Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, О нульмерных соленидаальных базисных множествах, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 3, 47–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:20:21

УДК 517.938

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова

О нульмерных соленоидальных базисных множествах

Исследуется динамика диффеоморфизмов Смейла–Виеториса (SV), сосредоточенная в базовых полноториях, и описываются возможные базисные множества в базовых полноториях. Изучается топологическая структура 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса SV.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: соленоид, нульмерное множество, базисное множество.

§ 1. Введение

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом (см. [1]) в 1927 г. и независимо Ван Данцигом (см. [2]) в 1930 г. и изучались ими с различных точек зрения (см. [3; введение]). В теории динамических систем соленоид был использован в [4; гл. 4, п. 8] для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Специальные потоки с соленоидальными инвариантными множествами рассматривались в [5]. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл (см. [6]), который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [7]–[10]). Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура (рис. 1).

Подобные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых циклов (см. [11], [12]). Известно (см. [13]), что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия. Этот результат и пример Смейла естественным образом приводят к следующему обобщению конструкции Смейла.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0, 1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией $[0, 1] \rightarrow S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) . Сюръективное C^1 -отображение $g: S^1 \rightarrow S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00192 и № 11-01-00730) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0039).

Рис. 1

Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной производной Dg . Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу d -накрытий (т.е. отображений окружности в себя степени d , которые являются локальными гомеоморфизмами). Будем говорить, что диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу¹ SV , если существует вложенный в M^3 полноторий $\mathcal{B}^3$ (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathcal{B}^3 \subset M^3$, базовым полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^3} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F: \mathcal{B}^3 \rightarrow F(\mathcal{B}^3) \subset \mathcal{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид

$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^2, \quad (1.1)$$

где $g: S^1 \rightarrow S^1$ – неособый C^1 -эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\} \times D^2}: \{t\} \times D^2 \rightarrow \mathcal{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1 -вложением

$$\{t\} \times D^2 \rightarrow \text{int}(\{g(t)\} \times D^2), \quad (1.2)$$

т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что

$$\text{diam}(F^n(\{t\} \times D^2)) \leq C\lambda^n \text{diam}(\{t\} \times D^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

В классическом примере Смейла (см. [6]) эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d: S^1 \rightarrow S^1$ вида $E_d(x) = dx \pmod{1}$ степени $d \geq 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathcal{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1 . В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним.

В [14] автор рассматривал аналогичную конструкцию построения диффеоморфизма $(2n + 2)$ -мерной сферы S^{2n+2} , отталкиваясь от эндоморфизма n -многообразия K^n . Коразмерность $n + 2$ позволяет всегда продолжить вспомогательный диффеоморфизм F на S^{2n+2} . В случае $K^n = S^1$ получаем $2n + 2 = 4$. Продолжение диффеоморфизма F на замкнутое 3-многообразие является более трудной задачей. Это продолжение возможно лишь в случае, когда базовый полноторий стандартно вложен в линзу (см. теорему 1). При этом продолжение на 3-сферу S^3 возможно только тогда, когда ось полнотория $F(\mathcal{B}^3)$ образует тривиальный узел в S^3 при стандартном вложении $\mathcal{B}^3$ в S^3 . В работе [14]

¹Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale и Vietoris.

доказано, что эндоморфизм $K^n \rightarrow K^n$ удовлетворяет аксиоме А Смейла тогда и только тогда, когда соответствующий диффеоморфизм $S^{2n+2} \rightarrow S^{2n+2}$ удовлетворяет аксиоме А Смейла, и, следовательно, имеет место спектральное разложение неблуждающего множества на базисные множества. Типы базисных множеств при этом не изучались.

Основная цель настоящей статьи – исследовать динамику диффеоморфизмов SV, сосредоточенную в базовых полноториях, и описать возможные базисные множества в базовых полноториях. Сначала приведем теорему, которая описывает топологическую структуру 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса SV (в этой теореме мы относим к списку линз трехмерную сферу $S^3 = L_{1,0}$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм из класса SV замкнутого 3-многообразия M^3 . Тогда M^3 можно представить в виде связной суммы $M^3 = L_{p,q} \# M_1$ линзы $L_{p,q}$, $p \geq 1$, и некоторого 3-многообразия M_1 . Более того, существует 3-шар $B \subset L_{p,q}$ такой, что $L_{p,q} \setminus B \subset M^3$ и базовый полноторий принадлежит $L_{p,q} \setminus B$. На любой линзе $L_{p,q}$, $p \geq 1$, существует диффеоморфизм $f: L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$ из класса SV.

Ясно, что для $f \in \text{SV}$ пересечение $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\mathcal{B}^3) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sol}(f)$ является соленоидом. Поскольку соленоид является притягивающим множеством, то неблуждающее множество в базисном полнотории принадлежит соленоиду и самая интересная динамика сосредоточена в $\text{Sol}(f)$. Следующая теорема описывает возможные базисные множества в $\text{Sol}(f) \subset \mathcal{B}^3$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм из класса SV замкнутого 3-многообразия M^3 . Тогда:

- (i) ограничение $f|_{\text{Sol}(f)}$ сопряжено обратному пределу отображения g ;
- (ii) неблуждающее множество, принадлежащее базовому полноторию, содержит ровно одно нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое есть:
 - либо одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда $\Lambda(f) = \text{Sol}(f)$,
 - либо нульмерное базисное множество, и тогда пересечение $\text{NW}(f) \cap \mathcal{B}^3 \subset \text{Sol}(f)$ состоит из множества $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.

Обе возможности реализуются.

Структура работы следующая. В § 2 приводятся необходимые определения и доказывается ряд вспомогательных результатов (в частности, строится символическая модель ограничения диффеоморфизма на соленоиде и описывается неблуждающее множество неособого эндоморфизма окружности). В § 3 и § 4 доказываются основные теоремы.

Авторы благодарят Д. В. Аносова, В. С. Медведева и участников семинаров Л. П. Шильникова и В. З. Гринеса за плодотворные обсуждения. Авторы благодарят М. В. Якобсона за объяснение результатов работы [15] и за обсуждения, которые улучшили понимание динамики эндоморфизмов окружности. Особая благодарность В. З. Гринесу и О. В. Починке за предложения, способствовавшие улучшению работы.

§ 2. Предварительные результаты

Напомним некоторые определения. Пусть $f: M \rightarrow M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M , наделенного некоторой римановой метрикой ρ . Инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное df -инвариантное разложение касательного расслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что

$$\|df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \|df^{-n}(w)\| \leq C\lambda^n \|w\|$$

$$\forall v \in E_\Lambda^s, \quad \forall w \in E_\Lambda^u, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Для $x \in \Lambda$ множества

$$W^s(x) = \left\{ y \in M: \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^j(x), f^j(y)) \rightarrow 0 \right\},$$

$$W^u(x) = \left\{ y \in M: \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \rightarrow 0 \right\}$$

являются гладкими инъективно вложенными подмногообразиями, при этом E_x^s и E_x^u являются касательными пространствами к W_x^s и W_x^u соответственно. Множество $W^s(x)$ (соответственно $W^u(x)$) называется *устойчивым* (соответственно *неустойчивым*) многообразием точки x .

Диффеоморфизм f является *A-диффеоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$. Согласно теореме Смейла (см. [6]) о спектральном разложении множество $NW(f)$ любого A-диффеоморфизма f представляется в виде конечно-го объединения непересекающихся базисных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ таких, что каждое Ω_i является замкнутым, f -инвариантным и содержит всюду плотную в Ω_i орбиту. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от изолированной периодической орбиты. Множество Ω_i называется *аттрактором*, если существует окрестность U этого множества такая, что $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \Omega_i$. Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если топологическая размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки.

Везде далее, если не оговорено противное, $f: M^3 \rightarrow M^3$ принадлежит SV с базовым полноторием $\mathcal{B}$, для которого мы будем придерживаться обозначений, введенных в (1.1)–(1.3). Напомним, что *соленоидом* называется множество канторовского типа (совершенное, замкнутое и нигде не плотное), которое можно представить в виде пересечения последовательности полноториев $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_i \supset \dots$ таких, что для любого $i \geq 1$ ось полнотория $\mathcal{B}_{i+1}$ обходит $n_i \geq 2$ раз ось полнотория $\mathcal{B}_i$, не образуя крюков (см. [16]); последнее условие означает, что отображение $p_1 \circ e(S^1 \times \{z\}): S^1 \rightarrow S^1$ – неособый эндоморфизм для любого $z \in D^2$, где $p_1: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1$ – естественная проекция и $e: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ – вложение полнотория в себя. Известно, что соленоид является связным и вполне разрывным континуумом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество, с топологической размерностью 1.

ЛЕММА 1. Пересечение $\text{Sol}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ является соленоидом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (1.3) для F вытекает, что $F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B})$ для любого $i \geq 0$. Поэтому $F^i(\mathcal{B})$ образуют последовательно вложенные друг в друга полнотории $\mathcal{B} \supset F(\mathcal{B}) \supset \dots \supset F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B}) \supset \dots$. Из (1.1) следует, что ось полнотория $F^{i+1}(\mathcal{B})$ обходит $d \geq 2$ раз ось полнотория $F^i(\mathcal{B})$, не образуя крюков. В силу (1.3) пересечение каждого диска $\{t\} \times D^2$ с $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ является нигде не плотным множеством. Из неравенства $d \geq 2$ вытекает, что это пересечение является совершенным и, следовательно, канторовым множеством в $\{t\} \times D^2$. Отсюда следует, что $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ – соленоид.

ЛЕММА 2. Множество $\text{Sol}(F)$ инвариантно относительно F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условие (1.3), получаем $F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B})$. Тогда

$$F(\text{Sol}(F)) = F\left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})\right) = \bigcap_{n \geq 0} F^{n+1}(\mathcal{B}) = \text{Sol}(F).$$

Аналогичным образом, учитывая, что $\text{Sol}(F) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B}) = \bigcap_{n \geq 1} F^n(\mathcal{B})$, имеем

$$F^{-1}(\text{Sol}(F)) = F^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} F^n(\mathcal{B})\right) = \bigcap_{n \geq 1} F^{n-1}(\mathcal{B}) = \text{Sol}(F).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество преобразований $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям (1.1)–(1.3). Поскольку каждое $F \in \mathfrak{M}$ имеет гладкость C^1 , то множество $\mathfrak{M}$ естественным образом наделяется C^1 -топологией. Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geq 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \dots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.1)$$

Докажем следующую лемму, необходимую для построения символической модели ограничения отображения F на $\text{Sol}(F)$.

ЛЕММА 3. Каждой точке $p \in \text{Sol}(F)$ соответствуют единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$, и соответствующая последовательность замкнутых двумерных дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^2)$ такие, что:

- $p \in \dots \subset D_{i+1} \subset D_i \subset \dots \subset D_0$, $p = \bigcap_{i \geq 0} D_i$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in \{t_0\} \times D^2$. Положим $D_0 = \{t_0\} \times D^2$. Из (1.1) следует, что существуют попарно различные $s_1, \dots, s_d \in S^1$ такие, что $g(s_1) = g(s_2) = \dots = g(s_d) = t_0$, а диски $F(\{s_i\} \times D^2)$ принадлежат диску D_0 , $F(\{s_i\} \times D^2) \subset D_0$, $i = 1, \dots, d$. Согласно (2.1) диски $F(\{s_i\} \times D^2)$ попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(\{s_j\} \times D^2)$. Положим $t_1 = s_j$, $D_1 = \{t_1\} \times D^2$. Тогда $p \in D_1 \subset D_0$.

Предположим, что получены (единственным образом определенные) точки $t_0, \dots, t_{k-1} \in S^1$ и замкнутые двумерные диски $D_0, \dots, D_{k-1}$ такие, что

$$p \in D_{k-1} \subset \dots \subset D_l \subset \dots \subset D_0, \quad D_l = F^l(\{t_l\} \times D^2),$$

где $D_l = \{t_l\} \times D^2$. Таким образом, $p \in \bigcap_{l \geq 0}^{k-1} D_l$. Из (1.1) следует, что существуют

$$S_1, S_2, \dots, S_d \in S^1 \text{ такие, что } g(S_1) = g(S_2) = \dots = g(S_d) = t_{k-1},$$

а диски $F^k(\{S_i\} \times D^2)$ принадлежат диску D_{k-1} , $F^k(\{S_i\} \times D^2) \subset D_{k-1}$. Из (2.1) следует, что существует единственное S_j такое, что $p \in F^k(\{S_j\} \times D^2)$. Положим $t_k = S_j$, $D_k = \{t_k\} \times D^2$. Тогда $p \in D_k \subset D_{k-1} \subset \dots \subset D_0$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$ и замкнутых двумерных дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^2)$ таких, что $p \in \dots \subset D_{i+1} \subset D_i \subset \dots \subset D_0$. Из построения вытекает, что $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из (1.3) следует, что $\text{diam } D_i = \text{diam}(F^i(\{t_i\} \times D^2)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому пересечение $\bigcap_{i \geq 0} D_i$ есть одноточечное множество, совпадающее с p .

Пусть $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (напомним, что в этой топологии база образована множествами $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1 , причем только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1 ; см. [17]). Точками множества $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i \in S_i^1$. Известно, что базу тихоновской топологии образуют так называемые (ε, r) -окрестности, где $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$. Напомним, что окрестность U точки $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ является (ε, r) -окрестностью, если $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\} \in U$ тогда и только тогда, когда $|t_0 - t'_0| < \varepsilon, \dots, |t_r - t'_r| < \varepsilon$.

Обозначим через $\prod_g$ подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на $\prod_g$ индуцируется топологией на $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. Определим на $\prod_g$ отображение $\hat{g}: \prod_g \rightarrow \prod_g$, положив

$$\hat{g}(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, \dots, t_i, \dots\}.$$

Следуя [18] (см. также [10]), пространство $\prod_g$ с отображением $\hat{g}$ будем называть *обратным пределом преобразования g* .

ЛЕММА 4. *Отображение $\hat{g}$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = \{r_0, \dots, r_i, \dots\} \in \prod_g$, и пусть $U_{\varepsilon, k}$ – (ε, k) -окрестность точки $\hat{g}(r)$, т.е. $r' = \{r'_0, \dots, r'_i, \dots\} \in U_{\varepsilon, k}$ тогда и только тогда, когда

$$|g(r_0) - g(r'_0)| < \varepsilon, \quad |r_i - r'_i| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Так как g непрерывно, то существует $0 < \delta \leq \varepsilon$ такое, что $|r_0 - r'_0| < \delta$ влечет $|g(r_0) - g(r'_0)| < \varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0, \dots, r_i, \dots\}$, положив $r' = \{r'_0, \dots, r'_i, \dots\} \in U_\delta$, если $|r_i - r'_i| < \delta$ для любого $i = 1, \dots, k-1$. Тогда $\hat{g}(U_\delta) \subset U_{\varepsilon, k}$.

Определим отображение $\theta: \text{Sol}(F) \rightarrow \prod_g$ следующим образом. Согласно лемме 3 любой точке $p \in \text{Sol}(F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ такая, что $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Положим $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$.

Множество $\{t\} \times D^2 \stackrel{\text{def}}{=} D_t^2$ назовем t -сечением, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с D^2 посредством проекции

$p_2: S^1 \times D^2 \rightarrow D^2$. Согласно (1.2) диффеоморфизм F переводит t -сечение в $g(t)$ -сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(D_t^2)$:

$$\text{diam } F^n(D_t^2) = \text{diam } p_2(F^n(D_t^2)).$$

Для точек $\alpha, \beta \in S^1$ положим $D_{\alpha\beta}^2 = I_{\alpha\beta} \times D^2$, где $I_{\alpha\beta} \subset S^1$ – открытый интервал минимальной длины с концевыми точками α, β . Другими словами, $D_{\alpha\beta}^2$ есть $\frac{|\beta-\alpha|}{2}$ -окрестность $\frac{\beta+\alpha}{2}$ -сечения в $\mathcal{B}$.

ЛЕММА 5. *Отображение θ является гомеоморфизмом таким, что*

$$\theta \circ F|_{\text{Sol}(F)} = \hat{g} \circ \theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем инъективность отображения θ . Возьмем различные $p_1, p_2 \in \text{Sol}(F)$. Согласно лемме 3 каждой точке p_i , $i = 1, 2$, соответствует последовательность замкнутых дисков $D_j^i = F^j(\{t_j^i\} \times D^2)$ таких, что $p_i = \bigcap_{j \geq 0} D_j^i$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры дисков стремятся к нулю, то существует k такое, что $D_1^1 = D_1^2, \dots, D_{k-1}^1 = D_{k-1}^2, D_k^1 \neq D_k^2$. Поэтому $t_k^1 \neq t_k^2$ и, следовательно, $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$.

Докажем сюръективность отображения θ . Возьмем $\{t_0, t_1, \dots\} \in \prod_g$. Из $t_i = g(t_{i+1})$ и условия (1.3) вытекает, что

$$\{t_0\} \times D^2 \supset F(\{t_1\} \times D^2) \supset \dots \supset F^i(\{t_i\} \times D^2) \supset \dots$$

Более того, так как $\text{diam}(F^i(\{t_i\} \times D^2)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то пересечение $\bigcap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times D^2)$ состоит ровно из одной точки, скажем p . Из определения множества $\text{Sol}(F)$ следует, что $p \in \text{Sol}(F)$. Таким образом,

$$\theta(p) = (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots).$$

Докажем непрерывность отображения θ . Пусть U – окрестность точки $\theta(p) = \{t_i\}_0^\infty$, где $p \in \text{Sol}(F)$. Согласно определению топологии на множестве $\prod_g$ можно считать, что U задается числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что

$$U = \left\{ \{x_i\}_0^\infty \in \prod_g : |x_i - t_i| < \varepsilon \text{ для } i = 0, \dots, r \right\}.$$

В силу леммы 3

$$p \in F^r(D_{t_r}^2) \subset F^{r-1}(D_{t_{r-1}}^2) \subset \dots \subset F(D_{t_1}^2) \subset D_{t_0}^2.$$

Поскольку согласно лемме 2 имеют место равенства $F(\text{Sol}(F)) = F^{-1}(\text{Sol}(F)) = \text{Sol}(F)$, то ограничение $F|_{\text{Sol}(F)}$ есть диффеоморфизм $\text{Sol}(F) \rightarrow \text{Sol}(F)$. Поэтому существуют однозначно определенные точки $p_i \in D_{t_i}^2 \cap \text{Sol}(F)$, $1 \leq i \leq r$, такие, что $p = F^i(p_i)$.

Из (1.2) вытекает, что p является внутренней точкой множества $F^r(D_{t_r}^2)$ в топологии t_0 -сечения $D_{t_0}^2$. Пусть V_0 – окрестность точки p в этой топологии, принадлежащая $F^r(D_{t_r}^2)$. Отметим, что для любой точки $q \in V_0$ имеет место включение $\theta(q) \in U$, так как $q \in F^r(D_{t_r}^2) \subset \dots \subset F(D_{t_1}^2) \subset D_{t_0}^2$. Наша задача – сделать из V_0 “объемную” окрестность точки p . Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$, $t_2 = g(t_3)$, $\dots$, $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, то

$$t_0 = g(t_1) = g^2(t_2) = \dots = g^i(t_i), \quad t_1 = g(t_2) = g^2(t_3) = \dots = g^{i-1}(t_i),$$

$$t_2 = g(t_3) = g^2(t_4) = \dots = g^{i-2}(t_i), \quad \dots, \quad t_i = g^{i-j}(t_i)$$

для всех $1 \leq j \leq i$ и некоторого i . Поэтому

$$\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots\} = \{g^i(t_i), g^{i-1}(t_i), \dots, g(t_i), t_i, \dots\}.$$

Поскольку для точки $\theta(p)$ в ее окрестности U , заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение g непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, r$. Следовательно, $F^j(D_{t_j-\delta, t_j+\delta}^2) \subset D_{t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon}^2$ для всех $j = 0, \dots, r$. Множество $F^r(D_{t_r-\delta, t_r+\delta}^2)$ имеет вид $D_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2}^2$ для некоторых $\nu_1, \nu_2 > 0$. Тогда множество $(S^1 \times V_0) \cap D_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2}^2 \stackrel{\text{def}}{=} V$ является искомой окрестностью точки p в $\mathcal{B}$. Из определения отображений F и θ вытекает, что $\theta(q) \in U$ для любой точки $q \in V$. Следовательно, θ – непрерывное отображение. Аналогичным образом доказывается непрерывность отображения θ^{-1} . Таким образом, θ – гомеоморфизм.

Докажем равенство $\theta \circ F|_{\text{Sol}(F)} = \hat{g} \circ \theta$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol}(F) & \xrightarrow{F} & \text{Sol}(F) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \prod_g & \xrightarrow{\hat{g}} & \prod_g \end{array}$$

Согласно лемме 3 любой точке $p \in \text{Sol}(F)$ соответствует единственная последовательность $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Образ точки $\theta(p)$ относительно отображения $\hat{g}: \prod_g \rightarrow \prod_g$ есть по определению

$$\hat{g}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}.$$

Из условия (1.2) вытекает, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times D^2) \subset \{g(t_0)\} \times D^2$. В силу леммы 3 образом точки $F(p)$ относительно отображения θ является последовательность $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$. Следовательно, $\hat{g}[\theta(p)] = \theta[F(p)]$. Лемма доказана.

Обозначим через $\text{NW}(\psi)$ неблуждающее множество преобразования ψ (не обязательно взаимно однозначного). Напомним, что $p \in \text{NW}(\psi)$, если для любой окрестности $U(p)$ точки p существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U(p) \cap \psi^n(U(p)) \neq \emptyset$. Так как сопрягающий гомеоморфизм переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество, то из леммы 5 вытекает следующее следствие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. $\theta[\text{NW}(F)] = \text{NW}(\hat{g})$.

В определении диффеоморфизма SV существенную роль играют неособые эндоморфизмы окружности. Изучим неблуждающее множество таких эндоморфизмов подробнее. Пусть $g: S^1 \rightarrow S^1$ – неособый эндоморфизм степени $d \geq 2$. Для точки $x \in S^1$ определим *обобщенную орбиту* $G_O(x)$ этой точки как множество $y \in S^1$ таких, что $g^n(x) = g^m(y)$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$. Другими словами, $G_O(x)$ есть объединение прообразов относительно всех итераций g^n , $n \in \mathbb{Z}_0^+$, каждой точки из положительной орбиты точки x . Множество $N \subset S^1$ называется *инвариантным*, если $x \in N$ влечет $G_O(x) \subset N$.

Покажем, что N инвариантно тогда и только тогда, когда $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Действительно, пусть N инвариантно и $x \in N$. Тогда

$$G_O(g(x)) = \{y \in S^1 : \exists n, m \in \mathbb{Z}_0^+, g^{n+1}(x) = g^m(y) = g^{n_1}(x)\} \subset G_O(x) \subset N.$$

Поэтому $g(N) \subset N$. Так как для любой точки из прообраза $g^{-1}(x)$ выполняется равенство $g(g^{-1}(x)) = x = g^0(x)$, то $g^{-1}(x) \subset G_O(x)$ и, следовательно, $g^{-1}(N) \subset N$. Таким образом, инвариантность N влечет равенства $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Пусть теперь $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Для любой точки $x_1 \in G_O(x)$ существуют $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$ такие, что $g^n(x) = g^m(x_1)$. Тогда $g^m(x_1) \in N$, поскольку $g^n(x) \in N$. Из $g^{-1}(N) \subset N$ вытекает включение $x_1 \in N$ и, следовательно, $G_O(x) \subset N$.

Если g – транзитивный эндоморфизм, то $NW(g) = S^1$. Поэтому в основном далее мы будем рассматривать нетранзитивный эндоморфизм g . Ключевым утверждением для таких g служит следующий результат Шуба (см. [19]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $E_d: S^1 \rightarrow S^1$ – линейный растягивающий эндоморфизм степени $d \geq 2$. Тогда для любого неособого эндоморфизма $g: S^1 \rightarrow S^1$ степени $d \geq 2$ существует непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение $h: S^1 \rightarrow h(S^1) = S^1$, полусопрягающее g с E_d , т.е. имеет место соотношение $h \circ g = E_d \circ h$. Более того, если g – растягивающий эндоморфизм, то h – гомеоморфизм (следовательно, h сопрягает g с E_d). В противном случае h не является гомеоморфизмом.

Непосредственно из этого утверждения следует, что

$$h \circ g^n = E_d^n \circ h \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Из непрерывности и монотонности полусопрягающего отображения h вытекает, что для любой точки $x \in S^1$ множество $h^{-1}(x)$ есть либо точка, либо нетривиальный замкнутый интервал. Обозначим через Σ° подмножество таких $x \in S^1$, что $h^{-1}(h(x))$ – одна точка. Другими словами, ограничение $h|_{\Sigma^\circ}$ есть взаимно однозначное отображение $\Sigma^\circ \rightarrow h(\Sigma^\circ)$.

ЛЕММА 6. Множество Σ° является инвариантным множеством эндоморфизма g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что $g(\Sigma^\circ) = \Sigma^\circ = g^{-1}(\Sigma^\circ)$. Возьмем $x \in \Sigma^\circ$ и предположим, что $g(x) \notin \Sigma^\circ$. Тогда $h^{-1}(h \circ g(x))$ есть нетривиальный замкнутый интервал, скажем $[a, b]$. Так как $x \in \Sigma^\circ$, то существует открытый интервал (α, β) , содержащий x , такой, что $h(\alpha, \beta) = (h(\alpha), h(\beta))$ является нетривиальным интервалом, содержащим точку $w = h(x)$. Из непрерывности h следует, что интервал (α, β) можно взять столь малым, что ограничение $E_d|_{h(\alpha, \beta)}$ отображения E_d на $h(\alpha, \beta)$ будет гомеоморфизмом. Из непрерывности g следует, что существует точка $x_* \in (\alpha, \beta)$ такая, что $g(x_*) \in [a, b]$. Поэтому $h \circ g(x_*) = E_d(w)$ и $h(x_*) \in (h(\alpha), h(\beta))$. Поскольку $x \in \Sigma^\circ$, то $h(x_*) \neq h(x) = w$. С другой стороны, согласно (2.2) получаем $E_d \circ h(x) = E_d(w) = h \circ g(x_*) = E_d \circ h(x)$, что противоречит гомеоморфности $E_d|_{h(\alpha, \beta)}$. Это доказывает включение $g(\Sigma^\circ) \subset \Sigma^\circ$.

Пусть теперь $g(x) \in \Sigma^\circ$, и предположим, что $x \notin \Sigma^\circ$. Тогда x принадлежит нетривиальному замкнутому интервалу $h^{-1}(h(x)) = [c, d]$. Так как g –

неособый эндоморфизм и, следовательно, локальный гомеоморфизм, то существует нетривиальный интервал $[\delta, \gamma] \subset [c, d]$ такой, что $x \in [\delta, \gamma]$ и ограничение $g|_{[\delta, \gamma]}$ есть гомеоморфизм. В силу (2.2) для любой точки $x_* \in [\delta, \gamma]$, $x_* \neq x$, имеем $h \circ g(x_*) = E_d \circ h(x_*) = h \circ g(x)$, что противоречит включению $g(x) \in \Sigma^\circ$, поскольку $g(x_*) \neq g(x)$. Полученное противоречие доказывает включение $g^{-1}(\Sigma^\circ) \subset \Sigma^\circ$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В обозначениях леммы 6 имеют место соотношения

$$E_d[h(\Sigma^\circ)] = h(\Sigma^\circ) = E_d^{-1}[h(\Sigma^\circ)], \quad E_d \circ h|_{\Sigma^\circ} = h \circ g|_{\Sigma^\circ}.$$

Более того, ограничение $h|_{\Sigma^\circ} : \Sigma^\circ \rightarrow h(\Sigma^\circ)$ является гомеоморфизмом, который сопрягает $g|_{\Sigma^\circ}$ с $E_d|_{h(\Sigma^\circ)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6 $g(\Sigma^\circ) = \Sigma^\circ = g^{-1}(\Sigma^\circ)$. Отсюда и из (2.2) вытекают равенства $E_d[h(\Sigma^\circ)] = h(\Sigma^\circ) = E_d^{-1}[h(\Sigma^\circ)]$. Так как h – монотонное и непрерывное отображение, то $h|_{\Sigma^\circ}$ есть гомеоморфизм.

Из предложения 1 следует, что множество $S^1 \setminus \Sigma^\circ$ представляет собой объединение попарно непересекающихся замкнутых интервалов. Из следствия 2 вытекает, что мощность множества этих интервалов счетная, поскольку множество $h(\Sigma^\circ)$ инвариантно относительно E_d . Таким образом, $S^1 \setminus \Sigma^\circ = \bigcup_{i=1}^\infty [a_i, b_i]$, причем можно считать, что $h^{-1}(h[a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$ при $i \neq j$. Интервалы $[a_i, b_i]$ будем называть *смежными*. Соответствующие открытые интервалы (a_i, b_i) мы будем называть *открытыми смежными*.

Смежный интервал $[a, b]$ называется *периодическим*, если $g^k([a, b]) = [a, b]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками. Внутри периодического интервала могут быть периодические точки (но их может и не быть).

Обозначим через Σ объединение Σ° со всеми концевыми точками a_i, b_i смежных интервалов множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$, $\Sigma = \Sigma^\circ \bigcup_{i \geq 1} (\{a_i\} \cup \{b_i\})$. Ясно, что если $\Sigma \neq S^1$, то g – нетранзитивный эндоморфизм, и наоборот.

ЛЕММА 7. Пусть $g: S^1 \rightarrow S^1$ – неособый и нетранзитивный эндоморфизм степени $d \geq 2$. Тогда его неблуждающее множество $NW(g)$ есть объединение Σ со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 вытекает, что $\Sigma^\circ \subset NW(g)$, поскольку $NW(E_d) = S^1$. Отсюда, а также из непрерывности и монотонности h следует включение $\Sigma \subset NW(g)$. Возьмем точку $x \in NW(g)$, не принадлежащую Σ . Тогда $x \in (a, b)$, где $h(a, b) = h(a) = h(b)$, причем можно считать, что $h^{-1}(h(a, b)) = (a, b)$. Покажем, что $[a, b]$ – периодический интервал. Так как $x \in NW(g)$, то $g^k(a, b) \cap (a, b) \neq \emptyset$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из леммы 6 следует, что $g^k(a, b) = (a, b)$. Это влечет периодичность точки x , поскольку из неособости g получаем, что ограничение $g^k|_{(a, b)} : (a, b) \rightarrow g^k(a, b) = (a, b)$ является гомеоморфизмом, а точка принадлежит неблуждающему множеству монотонного гомеоморфизма интервала, только если она неподвижная.

Хотя множество Σ формально зависит от полусопрягающего отображения h , можно показать, что Σ зависит только от g , и далее мы будем обозначать его через Σ_g .

§ 3. Доказательство теоремы 1

Перед доказательством теоремы 1 для удобства читателя мы приведем ряд определений. Пусть M_i – трехмерное многообразие и $B_i \subset M_i$ – 3-клетка (образ открытого трехмерного шара относительно вложения в M_i), $i = 1, 2$. *Связной суммой* $M_1 \# M_2$ двух многообразий M_1, M_2 называется трехмерное многообразие $M = M_1 \# M_2$, которое получается из $M_1 \setminus B_1, M_2 \setminus B_2$ после отождествления граничных компонент $\partial B_1 = \partial(M_1 \setminus B_1), \partial B_2 = \partial(M_2 \setminus B_2)$ с помощью некоторого диффеоморфизма $\tau: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2, M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus B_1) \bigcup_{\tau} (M_2 \setminus B_2)$.

Пусть B^n – стандартный единичный замкнутый n -мерный шар евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Множество, гомеоморфное произведению $B^i \times B^{n-i}$, называется *ручкой индекса i* , $0 \leq i \leq n$. Подмножество $\partial B^i \times B^{n-i}$ ручки индекса i называется *подшовой*. Говорят, что многообразие M получается из многообразия N *приклеиванием нескольких ручек*, если $\text{clos}(M - N)$ является несвязным объединением ручек, подошвы которых лежат в ∂N . Трехмерное многообразие D_h^3 называется *трехмерным шаром с h ручками*, если D_h^3 получается из B^3 приклеиванием $h \geq 0$ ручек индекса 1. *Разбиением Хегора* рода $h \geq 0$ замкнутого трехмерного многообразия M^3 называется представление M^3 в виде склейки двух трехмерных шаров с h ручками с помощью некоторого гомеоморфизма, который отождествляет их границы. *Родом Хегора* многообразия M^3 называется наименьшее h , для которого существует соответствующее разбиение Хегора многообразия M^3 (см. [20]). Примером многообразия с родом Хегора 1 является линза $L_{p,q}$, которая может быть также получена в результате склеивания двух полноториев $S^1 \times D^2, D^2 \times S^1$ вдоль их границ (двумерных торов $S^1 \times S^1$) с помощью линейного автоморфизма тора вида $\bar{x} = rx + py \pmod{1}, \bar{y} = sx + qy \pmod{1}$, где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$. Мы относим к списку линз трехмерную сферу $S^3 = L_{1,0}$, которую обычно к линзам не причисляют, но которая формально может быть получена с помощью указанной выше склейки двух полноториев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы следуем методу доказательства соответствующего результата работы [13; с. 90]. Пусть $\mathcal{B} \subset M^3$ – базовый полноторий, ограниченный двумерным тором T^2 . Замыкание множества $M^3 \setminus \mathcal{B}$ является компактным многообразием (обозначим его через N^3) с границей T^2 . Покажем, что гомоморфизм $e_*: \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(N^3)$, индуцируемый естественным вложением $e: T^2 \subset N^3$, не является мономорфизмом. Предположим противное (это предположение эквивалентно несжимаемости поверхности T^2 в N^3). Так как включение $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ собственное, то включение $\mathcal{B} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ также собственное и, следовательно, $M^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{B}) \subset M^3 \setminus \mathcal{B}$. Поэтому $f^{-1}(N^3) \subset N^3$. В частности, $f^{-1}(T^2) \subset N^3$. Так как $f(T^2)$ разбивает $\mathcal{B}$, то два тора T^2 и $f(T^2)$ ограничивают в $\mathcal{B}$ некоторое трехмерное тело, которое мы обозначим через Q^3 . Следовательно, $f^{-1}(Q^3) \subset N^3$ является телом, ограниченным торами $T^2, f^{-1}(T^2)$. Согласно конструкции тора T^2 и $f(T^2)$ не параллельны (т.е. Q^3 не гомеоморфно $T^2 \times [0, 1]$). Следовательно, T^2 и $f^{-1}(T^2)$ также не параллельны. Далее, поскольку ограничение $f^{-1}|_{N^3}$ является гомеоморфизмом, то N^3 гомеоморфно $f^{-1}(N^3)$. Поэтому из несжимаемости T^2 в N^3 следует несжимаемость $f^{-1}(T^2)$ в $f^{-1}(N^3)$. Таким образом, мы получили в N^3 два несжимаемых и непараллельных тора T^2 и $f^{-1}(T^2)$. Ясно, что $f^{-2}(Q^3)$ ограничено непараллельными торами $f^{-2}(T^2)$ и $f^{-1}(T^2)$. Покажем, что торы T^2 и $f^{-2}(T^2)$

непараллельны, т.е. множество $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$, которое они ограничивают, не гомеоморфно $T^2 \times [0, 1]$. Предположим, что $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ гомеоморфно $T^2 \times [0, 1]$. Так как в $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ лежит тор $f^{-1}(T^2)$, который разбивает $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ на два множества $f^{-1}(Q^3)$ и $f^{-2}(Q^3)$, и тор $f^{-1}(T^2)$ несжимаемый, то в силу теоремы 3.2 из [21] (см. также [22]) каждое из множеств $f^{-1}(Q^3)$, $f^{-2}(Q^3)$ должно быть гомеоморфным $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$, т.е. гомеоморфным $T^2 \times [0, 1]$, что неверно. Таким образом, T^2 , $f^{-1}(T^2)$ и $f^{-2}(T^2)$ суть попарно непараллельные и несжимаемые в N^3 торы. Продолжая указанный процесс, получим бесконечное семейство попарно непараллельных и несжимаемых двумерных торов T^2 , $f^{-1}(T^2)$, $f^{-2}(T^2)$, $\dots$, $f^{-k}(T^2)$, $\dots$, что противоречит теореме Хакена (см. [23]). Полученное противоречие доказывает сжимаемость T^2 в N^3 .

Таким образом, гомоморфизм $e_*: \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(N^3)$ имеет нетривиальное ядро. Из теоремы о петле (см. [24]) следует, что на T^2 существует простая замкнутая и гомотопически нетривиальная кривая C , ограничивающая вложенный в N^3 диск $D^2 \subset N^3$ такой, что $T^2 \cap D^2 = C$. Возьмем достаточно близкий к T^2 и параллельный T^2 двумерный тор $T_1^2 \subset \text{int } N^3$, который пересекается с диском D^2 вдоль простой замкнутой кривой $C_1 = D^2 \cap T_1^2$, причем кривая C_1 гомотопически нетривиальна на T_1^2 и ограничивает на D^2 диск $D_1^2 \subset D^2$. Множество, ограниченное торами T^2 , T_1^2 , обозначим через $Q_* \subset N^3$. Ясно, что Q_* гомеоморфно $T^2 \times [0, 1]$.

При разрезании двумерного тора по простой и гомотопически нетривиальной замкнутой кривой получается кольцо. Тор T^2 разбивает M^3 на две компоненты $\mathcal{B}$ и $\text{clos}(M^3 \setminus \mathcal{B})$. Поэтому при разрезании многообразия M^3 вдоль T^2 и D^2 получаются два компактных многообразия M_*^3 , M_2^3 , граница каждого из которых гомеоморфна двумерной сфере $S_1^2 = \partial M_*^3$, $S_2^2 = \partial M_2^3$ соответственно. На каждой из сфер S_1^2 , S_2^2 имеется по две копии диска D^2 . Склеив эти копии, мы получим так называемый толстый диск D^2 , у которого стороны считаются геометрически различными. Аналогичное соглашение будет применяться для диска D_1^2 . Пусть для определенности M_2^3 содержит $\mathcal{B}$. Тогда в M_*^3 лежит Q_* , разрезанное по D^2 . Если мы добавим к такому множеству Q_* толстый диск D^2 , то получим множество, гомеоморфное полноторию, скажем P , из которого удален открытый трехмерный шар $\mathbb{B}^3$. Границей этого шара является сфера $\partial \mathbb{B}^3$, образованная после разрезания тора T_1^2 вдоль C_1 и приклеивания к граничным компонентам полученного кольца двух копий диска D_1^2 . Таким образом, M^3 получается после склейки полнотория $\mathcal{B}$ и полнотория P , из которого удален трехмерный шар, и затем приклеивания к границе $\partial \mathbb{B}^3$ указанного трехмерного шара части многообразия M_*^3 , ограниченного сферой $\partial \mathbb{B}^3$. Если обозначить через M_1^3 часть многообразия M_*^3 , ограниченного сферой $\partial \mathbb{B}^3$, то многообразие M^3 можно представить в виде связной суммы $M^3 = (L_{p,q} \setminus \mathbb{B}^3) \# M_1$, поскольку склейка $\mathcal{B}$ и P вдоль граничного тора T^2 дает некоторую линзу $L_{p,q}$, из которой удален шар $\mathbb{B}^3$. Непосредственно из доказательства вытекает, что базовый полноторий принадлежит $L_{p,q} \setminus \mathbb{B}^3 \subset M^3$.

Обратное утверждение о том, что на любой линзе $L_{p,q}$, $p \geq 1$, существует диффеоморфизм $f: L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$ из класса SV, следует из работы [13] (см. также [25]). Для удобства приведем идею доказательства для трехмерной сферы $S^3 = L_{1,0}$, которую можно представить как результат склейки двух полноториев N_1 , N_2 вдоль их границ (рис. 2) с помощью диффеоморфизма $\partial N_1 \rightarrow \partial N_2$

Рис. 2

(напомним, что ∂N_1 , ∂N_2 гомеоморфны двумерному тору), переводящего меридианы тора ∂N_1 в параллели тора ∂N_2 и наоборот.

Рассмотрим два зацепления (C_1, β_2) и (C_2, β_1) в S^3 таких, что $C_1, \beta_1 \in N_1$ и $C_2, \beta_2 \in N_2$ (см. рис. 2). Покажем схематично, что существует диффеотопия $\varphi_t: S^3 \rightarrow S^3$, $\varphi_0 = \text{id}$ такая, что $\varphi_1(C_1) = \beta_1$, $\varphi_1(\beta_2) = C_2$. Поскольку отождествляющий диффеоморфизм переводит параллель в меридиан, кривая C_1 деформируется в кривую, охватывающую в полнотории N_2 кривую β_2 . Теперь скручиваем C_1 , как показано на рис. 3, одновременно раскручивая β_2 . Отметим, что при этом используется стягиваемость в точку параллели тора ∂N_2 (она гомотопна кривой C_2) в полнотории N_1 . Кривая β_2 деформируется в кривую β'_2 , которая затем деформируется в C_2 . Далее скрученную кривую C'_1 деформируем в кривую C''_1 (внешне это выглядит как сгибание C'_1), которая гомотопна удвоенной кривой C_1 и деформируется в β_1 (см. рис. 3).

Рис. 3

Обозначим через $T(k)$ трубчатую окрестность простой замкнутой кривой k . Диффеотопия сферы S^3 , переводящая (C_1, β_2) в (C_2, β_1) , индуцирует диффеотопию достаточно малых трубчатых окрестностей $T(C_1) \rightarrow T(\beta_1)$, $T(\beta_2) \rightarrow T(C_2)$, которую мы обозначим снова через φ_1 . Ясно, что можно считать, что φ_1 сохраняет дисковую структуру. Поскольку существуют сохраняющие дисковую структуру диффеоморфизмы $N_1 \leftrightarrow T(C_1)$, $N_2 \leftrightarrow T(C_2)$, то φ_1 индуцирует диффеоморфизмы $F_1: N_1 \rightarrow T(\beta_1)$, $F_2: T(\beta_2) \rightarrow N_2$, сохраняющие дисковую структуру. Согласно [6], не умаляя общности, можно считать, что F_1 является диффеоморфизмом с одномерным растягивающим аттрактором

в полнотории N_1 . На множестве $N_2 \setminus T(\beta_2)$ диффеоморфизм φ_1 индуцирует диффеоморфизм $N_2 \setminus T(\beta_2) \rightarrow N_1 \setminus T(\beta_1)$, который является продолжением диффеоморфизмов F_1, F_2 . Таким образом, мы получаем диффеоморфизм $f: S^3 \rightarrow S^3$ из класса SV.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Перед доказательством теоремы 2 приведем ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 8. *Имеет место включение*

$$\text{NW}(F) \subset \text{Sol}(F) \cap p_1^{-1}[\text{NW}(g)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Sol}(F)$ – притягивающее множество, то $\text{NW}(F) \subset \text{Sol}(F)$. Возьмем точку $P = (t, z) \in \text{NW}(F)$. Тогда $p_1(P) = t \in S_1$, и осталось показать, что $t \in \text{NW}(g)$. Пусть V_1 – интервал, являющийся окрестностью точки t . Возьмем окрестность $U(P)$ точки P такую, что $p_1(U(P)) \subset V_1$. Согласно определению неблуждающего множества существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $U(P) \cap F^{n_0}(U(P)) \neq \emptyset$. Поскольку p_1 – проекция, то $V_2 = p_1(F^{n_0}(U(P)))$ – открытое множество. В силу определения отображения $F = (g, w)$ $V_2 = g^{n_0}(V_1)$ и $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Поэтому $t \in \text{NW}(g)$.

ЛЕММА 9. *Пусть $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ удовлетворяет указанным выше условиям (1.1)–(1.3). Тогда:*

- (i) $p_1^{-1}(\Sigma_g) \cap \text{Sol}(F) \subset \text{NW}(F)$;
- (ii) *если эндоморфизм g нетранзитивный и $[a, b]$ – периодический смежный интервал минимального периода $l \geq 1$, то:*
 - для любой периодической точки $t_0 \in (a, b)$ пересечение $D_{t_0}^2 \cap \text{NW}(F)$ состоит из одной периодической точки (t_0, z_0) минимального периода l ; если при этом t_0 изолированная в $\text{NW}(g)$, то точка (t_0, z_0) изолированная в $\text{NW}(F)$, а если t_0 не изолированная в $\text{NW}(g)$, то (t_0, z_0) не изолированная в $\text{NW}(F)$;
 - пересечение $(\text{int } D_{ab}^2) \cap \text{NW}(F)$ состоит из периодических точек периода l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Возьмем точку $P(t, z) \in \text{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$. Ее образом относительно отображения θ является однозначно определенная последовательность $\theta(P) = \{t = t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Рассмотрим произвольную окрестность $U[\theta(P)]$. Не умаляя общности, можно считать, что существуют $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$U[\theta(P)] = \left\{ \{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\} \in \prod_g : t'_i = g(t'_{i+1}), \right. \\ \left. |t'_0 - t_0| < \varepsilon, |t'_1 - t_1| < \varepsilon, \dots, |t'_r - t_r| < \varepsilon \right\}.$$

Так как отображения $g, \dots, g^{r-1}, g^r$ непрерывны, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что неравенство $|t'_r - t_r| < \delta$ влечет

$$|g^r(t'_r) - g^r(t_r)| < \varepsilon, \quad |g^{r-1}(t'_r) - g^{r-1}(t_r)| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |g(t'_r) - g(t_r)| < \varepsilon.$$

Сначала рассмотрим случай $t_0 = p_1(P) \in \Sigma^\circ \subset \text{NW}(g)$. Тогда согласно лемме 6 $t_r \in \text{NW}(g)$. По определению неблуждающего множества существует $n_0 \in \mathbb{N}$

такое, что для любой окрестности $V_\delta(t_r)$ точки t_r выполняется неравенство $g^{n_0}[V_\delta(t_r)] \cap V_\delta(t_r) \neq \emptyset$. Отсюда следует, что существует $t'_r \in V_\delta(t_r)$ такое, что $g^{n_0}(t'_r) \in V_\delta(t_r)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |g^{r+n_0}(t'_r) - g^{r+n_0}(t_r)| &< \varepsilon, & |g^{r+n_0-1}(t'_r) - g^{r+n_0-1}(t_r)| &< \varepsilon, & \dots, \\ |g^{n_0+1}(t'_r) - g^{n_0+1}(t_r)| &< \varepsilon, & |g^{n_0}(t'_r) - g^{n_0}(t_r)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как для точки $\theta(P)$ и ее окрестности U выполняются равенства $t_{r-j} = g^j(t_r)$, $1 \leq j \leq r$ (см. лемму 5), то

$$\theta(P) = \{t_0, t_1, \dots, t_{r-1}, t_r, \dots\} = \{g^r(t_r), g^{r-1}(t_r), \dots, g(t_r), t_r, \dots\}.$$

Тогда для некоторой точки $p' \in \theta^{-1}\{U[\theta(P)]\} \in \text{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$ выполняется равенство

$$\theta(p') = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_{r-1}, t'_r, \dots\} = \{g^r(t'_r), g^{r-1}(t'_r), \dots, g(t'_r), t'_r, \dots\}.$$

Поэтому точка

$$\begin{aligned} \hat{g}^{n_0}[\theta(p')] &= \{g^{n_0}(t'_0), g^{n_0-1}(t'_0), \dots, g(t'_0), t'_0, t'_1, \dots\} \\ &= \{g^{n_0+r}(t'_r), g^{n_0+r-1}(t'_r), \dots, g^{n_0}(t'_r), \dots\} \end{aligned}$$

принадлежит $U[\theta(P)]$, т.е.

$$\hat{g}^{n_0}(U[\theta(P)]) \cap U[\theta(p)] \neq \emptyset.$$

В силу определения неблуждающего множества $\theta(P) \in \text{NW}(\hat{g})$ и согласно следствию 1 $P \in \text{NW}(F)$. Следовательно, $\text{NW}(F) \supset \text{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma^\circ)$. Поскольку Σ° всюду плотно в Σ_g , то из доказанного выше и непрерывности проекции p_1 вытекает требуемое включение $\text{NW}(F) \supset \text{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$.

(ii) Из $g^l(t_0) = t_0$ и (1.3) следует, что $F^l|_{\{t_0\} \times D^2} : D_{t_0}^2 \rightarrow D_{t_0}^2$ является сжимающим отображением диска $D_{t_0}^2$ в себя. Поэтому в $D_{t_0}^2$ имеется ровно одна притягивающая неподвижная точка, скажем Q_0 , ограничения $F^l|_{D_{t_0}^2}$. Существует интервал $(\alpha, \beta) \subset S^1$, содержащий t_0 и принадлежащий смежному интервалу множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$. Если все точки из $(\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ непериодические, то в силу леммы 7 они являются блуждающими точками эндоморфизма g . Согласно лемме 8 диски D_t^2 при $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ состоят из блуждающих точек диффеоморфизма F . Таким образом, изолированность t_0 влечет изолированность точки Q_0 . Рассмотрим теперь случай, когда в $(\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ имеются периодические точки t' для любого интервала (α, β) , содержащего точку t_0 . Поскольку все периодические точки из одного смежного интервала имеют один и тот же период, скажем $l \in \mathbb{N}$, то в любом диске $D_{t'}^2$ лежит ровно одна притягивающая точка периода l диффеоморфизма F . Отсюда и из непрерывности F вытекает, что в $D_{t_0}^2$ имеется ровно одна неблуждающая точка, которая совпадает с Q_0 .

Смежный интервал $[a, b]$ эндоморфизма g будем называть *потенциально непериодическим*, если $[a, b]$ не является периодическим, но $g^k([a, b])$ является периодическим интервалом для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 10. Пусть $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ удовлетворяет указанным выше условиям (1.1)–(1.3) и эндоморфизм g нетранзитивный. Тогда:

- пересечение $(\text{int } D_{ab}^2) \cap \text{NW}(F)$ для любого периодического смежного интервала $[a, b]$ состоит из конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек;
- каждый смежный интервал является либо периодическим, либо потенциально периодическим интервалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $(t, z) \in p_1^{-1}(\Sigma_g)$. В силу леммы 9 точка (t, z) не является изолированной точкой в $\text{NW}(F)$. По условию, накладываемому на диффеоморфизмы SV , в (t, z) имеется гиперболическая структура. Из вида $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ вытекает, что $Dg(t)$ есть одно из собственных значений якобиана преобразования F . Если предположить, что $Dg(t) < 1$, то (t, z) является стоковой притягивающей точкой и, следовательно, изолированной в $\text{NW}(F)$. Поэтому $Dg(t) > 1$. Так как (t, z) – произвольная точка, то $Dg|_{\Sigma_g} > 1$. В силу компактности Σ_g существует такое $\delta > 0$, что в δ -окрестности $U_\delta(\Sigma_g)$ выполняется $Dg|_{U_\delta(\Sigma_g)} > 1$.

Пусть $l \geq 1$ – период периодического смежного интервала $[a, b]$. Тогда диффеоморфизм $g^l|_{[a, b]} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ имеет отталкивающие концевые точки. Согласно лемме 9 пересечение $\text{int } D_{ab}^2 \cap \text{NW}(F)$ состоит из периодических точек одного периода l . Так как эти точки гиперболические, то их число конечно. Следовательно, $g^l|_{[a, b]}$ имеет конечное число неподвижных точек. Из гиперболичности $\text{NW}(F)$ и того, что $Dg(t)$ есть одно из собственных значений якобиана F , следует, что $Dg \neq 1$ в неподвижных точках $g^l|_{[a, b]}$, т.е. эти точки гиперболические. Ясно, что стоки и источники чередуются и имеется хотя бы один сток, поскольку концевые точки a, b отталкивающие. Отсюда вытекает, что пересечение $\text{int } D_{ab}^2 \cap \text{NW}(F)$ состоит из конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.

Пусть $[\alpha, \beta]$ – смежный интервал и все интервалы $\{g^k([a, b])\}_{k \geq 0}$ попарно не пересекаются. Тогда длина $g^k([a, b])$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для всех достаточно больших k интервалы $g^k([a, b])$ должны принадлежать δ -окрестности $U_\delta(\Sigma_g)$. Поскольку $Dg|_{U_\delta(\Sigma_g)} > 1$, то длина $g^k([a, b])$ не может стремиться к нулю при $k \rightarrow \infty$. Полученное противоречие показывает, что каждый смежный интервал является либо периодическим, либо потенциально периодическим интервалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из лемм 7, 10 вытекает, что либо g – растягивающее преобразование (и тогда $\text{NW}(g) = S^1$), либо $\text{NW}(g)$ содержит ровно одно инвариантное множество Σ канторовского типа плюс конечное (ненулевое) число изолированных стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число седловых периодических точек. Докажем вспомогательное утверждение, которое нам потребуется в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть L – инвариантное множество неособого эндоморфизма g . Если L содержит всюду плотную положительную полуорбиту $O^+(x_0) = \{g^n(x_0) : n \geq 0\}$, $x_0 \in L$, то диффеоморфизм $F|_{\text{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве $p_1^{-1}(L) \cap \text{Sol}(F)$. Если в L всюду плотны периодические точки, то в $p_1^{-1}(L) \cap \text{Sol}(F)$ также всюду плотны периодические точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую часть предложения. Из инвариантности L и $\text{Sol}(F)$ (см. лемму 2) следует, что $p_1^{-1}(L) \cap \text{Sol}(F) \stackrel{\text{def}}{=} N$ является инвариантным множеством диффеоморфизма $F|_{\text{Sol}(F)}$. Согласно лемме 5 $F|_{\text{Sol}(F)}$ сопряжен отображению $\hat{g}: \prod_g \rightarrow \prod_g$ вида $\{t_0, \dots, t_i, \dots\} \rightarrow \{g(t_0), t_0, \dots, t_i, \dots\}$ посредством гомеоморфизма $\theta: \text{Sol}(F) \rightarrow \prod_g$. Поэтому достаточно доказать, что $\hat{g}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве $\theta(N)$. Возьмем

$$q_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots\} \in \theta(N),$$

и пусть $U(q)$ – произвольная окрестность произвольной точки $q = \{t_0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots\} \in \theta(N)$. Отметим, что включение $q_0 \in \theta(N)$ вытекает из инвариантности L и включения $x_0 \in L$. Не умаляя общности, можно считать, что $U(q)$ является (ε, r) -окрестностью, т.е. $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, t'_{i+1}, \dots\} \in U(q)$ тогда и только тогда, когда $|t_0 - t'_0| < \varepsilon, \dots, |t_r - t'_r| < \varepsilon$. Из непрерывности g вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что $|t_r - t'_r| < \delta$ влечет $|t_j - t'_j| < \varepsilon$ для всех $0 \leq j \leq r-1$, так как $t_j = g^{r-j}(t_r)$, $t'_j = g^{r-j}(t'_r)$. Не умаляя общности, можно считать, что $\delta \leq \varepsilon$. Тогда из $|t_r - t'_r| < \delta$ следует, что $q' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_r, \dots\} \in U(q)$. Поскольку полуорбита $O^+(x_0)$ всюду плотна в L , то существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $|g^l(x_0) - t_r| < \delta$, $g^l(x_0) \in L$. Поэтому $\hat{g}^r(q_0) = \{g^{l+r}(x_0), \dots, g^l(x_0), \dots\} \in U(q)$. Следовательно, положительная полуорбита точки q_0 всюду плотна в $\theta(N)$. Вторая часть предложения доказывается аналогично (вместо точки $g^l(x_0)$ достаточно взять периодическую точку из L , δ -близкую к t_r).

Рассмотрим случай, когда $\text{NW}(g) = S^1$. Тогда $\text{NW}(F) = \text{Sol}(F)$ в силу леммы 9. Ясно, что вся окружность S^1 является инвариантным множеством. Известно (см. [19]), что растягивающее преобразование g имеет всюду плотную положительную полуорбиту $O^+(x_0)$ в S^1 . Отсюда и из предложения 2 получаем, что диффеоморфизм $F|_{\text{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве $p_1^{-1}(S^1) \cap \text{Sol}(F) = \text{Sol}(F)$. Поэтому $\text{NW}(F) = \text{Sol}(F)$ является единственным базисным множеством $\Lambda(f) = \text{NW}(F)$ в базовом полнотории. Поскольку $\Lambda(f) = \text{Sol}(F)$, то $\Lambda(f)$ есть одномерный растягивающийся аттрактор.

Рассмотрим случай, когда $\text{NW}(g)$ содержит ровно одно инвариантное множество Σ канторовского типа плюс конечное (ненулевое) число $\xi_1, \dots, \xi_h$ изолированных стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число источников периодических точек, принадлежащих смежным интервалам множества Σ . В силу леммы 9 этим точкам отвечают стоковые и седловые изолированные периодические точки $\Xi_1, \dots, \Xi_h$ соответственно, причем

$$\Xi_i \in p_1^{-1}(\xi_i) \cap \text{Sol}(F) = D_{\xi_i}^2 \cap \text{Sol}(F).$$

Положим $\Lambda(f) = p_1^{-1}(\Sigma) \cap \text{Sol}(F)$. Тогда согласно леммам 8, 9 неблуждающее множество в базовом полнотории есть объединение $\text{NW}(F) = \Lambda(f) \bigcup_{i=0}^h (\Xi_i)$. Из теоремы 1 и следствия 2 вытекает, что g имеет всюду плотную положительную полуорбиту $O^+(x_0) = \{g^n(x_0) : n \geq 0\}$, где $x_0 \in \Sigma^\circ$. Согласно лемме 6 Σ° является инвариантным множеством эндоморфизма g . В силу предложения 2 диффеоморфизм $F|_{\text{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в $p_1^{-1}(\Sigma^\circ) \cap \text{Sol}(F)$. Так как Σ° всюду плотно в Σ , то $p_1^{-1}(\Sigma^\circ)$ всюду плотно в множестве $p_1^{-1}(\Sigma)$. Поэтому $F|_{\text{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в $p_1^{-1}(\Sigma) \cap \text{Sol}(F) = \Lambda(f)$. Отсюда вытекает, что $\Lambda(f)$ есть

базисное множество. Локально $\Lambda(f)$ гомеоморфно прямому произведению канторовых множеств. Следовательно, $\Lambda(f)$ является нульмерным нетривиальным базисным множеством. Таким образом, $NW(f) \cap \mathcal{B}$ состоит из $\Lambda(f)$, конечно-го (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа изолированных периодических седловых точек.

Покажем теперь, что обе возможности, указанные в теореме 2, реализуются. Классический пример Смейла (см. [6]) предоставляет диффеоморфизм полнотория в себя, неблуждающее множество которого совпадает с соленидом и является одномерным растягивающимся аттрактором. Покажем, что существует диффеоморфизм класса SV , у которого неблуждающее множество в базовом полнотории состоит из нетривиального нульмерного базисного множества и одной стоковой периодической точки. Сначала мы построим соответствующий диффеоморфизм $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

Рассмотрим неособый C^r -эндоморфизм $g: S^1 \rightarrow S^1$, $r \geq 1$, степени $d \geq 2$, у которого неблуждающее множество $NW(g)$ состоит из одной неподвижной притягивающей (гиперболической) точки x_0 и канторова множества Ω , причем $Dg|_{\Omega} = 2d - 1$, $Dg(x_0) = \lambda < 1$ (число λ уточним ниже). Такой эндоморфизм степени $d = 2$ построил Шуб (см. [19]), а Хирш указал, что данный эндоморфизм можно построить аналитически (см. [26]). Полностью аналогично требуемый эндоморфизм строится для произвольной степени $d \geq 2$. Схематично график g изображен на рис. 4 для $d = 3$. Ограничение $g|_{[0, 1/2]}$ является диффеоморфизмом $[0, 1/2] \rightarrow [0, 1/2]$ с одной притягивающей гиперболической неподвижной точкой $x_0 = 1/4$ и двумя отталкивающими неподвижными точками $0, 1/2$. На отрезке $[1/2, 1]$ эндоморфизм g линейный вида $g|_{[1/2, 1]}(x) = (2d - 1)x \pmod{1}$.

Рис. 4

Обозначим построенный эндоморфизм через g_d . Ясно, что $\bigcup_{n \geq 0} g_d^{-n}(0, 1/2)$ является устойчивым многообразием $W^s(x_0)$ точки x_0 , а дополнение $\Omega = S^1 \setminus W^s(x_0)$ к этому устойчивому многообразию является канторовым множеством, принадлежащим $NW(g_d)$. В обозначениях леммы 7 имеем $\Sigma_d = \Omega$. Непосредственно из построения вытекает, что для любой точки $y \in S^1$ минимальное расстояние между различными точками из ее прообраза $t_k, t_j \in g_d^{-1}(y)$

относительно g_d есть

$$\min_{t_k, t_j} \{|t_k - t_j| : g_d(t_k) = g_d(t_j), t_k \neq t_j\} = \frac{1}{2d-1}.$$

Возьмем число λ , удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \lambda < \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2d-1}. \quad (4.1)$$

Наряду с декартовыми координатами (x, y) на $\mathbb{R}^2$ будем использовать комплексную переменную $z = x + iy$. Пусть $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный замкнутый диск. Рассмотрим следующее отображение базового полнотория $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$:

$$F(t, z) = \left(g_d(t), \lambda z + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \right). \quad (4.2)$$

Непосредственно из (4.2) вытекает, что t -сечение $D_t^2 = \{t\} \times D^2$ под действием F отображается в круглый диск (который мы обозначим через B_t), принадлежащий $D_{g_d(t)}^2$. Из (4.2) также следует, что диск B_t имеет радиус λ с центром, лежащим на окружности $|z| = 1/2$. Поскольку $\lambda < 1/4$, то $B_t \subset \text{int } D_{g_d(t)}^2$. Поэтому $F(\mathcal{B}) \subset \text{int } \mathcal{B}$. В координатах (t, z) на $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$ отображение F имеет якобиан

$$DF(t, z) = \begin{pmatrix} Dg_d(t) & 0 \\ \pi i \exp 2\pi i t & \lambda I_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где I_2 – тождественная матрица на $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^2$. Так как $Dg_d > 0$ и $\lambda > 0$, то F – локальный диффеоморфизм. Для доказательства того, что F – (глобальный) диффеоморфизм, рассмотрим попарно различные $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ такие, что $g_d(t_1) = \dots = g_d(t_d)$. Центры $O_1, \dots, O_d$ дисков $B_{t_1}, \dots, B_{t_d}$ соответственно лежат на окружности $|z| = 1/2$. Минимальный угол между лучами, проведенными из центра диска $D_{g_d(t_k)}^2$, и точками $O_1, \dots, O_d$ равен $\frac{2\pi}{2d-1}$. Поэтому минимальное расстояние между $O_1, \dots, O_d$ равно $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2d-1}$. Отсюда и из (4.1) следует, что диски $B_{t_1}, \dots, B_{t_d}$ попарно не пересекаются. В силу (4.2) F является диффеоморфизмом $\mathcal{B} \rightarrow F(\mathcal{B})$, удовлетворяющим условиям (1.1)–(1.3). Таким образом, $F \in \mathfrak{M}$.

В [14] для F , которое определено на $S^1 \times D^3$ и которое продолжается до диффеоморфизма сферы S^4 , анонсировано доказательство гиперболичности неблуждающего множества $\text{NW}(F)$. Для удобства читателя мы приводим доказательство гиперболичности для F , которое определено на $S^1 \times D^2$. Отметим, что из предложения 2 вытекает, что периодические точки плотны в $\text{NW}(F)$. Поэтому наличие аксиомы А Смейла на $\text{NW}(F)$ будет следовать из гиперболичности $\text{NW}(F)$.

Касательное пространство $T(\mathcal{B}) = T(S^1 \times D^2)$ полнотория $\mathcal{B}$ естественным образом представимо в виде суммы $T(\mathcal{B}) = T(S^1) \oplus T(D^2)$. В каждой точке $(t, z) \in \mathcal{B}$ касательная плоскость $T_{(t,z)}(\mathcal{B})$ есть сумма одномерного $T_t(S^1) = \mathbb{E}^1 \cong \mathbb{R}$ и двумерного $T_z(D^2) = \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{R}^2$ линейных пространств. Из (4.3) вытекает, что подрасслоение $\mathbb{E}^2$ инвариантно относительно DF :

$$DF_p \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix},$$

где $\vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2$. Более того, поскольку $|\lambda| < 1$, то $\mathbb{E}^2$ является устойчивым под-расслоением, $E^s = \mathbb{E}^2$.

Отметим, что подрасслоение $\mathbb{E}^1$ не инвариантно относительно DF . Покажем, что тем не менее на множестве $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру. Пусть $q = (t, z) \in NW(F)$. Согласно лемме 8 $p_1(q) = t \in NW(g_d)$. В силу построения эндоморфизма g_d и леммы 7 неблуждающее множество $NW(g_d)$ есть объединение канторова множества Σ_{g_d} с изолированной притягивающей (гиперболической) неподвижной точкой $x_0 \in S^1 \setminus \Sigma_{g_d}$. Возможны два случая: 1) $t = x_0$; 2) $t \in \Sigma_{g_d} = \Omega$. В случае 1) согласно лемме 9 точка q является изолированной (неподвижной) точкой неблуждающего множества $NW(F)$. Из (4.3) вытекает, что q – гиперболическая притягивающая неподвижная точка. В случае 2) рассмотрим в $T_{NW(F)}(\mathcal{B}) \subset T(\mathcal{B}) = \mathbb{E}^1 \oplus \mathbb{E}^2$ семейство конусов

$$C_q^u = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} : \vec{v}_1 \in T_t(S^1), \vec{v}_{23} \in \mathbb{E}_z^2, |\vec{v}_1| \geq \frac{2d-1}{4} |\vec{v}_{23}| \right\}.$$

Сначала покажем, что $DF(C_q^u) \subset C_{F(q)}^u$. Пусть $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} \in C_q^u$. В силу (4.3)

$$DF \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1' \\ \vec{v}_{23}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2d-1)\vec{v}_1 \\ \pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix}.$$

Тогда $|\vec{v}_{23}| \leq |\pi i \exp 2\pi i t \vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}| = \pi |\vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}|$. Учитывая неравенство $\lambda \leq 1/4$, получаем

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1'| &= (2d-1)|\vec{v}_1| = \frac{2d-1}{4}(4|\vec{v}_1|) \geq \frac{2d-1}{4} \left(\pi |\vec{v}_1| + \frac{1}{2} |\vec{v}_1| \right) \\ &\geq \frac{2d-1}{4} \left(\pi |\vec{v}_1| + \frac{2d-1}{8} |\vec{v}_{23}| \right) \geq \frac{2d-1}{4} (\pi |\vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}|) \geq \frac{2d-1}{4} |\vec{v}_{23}'|, \end{aligned}$$

поскольку $\frac{2d-1}{8} \geq \frac{1}{4}$. Таким образом, $\begin{pmatrix} \vec{v}_1' \\ \vec{v}_{23}' \end{pmatrix} \in C_{F(q)}^u$. Отсюда

$$DF^k(C_{F^{-k}(q)}^u) \subset DF^{k-1}(C_{F^{-k+1}(q)}^u) \subset \dots \subset DF(C_{F^{-1}(q)}^u) \subset C_q^u$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

Чтобы показать, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть прямая, рассмотрим

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix} \in C_{F^{-k}(q)}^u, \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_1^k \\ \vec{v}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{w}_1^k \\ \vec{w}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix}.$$

Положим $|\vec{v}_1^j| = v_1^j$, $|\vec{w}_1^j| = w_1^j$, $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$, $\vec{w}_1 = (w_1, 0)$, $v_1 > 0$, $w_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{v}_{23}^1}{v_1^1} - \frac{\vec{w}_{23}^1}{w_1^1} \right| &= \left| \frac{\pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23}}{(2d-1)v_1} - \frac{\pi i \vec{w}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{w}_{23}}{w_1} \right| \\ &= \left| \frac{\pi i \exp 2\pi i t (w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1)}{(2d-1)v_1 w_1} + \frac{\lambda}{2d-1} \left(\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right) \right| = \frac{\lambda}{2d-1} \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|, \end{aligned}$$

так как $w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1 = |\vec{w}_1| \vec{v}_1 - |\vec{v}_1| \vec{w}_1 = 0$. Поэтому

$$\left| \frac{\vec{v}_{23}^k}{v_1^k} - \frac{\vec{w}_{23}^k}{w_1^k} \right| = \left(\frac{\lambda}{2d-1} \right)^k \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\vec{v}_{23}^k/v_1^k$ является фундаментальной и, следовательно, имеет предел, скажем $\vec{V}$. Не умаляя общности, для простоты можно считать, что $v_1 = |\vec{v}_1| = 1$, $v_{23} = |\vec{v}_{23}| = 1$. Тогда единичный вектор

$$\vec{n}_k = \frac{\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k}{|\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k|},$$

который определяет направление вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k = v_1^k \vec{v}_1 + v_{23}^k \vec{v}_{23}$, имеет предел $(\vec{v}_1 + \vec{V})/|\vec{v}_1 + \vec{V}|$. Отсюда вытекает, что пересечение итераций конуса S_q^u относительно DF есть одномерное подпространство $\mathbb{E}^u$. Так как проекция вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k$ на вектор $\vec{v}_1$ равна $v_1^k = (2d-1)v_1$, то $\mathbb{E}^u$ является неустойчивым подрасслоением, трансверсальным $E^s = \mathbb{E}^2$. Отсюда следует, что на $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру.

Из леммы 9 вытекает, что неблуждающее множество $NW(F)$ содержит ровно одно нетривиальное (нульмерное) базисное множество и одно тривиальное базисное множество, которое является стоком. Из доказательства теоремы 1 следует, что F можно продолжить до диффеоморфизма класса SV некоторой линзы.

Список литературы

- [1] L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen”, *Math. Ann.*, **97**:1 (1927), 454–472.
- [2] D. van Danzig, “Über topologisch homogene Kontinua”, *Fund. Math.*, **15** (1930), 102–125.
- [3] F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology Appl.*, **152**:3 (2005), 219–225.
- [4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.–Л., 1947; англ. пер.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.
- [5] I. Kan, “Strange attractors of uniform flows”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**:1 (1986), 135–159.
- [6] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.
- [7] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 156–178; англ. пер.: D. V. Anosov, “Smooth dynamical systems. Elementary theory”, *Dynamical systems*, v.I, Encyclopaedia Math. Sci., **1**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 149–233.
- [8] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Исходные понятия”, *Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 12–99; англ. пер.: D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamical systems*, v.IX, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 10–92.
- [9] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [10] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

- [11] Ю. С. Ильяшенко, В. Ли, *Нелокальные бифуркации*, МЦНМО, М., 1999; англ. пер.: Yu. Ilyashenko, W. Li, *Nonlocal bifurcations*, Math. Surveys Monogr., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [12] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “Blue sky catastrophes”, *Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 404–407.
- [13] H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112**:1 (1983), 69–102.
- [14] L. Block, “Diffeomorphisms obtained from endomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403–413.
- [15] М. В. Якобсон, “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. сб.*, **85**(127):2(6) (1971), 163–188; англ. пер.: M. V. Jakobson, “On smooth mappings of the circle into itself”, *Math. USSR-Sb.*, **14**:2 (1971), 161–185.
- [16] J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.
- [17] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1968.
- [18] R. F. Williams, “Expanding attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43**:1 (1974), 169–203.
- [19] M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. J. Math.*, **91**:1 (1969), 175–199.
- [20] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, М., 1997; англ. пер.: V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds*, Transl. Math. Monogr., **154**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [21] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.
- [22] F. Waldhausen, “On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large”, *Ann. of Math.* (2), **87**:1 (1968), 56–88.
- [23] W. Haken, “Theorie der Normalflächen”, *Acta Math.*, **105**:3–4 (1961), 245–375.
- [24] C. D. Papakyriakopoulos, “On Dehn’s lemma and the asphericity of knots”, *Ann. of Math.* (2), **66**:1 (1957), 1–26.
- [25] B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:11 (2004), 4371–4382.
- [26] M. Hirsch, “A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets”, *Dynamical systems* (Warwick, 1974), Lect. Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 9–10.

Е. В. Жужома (E. V. Zhuzhoma)

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступила в редакцию

03.03.2010

Н. В. Исаенкова (N. V. Isaenkova)

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: nisaenkova@mail.ru