bar{S}$. Достаточно проверить, что $e_Z(y) \in \bar{S}$ для $y \in T$. Если $y \notin O_L(Z, b_2)$, то $e_Z(y) = e(y) \in \bar{S}$. В противном случае $y \in O_L(z, b_2)$ для какого-то $z \in Z$ и $e_Z(y) = e_z(y) \in \bar{x}$, где $x \in K$ – симплекс, натянутый на $e(O_L(z, b_2))$. Но $e(O_L(z, b_2)) \subset e(O_L(y, 2b_2))$, поэтому $e_Z(y) \in \bar{S}$. Пусть $\tilde{e}_Z = e_Z|_{\bar{T} \rightarrow \bar{S}}$.

Введем аддитивный гомоморфизм $M: \langle G(\bar{S}) \rangle \rightarrow \langle G(\bar{T}) \rangle$,

$$\widetilde{M}(\langle \tilde{u} \rangle) = \sum_{Z \subset O_L(T, b_1): \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} \langle \tilde{u} \circ \tilde{e}_Z \rangle \prod_{z \in Z} (V \circ h_z)(l \circ j \circ \tilde{u} \circ e'|_{\bar{z}})|_{\bar{T}}.$$

Покажем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle G(K) \rangle & \xrightarrow{M} & \langle G(L) \rangle \\ ? \downarrow |_{\bar{S}} & & ? \downarrow |_{\bar{T}} \\ \langle G(\bar{S}) \rangle & \xrightarrow{\widetilde{M}} & \langle G(\bar{T}) \rangle \end{array}$$

коммутативна. Имеем

$$M('u')|_{\bar{T}} = \sum_{Z \subset L: \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} 'u \circ e_Z'|_{\bar{T}} \prod_{z \in Z} P_z(u)|_{\bar{T}}.$$

Слагаемые с $Z \not\subset O_L(T, b_1)$ равны нулю (если $z \in Z \setminus O_L(T, b_1)$, то $P_z(u)|_{\bar{T}} = 0$, так как $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_{\Delta}$, а $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$, но $O_L(z, b_1) \cap \bar{T} = \emptyset$). Получаем

$$\begin{aligned} M('u')|_{\bar{T}} &= \sum_{Z \subset O_L(T, b_1): \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} 'u \circ e_Z'|_{\bar{T}} \prod_{z \in Z} (V \circ h_z)(l \circ j \circ u \circ e|_{\bar{z}})|_{\bar{T}} \\ &= \widetilde{M}('u'|_{\bar{S}}). \end{aligned}$$

Так как $\theta(U) > \#S$, то $U|_S = 0$. Значит, $U|_{\bar{S}} = 0$. Получаем $M(U)|_{\bar{T}} = \widetilde{M}(U|_{\bar{S}}) = 0$. Значит, $M(U)|_T = 0$.

ЛЕММА 15.5. Для $U \in \langle G(K) \rangle$ имеем $\eta(M(U)) \geq \min(\eta(U), r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем аддитивный гомоморфизм $N: \langle G_K \rangle \rightarrow \langle G_L \rangle$,

$$N('v') = \sum_{Z \subset L: \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} 'v \circ e_Z' \prod_{z \in Z} (V \circ h_z)((l \circ j \circ v \circ e)_z)|_L.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle G(K) \rangle & \xrightarrow{M} & \langle G(L) \rangle \\ ? \downarrow |_K & & ? \downarrow |_L \\ \langle G_K \rangle & \xrightarrow{N} & \langle G_L \rangle \end{array}$$

коммутативна. Достаточно показать, что гомоморфизм N является r -строгим. Для $z \in L$ введем гомоморфизм $t_z: G_K \rightarrow G(\bar{z})$, $t_z(v) = (v \circ e)_z$, и аддитивный гомоморфизм $B_z: \langle G(\bar{z}) \rangle \rightarrow \langle G(L) \rangle$, $B_z('v') = (V \circ h_z)(l \circ j \circ v)$. Имеем гомоморфизмы $e_Z^{\#}: G_K \rightarrow G_L$ и $?|_L: G(L) \rightarrow G_L$. Имеем для $v \in G_K$

$$N('v') = \sum_{Z \subset L: \varepsilon_L(Z) \geq b_3} (-1)^{\#Z} \langle e_Z^{\#}('v') \rangle \prod_{z \in Z} (B_z \circ \langle t_z \rangle)('v')|_L.$$

В силу лемм 9.1 и 9.2 достаточно показать, что гомоморфизмы B_z являются r -строгими. Гомоморфизм B_z равен композиции

$$\langle G(\bar{z}) \rangle \xrightarrow{J_z} \langle G'(\bar{z}) \rangle \xrightarrow{l_{\#}} D(\bar{z}) \xrightarrow{h_z} D(L) \xrightarrow{V} \langle G(L) \rangle,$$

где J_z – сведение. Для $s \in \mathbb{N}$ имеем: $J_z(\langle G(\bar{z}) \rangle_\Delta^s) = \langle G \rangle_\Delta^s(\bar{z})$, $l_\#(\langle G \rangle_\Delta^s(\bar{z})) = D^{(s)}(\bar{z})$ (так как l тождественен на D), $h_z(D^{(s)}(\bar{z})) \subset D^{(s)}(L)$ при $s \leq r$ (свойство дробления h), $V(D^{(s)}(L)) \subset \langle G(L) \rangle_\Delta^s$ при $s \leq r$ по лемме 15.3. Таким образом, $B_z(\langle G(\bar{z}) \rangle_\Delta^s) \subset \langle G(L) \rangle_\Delta^s$ при $s \leq r$, что и требовалось доказать.

Пусть $Q = |K|$ ($= |L|$).

ЛЕММА 15.6. Для $U \in \langle G(K) \rangle$ имеем $[[M(U)]] = [[U]]$ в кольце $\langle [Q], [G] \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $u \in G(K)$, $z \in L$. Имеем $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_\Delta$. По построению отображения P_z все сечения, входящие в формальную сумму $P_z(u)$, поднимаются в $\tilde{G}$. По лемме 13.1 пространство $|\tilde{G}|$ стягиваемо. Поэтому $[[P_z(u)]] = 0$. Применяя кольцевой гомоморфизм $[[?]]: \langle G(L) \rangle \rightarrow \langle [Q], [G] \rangle$ к равенству, при помощи которого был введен гомоморфизм M , получаем $[[M('u')]] = [[('u' \circ e')]] = [[('u')]]$, так как отображение $|e|: Q \rightarrow Q$ гомотопно тождественному отображению.

§ 16. Основная процедура

Пусть K – полиэдр, $\dim K \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, E – $(n-1)$ -связное симплицальное множество с одной вершиной, $n \in \mathbb{N}$, причем $m \leq 2n-1$. Пусть $Q = |K|$, $G = FE$.

ЛЕММА 16.1. Пусть дан элемент $U \in \langle G(K) \rangle$ с $\eta(U) \geq s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда существуют полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L) \rangle$ с $\theta(V) \geq s$ и $[[V]] = [[U]]$ в $\langle [Q], [G] \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить искомую пару (L, V) , возьмем пару (K, U) и s раз применим пару (Δ^c, M) операций § 15. Величину r берем не меньшей s . Указанные выше свойства L и V следуют из лемм 15.4–15.6.

§ 17. Функция θ : топологический вариант

Предположим, что даны пространства X, Y . Пусть

$$\theta(A) = \inf\{\#V : \text{конечное } V \subset X, A|_V \neq 0\} \in \hat{\mathbb{N}}$$

для $A \in \langle C(X, Y) \rangle$.

Пусть даны еще пространства X', Y' и непрерывные отображения $g: X' \rightarrow X$, $h: Y \rightarrow Y'$. Введем отображение $t: C(X, Y) \rightarrow C(X', Y')$, $t(a) = h \circ a \circ g$. Имеем гомоморфизм $\langle t \rangle: \langle C(X, Y) \rangle \rightarrow \langle C(X', Y') \rangle$.

ЛЕММА 17.1. Для $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ выполнено $\theta(\langle t \rangle(A)) \geq \theta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем конечное $V' \subset X'$, $\#V' < \theta(A)$, и покажем, что $\langle t \rangle(A)|_{V'} = 0$. Пусть $V = g(V') \subset X$. Имеем $\#V < \theta(A)$. Поэтому $A|_V = 0$. Пусть $\tilde{g} = g|_{V' \rightarrow V}$. Введем отображение $\tilde{t}: C(V, Y) \rightarrow C(V', Y')$, $\tilde{t}(\tilde{a}) = h \circ \tilde{a} \circ \tilde{g}$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C(X, Y) & \xrightarrow{t} & C(X', Y') \\ ?|_V \downarrow & & \downarrow ?|_{V'} \\ C(V, Y) & \xrightarrow{\tilde{t}} & C(V', Y') \end{array}$$

коммутативна. Имеем $\langle t \rangle(A)|_{V'} = \langle \tilde{t} \rangle(A|_V) = 0$.

Характеризация порядка. Пусть даны абелева группа U и отображение $f: [X, Y] \rightarrow U$. Введем гомоморфизм $\bar{f}: \langle [X, Y] \rangle \rightarrow U$, $\bar{f}('w') = f(w)$.

ЛЕММА 17.2. *Условие $\text{ord } f \leq r$, $r \in \mathbb{N}$, равносильно тому, что $\bar{f}([A]) = 0$ для любого $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ с $\theta(A) > r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \neq \emptyset$ (иначе утверждение леммы тривиально). Пусть E_r, I_r, D_r такие же, как в § 1 (первый абзац). Введем гомоморфизм $h: \langle C(X, Y) \rangle \rightarrow D_r$, $h('a') = I_r(a)$. Он сюръективен. Покажем, что для $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ условия $h(A) = 0$ и $\theta(A) > r$ равносильны.

Пусть $\theta(A) > r$. Возьмем $z = (x_1, y_1, \dots, x_r, y_r) \in (X \times Y)^r$ и покажем, что $h(A)(z) = 0$. Пусть $V = \{x_1, \dots, x_r\} \subset X$. Так как $\#V < \theta(A)$, то $A|_V = 0$. Введем гомоморфизм $k: \langle C(V, Y) \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$, заданный на образующих правилом⁴ $k('a') = [\tilde{a}(x_s) = y_s, s = 1, \dots, r]$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle C(X, Y) \rangle & \xrightarrow{h} & D_r \\ ?|_V \downarrow & & \downarrow ?(z) \\ \langle C(V, Y) \rangle & \xrightarrow{k} & \mathbb{Z} \end{array}$$

коммутативна. Имеем $h(A)(z) = k(A|_V) = 0$.

Пусть $h(A) = 0$. Покажем, что $\theta(A) > r$. Возьмем $V \subset X$ с $\#V < r$ и проверим, что $A|_V = 0$. Можно считать, что $V \neq \emptyset$ или $r = 0$ (иначе добавим к V одну точку, что можно сделать, так как $X \neq \emptyset$). Тогда $V = \{x_1, \dots, x_r\}$ для каких-то $x_1, \dots, x_r \in X$. Пусть $i: \langle C(V, Y) \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^{C(V, Y)}$ – стандартный мономорфизм: $i('a')(\tilde{b}) = [\tilde{a} = \tilde{b}]$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in C(V, Y)$. Введем гомоморфизм $q: D_r \rightarrow \mathbb{Z}^{C(V, Y)}$, $q(e)(\tilde{b}) = e(x_1, \tilde{b}(x_1), \dots, x_r, \tilde{b}(x_r))$, $\tilde{b} \in C(V, Y)$, $e \in D_r$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle C(X, Y) \rangle & \xrightarrow{h} & D_r \\ ?|_V \downarrow & & \downarrow q \\ \langle C(V, Y) \rangle & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}^{C(V, Y)} \end{array}$$

коммутативна. Имеем $i(A|_V) = q(h(A)) = 0$, откуда $A|_V = 0$.

Равносильность проверена. Введем гомоморфизм $\hat{f}: \langle C(X, Y) \rangle \rightarrow U$, $\hat{f}(A) = \bar{f}([A])$. Существование гомоморфизма $l: D_r \rightarrow U$ с $l \circ h = \hat{f}$ равносильно условию $\hat{f}|_{\ker h} = 0$, т.е. тому, что $\bar{f}([A]) = 0$ для любого $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ с $\theta(A) > r$.

Отсюда вытекает требуемое, так как порядок инварианта f равен инфимуму тех r , для которых существует такой гомоморфизм l .

§ 18. Геометрическая реализация и симплициальная аппроксимация

Пусть K – полиэдр, E – симплициальное множество и $Q = |K|$.

ЛЕММА 18.1. *Для $U \in \langle E(K) \rangle$ имеем $\theta(|U|) = \theta(U)$.*

ЛЕММА 18.2. *Пусть дан элемент $B \in \langle C(Q, |E|) \rangle$. Тогда существуют полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle E(L) \rangle$ с $\theta(V) \geq \theta(B)$ и $||V|| = [B]$ в $\langle [Q, |E|] \rangle$.*

⁴Здесь и ниже [истина] = 1, [ложь] = 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдутся такие конечное множество I , отображение $k : I \rightarrow C(Q, |E|)$ и элемент $g \in \langle I \rangle$, что $\langle k \rangle(g) = B$. Пусть $b_i = k(i)$, $i \in I$. Для $q \in Q$ введем эквивалентность $R_q = \{(i, j) : b_i(q) = b_j(q)\}$ на I . Пусть для конечного $W \subset Q$

$$R_W = \bigcap_{q \in W} R_q.$$

Отображение $i \mapsto b_i|_W$ подчинено эквивалентности R_W (т.е. постоянно на ее классах). Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{k} & C(Q, |E|) \\ p_W \downarrow & & \downarrow ?|_W \\ I/R_W & \xrightarrow{k_W} & C(W, |E|) \end{array}$$

где p_W – проекция. Отображение k_W инъективно. Имеем $\langle k_W \rangle(\langle p_W \rangle(g)) = \langle k \rangle(g)|_W = B|_W$. Если $\#W < \theta(B)$, то $B|_W = 0$ и, значит, $\langle p_W \rangle(g) = 0$.

Имеем непрерывное отображение $b = (b_i)_{i \in I} : Q \rightarrow |E|^I$. Пусть $h : |E|^I \rightarrow |E|^I$ – каноническая непрерывная биекция. Так как I конечно, а пространство Q хаусдорфово и компактно, то отображение $c = h^{-1} \circ b : Q \rightarrow |E|^I$ непрерывно.

Каждой эквивалентности R на I соответствует симплициальное подмножество $D(R) \subset |E|^I$, $D(R)_n = \{(e_i)_{i \in I} \in E_n^I : (i, j) \in R \Rightarrow e_i = e_j\}$ (диагональ). Для $q \in Q$ имеем $c(q) \in D(R_q) \subset |E|^I$. Введем симплициальное подмножество $M \subset |E|^I$,

$$M = \bigcup_{q \in Q} D(R_q).$$

Имеем $c(Q) \subset |M| \subset |E|^I$. Пусть $c' = c|_{Q \rightarrow |M|}$. В силу теоремы о симплициальной аппроксимации существуют полиэдр L с телом Q и такое сечение $u' \in M(L)$, что отображение $|u'| : Q \rightarrow |M|$ гомотопно отображению c' . Пусть $u \in E^I(L)$ – композиция сечения u' и включения $M \rightarrow |E|^I$. Имеем $u = (u_i)_{i \in I}$, $u_i \in E(L)$. Отображение $|u_i| : Q \rightarrow |E|$ гомотопно отображению b_i . Введем отображение $l : I \rightarrow E(L)$, $l(i) = u_i$. Пусть $V = \langle l \rangle(g)$. Имеем $[|V|] = [B]$.

Для $y \in L$, $\dim y = s$, имеем $u_s(y) \in M_s$, т.е. найдется такая точка $q = q_y \in Q$, что $u_s(y) \in D(R_q)_s$, т.е. $u_i|_{\bar{y}} = u_j|_{\bar{y}}$ при $(i, j) \in R_q$, т.е. отображение $i \mapsto u_i|_{\bar{y}}$ подчинено эквивалентности R_q .

Возьмем множество $T \subset L$. Пусть $W = \{q_y : y \in T\}$. Тогда $\#W \leq \#T$. Отображение $i \mapsto u_i|_T$ подчинено эквивалентности R_W . Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{l} & E(L) \\ p_W \downarrow & & \downarrow ?|_T \\ I/R_W & \xrightarrow{l_T} & E_T \end{array}$$

Имеем $V|_T = \langle l \rangle(g)|_T = \langle l_T \rangle(\langle p_W \rangle(g))$. Если $\#T < \theta(B)$, то $\#W < \theta(B)$, $\langle p_W \rangle(g) = 0$ и $V|_T = 0$. Таким образом, $\theta(V) \geq \theta(B)$.

§ 19. Подгруппы в $\langle [Q, |G|] \rangle$

Пусть даны полиэдральное тело Q , $\dim Q \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, и $(n-1)$ -связное симплициальное множество E с одной вершиной, $n \in \mathbb{N}$, причем $m \leq 2n-1$. Пусть $G = FE$. Введем подгруппы $P, M_s, J_s \subset \langle C(Q, |G|) \rangle$, $s \in \mathbb{N}$: пусть $P = \langle C(Q, |G_{(m)}|) \rangle$ (считаем $C(Q, |G_{(m)}|) \subset C(Q, |G|)$), $M_s = \{B : \theta(B) \geq s\}$, J_s порождена всеми элементами вида $(b_1' - 1) \cdots (b_k' - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $b_l \in C(Q, |\gamma_{s_l} G|) \subset C(Q, |G|)$ и $s_1 + \cdots + s_k \geq s$. (M_s и J_s – идеалы; гипотеза: $M_s \subset J_s$.) Для подгруппы $S \subset \langle C(Q, |G|) \rangle$ обозначим через $[S] \subset \langle [Q, |G|] \rangle$ ее образ при гомоморфизме $[?]: \langle C(Q, |G|) \rangle \rightarrow \langle [Q, |G|] \rangle$.

ЛЕММА 19.1. Для $s \in \mathbb{N}$ имеем $[M_s] = [P \cap M_s] = [J_s]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение $[M_s] \subset [J_s]$. Возьмем элемент $B \in M_s$. Тогда $\theta(B) \geq s$. По лемме 18.2 существуют полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L) \rangle$ с $\theta(V) \geq s$ и $[|V|] = [B]$. Достаточно показать, что $|V| \in J_s$. По лемме 7.2 выполнено $\eta(V) \geq s$. Пусть $I_s \subset \langle G(L) \rangle$, как и в § 7, – подгруппа, порожденная всеми элементами вида $(v_1' - 1) \cdots (v_k' - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $v_l \in (\gamma_{s_l} G)(L) \subset G(L)$ и $s_1 + \cdots + s_k \geq s$. В силу леммы 7.1 выполнено $V \in I_s$. Очевидно, $|V| \in J_s$.

Докажем включение $[P \cap M_s] \supset [J_s]$. Возьмем элемент $B \in \langle C(Q, |G|) \rangle$, $B = (b_1' - 1) \cdots (b_k' - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $b_l \in C(Q, |\gamma_{s_l} G|) \subset C(Q, |G|)$ и $s_1 + \cdots + s_k \geq s$. Такие элементы порождают подгруппу J_s , поэтому достаточно показать, что $[B] \in [P \cap M_s]$. Пусть K – какой-нибудь полиэдр с телом Q . Так как $\gamma_s G$ – множества Кана, то найдутся сечения $u_l \in (\gamma_{s_l} G)(K)$ с $[|u_l|] = [b_l]$ в $[Q, |G|]$. Пусть $U = (u_1' - 1) \cdots (u_k' - 1) \in \langle G(L) \rangle$. Имеем $[|U|] = [B]$ в $\langle [Q, |G|] \rangle$. В силу леммы 7.1 выполнено $\eta(U) \geq s$. По лемме 16.1 существуют полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L) \rangle$ с $\theta(V) \geq s$ и $[|V|] = [|U|]$ в $\langle [Q, |G|] \rangle$. Очевидно, $|V| \in P$. В силу леммы 18.1 выполнено $\theta(|V|) \geq s$. Таким образом, $[B] = [|V|]$ и $|V| \in P \cap M_s$.

§ 20. Переход от $[Q, |G|]$ к $[X, Y]$

Пусть даны конечное клеточное пространство X , $\dim X \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, и $(n-1)$ -связное, клеточное пространство Y , $n \in \mathbb{N}$, причем $m < 2n-1$. Введем подгруппы $L_s \subset \langle C(X, Y) \rangle$, $s \in \mathbb{N}$: $L_s = \{A : \theta(A) \geq s\}$. Пусть $B = (B_s)_{s=1}^\infty$ – фильтрация Кёртиса группы $[X, Y]$. Для $s \in \mathbb{N}$ введем подгруппу $H_s \subset \langle [X, Y] \rangle$, порожденную всеми элементами вида $(w_1' - 1) \cdots (w_k' - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, $w_l \in B_{s_l}$ и $s_1 + \cdots + s_k \geq s$. (Это идеал.) Для подгруппы $R \subset \langle C(X, Y) \rangle$ пусть $[R] \subset \langle [X, Y] \rangle$ – ее образ при гомоморфизме $[?]: \langle C(X, Y) \rangle \rightarrow \langle [X, Y] \rangle$.

ЛЕММА 20.1. Для $s \in \mathbb{N}$ имеем $[L_s] = H_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют полиэдральное тело Q , $\dim Q \leq m$, и гомотопическая эквивалентность $g: Q \rightarrow X$. Пусть $g': X \rightarrow Q$ – гомотопически обратное отображение. Существуют симплициальное множество E с одной вершиной и гомотопическая эквивалентность $k: Y \rightarrow |E|$. Пусть $G = FE$, $i: E \rightarrow G$ – каноническое симплициальное отображение. По теореме Фрейден-таля оно $(2n-1)$ -связно. Отображение $h = |i| \circ k: Y \rightarrow |G|$ тоже $(2n-1)$ -связно. Так как $m \leq 2n-1$, то найдется такое отображение $h': |G_{(m)}| \rightarrow Y$, что отображение $h \circ h'$ гомотопно включению $|G_{(m)}| \rightarrow |G|$. Введем отображение

$t: C(X, Y) \rightarrow C(Q, |G|)$, $t(a) = h \circ a \circ g$. Так как $m < 2n - 1$, оно индуцирует изоморфизм $\bar{t}: [X, Y] \rightarrow [Q, |G|]$. Введем отображение $t': C(Q, |G_{(m)}|) \rightarrow C(X, Y)$, $t'(b) = h' \circ b \circ g'$. Для $b \in C(Q, |G_{(m)}|) \subset C(Q, |G|)$ имеем $[t'(b)] = t^{-1}([b])$. Нетрудно понять, что

$$t(B_s) = \{[b] \in [Q, |G|] : b \in C(Q, |\gamma_s G|) \subset C(Q, |G|)\}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Пусть $P, M_s, J_s \subset \langle C(Q, |G|) \rangle$ как и в § 19 (см. первый абзац). Имеем гомоморфизмы $\langle t \rangle: \langle C(X, Y) \rangle \rightarrow \langle C(Q, |G|) \rangle$ и $\langle t' \rangle: P = \langle C(Q, |G_{(m)}|) \rangle \rightarrow \langle C(X, Y) \rangle$. В силу леммы 17.1 выполнено $\langle t \rangle(L_s) \subset M_s$ и $\langle t' \rangle(P \cap M_s) \subset L_s$. Имеем кольцевой изоморфизм $\langle \bar{t} \rangle: \langle [X, Y] \rangle \rightarrow \langle [Q, |G|] \rangle$. Из (1) следует, что $\langle \bar{t} \rangle(H_s) = [J_s]$. Используя лемму 19.1, получаем, что $\langle \bar{t} \rangle([L_s]) = [\langle t \rangle(L_s)] \subset [M_s] = [J_s] = \langle \bar{t} \rangle(H_s)$, откуда $[L_s] \subset H_s$ и $[L_s] \supset [\langle t' \rangle(P \cap M_s)] = \langle \bar{t}^{-1} \rangle([P \cap M_s]) = \langle \bar{t} \rangle^{-1}([J_s]) = H_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Введем гомоморфизм $\bar{f}: \langle [X, Y] \rangle \rightarrow U$, $\bar{f}('w') = \bar{f}(w)$. В силу леммы 17.2 условие $\text{ord } f < s$, $s \in \mathbb{N}_+$, равносильно условию $\bar{f}[L_s] = 0$. Очевидно, что условие $\deg_B f < s$ равносильно условию $\bar{f}H_s = 0$. Но $[L_s] = H_s$ по лемме 20.1.

Список литературы

- [1] E. B. Curtis, “Some relations between homotopy and homology”, *Ann. of Math.* (2), **82**:3 (1965), 386–413.
- [2] С. С. Подкорытов, “Об отображениях сферы в односвязное пространство”, *Геометрия и топология*. 9, Зап. научн. сем. ПОМИ, **329**, ПОМИ, СПб., 2005, 159–194; англ. пер.: S. S. Podkorytov, “Mappings of the sphere to a simply connected space”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **140**:4 (2007), 589–610.
- [3] С. С. Подкорытов, “Альтернативное доказательство слабой формы теоремы Серра”, *Геометрия и топология*. 4, Зап. научн. сем. ПОМИ, **261**, ПОМИ, СПб., 1999, 210–221; англ. пер.: S. S. Podkorytov, “An alternative proof of a weak form of Serre’s theorem”, *J. Math. Sci. (New York)*, **110**:4 (2002), 2875–2881.
- [4] С. С. Подкорытов, “Порядок функции на группе Брушлинского”, *Геометрия и топология*. 4, Зап. научн. сем. ПОМИ, **261**, ПОМИ, СПб., 1999, 222–228; англ. пер.: S. S. Podkorytov, “Order of a function on the Bruschlinsky group”, *J. Math. Sci. (New York)*, **110**:4 (2002), 2882–2885.
- [5] A. Dold, R. Thom, “Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte”, *Ann. of Math.* (2), **67**:2 (1958), 239–281.
- [6] P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progr. Math., **174**, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [7] П. Габриель, М. Цисман, *Категории частных и теория гомотопий*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.
- [8] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1965.
- [9] I. B. S. Passi, *Group rings and their augmentation ideals*, Lect. Notes Math., **715**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

С. С. Подкорытов (S. S. Podkorytov)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: ssp@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

25.02.2010 и 11.01.2011