Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Лепский, Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 109–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:54:15

УДК 517.938.5+514.756.4

Т. А. Лепский

Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени

Изучаются комплексные гамильтоновы системы с одной степенью свободы на $\mathbb{C}^2$ со стандартной симплектической структурой $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ и полиномиальной функцией Гамильтона $f = z^2 + P_n(w)$, $n = 1, 2, 3, 4$. Две гамильтоновы системы $(M_i, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}, i}, H_i = \operatorname{Re} f_i)$, $i = 1, 2$, называют гамильтоново эквивалентными, если существует комплексный симплектоморфизм $M_1 \rightarrow M_2$, переводящий векторное поле $\operatorname{sgrad} H_1 \rightarrow \operatorname{sgrad} H_2$. В работе описаны классы гамильтоновой эквивалентности систем в случае $n = 1, 2, 3, 4$, определена пополненная система при $n = 3, 4$ и доказана ее интегрируемость по Лиувиллю как вещественной гамильтоновой системы. Ограничением вещественных координат действие-угол, определенных для пополненной системы в окрестности любого неособого слоя, получаются вещественные канонические координаты для исходной системы.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, гамильтонова эквивалентность систем, неполнота потоков гамильтоновых полей, пополненная гамильтонова система, переменные действие-угол.

§ 1. Введение

Предположим, что дана интегрируемая гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) (см. определение 1) с первыми интегралами $f_1, \dots, f_n$. Тогда возникает отображение момента $\Phi = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ и слоение Лиувилля, слоями которого являются множества уровня $\Phi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В том случае, когда векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ являются полными, применима теорема Лиувилля (см. [1]), описывающая топологию неособого слоя $\Phi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, слоение в окрестности компактного неособого слоя, координаты действие-угол в окрестности компактного неособого слоя. Общая задача нахождения аналога теоремы Лиувилля в случае интегрируемых гамильтоновых систем с неполными векторными полями $\operatorname{sgrad} f_i$ была поставлена А. Т. Фоменко. А. Т. Фоменко и А. И. Шафаревич предложили пример интегрируемой гамильтоновой системы с неполными полями $\operatorname{sgrad} f_i$: $(\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2(z, w), \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w)))$ с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$, где $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфная функция двух комплексных переменных. Также рассматривались алгебраические системы с неполными векторными полями (см. [2]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы развития научного потенциала высшей школы (грант № РНП-2.1.1.3704) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.11.5213).

В настоящей работе развиваются методы, предложенные в работах [3]–[9]. Описаны классы гамильтоновой эквивалентности систем с комплекснозначными полиномиальными гамильтонианами $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ в случае $n = 1, 2, 3, 4$ (см. определение 6, теоремы 1, 2, 4, 8 и лемму 7), определена пополненная система при $n = 3, 4$ (см. определения 8, 13, 15 и теоремы 6, 7, 10, 11) и доказана ее интегрируемость по Лиувиллю как вещественной гамильтоновой системы (см. следствия 5, 8 и теоремы 1, 3). Ограничением вещественных координат действие-угол, определенных на фазовом пространстве пополненной системы в окрестности любого неособого слоя, на исходное фазовое пространство $\mathbb{C}^2(z, w)$ получаются вещественные канонические координаты действие-угол исходной системы (см. следствия 6 и 9).

Автор выражает глубокую признательность А. Т. Фоменко за постановку задачи и помощь в написании работы. Автор искренне благодарен А. Т. Фоменко и А. И. Шафаревичу за указание на богатый класс интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками. Особую благодарность автор выражает Е. А. Кудрявцевой за огромный труд, вложенный ею в эту работу; более того, фактически она является соавтором настоящей статьи.

§ 2. Основные понятия и утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Гамильтоновой системой* называется тройка (M^{2n}, ω, H) , где M^{2n} – гладкое многообразие, ω – симплектическая структура на M^{2n} , $H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая вещественнозначная функция, называемая гамильтонианом. Система называется *интегрируемой*, если существует набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, называемых *первыми интегралами*, такой, что выполнены следующие условия:

- 1) набор $f_1, \dots, f_n$ функционально независим на M^{2n} , т.е. $df_1, \dots, df_n$ линейно независимы в каждой точке всюду плотного подмножества в M^{2n} и $f_1 = H$;
- 2) при любых $i, j = 1, \dots, n$ функции f_i и f_j находятся в инволюции относительно симплектической структуры ω , т.е.

$$\{f_i, f_j\} = \omega^{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^l} = 0$$

в локальных координатах $x_1, \dots, x_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторным полем *косой градиент* функции $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется поле $\text{sgrad } f$ такое, что для любой функции $g: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено соотношение $\{f, g\} = \text{sgrad } g(f)$. В локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ векторное поле $\text{sgrad } f$ имеет вид $(\text{sgrad } f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

С каждой гамильтоновой системой связано уравнение Гамильтона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Уравнением Гамильтона* гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) называется дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = \text{sgrad } H|_{x(t)}$, где $t \in I$ – параметр в некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Если гамильтонова система является интегрируемой и все решения уравнения Гамильтона существуют глобально, т.е. допускают продолжение параметра t на $\mathbb{R}$, то система называется *интегрируемой по Лиувиллю* или *вполне интегрируемой*.

Описание невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем см. в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Слоем (или листом) интегрируемой гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) с первыми интегралами $f_1, \dots, f_n$ называется компонента связности подмножества $T_{\xi_1, \dots, \xi_n} = \{x \in M^{2n} \mid f_1(x) = \xi_1, \dots, f_n(x) = \xi_n\}$. Слой $T_{\xi_1, \dots, \xi_n}$ называется *неособым*, если в каждой его точке $df_1, \dots, df_n$ линейно независимы. Отображение $\Phi: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi: x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ называется *отображением момента*. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma_{f_1, \dots, f_n} \subset \mathbb{R}^n$ называется множество критических значений отображения момента.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Аналогично определяются комплексная $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(M^{2n}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ и векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$, когда на M^{2n} введена комплексная структура, $\omega_{\mathbb{C}}$ – замкнутая, невырожденная комплекснозначная дифференциальная 2-форма на M^{2n} над $\mathbb{C}$, $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ – комплексно дифференцируемая функция.

Важный класс комплексных гамильтоновых систем. Пусть $M = \mathbb{C}^2(z, w)$. Рассмотрим четырехмерное многообразие $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и диффеоморфизм

$$\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \mathbb{C}^2(z, w), \quad (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (z, w).$$

На $\mathbb{R}^4$ введем симплектическую структуру $\omega = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$, заметим, что $\omega = \text{Re}(dz \wedge dw)$, также введем функцию $H = \text{Re}(f(z, w)): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(z, w)$ – комплексный многочлен двух комплексных переменных. Согласно следующей лемме гамильтонова система

$$(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2(z, w), \text{Re}(dz \wedge dw), \text{Re}(f(z, w))) \quad (1)$$

имеет дополнительный первый интеграл $F = \text{Im}(f(z, w))$.

ЛЕММА 1. *Если многочлен $f(z, w)$ отличен от константы на $\mathbb{C}^2$, то гамильтонова система (1) является интегрируемой с дополнительным первым интегралом $F = \text{Im}(f(z, w))$, причем $\text{sgrad } F = -i \text{sgrad } H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $F = \text{Im}(f(z, w))$. Докажем, что F является первым интегралом системы (1). В координатах x_1, y_1, x_2, y_2 имеем

$$\text{sgrad } H = (-H_{x_2}, H_{y_2}, H_{x_1}, -H_{y_1}), \quad \text{sgrad } F = (-F_{x_2}, F_{y_2}, F_{x_1}, -F_{y_1}).$$

Поскольку $f(z, w) = H + iF$ – многочлен, имеют место следующие условия Коши–Римана:

$$\begin{cases} H_{x_1} = F_{y_1}, \\ H_{y_1} = -F_{x_1}, \\ H_{x_2} = F_{y_2}, \\ H_{y_2} = -F_{x_2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\text{sgrad } F = (H_{y_2}, H_{x_2}, -H_{y_1}, -H_{x_1}) = -i \text{sgrad } H$. Если H и F являются функционально зависимыми на непустом открытом подмножестве $D \subset \mathbb{R}^4$ с коэффициентами пропорциональности $\lambda, -\mu \in \mathbb{R}$, зависящими от точки на D , причем $\lambda \neq 0$, то

$$H_{x_1} = -\frac{\mu}{\lambda} F_{x_1} = \frac{\mu}{\lambda} H_{y_1} = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 F_{y_1} = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 H_{x_1}$$

на D , откуда $\frac{\partial f(z,w)}{\partial z} = 0$ на D . Аналогично, $\frac{\partial f(z,w)}{\partial w} = 0$ на D . Значит, $f(z,w)$ постоянна на D . Получаем противоречие.

Осталось доказать, что функции H и F находятся в инволюции относительно ω . Скобка Пуассона $\{H, F\}$ равна

$$\begin{aligned}\{H, F\} &= H_{x_2}F_{x_1} - H_{x_1}F_{x_2} - H_{y_2}F_{y_1} + H_{y_1}F_{y_2} \\ &= -H_{x_2}H_{y_1} + H_{x_1}H_{y_2} - H_{y_2}H_{x_1} + H_{y_1}H_{x_2} = 0.\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Векторное поле $\text{sgrad } H$ совпадает с косым градиентом $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ комплекснозначной функции $f(z, w)$ относительно комплекснозначной симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ на $\mathbb{C}^2(z, w)$, т.е. $\text{sgrad } H = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ (см. определение 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\text{sgrad } H = (-H_{x_2}, H_{y_2}, H_{x_1}, -H_{y_1}) = (-H_{x_2}, -F_{x_2}, H_{x_1}, F_{x_1}),$$

то в переменных z, w выполнено $\text{sgrad } H = (-f_w, f_z) = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$.

По лемме 2 уравнения Гамильтона систем $(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2, \text{Re}(\omega_{\mathbb{C}}), \text{Re } f)$ и $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ совпадают. Далее будем рассматривать только $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы. Леммы 1 и 2 приводят к следующим определениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы $(M_1, \omega_{\mathbb{C},1}, f_1)$ и $(M_2, \omega_{\mathbb{C},2}, f_2)$ назовем *гамильтоново эквивалентными*, если существует комплексно дифференцируемое отображение $h: M_1 \rightarrow M_2$ такое, что

- 1) отображение h является диффеоморфизмом гладких многообразий;
- 2) выполнено соотношение $\omega_{\mathbb{C},1} = h^*(\omega_{\mathbb{C},2})$;
- 3) $f_1 = f_2 \circ h + \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Две динамические системы

$$(T_a, (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a}), \quad (T_b, (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b})$$

на неособых слоях T_a и T_b , $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы называют *сопряженными*, если существует комплексно дифференцируемое отображение $h: T_a \rightarrow T_b$ такое, что

- 1) отображение h является диффеоморфизмом гладких многообразий;
- 2) выполнено соотношение $h_*((\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a}) = (\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b}$; и называют *почти сопряженными*, если
- 2') выполнено соотношение $h_*((\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_a}) = \lambda(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_b}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $\dim_{\mathbb{C}} M^4 = 2$. Метрикой пополнения слоя T_{ξ} $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $(M^4, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ назовем риманову метрику

$$g_{\xi} = \text{Sym}(\Delta_{\xi} \otimes \overline{\Delta_{\xi}}),$$

где 1-форма Δ_{ξ} над $\mathbb{C}$ определена на слое с проколами $T_{\xi} \setminus C$ соотношением $\Delta_{\xi}(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_{\xi} \setminus C}) = 1$, где $C \subseteq M^4$ – множество критических точек функции f . На слое T_{ξ} определена функция расстояния $\rho_{\xi}: T_{\xi} \times T_{\xi} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, где для любых $x, y \in T_{\xi}$ функция $\rho_{\xi}(x, y)$ – точная нижняя грань длин всех кривых, лежащих в T_{ξ} и соединяющих точки x, y в смысле метрики g_{ξ} , $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Если $x \in C$ и $x \neq y$, то будем полагать $\rho_{\xi}(x, y) = \rho_{\xi}(y, x) = \infty$.

ЛЕММА 3. Для любого комплексного многочлена $P_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ степени $n \in \mathbb{N}$ и любого комплексного числа $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число $R > 0$ такое, что на множестве $V_R := \mathbb{C} \setminus \overline{D_R^2}$ многозначная функция $g = g(w) := \sqrt[n]{P_n(w) - \xi}$ имеет однозначную ветвь $g_0: V_R \rightarrow \mathbb{C}$, которая является гомеоморфизмом на образ, где D_R^2 – открытый двумерный диск радиуса $R = R(\xi)$, причем R непрерывно зависит от ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0$. Положим

$$u = u(x, \xi) := \frac{1}{a_n} (a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \dots + a_1 x^{n-1} + (a_0 - \xi) x^n), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Так как $u(0, \xi) = 0$ и функция $u(x, \xi)$ непрерывна, то существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi) > 0$ такое, что $|u(x, \xi)| < 1$ при $|x| < \varepsilon_0$. Положим

$$y(x) := \frac{x}{\sqrt[n]{a_n} (1 + u(x, \xi))^{1/n}}, \quad |x| < \varepsilon_0,$$

где число $\sqrt[n]{a_n}$ отвечает некоторой (произвольной) ветви функции $\sqrt[n]{(\cdot)}$, а функция $(1 + u)^{1/n}$ определяется как сумма сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{n} u + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{u^2}{2!} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \frac{u^3}{3!} + \dots$$

при $|u| < 1$. По построению функция $y = y(x)$ является аналитической в круге $|x| < \varepsilon_0$. Так как $y'(0) = 1/\sqrt[n]{a_n} \neq 0$, то существует $\varepsilon = \varepsilon(\xi) \leq \varepsilon_0(\xi)$ такое, что отображение $x \mapsto y(x)$, $|x| < \varepsilon$, является гомеоморфизмом на образ. Нетрудно показать, что числа ε_0 , ε могут быть выбраны непрерывно зависящими от ξ . Положим

$$R = R(\xi) := \frac{1}{\varepsilon}, \quad g_0(w) := \frac{1}{y(1/w)} = w \sqrt[n]{a_n} \left(1 + u \left(\frac{1}{w}, \xi \right) \right)^{1/n}, \quad |w| > R.$$

Тогда $(g_0(w))^n = P_n(w) - \xi$, т.е. функция $g_0 = g_0(w)$ является ветвью функции $g = g(w)$. По доказанному функция g_0 является гомеоморфизмом области $|w| > R$ на образ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Комплексный полиномиальный гамильтониан, задаваемый формулой $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, будем также называть гиперэллиптическим гамильтонианом степени n (имеется в виду степень по w).

§ 3. Гиперэллиптический гамильтониан степени один

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени один называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w), \quad f(z, w) = az^2 + bw + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad ab \neq 0, \quad \omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw.$$

Обозначим эту гамильтонову систему через $\mathcal{H}_1(a, b, c)$.

ТЕОРЕМА 1 (комплексные канонические координаты). *Каждая система $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системе $(\mathbb{C}^2(p, q), dp \wedge dq, f_0(p, q) = p)$. Более того, имеется $\mathbb{C}$ -симплектоморфизм h из $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}})$ в себя, задаваемый формулами*

$$(z, w) \mapsto \left(f(z, w), -\frac{z}{b} \right) = \left(az^2 + bw + c, -\frac{z}{b} \right) =: (p, q),$$

такой, что в канонических комплексных координатах p, q функция Гамильтона и уравнения Гамильтона имеют вид $f \circ h^{-1}(p, q) = p, \dot{p} = 0, \dot{q} = 1$. В частности, функция Гамильтона $f_0 = f \circ h^{-1}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ сюръективна и не имеет критических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение h является $\mathbb{C}$ -симплектоморфизмом, поскольку h взаимно однозначно. Имеем

$$h^*(dp \wedge dq) = (2az dz + b dw) \wedge \left(-\frac{1}{b} dz \right) = dz \wedge dw = \omega_{\mathbb{C}}, \quad h^*p = p \circ h = f.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ являются гамильтоново эквивалентными друг другу. Все слои $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_1(a, b, c)$ являются неособыми, $\mathbb{C}$ -диффеоморфными $\mathbb{C}$, а ограничения на них системы являются сопряженными друг другу. Векторные поля $\text{sgrad } H = \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ и $\text{sgrad } F = -i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ полны. Для любого слоя T_{ξ} существует комплексный диффеоморфизм $f_{\xi}: T_{\xi} \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексную плоскость такой, что $(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_{\xi}} = \frac{d}{df_{\xi}}$, где $\frac{d}{df_{\xi}} \in \text{Vect}(T_{\xi})$ – координатное векторное поле на слое T_{ξ} , отвечающее координатному диффеоморфизму f_{ξ} , т.е. диффеоморфизм f_{ξ} выпрямляет интегральные траектории на T_{ξ} .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *$\mathbb{C}$ -гамильтонова система с гиперэллиптическим гамильтонианом степени один является вполне интегрируемой по Лиувиллю.*

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f , на каждом слое имеет одну неподвижную точку, а в комплексных координатах p, q из теоремы 1 имеет вид $(p, q) \mapsto (p, -q)$.

§ 4. Гиперэллиптический гамильтониан степени два

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *$\mathbb{C}$ -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени два называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$ и $f(z, w) = az^2 + bw^2 + cw + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$. Обозначим эту $\mathbb{C}$ -гамильтонову систему через $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$.*

ТЕОРЕМА 2. *Две $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ и $\mathcal{H}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $a_1 b_1 = a_2 b_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1 b_1 = a_2 b_2$. Определим отображение

$$h: \mathbb{C}^2(z_1, w_1) \rightarrow \mathbb{C}^2(z_2, w_2)$$

формулами

$$z_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} z_1, \quad w_2 = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \left(w_1 + \frac{c_1 - c_2 \sqrt{b_1/b_2}}{2b_1} \right).$$

Тогда h – гамильтонова эквивалентность. Действительно,

$$\begin{aligned} f_2(z_2, w_2) &= a_2 z_2^2 + b_2 w_2^2 + c_2 w_2 + d_2 \\ &= a_1 z_1^2 + b_1 w_1^2 + c_1 w_1 + \frac{(c_1 - c_2 \sqrt{b_1/b_2})^2}{4b_1} + \frac{c_2(c_1 - c_2 \sqrt{b_1/b_2})}{2\sqrt{b_1 b_2}} + d_2 \\ &= f_1(z_1, w_1) + d_2 - d_1 + \frac{c_1^2 - c_2^2 b_1/b_2}{4b_1}, \\ h^*(\omega_{\mathbb{C},2}) &= dz_2 \wedge dw_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} dz_1 \wedge dw_1 = \omega_{\mathbb{C},1} \end{aligned}$$

в силу соотношения $a_1 b_1 = a_2 b_2$ (для согласованных выборов ветвей обеих функций корень).

Обратно, пусть h – гамильтонова эквивалентность между $\mathcal{H}_2(a_1, 1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_2(a_2, 1, 0, 0)$, $\Pi_{j,\varepsilon} = \{(z, -\varepsilon \sqrt{-a_j z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$, где $\varepsilon = \pm 1$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\oint_{\gamma} \Delta_1 = \oint_{h \circ \gamma} \Delta_2,$$

где Δ_j – 1-форма над $\mathbb{C}$ на особом слое $f_j^{-1}(0) = \Pi_{j,+} \cup \Pi_{j,-}$ без особой точки $(0, 0)$, двойственная векторному полю $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_j$, γ – замкнутый путь $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, \sqrt{-a_1} e^{2\pi i t})$, $t \in [0, 1]$. Так как $f_j^{-1}(0) = \Pi_{j,+} \cup \Pi_{j,-}$, где $\Pi_{j,+} \approx \Pi_{j,-} \approx \mathbb{C}$ и $\Pi_{j,+} \cap \Pi_{j,-} = \{(0, 0)\}$ и кривая γ простая и нестягиваемая в $f_1^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$, то $h \circ \gamma$ гомологична в $f_2^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ одной из кривых $\gamma_{\pm}(t) = (e^{2\pi i t}, \pm \sqrt{a_2} e^{2\pi i t})$ или полученных из них сменой ориентации. Отсюда и из соотношения

$$\Delta_j = \frac{1}{2a_j z} dw|_{f_j^{-1}(0) \setminus \{(0,0)\}}$$

имеем

$$\oint_{\gamma} \Delta_1 = -\frac{\pi i}{\sqrt{-a_1}} = \pm \oint_{\gamma_{\pm}} \Delta_2 = \pm \frac{\pi i}{\sqrt{-a_2}},$$

откуда $a_1 = a_2$.

СЛЕДСТВИЕ 3. $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ с гиперэллиптическим гамильтонианом степени два гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” системе $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$ для $a = a_1 b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ЛЕММА 4. Существует ровно один особый слой $T_{d-c^2/(4b)}$. Он является объединением двух трансверсальных комплексных прямых

$$\left\{ z = i \sqrt{\frac{b}{a}} \left(w + \frac{c}{2b} \right) \right\}, \quad \left\{ z = -i \sqrt{\frac{b}{a}} \left(w + \frac{c}{2b} \right) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем теорему для $\mathbb{C}$ -гамильтоновых систем $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$. Так как $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (-2w, 2az)$, то равенство $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = 0$ равносильно соотношениям $z = w = 0$. Поэтому особый слой – это $T_0 = f^{-1}(0)$, трансверсальное пересечение двух комплексных прямых $\{z = \pm w/\sqrt{a}\}$.

Для произвольной $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ доказательство получается применением гамильтоновой эквивалентности из доказательства теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3 (комплексные координаты действие-угол вне особого слоя). Векторные поля $\text{sgrad}_\mathbb{C} f$ и $\text{sgrad}_\mathbb{C} F = -i \text{sgrad}_\mathbb{C} f$ полны. На дополнении к особому слою $V := T_{d-c^2/(4b)}$ система $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системе

$$((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}))(p, q \bmod 2\pi), \quad dp \wedge dq, \quad f_0(p, q \bmod 2\pi) = 2\sqrt{ab}p.$$

Более того, имеется $\mathbb{C}$ -симплектоморфизм

$$h: (\mathbb{C}^2 \setminus V, \omega_\mathbb{C}) \rightarrow ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge dq),$$

задаваемый каноническими комплексными координатами

$$(p, q \bmod 2\pi) := \left(\frac{f(z, w) - (d - c^2/(4b))}{2\sqrt{ab}}, -i \ln \left(\sqrt{a}z + i\sqrt{b} \left(w + \frac{c}{2b} \right) \right) \bmod 2\pi \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем теорему для $\mathbb{C}$ -гамильтоновых систем $\mathcal{H}_2(a, 1, 0, 0)$. Рассмотрим уравнения Гамильтона на некотором неособом слое T_ξ , $\xi \neq 0$:

$$\begin{cases} \dot{z} = -2w, \\ \dot{w} = 2az. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$(z(t), w(t)) = (Ce^{2\sqrt{-a}t} + De^{-2\sqrt{-a}t}, -\sqrt{-a}Ce^{2\sqrt{-a}t} + \sqrt{-a}De^{-2\sqrt{-a}t}),$$

где $C, D \in \mathbb{C}$ – константы, заданные начальной точкой траектории, $4aCD = \xi$. Так как решение определено данной формулой при любом $t \in \mathbb{C}$, то векторные поля $\text{sgrad}_\mathbb{C} f$ и $-i \text{sgrad}_\mathbb{C} f$ полны.

Покажем, что h – вложение. Пусть $h(z, w) = (p, q \bmod 2\pi)$. Выразим (z, w) через $(p, q \bmod 2\pi)$:

$$z = \frac{e^{iq} + 2\sqrt{a}pe^{-iq}}{2\sqrt{a}}, \quad w = \frac{e^{iq} - 2\sqrt{a}pe^{-iq}}{2i}.$$

Отображение h сюръективно, так как для любых $p \neq 0$ и $q \bmod 2\pi$ существует решение (z, w) уравнения $h(z, w) = (p, q \bmod 2\pi)$, выражающееся через $(p, q \bmod 2\pi)$ по вышеприведенным формулам.

Симплектическая структура

$$\begin{aligned} (h^{-1})^*(\omega_\mathbb{C}) &= (h^{-1})^*(dz \wedge dw) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{ai}} d(e^{iq} + 2\sqrt{a}pe^{-iq}) \wedge d(e^{iq} - 2\sqrt{a}pe^{-iq}) = dp \wedge dq. \end{aligned}$$

Функция Гамильтона $h^*(2\sqrt{a}p) = 2\sqrt{a}p \circ h = f$.

Для произвольной $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$ доказательство получается применением гамильтоновой эквивалентности из доказательства теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. В канонических комплексных координатах $p, q \bmod 2\pi$ на дополнении к особому слою функция Гамильтона и уравнения Гамильтона имеют вид $f(p, q \bmod 2\pi) = 2\sqrt{ab}p$, $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 2\sqrt{ab}$. Ограничения $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2 = (a, b, c, d)$ на любые неособые слои сопряжены друг другу, и для любого неособого слоя T_ξ существует комплексный диффеоморфизм $f_\xi = f_\xi \bmod 2\pi: T_\xi \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ на цилиндр такой, что $(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f)|_{T_\xi} = 2\sqrt{ab} \frac{d}{df_\xi}$, где $\frac{d}{df_\xi} \in \text{Vect}(T_\xi)$ – координатное векторное поле на слое T_ξ , отвечающее координатному диффеоморфизму $f_\xi \bmod 2\pi$, т.е. диффеоморфизм $f_\xi \bmod 2\pi$ выпрямляет интегральные траектории на T_ξ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы 3 показывает, что канонические координаты $p, q \bmod 2\pi$ продолжаютсся до канонических координат на дополнении к прямой

$$\Pi_+ = \left\{ z = -i\sqrt{\frac{a}{b}} \left(w + \frac{c}{2b} \right) \right\} \subset T_{d-c^2/(4b)},$$

задающих гамильтонову эквивалентность

$$h_-: (\mathbb{C}^2 \setminus \Pi_+, \omega_{\mathbb{C}}, f) \rightarrow (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge dq, 2\sqrt{ab}p).$$

Аналогично определим гамильтонову эквивалентность

$$h_+: (\mathbb{C}^2 \setminus \Pi_-, \omega_{\mathbb{C}}, f) \rightarrow (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), dp \wedge d\hat{q}, 2\sqrt{ab}p)$$

формулами

$$(p, \hat{q} \bmod 2\pi) := \left(\frac{f(z, w) - (d - c^2/(4b))}{2\sqrt{ab}}, i \ln \left(\sqrt{a}z - i\sqrt{b} \left(w + \frac{c}{2b} \right) \right) \bmod 2\pi \right).$$

Функция перехода

$$h_+ \circ h_-^{-1}: (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$$

имеет вид $(p, q \bmod 2\pi) \mapsto (p, \hat{q} \bmod 2\pi) = (p, q + i \ln(2\sqrt{ab}p) \bmod 2\pi)$ и задает послойный автоморфизм тривиального расслоения $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, который послойно не гомотопен тождественному автоморфизму. Поэтому $h_-|_{\mathbb{C}^2 \setminus V}$ и $h_+|_{\mathbb{C}^2 \setminus V}$ определяют “топологически различные” тривиализации слоения Лиувилля в $\mathbb{C}^2 \setminus V \approx (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ с базой $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

§ 5. Гиперэллиптический гамильтониан степени три

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени три называется тройка $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w), \quad \omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw, \quad f(z, w) = az^2 + bw^3 + cw^2 + dw + e, \\ a, b, c, d, e \in \mathbb{C}, \quad ab \neq 0.$$

Обозначим эту систему через $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$. Систему $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ назовем невырожденной, если критическим точкам функции f соответствуют два различных критических значения (это равносильно условию $c^2 \neq 3bd$, т.е. тому, что f – комплекснозначная функция Морса, см. доказательство теоремы 4).

ТЕОРЕМА 4. *Всякая невырожденная $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ для некоторых $r, s \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ невырождена при любых $r \neq 0, s \neq 0$. Две невырожденные $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_3(r_1, s_1, s_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_3(r_2, s_2, s_2, 0, 0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $s_1 = \pm s_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w_0 – критическая точка функции $bw^3 + cw^2 + dw + e$. Тогда $f(z, w) = az^2 + b(w - w_0)^2(w - \alpha) + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq w_0$. Определим отображение $h: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой

$$h(z, w) = \left((w_0 - \alpha)z, \frac{w - w_0}{w_0 - \alpha} \right).$$

Отображение h – искомая гамильтонова эквивалентность.

Особые точки p_1 и p_2 векторного поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ системы $\mathcal{H}_3(r, s, s, 0, 0)$ таковы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (0, -\frac{2}{3})$, откуда $f(p_1) = 0$ и $f(p_2) = -\frac{2}{9}s$. Неравенство $f(p_1) \neq f(p_2)$ равносильно неравенству $s \neq 0$, что согласно определению 12 выполнено.

Пусть между системами $\mathcal{H}_3(r_1, s_1, s_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_3(r_2, s_2, s_2, 0, 0)$ задана гамильтонова эквивалентность h . Заметим, что либо $h(p_{1,j}) = h(p_{2,j})$, либо $h(p_{1,j}) = h(p_{2,3-j})$, $j = 1, 2$, где $p_{i,1}, p_{i,2}$ – особые точки векторных полей $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i$, $i = 1, 2$. Поэтому h сохраняет разность критических значений: либо $f_1(p_{1,1}) - f_1(p_{1,2}) = f_2(p_{2,1}) - f_2(p_{2,2})$, либо $f_1(p_{1,1}) - f_1(p_{1,2}) = f_2(p_{2,2}) - f_2(p_{2,1})$ соответственно. Так как $p_{i,1} = (0, 0)$, $p_{i,2} = (0, -\frac{2}{3})$, то либо $s_1 = s_2$ и $h(p_{1,j}) = p_{2,j}$, либо $s_1 = -s_2$ и $h(p_{1,j}) = p_{2,3-j}$ соответственно.

Для получения равенства $r_1 = r_2$ рассмотрим линейный оператор $A_{i,j}$ в $T_{p_{i,j}}\mathbb{C}^2$ – оператор линеаризации векторного поля

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i = (-s_i(3w + 2)w, 2r_i z)^T$$

в точке $p_{i,j}$; в координатах z, w он задается матрицей

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & -2s_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{i,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2s_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\det A_{i,1} = 4r_i s_i$ и $\det A_{i,2} = -4r_i s_i$, $i = 1, 2$. Из доказанного выше следует, что $s_1 = \pm s_2$, причем при $s_1 = s_2$ имеем

$$h(p_{1,j}) = p_{2,j}, \quad A_{2,j} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j},$$

откуда $\det A_{1,j} = \det A_{2,j}$. Поэтому $r_1 = r_2$. При $s_1 = -s_2$ имеем

$$h(p_{1,j}) = p_{2,3-j}, \quad A_{2,3-j} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j},$$

откуда $\det A_{1,j} = \det A_{2,3-j}$. Поэтому $r_1 = r_2$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\bar{T}_{\xi}$ – пополнение произвольного (не обязательно неособого) слоя T_{ξ} системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ относительно метрики пополнения g_{ξ} (точнее, относительно функции расстояния ρ_{ξ} , см. определение 8). Тогда*

1) *выполнено $\bar{T}_{\xi} = T_{\xi}\{p_{\xi}\}$, где p_{ξ} – точка, называемая бесконечно удаленной;*

2) если T_ξ – неособый слой, то существует гомеоморфизм $\overline{T}_\xi \approx \mathbb{T}^2$;

3) существует комплексная координата в окрестности бесконечно удаленной точки $p_\xi \in \overline{T}_\xi$ в $\overline{T}_\xi$, являющаяся $\mathbb{C}$ -дифференцируемой в проколотой окрестности.

В доказательстве этой теоремы используются две леммы, приведенные ниже.

ЛЕММА 5. Для любого (не обязательно неособого) слоя T_ξ , $\xi \in \mathbb{C}$, существует такое покрытие пространства $\mathbb{C}^2$ замкнутыми подмножествами $U_{\xi,i} \subset \mathbb{C}^2$, гомеоморфными $\mathbb{C} \times \overline{D}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, что $U_{\xi,i} \subset U_{\xi,j}$ при $i < j$, $\bigcup_{i=1}^\infty U_{\xi,i} = \mathbb{C}^2$ и для любого i выполнено $T_\xi \setminus U_{\xi,i} \approx D^2 \setminus \{\cdot\}$, где D^2 – открытый двумерный диск.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Согласно лемме 3 для любого $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число $r_0(\xi) > 0$ такое, что определена ветвь

$$\sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}: \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \rightarrow \mathbb{C},$$

являющаяся гомеоморфизмом на образ, где $\overline{D}_{r_0}^2 \subset \mathbb{C}_w$ – замкнутый двумерный шар радиуса $r_0(\xi)$ с центром в нуле. Положим $r_0 := r_0(\xi)$.

Определим отображение $h_\xi: \mathbb{C}_z \times (\mathbb{C}_w \setminus \overline{D}_{r_0}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой

$$h_\xi(z, w) = (\sqrt{az}, \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}),$$

где фиксирована одна из ветвей $\sqrt{(\cdot)}$, $\sqrt[3]{(\cdot)}$. Тогда h_ξ определено корректно и является гомеоморфизмом на образ, координатами на образе являются

$$\tilde{z} = \sqrt{az}, \quad \tilde{w} = \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}. \quad (2)$$

Положим

$$\tilde{r}_0 := \sqrt[3]{\max_{|w| \leq r_0} |bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi|}.$$

Докажем, что $U_{\xi,i} := (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \cup h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_i(\xi)}^2)$ – искомая последовательность, где $r_i = r_i(\xi) = \tilde{r}_0 + i$. Рассмотрим отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}}: \mathbb{C}_{\tilde{z}, \tilde{w}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\text{Pr}_{\tilde{z}}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}$.

Шаг 2. Докажем, что

$$\text{Im}(\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}) = \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)^{3/2}}^2 \approx D^2 \setminus \{0\}.$$

Покажем сначала, что

$$\text{Im}(\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}) \subseteq \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)^{3/2}}^2.$$

Пусть

$$\tilde{z}_0 \in \text{Im}(\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}).$$

Рассмотрим $\tilde{w}_0$ такое, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in \text{Im}(h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}})$. Отсюда получаем, что $|\tilde{w}_0| > r_i$, а значит, $|\tilde{z}_0| > r_i^{3/2}$.

Обратно, пусть

$$\tilde{z}_0 \in \mathbb{C}_{\tilde{z}} \setminus \overline{D}_{r_i^{3/2}}^2.$$

Тогда существует $\tilde{w}_0$ такое, что $\tilde{z}_0^2 + \tilde{w}_0^3 = 0$ и $|\tilde{w}_0| > r_i$. Все корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi = \tilde{w}_0^3$ различны и по модулю больше r_0 , из чего следует, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in \text{Im}(h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}})$ и отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}$ является неразветвленным трилистным накрытием с базой $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^{3/2}}^2 \approx D^2 \setminus \{*\}$.

Шаг 3. Докажем, что накрывающее пространство $h_\xi(T_\xi \setminus U_{\xi,i})$ связно. Рассмотрим поднятие

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(r_i^{3/2} \exp\{\pi i t\}, r_i^{3/2} \exp\left\{\frac{2\pi i t + \pi i}{3}\right\} \right)$$

замкнутого пути $\gamma(t) = r_i^{3/2} e^{\pi i t}$, $0 \leq t \leq 6$, при накрытии $\text{Pr}_{\tilde{z}}|_{h_\xi(T_\xi \setminus U_{\xi,i})}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ – простой замкнутый путь, трилистно накрывающий простой замкнутый путь $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2$, из чего следует, что накрывающее пространство связно.

ЛЕММА 6. *Выполнено соотношение*

$$\rho_\xi(x, y) = o(1),$$

где $R \rightarrow \infty$, $x, y \in T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{f}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3$, $\tilde{\omega}_\mathbb{C} = d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$ и $\tilde{\xi} = 0$. Тогда

$$\text{sgrad}_\mathbb{C} \tilde{f} = -3\tilde{w}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + 2\tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}, \quad \tilde{\Delta}_0 = \frac{-3\tilde{w}^2 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w}}{9\tilde{w}^4 + 4\tilde{z}^2} \Big|_{T\tilde{T}_0}.$$

Так как $\tilde{z}^2 + \tilde{w}^3 = 0$ на $\tilde{T}_0$, то

$$-3\tilde{w}^2 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{9\tilde{w}^4 d\tilde{w}}{2\tilde{z}} + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{9\tilde{w}^4 + 4\tilde{z}^2}{2\tilde{z}} d\tilde{w}$$

на $\tilde{T}_0$. Поэтому $\tilde{\Delta}_0 = \frac{d\tilde{w}}{2\tilde{z}}$, откуда

$$\tilde{g}_0 = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{z}|^2} = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{w}|^3}.$$

Далее, пусть x_0 и y_0 такие, что $|x| = |x_0|$, $|y| = |y_0|$ и $x_0 = (iR_x^{3/2}, R_x)$, $y_0 = (iR_y^{3/2}, R_y)$ для некоторых $R_x > 0$ и $R_y > 0$. Согласно доказательству леммы 5 такие $x_0, y_0 \in \tilde{f}^{-1}(0) =: \tilde{V}$ существуют. Верно неравенство

$$\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \tilde{\rho}_0(x, x_0) + \tilde{\rho}_0(x_0, y_0) + \tilde{\rho}_0(y_0, y).$$

Оценим $\tilde{\rho}_0(x, x_0)$ и $\tilde{\rho}_0(y, y_0)$. Рассмотрим двулистное накрытие

$$p: \tilde{V} \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R^2, \quad p(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{w},$$

откуда

$$\tilde{\rho}_0(x, x_0) \leq \oint_{|\tilde{w}|=R_x} \frac{1}{\sqrt{4R_x^3}} |d\tilde{w}| = \frac{\pi}{\sqrt{R_x}}.$$

Аналогично, $\tilde{\rho}_0(y, y_0) \leq \frac{\pi}{\sqrt{R_y}}$.

Имеем следующую оценку:

$$\tilde{\rho}_0(x_0, y_0) = \left| \int_{R_x}^{R_y} \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{4\tilde{w}^3}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}},$$

из которой следует, что

$$\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \frac{\pi}{\sqrt{R_x}} + \frac{1}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}} + \frac{\pi}{\sqrt{R_y}} \leq \frac{8}{\sqrt{\min\{R_x, R_y\}}}.$$

Согласно доказательству леммы 5 (шаг 1) в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2)$ существует замена координат

$$h_\xi(z, w) = (\tilde{z}, \tilde{w}) = (\sqrt{a}z, \sqrt[3]{bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi}),$$

поэтому $(f - \xi) \circ h_\xi^{-1} = \tilde{f} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3$. Оценим Δ_ξ . Имеем

$$(h_\xi|_{T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)})^* \tilde{\Delta}_0 = A_\xi \Delta_\xi,$$

где функция $A_\xi: T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}$ определена условием $A_\xi \omega_{\mathbb{C}} = h_\xi^* \tilde{\omega}_{\mathbb{C}}$. Так как

$$A_\xi = \sqrt{a} \frac{3bw^2 + 2cw + d}{3(bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi)^{2/3}} = A(1 + o(1))$$

при $R \rightarrow \infty$, где $A = \sqrt{a} \sqrt[3]{b} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\rho_\xi < \frac{2}{|A|} \tilde{\rho}_0$. Осталось заметить, что

$$\frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

при $R \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пункт 1) является прямым следствием лемм 5 и 6. Докажем пп. 2) и 3). Из лемм следует, что любой слой $\overline{T}_\xi$ компактен. Рассмотрим отображение $p: \overline{T}_\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, где $p(z, w) = w$ – разветвленное двулистное сохраняющее ориентацию накрытие. Особыми значениями (т.е. образами точек, в которых p не является локальным гомеоморфизмом) являются корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e - \xi = 0$ и бесконечно удаленная точка. Согласно формуле Римана–Гурвица имеем $\chi(\overline{T}_\xi) = 2\chi(\overline{\mathbb{C}}) - 4 = 0$, откуда $\overline{T}_\xi$ гомеоморфно тору.

Введем координату u_ξ на слое $\overline{T}_\xi$ в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки соотношением

$$\begin{cases} \tilde{z} = iu_\xi^{-3}, \\ \tilde{w} = u_\xi^{-2}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$u_\xi: T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \rightarrow D_{r_0(\xi)}^{2(-1/2)} \setminus \{0\}.$$

Продолжим диффеоморфизм u_ξ до гомеоморфизма

$$\bar{u}_\xi: \overline{T}_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \rightarrow D_{r_0(\xi)}^{2(-1/2)}$$

в бесконечно удаленную точку соотношением $\bar{u}_\xi(p_\xi) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. $\mathbb{C}$ -гамильтоновым пополнением $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$, обозначаемым через $\overline{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$, назовем $\mathbb{C}$ -гамильтонову систему $(M^4, \overline{\omega}_{\mathbb{C}}, \overline{f})$, где

1) множество

$$M^4 = \bigcup_{\xi \in \mathbb{C}} \overline{T}_{\xi} := \{(\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{C}, x \in \overline{T}_{\xi}\}$$

обладает структурой $\mathbb{C}$ -гладкого многообразия, задаваемой следующим набором карт: $U \approx V$, $U_{\xi_0} \approx V_{\xi_0}$, где $U, U_{\xi_0} \subset M^4$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, и функций перехода: карта $U \approx V := \mathbb{C}^2(z, w)$, семейство карт $U_{\xi_0} \approx V_{\xi_0} = \{(\xi, u) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u| < \varepsilon\}$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, где $\varepsilon = \varepsilon(\xi_0) > 0$, а функция перехода $\phi_{\xi_0}: V'_{\xi_0} \rightarrow V'$, где

$$V' := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |f(z, w) - \xi_0| < \varepsilon, (z, w) \in h_{f(z, w)}^{-1}(\mathbb{C}\tilde{z} \times (\mathbb{C}\tilde{w} \setminus \overline{D}_{\tilde{r}_0(f(z, w))}^2))\},$$

$$V'_{\xi_0} := V_{\xi_0} \setminus \{(\xi, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\},$$

определена с помощью преобразований (2) и (3):

$$(\xi, u) \mapsto (z, w) := h_{\xi}^{-1}(\tilde{z} = iu^{-3}, \tilde{w} = u^{-2});$$

2) выполнено $\overline{\omega}_{\mathbb{C}}|_U = \varphi^* \omega_{\mathbb{C}}$ и $\overline{f}|_U = f \circ \varphi$, где $\varphi: U \rightarrow V$ – координатный гомеоморфизм для карты $U \approx V$.

Отметим, что по определению M^4 точки $p_{\xi_1} \neq p_{\xi_2}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$. Далее будем отождествлять множество $\mathbb{C}^2 = V$ с открытым подмножеством $U \subset M^4$ при помощи координатного гомеоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$.

ТЕОРЕМА 6 (существование $\mathbb{C}$ -гамильтонова пополнения). *Любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ имеет следующие свойства:*

1) для любого $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $\phi_{\xi_0}: V'_{\xi_0} \rightarrow V'$ инъективна и имеет всюду ненулевой якобиан;

2) на комплексном многообразии M^4 $\mathbb{C}$ -дифференциальная 2-форма $\overline{\omega}_{\mathbb{C}}$ и функция Гамильтона $\overline{f}$ определены корректно и являются аналитическими;

3) 2-форма $\overline{\omega}_{\mathbb{C}}$ невырождена, т.е. всюду отлична от нуля на M^4 и является $\mathbb{C}$ -симплектической структурой.

Таким образом, любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ имеет единственное $\mathbb{C}$ -гамильтоново пополнение $(M^4, \overline{\omega}_{\mathbb{C}}, \overline{f})$.

ТЕОРЕМА 7. *Любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ имеет следующие свойства:*

1) критические точки функции $\overline{f}$ содержатся в $\mathbb{C}^2$ и совпадают с критическими точками функции f ; $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ – слой $\overline{T}_{\xi}$ $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\overline{\mathcal{H}}_3(a, b, c, d, e)$ – является неособым;

2) векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \overline{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \overline{f}$ полны на M^4 и не имеют нулей вне точек $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6 и 7. Из доказательства леммы 5 (шаг 1) и формулы (3) следует, что ϕ_{ξ_0} инъективно и что в координатах $(\tilde{z}, \tilde{w}) := h_{\xi_0}(z, w)$ в $\mathbb{C}_{z, w}^2 \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ 2-форма $(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = B_{\xi_0} d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$, где функция

$$B_{\xi_0} = \frac{1}{A_{\xi_0} \circ h_{\xi_0}^{-1}}$$

определена в области $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ определения $(\tilde{z}, \tilde{w})$, $B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w}) \neq 0$ и $|B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w})|$ ограничен на области определения $(\tilde{z}, \tilde{w})$.

Координаты $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ выражаются через (ξ, u) посредством отображения $h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0} : (\xi, u) \mapsto (\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0} \circ h_{\xi}^{-1}(iu^{-3}, u^{-2})$ так:

$$\phi_{\xi_0} : (\xi, u) \mapsto (z, w) = h_{\xi}^{-1}(iu^{-3}, u^{-2}), \quad \tilde{z} = iu^{-3}, \tilde{w} = (\xi - \xi_0 + u^{-6})^{1/3}.$$

Отсюда получаем, что

$$(h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})^* d\tilde{z} \wedge d\tilde{w} = i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-2/3} d\xi \wedge du,$$

$$\phi_{\xi_0}^* \omega_{\mathbb{C}} = (h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})^* (h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = i(B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0})(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-2/3} d\xi \wedge du.$$

Отсюда следует существование непрерывной и всюду невырожденной симплектической структуры $l_{\xi_0}(\xi, u) d\xi \wedge du$ на $V_{\xi_0} = \{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u| < \varepsilon\}$, совпадающей с $\varphi_{\xi_0}^* \omega_{\mathbb{C}}$ на $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u| < \varepsilon\}$, где

$$l_{\xi_0}(\xi, u) = i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-2/3} B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0}(\xi, u) = \frac{i(1 + (\xi - \xi_0)u^6)^{-2/3}}{A_{\xi_0} \circ \phi_{\xi_0}(\xi, u)}$$

– ограниченная, всюду ненулевая функция,

$$l_{\xi_0}(\xi, 0) = \frac{i}{A} = \frac{i}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}},$$

см. доказательство леммы 6. Так как якобиан функции перехода ϕ_{ξ_0} равен $l_{\xi_0}(\xi, u)$, то он всюду отличен от нуля.

Функция Гамильтона $f \circ h_{\xi_0}^{-1}$ в области $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_{\xi}| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^2(\tilde{z}, \tilde{w})$ имеет вид $f \circ h_{\xi_0}^{-1} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^3 + \xi_0$, $f \circ \phi_{\xi_0} = \xi$, поэтому в координатах (ξ, u) функция f имеет вид $f = \xi$. Поэтому $\bar{f}$ корректно определена, является аналитической и не имеет критических точек в $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$.

Теорема 6 и теорема 7, п. 1) доказаны.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ в координатах (ξ, u) ,

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = \left(0, \frac{1}{l_{\xi_0}(\xi, u)}\right) = \frac{1}{l_{\xi_0}(\xi, u)} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Отсюда следует, что векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ не имеет нулей на $\overline{T}_{\xi} \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0}^2)$.

Векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 , будучи гладкими векторными полями на каждом инвариантном компактном подмножестве $M_C^4 := \bigcup_{|\xi| \leq C} \overline{T}_{\xi} \subset M^4$, содержащем все особые слои, где $C > 0$ – любая константа, превосходящая $\max\{|f(p_1)|, |f(p_2)|\}$.

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ рассмотрим в абелевой группе $(\mathbb{C}, +)$ подгруппы $2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ и $2\pi\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Так как числа $2\pi, \lambda \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, то факторпространство $\mathbb{T}_{\lambda}^2 := \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})$ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

СЛЕДСТВИЕ 5 (координаты действие-угол для пополненной системы). Для $\mathbb{C}$ -гамильтонова пополнения $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ любой $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы

$(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны. Для любого неособого слоя $\bar{T}_{\xi}$ существуют числа $\lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\omega_{\xi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и комплексный диффеоморфизм

$$f_{\xi} = f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi)): \bar{T}_{\xi} \rightarrow \mathbb{T}_{\lambda(\xi)}^2 = \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z})$$

на двумерный тор такие, что $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}|_{\bar{T}_{\xi}} = \omega_{\xi} \frac{d}{df_{\xi}}$, где $\frac{d}{df_{\xi}} \in \text{Vect}(\bar{T}_{\xi})$ – координатное векторное поле на слое $\bar{T}_{\xi}$, отвечающее координатному диффеоморфизму $f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$, т.е. диффеоморфизм $f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$ выпрямляет интегральные траектории на $\bar{T}_{\xi}$. Вещественные канонические координаты действие-угол для пополненной системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ определены (неоднозначным образом) в малой окрестности любого неособого слоя в M^4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полнота векторных полей доказана в теореме 7, п. 2). Согласно теореме 5, п. 2) и доказательству вещественной теоремы Лиувилля для гамильтоновой системы $(M^4, \text{Re } \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \text{Re } \bar{f})$ с дополнительным интегралом $\text{Im } \bar{f}$ (см. лемму 1) слой $\bar{T}_{\xi}$ гомеоморфен двумерному тору, при этом определено транзитивное и локально свободное $\mathbb{C}$ -дифференцируемое действие $\rho_{\xi}: \mathbb{C} \times \bar{T}_{\xi} \rightarrow \bar{T}_{\xi}$ плоскости $\mathbb{C}$ на слое $\bar{T}_{\xi}$ сдвигами вдоль интегральных траекторий векторных полей $c \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$, $c \in \mathbb{C}$, за единичное время. Стабилизатор точки для этого действия не зависит от точки и является решеткой в $\mathbb{C}$ вида $\lambda_1(\xi)\mathbb{Z} + \lambda_2(\xi)\mathbb{Z}$, где числа $\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi) \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Поэтому для любой точки $P_{\xi} \in \bar{T}_{\xi}$ $\mathbb{C}$ -дифференцируемое отображение $\rho_{\xi}|_{\mathbb{C} \times \{P_{\xi}\}} \circ \mu_{\xi}$ индуцирует $\mathbb{C}$ -диффеоморфизм $j_{\xi}: \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z}) \rightarrow \bar{T}_{\xi}$, где $\mu_{\xi}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – оператор умножения на $\frac{2\pi}{\lambda_1(\xi)}$, $\lambda(\xi) := 2\pi \frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_1(\xi)}$. В качестве координаты $f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$ возьмем обратный диффеоморфизм $j_{\xi}^{-1} =: f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$. Тогда

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}|_{\bar{T}_{\xi}} = \frac{\lambda_1(\xi)}{2\pi} \frac{d}{df_{\xi}} = \omega_{\xi} \frac{d}{df_{\xi}},$$

где $\omega_{\xi} := \frac{\lambda_1(\xi)}{2\pi}$.

Существование вещественных координат действие-угол для пополненной системы следует в силу теоремы Лиувилля из существования пополненной системы (см. теорему 6) и компактности слоев $\bar{T}_{\xi} \subset M^4$ (см. теорему 5).

Как и в доказательстве следствия 5, рассматривается $\mathbb{R}$ -линейный оператор $\mu_{\xi}^{\mathbb{R}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенный на базисе формулами $\mu_{\xi}^{\mathbb{R}}(\lambda_1(\xi)) = (2\pi, 0)$ и $\mu_{\xi}^{\mathbb{R}}(\lambda_2(\xi)) = (0, 2\pi)$. Тогда отображение $\rho_{\xi}|_{\mathbb{C} \times \{P_{\xi}\}} \circ \mu_{\xi}^{\mathbb{R}}$ индуцирует $\mathbb{R}$ -диффеоморфизм $j_{\xi}^{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2 \rightarrow \bar{T}_{\xi}$. Положим

$$\varphi_{\xi} \bmod 2\pi := (j_{\xi}^{\mathbb{R}})^{-1}: \bar{T}_{\xi} \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 =: \mathbb{T}^2.$$

С помощью этого строятся (см. доказательство теоремы Лиувилля) вещественные канонические координаты действие-угол

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi): \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow D^2 \times \mathbb{T}^2 \quad (4)$$

для “пополнения” $(M^4, \text{Re } \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \text{Re } \bar{f})$ гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \text{Re } \omega_{\mathbb{C}}, \text{Re } f)$ с дополнительным первым интегралом $\text{Im } f$, определенные в малой окрестности

$\tilde{U}_{\xi_0} = \bigcup_{|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}} \bar{T}_{\xi} \subset M^4$ любого неособого слоя $\bar{T}_{\xi_0}$ и принимающие значения в области $D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – область, гомеоморфная открытому кругу, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\xi_0) > 0$ – достаточно малое число. Покажем, что значение переменных угол на множестве бесконечно удаленных точек $p_{\xi} \in \tilde{U}_{\xi_0}$ может быть выбрано равным $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_{\xi}) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_{\xi}) = 0 \bmod 2\pi$.

СЛЕДСТВИЕ 6 (вещественные координаты действие-угол для исходной системы). *Вещественные координаты действие-угол $I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi$ в окрестности $\tilde{U}_{\xi_0}$ неособого слоя $\bar{T}_{\xi_0}$ в M^4 для “пополненной” системы $(M^4, \text{Re } \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \text{Re } \bar{f})$ могут быть выбраны таким образом, что их ограничение на $\mathbb{C}^2 \cap \tilde{U}_{\xi_0}$ задает вещественные канонические координаты в окрестности слоя T_{ξ_0} для гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \text{Re } \omega_{\mathbb{C}}, \text{Re } f)$, принимающие значения в области $D^2 \times (\mathbb{T}^2 \setminus \{(0, 0) \bmod 2\pi\})$. При этом в указанной окрестности первые интегралы $\text{Re } f$ и $\text{Im } f$ являются функциями от I_1, I_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поверхность $\Lambda := \{p_{\xi} \mid \xi \in \mathbb{C}\} = M^4 \setminus \mathbb{C}^2$, состоящую из бесконечно удаленных точек. Пусть $v \in T_{p_{\xi}}\Lambda$, $v \neq 0$. Тогда пара (v, iv) – базис в $T_{p_{\xi}}\Lambda$. Симплектическая структура $\omega(v, iv) = \text{Re } \omega_{\mathbb{C}}(v, iv) = 0$, откуда следует, что Λ – лагранжева поверхность в M^4 . Отсюда получаем, что переменные угол можно выбрать (для заданных переменных действие) таким образом, что $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_{\xi}) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_{\xi}) = 0 \bmod 2\pi$, $|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}$.

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f и на каждом неособом слое $\bar{T}_{\xi}$ имеет четыре неподвижные точки, включая бесконечно удаленную точку p_{ξ} . В координатах (ξ, u) из определения 13 эта инволюция имеет вид $(\xi, u) \mapsto (\xi, -u)$, см. (2) и (3). В вещественных координатах действие-угол из следствия 6 инволюция имеет вид

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) \mapsto (I_1, I_2, -\varphi_1 \bmod 2\pi, -\varphi_2 \bmod 2\pi).$$

СЛЕДСТВИЕ 7. *Для $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a, b, c, d, e)$ в окрестности U_{ξ_0} неособого слоя $T_{\xi_0} \subset U_{\xi_0}$, $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$, значения координат действия (I_1, I_2) на слое $T_{\xi} \subset U_{\xi_0}$ могут быть вычислены по следующим формулам:*

$$I_{\ell}(T_{\xi}) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_{\gamma_{\xi, \ell}} z_{\xi}(w) dw, \quad \ell = 1, 2,$$

где

$$z_{\xi}(w) = \sqrt{\frac{\xi - bw^3 - cw^2 - dw - e}{a}}$$

– одна из двух ветвей, непрерывно зависящая от ξ , $\gamma_{\xi, 1}, \gamma_{\xi, 2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ – простые пути, ведущие из $w_{\xi, 1}$ в $w_{\xi, 3}$ и из $w_{\xi, 2}$ в $w_{\xi, 3}$ соответственно, пересекающиеся только в конечной точке $w_{\xi, 3}$ и непрерывно зависящие от ξ , $w_{\xi, m}$, $m = 1, 2, 3$, – корни уравнения $bw^3 + cw^2 + dw + e = \xi$, непрерывно зависящие от ξ . Переменная действия I_{ℓ} отвечает циклу на T_{ξ} , соответствующему последовательному прохождению пути

$$(z_{\xi}(\gamma_{\xi, \ell}(t)), \gamma_{\xi, \ell}(t)), \quad t \in [0, 1],$$

и пути

$$(-z_{\xi}(\gamma_{\xi, \ell}(1-t)), \gamma_{\xi, \ell}(1-t)), \quad t \in [0, 1], \quad \ell = 1, 2.$$

§ 6. Гиперэллиптический гамильтониан степени четыре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Назовем $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системой с гиперэллиптическим гамильтонианом степени четыре тройку $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w), \quad \omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw, \quad f(z, w) = az^2 + bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k, \\ a, b, c, d, e, k \in \mathbb{C}, \quad ab \neq 0.$$

Обозначим эту систему через $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$. Систему $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ назовем невырожденной, если функция f имеет ровно три различных критических значения (это равносильно тому, что f – комплекснозначная простая функция Морса, см. лемму 7 ниже).

ЛЕММА 7. *Всякая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система*

$$\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0), \quad r, s, p \in \mathbb{C}, \quad rs \neq 0,$$

имеет не более трех особых слоев $\Gamma_{f(0, t_j)}$, $j = 1, 2, 3$, некоторые из которых могут совпадать, где

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{-3(p+1) - \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}}{8}, \\ t_3 = \frac{-3(p+1) + \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}}{8}.$$

$\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$ невырождена тогда и только тогда, когда

$$rs \neq 0, \quad p \notin \left\{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\right\}.$$

Для любого $j \in \{1, 2, 3\}$ существует $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), s_1p_1, 0, 0)$, гамильтоново эквивалентная $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$, с гамильтоновой эквивалентностью h_j такой, что $h_j(0, t_j) = (0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $q = \sqrt{9(p+1)^2 - 32p}$ для произвольной ветви $\sqrt{(\cdot)}$. Особые слои системы отвечают значениям $f(p_j)$, $j = 1, 2, 3$, где $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (0, t_2)$, $p_3 = (0, t_3)$, где

$$t_2 = \frac{-3(p+1) - q}{8}, \quad t_3 = \frac{-3(p+1) + q}{8}.$$

Так как $f(z, w) = rz^2 + sw^2(w+1)(w+p)$, то

$$f(0, t_2) = s \frac{(q+3p+3)^2(-q+5p-3)(q+3p-5)}{2^{12}}, \\ f(0, t_3) = s \frac{(q-3p-3)^2(q+5p-3)(-q+3p-5)}{2^{12}}.$$

Невырожденность системы означает, что значения $f(p_j)$, $j = 1, 2, 3$, попарно различны. Вычисления показывают, что последнее условие равносильно тому, что $p \notin \{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\}$. Рассмотрим три канонических преобразования:

$$h_1: (z, w) \mapsto (z, w), \quad h_2: (z, w) \mapsto \left(\frac{z-t_2}{-\alpha}, -\alpha w\right),$$

где $\alpha = \frac{1}{8}(7 + 9p^2 + q + 3pq + 2\sqrt{2}\sqrt{5 - 6p + 5p^2 + q + pq})$,

$$h_3: (z, w) \mapsto \left(\frac{z - t_3}{-\alpha}, -\alpha w \right),$$

где $\alpha = \frac{1}{8}(7 + 9p^2 + q + 3pq - 2\sqrt{2}\sqrt{5 - 6p + 5p^2 + q + pq})$. Эти преобразования удовлетворяют требованиям леммы.

ТЕОРЕМА 8. *Всякая невырожденная $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$ для некоторых $r, s, p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$, $p \notin \{0, \pm 1, \frac{7 \pm 4i\sqrt{2}}{9}\}$. Две невырожденные $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), p_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_4(r_2, s_2, s_2(p_2+1), s_2p_2, 0, 0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ и $p_1 = p_2$, либо $r_1 = r_2/p_2^2$, $s_1 = s_2p_2^4$ и $p_1 = 1/p_2$, при условии, что образ особой точки $(0, 0)$ относительно гамильтоновой эквивалентности равен $(0, 0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w_1 – критическая точка функции $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k$. Тогда

$$f(z, w) = az^2 + b(w - w_1)^2(w - \alpha)(w - \beta) + \gamma,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \neq w_1$ и $\alpha \neq \beta$, $f(0, w_2) \neq f(0, w_3)$, где w_2 и w_3 – две другие критические точки функции $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k$. Определим отображение $h: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой

$$h: (z, w) \mapsto \left(z(w_1 - \alpha), \frac{w - w_1}{w_1 - \alpha} \right).$$

Отображение h – искомая эквивалентность для $r = a/(w_1 - \alpha)^2$, $s = b(w_1 - \alpha)^4$, $p = (w_1 - \beta)/(w_1 - \alpha)$.

Пусть между системами $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), s_1p_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_4(r_2, s_2, s_2(p_2+1), s_2p_2, 0, 0)$ задана гамильтонова эквивалентность h . Особые слои систем отвечают значениям $f_i(p_{i,j})$, $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3$, где $p_{i,1} = (0, 0)$, $p_{i,2} = (0, t_{i,2})$, $p_{i,3} = (0, t_{i,3})$, где

$$t_{i,2} = \frac{-3(p_i + 1) - q_i}{8}, \quad t_{i,3} = \frac{-3(p_i + 1) + q_i}{8}, \quad i = 1, 2,$$

где q_i определено как в доказательстве леммы 7. Так как $f_i(z, w) = r_i z^2 + s_i w^2(w + 1)(w + p_i)$, то

$$\begin{aligned} f_i(0, t_{i,2}) &= s_i \frac{(q_i + 3p_i + 3)^2(-q_i + 5p_i - 3)(q_i + 3p_i - 5)}{2^{12}}, \\ f_i(0, t_{i,3}) &= s_i \frac{(q_i - 3p_i - 3)^2(q_i + 5p_i - 3)(-q_i + 3p_i - 5)}{2^{12}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейные операторы $A_{i,j}$ в $T_{p_{i,j}}\mathbb{C}^2$ – операторы линеаризации векторного поля

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f_i = (-s_i(4w^3 + 3(p_i + 1)w^2 + 2p_i w), 2r_i z)^T$$

в точках $p_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$. В координатах z , w они задаются матрицами

$$A_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & -2s_i p_i \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{i,2} = \begin{pmatrix} 0 & -s_i q_i \frac{q_i + 3 + 3p_i}{8} \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{i,3} = \begin{pmatrix} 0 & -s_i q_i \frac{q_i - 3 - 3p_i}{8} \\ 2r_i & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\det A_{i,1} = 4r_i s_i p_i, \quad \det A_{i,2} = r_i s_i q_i \frac{q_i + 3 + 3p_i}{4},$$

$$\det A_{i,3} = r_i s_i q_i \frac{q_i - 3 - 3p_i}{4},$$

где $i = 1, 2$.

Пусть при отображении h выполнено $h(p_{1,j}) = p_{2,\sigma(j)}$, где $j = 1, 2, 3$ и $\sigma \in S_3$ – некоторая перестановка. Имеем $A_{2,\sigma(j)} \circ dh|_{p_{1,j}} = dh|_{p_{1,j}} \circ A_{1,j}$, поэтому $\det A_{1,j} = \det A_{2,\sigma(j)}$, и $f_1(p_{1,k}) - f_1(p_{1,l}) = f_2(p_{2,\sigma(k)}) - f_2(p_{2,\sigma(l)})$, где $j, k, l = 1, 2, 3$. Отсюда получаем систему уравнений для величин r_2 , s_2 , p_2 , $\sigma \in S_3$ при заданных r_1 , s_1 , p_1 , вытекающую из гамильтоновой эквивалентности. Эта система имеет ровно два различных решения со свойством $\sigma(1) = 1$, а именно решение $r_2 = r_1$, $s_2 = s_1$, $p_2 = p_1$, $\sigma = \text{id}$ и решение $r_2 = r_1/p_1^2$, $s_2 = s_1 p_1^4$, $p_2 = 1/p_1$, $\sigma = (23)$.

Решение $r_2 = r_1$, $s_2 = s_1$, $p_2 = p_1$, $\sigma = \text{id}$ соответствует гамильтоновой эквивалентности $(z_1, w_1) \mapsto (z_1, w_1) = (z_2, w_2)$, а решение $r_2 = r_1/p_1^2$, $s_2 = s_1 p_1^4$, $p_2 = 1/p_1$, $\sigma = (23)$ соответствует гамильтоновой эквивалентности $(z_1, w_1) \mapsto (p_1 z_1, w_1/p_1) = (z_2, w_2)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\bar{T}_\xi$ – пополнение произвольного (не обязательно неособого) слоя T_ξ системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ относительно метрики пополнения g_ξ (точнее, относительно функции расстояния ρ_ξ , см. определение 8). Тогда

1) выполнено $\bar{T}_\xi = T_\xi \cup \{p_{\xi,1}, p_{\xi,2}\}$, где $p_{\xi,1}$, $p_{\xi,2}$ – две точки, называемые бесконечно удаленными;

2) если T_ξ – неособый слой, то существует гомеоморфизм $\bar{T}_\xi \approx \mathbb{T}^2$;

3) существует комплексная координата в окрестности каждой из бесконечно удаленных точек $p_{\xi,j} \in \bar{T}_\xi$, $j = 1, 2$, в $\bar{T}_\xi$, являющаяся $\mathbb{C}$ -дифференцируемой в проколотой окрестности.

В доказательстве теоремы 9 используются две леммы, аналогичные леммам 5 и 6 и приведенные ниже.

ЛЕММА 8. Для любого (не обязательно неособого) слоя T_ξ , $\xi \in \mathbb{C}$, существует такое покрытие пространства $\mathbb{C}^2$ замкнутыми подмножествами $U_{\xi,i} \subset \mathbb{C}^2$, гомеоморфными $\mathbb{C} \times \bar{D}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, что $U_{\xi,i} \subset U_{\xi,j}$ при $i < j$, $\bigcup_{i=1}^\infty U_{\xi,i} = \mathbb{C}^2$ и для любого i выполнено

$$T_\xi \setminus U_{\xi,i} \approx (D^2 \setminus \{\cdot\}) \sqcup (D^2 \setminus \{\cdot\}),$$

где D^2 – открытый двумерный диск.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Согласно лемме 3 для любого $\xi \in \mathbb{C}$ существует вещественное число $r_0(\xi) > 0$ такое, что определена ветвь

$$\sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi}: \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \rightarrow \mathbb{C},$$

являющаяся гомеоморфизмом на образ, где $\overline{D}_{r_0(\xi)}^2 \subset \mathbb{C}_w$ – замкнутый двумерный шар радиуса $r_0(\xi)$ с центром в нуле. Положим $r_0 := r_0(\xi)$.

Определим отображение $h_\xi: \mathbb{C}_z \times (\mathbb{C}_w \setminus \overline{D}_{r_0}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ формулой

$$h_\xi(z, w) = (\sqrt{a}z, \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi}),$$

где фиксирована одна из ветвей $\sqrt{(\cdot)}$ и $\sqrt[4]{(\cdot)}$. Тогда h_ξ определено корректно и является гомеоморфизмом на образ, координатами на образе являются

$$\tilde{z} = \sqrt{a}z, \quad \tilde{w} = \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi}. \quad (5)$$

Положим

$$\tilde{r}_0 := \sqrt[4]{\max_{|w| \leq r_0} |bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi|}.$$

Докажем, что $U_{\xi,i} := (\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_0(\xi)}^2) \cup h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_{r_i(\xi)}^2)$ – искомая последовательность, где $r_i = r_i(\xi) = \tilde{r}_0 + i$. Рассмотрим отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}}: \mathbb{C}_{\tilde{z}, \tilde{w}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, где $\text{Pr}_{\tilde{z}}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}$.

Шаг 2. Докажем, что

$$\text{Im}(\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}) = \mathbb{C}_z \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)}^2 \approx D^2 \setminus \{0\}.$$

Покажем сначала, что

$$\text{Im}(\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}) \subseteq \mathbb{C}_z \setminus \overline{D}_{r_i(\xi)}^2.$$

Пусть $\tilde{z}_0 \in (\text{Pr}_{\tilde{z}} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}})$. Рассмотрим $\tilde{w}_0$ такое, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in \text{Im}(h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}})$. Отсюда следует, что $|\tilde{w}_0| > r_i$, а значит, $|\tilde{z}_0| > r_i^2$.

Обратно, пусть $\tilde{z}_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^2}^2$. Тогда существует $\tilde{w}_0$ такое, что $\tilde{z}_0^2 + \tilde{w}_0^4 = 0$ и $|\tilde{w}_0| > r_i$. Все корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi = \tilde{w}_0^4$ различны и по модулю больше r_0 , из чего следует, что $(\tilde{z}_0, \tilde{w}_0) \in \text{Im}(h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}})$ и отображение $\text{Pr}_{\tilde{z}_0} \circ h_\xi|_{T_\xi \setminus U_{\xi,i}}$ является неразветвленным четырехлистным накрытием с базой $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_i^2}^2 \approx D^2 \setminus \{*\}$.

Шаг 3. Докажем, что накрывающее пространство имеет две компоненты связности. Рассмотрим два поднятия

$$\tilde{\gamma}_\pm(t) = \left(r_i^2 \exp\{\pi i t\}, r_i \exp\left\{\frac{2\pi i t \pm \pi}{4}\right\} \right)$$

замкнутого пути $\gamma(t) = r_i^2 e^{\pi i t}$, $0 \leq t \leq 4$, при накрытии $\text{Pr}_{\tilde{z}}|_{h_\xi(T_\xi \setminus U_{\xi,i})}$. Тогда каждый из $\tilde{\gamma}_\pm$ – простой замкнутый путь, двулистно накрывающий простой замкнутый путь $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2$, из чего следует, что накрывающее пространство имеет две компоненты связности.

ЛЕММА 9. Выполнено соотношение $\rho_\xi(x, y) = o(1)$, где $R \rightarrow \infty$, $x, y \in T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$ и x, y лежат в одной компоненте связности $T_\xi \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{f}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4$, $\tilde{\omega}_{\mathbb{C}} = d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$ и $\tilde{\xi} = 0$, тогда

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \tilde{f} = -4\tilde{w}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + 2\tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}, \quad \tilde{\Delta}_0 = \frac{-4\tilde{w}^3 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w}}{16\tilde{w}^6 + 4\tilde{z}^2} \Big|_{T\tilde{T}_0}.$$

Так как $\tilde{z}^2 + \tilde{w}^4 = 0$ на $\tilde{T}_0 = \tilde{f}^{-1}(0)$, то

$$-4\tilde{w}^3 d\tilde{z} + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{16\tilde{w}^6 d\tilde{w}}{2\tilde{z}} + 2\tilde{z} d\tilde{w} = \frac{16\tilde{w}^6 + 4\tilde{z}^2}{2\tilde{z}} d\tilde{w}$$

на $\tilde{T}_0$. Поэтому $\tilde{\Delta}_0 = \frac{d\tilde{w}}{2\tilde{z}}$, из чего следует, что

$$\tilde{g}_0 = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{z}|^2} = \frac{|d\tilde{w}|^2}{4|\tilde{w}|^4}.$$

Далее, пусть x_0 и y_0 таковы, что $|x| = |x_0|$, $|y| = |y_0|$ и $x_0 = (iR_x^2, R_x)$, $y_0 = (iR_y^2, R_y)$ для некоторых $R_x > 0$ и $R_y > 0$. Согласно доказательству леммы 8 такие $x_0, y_0 \in \tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{T}_0$, лежащие в одной компоненте связности $\tilde{T}_0 \setminus (\mathbb{C} \times D_R^2)$, существуют. Пусть $\tilde{T}_0 \setminus (\mathbb{C} \times D_R^2) = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$ и $x_0, y_0 \in \tilde{V}_1$. Верно неравенство $\tilde{\rho}_0(x, y) \leq \tilde{\rho}_0(x, x_0) + \tilde{\rho}_0(x_0, y_0) + \tilde{\rho}_0(y_0, y)$.

Оценим $\tilde{\rho}_0(x, x_0)$ и $\tilde{\rho}_0(y, y_0)$. Рассмотрим двулистное накрытие

$$p: \tilde{V}_1 \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(\tilde{z}, \tilde{w}) = \tilde{w}.$$

Отсюда получаем, что

$$\tilde{\rho}_0(x, x_0) \leq \oint_{|\tilde{w}|=R_x} \frac{1}{\sqrt{4R_x^4}} |d\tilde{w}| = \frac{\pi}{R_x}.$$

Аналогично, $\tilde{\rho}_0(y, y_0) \leq \frac{\pi}{R_y}$.

Имеем следующую оценку:

$$\rho_{\xi}(x_0, y_0) \leq \left| \int_{R_x}^{R_y} \frac{dw}{\sqrt{4w^3}} \right| \leq \frac{1}{\min\{R_x, R_y\}},$$

из которой следует, что

$$\rho_{\xi}(x, y) \leq \frac{\pi}{R_x} + \frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} + \frac{\pi}{R_y} \leq \frac{8}{\min(R_x, R_y)}.$$

Согласно доказательству леммы 8 (шаг 1) в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_0(\xi)}^2)$ существует замена координат $h_{\xi}(z, w) = (\tilde{z}, \tilde{w}) = (\sqrt{a}z, \sqrt[4]{bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi})$, поэтому $(f - \xi) \circ h_{\xi}^{-1} = \tilde{f} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4$. Оценим Δ_{ξ} . Имеем

$$(h_{\xi}|_{T_{\xi} \setminus h_{\xi}^{-1}(\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2)})^* \tilde{\Delta}_0 = A_{\xi} \Delta_{\xi},$$

где функция $A_{\xi}: T_{\xi} \setminus (\mathbb{C} \times \overline{D}_R^2) \rightarrow \mathbb{C}$ определена условием $A_{\xi} \omega_{\mathbb{C}} = h_{\xi}^* \tilde{\omega}_{\mathbb{C}}$. Так как

$$A_{\xi} = \sqrt{a} \frac{4bw^3 + 3cw^2 + 2dw + e}{4(bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi)^{\frac{3}{4}}} = A(1 + o(1))$$

при $R \rightarrow \infty$, где $A = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\rho_\xi < \frac{2}{|A|}\tilde{\rho}_0$. Осталось заметить, что

$$\frac{1}{\min\{R_x, R_y\}} = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

при $R \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Пункт 1) является прямым следствием лемм 8 и 9. Докажем пп. 2) и 3). Из лемм следует, что любой слой $\bar{T}_\xi$ компактен. Рассмотрим отображение $p: \bar{T}_\xi \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, где $p(z, w) = w$ – разветвленное двулистное накрытие, сохраняющее ориентацию. Особыми значениями (т.е. образами точек, в которых p не является локальным гомеоморфизмом) являются корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k - \xi = 0$. Бесконечно удаленная точка не является точкой ветвления, так как имеет ровно два прообраза. Так как существует хотя бы одна точка ветвления, то накрываемое пространство $\bar{T}_\xi$ связно. Согласно формуле Римана–Гурвица имеем $\chi(\bar{T}_\xi) = 2\chi(\bar{\mathbb{C}}) - 4 = 0$, из чего следует, что $\bar{T}_\xi$ гомеоморфно тору.

Введем координату $u_{\xi,j}$ на слое $\bar{T}_\xi$ в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки $p_{\xi,j}$, $j = 1, 2$, соотношением:

$$\begin{cases} \tilde{z} = (-1)^{j-1} i u_{\xi,j}^{-2}, \\ \tilde{w} = u_{\xi,j}^{-1}, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_{\xi,j}: V_j \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)}^2 \setminus \{0\}$, а V_j – связная компонента

$$T_\xi \setminus h_\xi^{-1}(\mathbb{C} \times \bar{D}_{\tilde{r}_0(\xi)}^2) \approx (D^2 \setminus \{\cdot\}) \sqcup (D^2 \setminus \{\cdot\})$$

такая, что $p_{\xi,j} \in \bar{V}_j$ (см. лемму 8). Продолжим диффеоморфизм $u_{\xi,j}$ до гомеоморфизма $\bar{u}_{\xi,j}: \bar{V}_j \rightarrow D_{\tilde{r}_0(\xi)}^2$ в бесконечно удаленную точку $p_{\xi,j}$ соотношением $\bar{u}_{\xi,j}(p_{\xi,j}) = 0$, $j = 1, 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. $\mathbb{C}$ -гамильтоновым пополнением $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$, обозначаемым через $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$, назовем $\mathbb{C}$ -гамильтонову систему $(M^4, \bar{\omega}_\mathbb{C}, \bar{f})$, где

1) множество

$$M^4 = \bigcup_{\xi \in \mathbb{C}} \bar{T}_\xi := \{(\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{C}, x \in \bar{T}_\xi\}$$

обладает структурой $\mathbb{C}$ -гладкого многообразия, задаваемой следующим набором карт: $U \approx V$, $U_{\xi_0,j} \approx V_{\xi_0,j}$, $j = 1, 2$, где $U, U_{\xi_0,j} \subset M^4$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, и функций перехода: карта $U \approx V := \mathbb{C}^2(z, w)$, семейство карт $U_{\xi_0,j} \approx V_{\xi_0,j} := \{(\xi, u_j) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u_j| < \varepsilon\}$, $\xi_0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, где $\varepsilon = \varepsilon(\xi_0) > 0$, а функция перехода $\phi_{\xi_0,j}: V'_{\xi_0,j} \rightarrow V'$, где

$$\begin{aligned} V' &:= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |f(z, w) - \xi_0| < \varepsilon, (z, w) \in h_{f(z,w)}^{-1}(\mathbb{C}_{\tilde{z}} \times (\mathbb{C}_{\tilde{w}} \setminus \bar{D}_{\tilde{r}_0(f(z,w))}^2))\}, \\ V'_{\xi_0,j} &:= V_{\xi_0,j} \setminus \{(\xi, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\}, \end{aligned}$$

определена с помощью преобразований (5) и (6):

$$(\xi, u_j) \mapsto (z, w) := h_\xi^{-1}(\tilde{z} = (-1)^{j-1} i u_j^{-2}, \tilde{w} = u_j^{-1});$$

2) выполнено $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}|_U = \varphi^* \omega_{\mathbb{C}}$ и $\bar{f}|_U = f \circ \varphi$, где $\varphi: U \rightarrow V = \mathbb{C}^2$ – координатный гомеоморфизм для карты $U \approx V$.

Отметим, что по определению M^4 точки $p_{\xi_1, j_1} \neq p_{\xi_2, j_2}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$ или $j_1 \neq j_2$. Далее будем отождествлять $\mathbb{C}^2 = V$ с открытым подмножеством $U \subset M^4$ посредством координатного гомеоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$.

ТЕОРЕМА 10 (существование $\mathbb{C}$ -гамильтонова пополнения). *Любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ имеет следующие свойства:*

- 1) для любого $\xi_0 \in \mathbb{C}$ и $j = 1, 2$ функция $\phi_{\xi_0, j}: V'_{\xi_0, j} \rightarrow V'$ инъективна и имеет всюду ненулевой якобиан;
- 2) на комплексном многообразии M^4 $\mathbb{C}$ -дифференциальная 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ и функция Гамильтона $\bar{f}$ определены корректно и являются аналитическими;
- 3) 2-форма $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ невырождена, т.е. всюду отлична от нуля на M^4 и является $\mathbb{C}$ -симплектической структурой.

Таким образом, любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ имеет единственное $\mathbb{C}$ -гамильтоново пополнение $(M^4, \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \bar{f})$.

ТЕОРЕМА 11. *Любая $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ имеет следующие свойства:*

- 1) критические точки функции $\bar{f}$ содержатся в $\mathbb{C}^2$ и совпадают с критическими точками функции f ; в частности, для любого неособого слоя T_{ξ} $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ слой $\bar{T}_{\xi}$ $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\bar{\mathcal{H}}_4(a, b, c, d, e, k)$ является неособым;
- 2) векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 и не имеют нулей вне точек $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 10 и 11. Из доказательства леммы 8 (шаг 1) и формулы (6) следует, что $\varphi_{\xi_0, j}$ инъективно и в координатах $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ в $\mathbb{C}_{z, w}^2 \setminus (\mathbb{C} \times \bar{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ 2-форма $(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} = B_{\xi_0} d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}$, где $B_{\xi_0} = \frac{1}{A_{\xi_0} \circ h_{\xi_0}^{-1}}$ определена в области $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D}_{r_0(\xi_0)}^2)$ определения $(\tilde{z}, \tilde{w})$, $B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w}) \neq 0$ и $|B_{\xi_0}(\tilde{z}, \tilde{w})|$ ограничен на области определения $(\tilde{z}, \tilde{w})$.

Координаты $(\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0}(z, w)$ выражаются через (ξ, u_j) посредством отображения

$$h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j}: (\xi, u_j) \mapsto (\tilde{z}, \tilde{w}) = h_{\xi_0} \circ h_{\xi}^{-1}((-1)^{j-1} i u_j^{-2}, u_j^{-1})$$

так:

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi_0, j}: (\xi, u_j) &\mapsto (z, w) = h_{\xi}^{-1}((-1)^{j-1} i u_j^{-2}, u_j^{-1}), \\ \tilde{z} &= (-1)^{j-1} i u_j^{-2}, \tilde{w} = (\xi - \xi_0 + u_j^{-4})^{1/4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j})^*(d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}) &= (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-3/4} d\xi \wedge du_j, \\ \varphi_{\xi_0, j}^* \omega_{\mathbb{C}} &= (h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j})^*(h_{\xi_0}^{-1})^* \omega_{\mathbb{C}} \\ &= (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0, j}) (1 + (\xi - \xi_0) u_j^4)^{-3/4} d\xi \wedge du_j. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование непрерывной и всюду невырожденной симплектической структуры $l_{\xi_0,j}(\xi, u_j)d\xi \wedge du_j$ на $V_{\xi_0,j} = \{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, |u_j| < \varepsilon\}$, совпадающей с $\varphi_{\xi_0,j}^* \omega_{\mathbb{C}}$ на $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_j| < \varepsilon\}$, где

$$\begin{aligned} l_{\xi_0,j}(\xi, u_j) &= (-1)^{j-1} \frac{i}{2} (1 + (\xi - \xi_0)u_j^4)^{-3/4} B_{\xi_0} \circ h_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0,j}(\xi, u_j) \\ &= (-1)^{j-1} \frac{i(1 + (\xi - \xi_0)u_j^4)^{-3/4}}{2A_{\xi_0} \circ \varphi_{\xi_0,j}(\xi, u_j)} \end{aligned}$$

– ограниченная, всюду ненулевая функция,

$$l_{\xi_0,j}(\xi, 0) = (-1)^{j-1} \frac{i}{2A} = (-1)^{j-1} \frac{i}{2\sqrt{a^4 b}},$$

см. доказательство леммы 9. Так как якобиан функции перехода $\varphi_{\xi_0,j}$ равен $l_{\xi_0,j}(\xi, u_j)$, то он всюду отличен от нуля.

Функция Гамильтона $f \circ h_{\xi_0}^{-1}$ в области $\{|\xi - \xi_0| < \varepsilon, 0 < |u_j| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^2(\tilde{z}, \tilde{w})$ имеет вид $f \circ h_{\xi_0}^{-1} = \tilde{z}^2 + \tilde{w}^4 + \xi_0$, $f \circ \varphi_{\xi_0,j} = \xi$, $j = 1, 2$, поэтому в координатах (ξ, u_j) функция f имеет вид $f = \xi$. Значит, $\bar{f}$ корректно определена, является аналитической и не имеет критических точек в $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$.

Теорема 10 и теорема 11, п. 1) доказаны.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ в координатах (ξ, u_j) ,

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = \left(0, \frac{1}{l_{\xi_0,j}(\xi, u_j)} \right) = \frac{1}{l_{\xi_0,j}(\xi, u_j)} \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Отсюда следует, что векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ не имеет нулей на $\bar{T}_{\xi} \setminus (\mathbb{C} \times \bar{D}_{r_0}^2)$.

Векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны на M^4 , будучи гладкими векторными полями на каждом инвариантном компактном подмножестве $M_C^4 := \bigcup_{|\xi| \leq C} \bar{T}_{\xi} \subset M^4$, содержащем все особые слои, где $C > 0$ – любая константа, превосходящая $\max\{|f(p_1)|, |f(p_2)|, |f(p_3)|\}$.

В следствии 8 использованы обозначения из следствия 5.

СЛЕДСТВИЕ 8 (координаты действие-угол для пополненной системы). Для $\mathbb{C}$ -гамильтонова пополнения $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ любой $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f) = \mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ векторные поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ и $i \text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}$ полны. Для любого неособого слоя $\bar{T}_{\xi}$ существуют числа $\lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\omega_{\xi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и комплексный диффеоморфизм

$$f_{\xi} = f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi)) : \bar{T}_{\xi} \rightarrow \mathbb{T}_{\lambda(\xi)}^2 = \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda(\xi)\mathbb{Z})$$

на двумерный тор такие, что $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} \bar{f}|_{\bar{T}_{\xi}} = \omega_{\xi} \frac{d}{df_{\xi}}$, где $\frac{d}{df_{\xi}} \in \text{Vect}(\bar{T}_{\xi})$ – координатное векторное поле на слое $\bar{T}_{\xi}$, отвечающее координатному диффеоморфизму $f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$, т.е. диффеоморфизм $f_{\xi} \bmod(2\pi, \lambda(\xi))$ выпрямляет интегральные траектории на $\bar{T}_{\xi}$. Вещественные канонические координаты действие-угол для пополненной системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ определены (неоднозначным образом) в малой окрестности любого неособого слоя в M^4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 8 получается дословным повторением доказательства следствия 5, с использованием теоремы 11, п. 2), теоремы 9, п. 2), леммы 1, а также теорем 10 и 9.

Как в (4) и доказательстве следствий 5 и 8, строятся вещественные координаты действие-угол

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi): \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow D^2 \times \mathbb{T}^2$$

для “пополнения” $(M^4, \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \bar{f})$ гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$ с дополнительным первым интегралом $\operatorname{Im} f$, определенные в малой окрестности $\tilde{U}_{\xi_0} = \bigcup_{|\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}} \bar{T}_{\xi} \subset M^4$ любого неособого слоя $\bar{T}_{\xi_0}$ и принимающие значения в области $D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – область, гомеоморфная открытому кругу, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\xi_0) > 0$ – достаточно малое число. Покажем, что значения переменных угол в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,1} \in \tilde{U}_{\xi_0}$ могут быть выбраны равными $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(p_{\xi,1}) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(p_{\xi,1}) = 0$, а в бесконечно удаленных точках $p_{\xi,2} \in \tilde{U}_{\xi_0}$ будут иметь специальный вид.

СЛЕДСТВИЕ 9 (вещественные координаты действие-угол для исходной системы). *Вещественные координаты действие-угол $I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi$ в окрестности $\tilde{U}_{\xi_0}$ неособого слоя $\bar{T}_{\xi_0}$ в M^4 для “пополненной” системы $(M^4, \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} \bar{f})$ могут быть выбраны таким образом, что их ограничение на $\mathbb{C}^2 \cap \tilde{U}_{\xi_0}$ задает вещественные канонические координаты в окрестности слоя T_{ξ_0} для гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re} \omega_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} f)$, принимающие значения в области*

$$(D^2 \times (\mathbb{T}^2 \setminus \{(0,0) \bmod 2\pi\})) \setminus \Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi},$$

где

$$\Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi} := \left\{ \left(I_1, I_2, \frac{\partial J}{\partial I_1}(I_1, I_2) \bmod 2\pi, \frac{\partial J}{\partial I_2}(I_1, I_2) \bmod 2\pi \right) \mid (I_1, I_2) \in D^2 \right\},$$

$J: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая гладкая функция такая, что

$$\Gamma_{(dJ) \bmod 2\pi} \cap (D^2 \times (\mathbb{T}^2 \setminus \{(0,0) \bmod 2\pi\})) = \emptyset.$$

При этом в указанной окрестности первые интегралы $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются функциями от переменных действие I_1, I_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что переменные действие в $\tilde{U}_{\xi_0}$ можно определить по формулам

$$I_j(\bar{T}_{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\xi,j}} \alpha, \quad |\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon},$$

где α – 1-форма на $\tilde{U}_{\xi_0}$ такая, что $d\alpha = \operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}$, $s_{\xi,j}$ – базисные циклы на торе $\bar{T}_{\xi}$, $j = 1, 2$. Рассмотрим множество $M^4 \setminus \mathbb{C}^2$ бесконечно удаленных точек. Оно состоит из двух поверхностей $\Lambda_j := \{p_{\xi,j} \mid \xi \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$. Пусть $v \in T_{p_{\xi,j}} \Lambda_j$, $v \neq 0$. Тогда пара (v, iv) – базис в $T_{p_{\xi,j}} \Lambda_j$. Симплектическая структура $\operatorname{Re} \bar{\omega}_{\mathbb{C}}(v, iv) = 0$, откуда получаем, что Λ_1 и Λ_2 – лагранжевы поверхности в M^4 . Отсюда следует, что переменные угол можно выбрать (для заданных переменных действие) таким образом, что $(\varphi_1 \bmod 2\pi)(\Lambda_1) = (\varphi_2 \bmod 2\pi)(\Lambda_1) = 0$.

Построенные переменные действие-угол в $\tilde{U}_{\xi_0}$ являются каноническими и задают гомеоморфизм $\tilde{U}_{\xi_0} \approx D^2 \times \mathbb{T}^2$, где $D^2 := I(\tilde{U}_{\xi_0})$, $I = (I_1, I_2)$. Определим функцию $\tilde{J}: \tilde{U}_{\xi_0} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\tilde{J}(\bar{T}_\xi) = \int_{\gamma_{\xi,1} \gamma_\xi \gamma_{\xi,2}^{-1}} \alpha, \quad |\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon},$$

где $\gamma_{\xi,j}$ – путь на поверхности Λ_j , $\gamma_{\xi,j}(t) := p_{(1-t)\xi_0 + t\xi,j}$, $0 \leq t \leq 1$, $j = 1, 2$, γ_ξ – некоторый путь на торе $\bar{T}_\xi$, ведущий из бесконечно удаленной точки $p_{\xi,1}$ в бесконечно удаленную точку $p_{\xi,2}$ и такой, что замкнутый путь $\gamma_{\xi,1} \gamma_\xi \gamma_{\xi,2}^{-1} \gamma_{\xi_0}^{-1}$ стягиваем в $\tilde{U}_{\xi_0} \approx D^2 \times \mathbb{T}^2$. Указанный интеграл не зависит от выбора пути γ_ξ (при фиксированном пути γ_{ξ_0}) в силу лагранжовости тора $\bar{T}_\xi$. Определим функцию $J: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ условием $J \circ I = \tilde{J}$. Тогда

$$(\varphi_j \bmod 2\pi)(p_{\xi,2}) = \frac{\partial J}{\partial I_j}(I(p_{\xi,2})) \bmod 2\pi, \quad |\xi - \xi_0| < \tilde{\varepsilon}, \quad j = 1, 2.$$

Отметим, что антиканоническая инволюция $(z, w) \mapsto (-z, w)$ сохраняет гамильтониан f , на каждом неособом слое $\bar{T}_\xi$ имеет четыре неподвижные точки, принадлежащие T_ξ , и переставляет друг с другом бесконечно удаленные точки $p_{\xi,1}$ и $p_{\xi,2}$. В координатах (ξ, u_1) и (ξ, u_2) из определения 15 эта инволюция имеет вид $(\xi, u_1) \mapsto (\xi, u_2 := u_1)$, см. (5) и (6). В вещественных координатах действие-угол из следствия 9 данная инволюция имеет вид

$$(I_1, I_2, \varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi) \mapsto \left(I_1, I_2, \frac{\partial J}{\partial I_1}(I_1, I_2) - \varphi_1 \bmod 2\pi, \frac{\partial J}{\partial I_2}(I_1, I_2) - \varphi_2 \bmod 2\pi \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 10. Для $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a, b, c, d, e, k)$ в окрестности U_{ξ_0} неособого слоя $T_{\xi_0} \subset U_{\xi_0}$, $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$, значения координат действие (I_1, I_2) и функции J из следствия 9 на слое $T_\xi \subset U_{\xi_0}$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$I_\ell(T_\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\gamma_{\xi,\ell}} z_\xi(w) dw, \quad \ell = 1, 2,$$

$$J(T_\xi) = 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_\xi} \left(\frac{3}{5} z_\xi(w) dw - \frac{2}{5} w dz_\xi(w) \right),$$

где

$$z_\xi(w) = \sqrt{\frac{\xi - bw^4 - cw^3 - dw^2 - ew - k}{a}}$$

– одна из двух ветвей, непрерывно зависящая от ξ , $\gamma_{\xi,1}, \gamma_{\xi,2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ – простые пути, ведущие из $w_{\xi,1}$ в $w_{\xi,4}$ и из $w_{\xi,2}$ в $w_{\xi,4}$ соответственно, пересекающиеся только в конечной точке $w_{\xi,4}$ и непрерывно зависящие от ξ , $w_{\xi,m}$, $m = 1, 2, 3, 4$, – корни уравнения $bw^4 + cw^3 + dw^2 + ew + k = \xi$, непрерывно зависящие от ξ , и $\gamma_\xi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ – полупрямая, выходящая из $w_{\xi,1}$, не проходящая ни через один из $w_{\xi,m}$, $m = 2, 3, 4$, и непрерывно зависящая от ξ . Переменная

действия I_ℓ отвечает циклу на T_ξ , полученному последовательным прохождением пути $(z_\xi(\gamma_{\xi,\ell}(t)), \gamma_{\xi,\ell}(t))$, $t \in [0, 1]$, и пути $(-z_\xi(\gamma_{\xi,\ell}(1-t)), \gamma_{\xi,\ell}(1-t))$, $t \in [0, 1]$, $\ell = 1, 2$. Функция J отвечает простому пути на $\bar{T}_\xi$, соединяющему бесконечно удаленные точки $p_{\xi,1}, p_{\xi,2}$ и полученному последовательным прохождением пути $(-z_\xi(\gamma_\xi(1-t)), \gamma_\xi(1-t))$, $t \in (0, 1]$, и пути $(z_\xi(\gamma_\xi(t)), \gamma_\xi(t))$, $t \in [0, 1)$.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. т. 1, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] L. Gavrilov, “Abelian integrals related to Morse polynomials and perturbations of plane Hamiltonian vector fields”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **49:2** (1999), 611–652.
- [3] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134(176):3(11)** (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62:2** (1989), 373–383.
- [4] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, “Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **135(177):3** (1988), 325–345; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, V. V. Sharko, “Round Morse functions and isoenergy surfaces of integrable hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **63:2** (1989), 319–336.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12:2** (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12:2** (1978), 113–121.
- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли”, *УМН*, **39:2** (1984), 3–56; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Liouville integrability of Hamiltonian systems on Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **39:2** (1984), 1–67.
- [7] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287:5** (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33:2** (1986), 502–506.
- [8] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44:1** (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44:1** (1989), 181–219.
- [9] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Breach, New York, 1995.

Т. А. Лепский (Т. А. Lepskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: timur.lepsky@gmail.com

Поступила в редакцию
27.02.2010 и 24.03.2010