Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 2, 3–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:35:30

УДК 517.53

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков

Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов

Рассматриваются ансамбли случайных эрмитовых матриц с мерой распределения, задаваемой ангармоническим потенциалом, который возмущен внешним источником. Предельные характеристики распределения собственных значений матриц этих ансамблей связаны с асимптотикой некоторой системы совместно ортогональных многочленов. Получены формулы сильной асимптотики для этой системы. В качестве следствия из этих результатов для матриц рассматриваемого ансамбля получена предельная средняя плотность собственных значений, для характеристики которой также предложен вариационный принцип.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: случайные матрицы, совместно ортогональные многочлены, сильная асимптотика, матричная задача Римана–Гильберта, экстремальные задачи теории логарифмического потенциала.

§ 1. Введение

Пусть $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ – ансамбль случайных матриц, где $\mathbf{H}_n$ – пространство эрмитовых матриц размера $n \times n$, а μ_n – вероятностная мера на $\mathbf{H}_n$,

$$\mu_n(dM) = \frac{1}{Z_n} e^{-\text{Tr}(V(M) - AM)} dM, \quad M \in \mathbf{H}_n, \quad (1.1)$$

A – фиксированная эрмитова матрица, называемая внешним источником, функция V – потенциал ансамбля $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$, dM – лебегова мера на $\mathbf{H}_n$, Z_n – нормировочная константа.

Анализ предельных, т.е. при $n \rightarrow \infty$, статистических свойств собственных значений случайных матриц ансамблей $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ был начат еще в работе [1] Л. А. Пастура, в которой изучалось распределение собственных значений матриц, являющихся возмущением диагональных матриц A случайными матрицами M (например, когда $V(x) = x^2/2$). Настоящая работа является продолжением (и, в некотором смысле, завершением) нашей работы [2], в которой изучалась предельная средняя плотность собственных значений матриц из $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ (см. (1.1)) для ангармонического потенциала

$$V(x) := nT(x), \quad T(x) := \frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-12024, 11-01-00245), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8033.2010.1), Программы № 1 ОМН РАН; работа второго и третьего авторов выполнена также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12160).

и внешнего источника вида

$$A := n \operatorname{diag}(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{-a, \dots, -a}_n), \quad a \in \mathbb{R}_+. \quad (1.3)$$

Мотивацию и историю этой задачи см. в [2] (важными предшествующими работами в этом направлении были работы [3]–[7]). Основные статистические характеристики ансамбля $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$, такие, как совместная плотность распределения собственных значений (вероятность того, что упорядоченные собственные значения матрицы $M \in \{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ лежат в $[\lambda_1 + d\lambda_1] \times \dots \times [\lambda_n + d\lambda_n]$),

$$\sigma_n(d\lambda) := \sigma_n(d\lambda_1 \cdots d\lambda_n), \quad (1.4)$$

средний характеристический многочлен

$$P_n(x) := \mathbb{E}[\det(Ix - M)], \quad (1.5)$$

средняя плотность собственных значений

$$\nu_{P_n}(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(z - \lambda_n^{(k)}), \quad P_n(z) := \prod_{k=1}^n (z - \lambda_n^{(k)}) \quad (1.6)$$

оказываются связанными (см. [3]) с так называемыми совместно (multiple) ортогональными многочленами (см. [8], [9]). А именно, средний характеристический многочлен (1.5) удовлетворяет соотношениям совместной ортогональности, т.е.

$$P_n(x) := x^n + \dots : \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) x^k e^{-[V(x) - a_j x]} dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad (1.7)$$

для любого собственного значения a_j кратности n_j матрицы A , $\sum_j n_j = n$. Далее, пусть A имеет лишь p различных собственных значений $\{a_j\}_{j=1}^p$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n = pm + l$, $0 \leq l \leq p - 1$, зафиксирован следующий порядок собственных значений: $\{a_1, \dots, a_p, a_1, \dots, a_p, \dots, a_1, \dots, a_l\}$. Очевидно, что тем самым для каждого $n \in \mathbb{N}$ зафиксированы кратности $n_1 = \dots = n_l = m + 1$, $n_{l+1} = \dots = n_p = m$. Тогда биортогональная система многочленов $\{P_n\}$ (см. (1.7)) и форм $\{Q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_{n-1} \in \operatorname{span}\{x^k e^{a_j x} \mid j = 1, \dots, p, k = 0, \dots, n_j - 1\},$$

т.е. удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(x) Q_k(x) e^{-V(x)} dx = \delta_{j,k},$$

порождает ядро

$$K_n(x, y) := e^{-(V(x) + V(y))/2} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) Q_k(y), \quad (1.8)$$

обладающее воспроизводящими свойствами

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, y) K_n(y, z) dy = K_n(x, z), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, x) dx = n$$

и определяющее совместную плотность собственных значений

$$\sigma_n(d\lambda) = \frac{1}{n!} \det(K_n(\lambda_j, \lambda_k))_{1 \leq j, k \leq n} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n.$$

Поэтому основным содержанием работы [2] и настоящей работы является исследование асимптотики при $n \rightarrow \infty$ многочленов (1.7) и воспроизводящих ядер (1.8), где в весовой функции соотношений (1.7) потенциал V задается формулой (1.2), вектор собственных значений имеет вид (1.3), n всегда четно, т.е. $\{a_j\}$ в (1.7) принимают два значения, $-a$ и a , с кратностями $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$, так что

$$P_n(x) := x^n + \cdots : \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) x^k e^{-n[T(x) \pm ax]} dx = 0, \quad k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (1.9)$$

В работе [2] нами доказано, что (в некоторой области значений параметров (a, b) из (1.3) и (1.2)) алгебраическая функция $H(z)$ рода нуль, являющаяся решением уравнения

$$H^3 - (z^3 + bz)H^2 + (z^2 + \alpha)H + a^2z^3 + \beta z = 0, \quad (1.10)$$

определяет предельную среднюю плотность собственных значений (1.6) (т.е. предельную меру нулей совместно ортогонального многочлена (1.9),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{P_n}(x) = \lambda(x) : \quad d\lambda(x) = \rho(x)dx, \quad (1.11)$$

по формуле

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} |\operatorname{Im} H_0(x_+) - \operatorname{Im} H_0(x_-)|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

где H_0 – это ветвь (голоморфная вне достаточно большого отрезка $\Delta \subset \mathbb{R}$) алгебраической функции $H := \{H_j\}_{j=0}^2$, которая определяется нормировкой

$$H_0(z) \simeq T'(z) - \frac{1}{z} + \cdots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Коэффициенты α и β уравнения (1.10) определяются по следующим формулам:

$$\alpha(a, b) := \frac{(1-u)(c^4 + 2c^4u - u^2)^2}{c^2u^3}, \quad \beta(a, b) := \frac{(3c^4 - u)(c^4 + 2c^4u - u^2)^2}{c^4u^2}, \quad (1.14)$$

где $u := 2c^4 + ac$, а c – максимальный (положительный) при $a > 0$ корень уравнения

$$2c^6 + 2bc^4 + 3c^2 - ac^3 + bac - a^2 = 0, \quad a > 0. \quad (1.15)$$

Функция $H(z)$ имеет четыре точки ветвления в корнях уравнения

$$4z^4 - \frac{c^2(8u^2 + 20u - 1)}{u^2} z^2 + \frac{4c^4(u - 1)^3}{u^3} = 0. \quad (1.16)$$

Цель настоящей работы – дать полное описание предельной средней плотности собственных значений для любых значений параметров (a, b) из (1.3), (1.2). Для достижения этой цели мы

1) находим алгебраическую функцию $H(z)$ рода один, которая определяет по формуле (1.12) предельную среднюю плотность ρ для тех значений параметров (a, b) , для которых функция $H(z)$ рода нуль (см. (1.10), (1.14), (1.15)) плотность ρ не определяет;

2) доказываем теорему о сильной асимптотике многочленов совместной ортогональности (1.9), (1.2) (для обоснования представлений плотности ρ через алгебраические функции, а также для проверки локальных универсальностей);

3) ставим вариационную задачу, решением которой является предельная средняя мера собственных значений λ (см. (1.11)).

Статья имеет следующую структуру. Параграф 1 носит вводный характер. В § 2 сформулированы основные результаты работы. Параграф 3 посвящен “геометрии” задачи. Здесь исследуются алгебраические функции $H(z)$, глобальная структура их римановых поверхностей и порождаемых $H(z)$ абелевых интегралов. В результате получается описание в плоскости (b, a) критических режимов, когда носитель средней плотности собственных значений меняет свою топологию (два отрезка сливаются в один) и когда меняется род алгебраической кривой $H(z)$. Последняя перестройка представляет особый интерес в связи с выделением разрывных решений (chock solutions) у некоторых гиперболических систем уравнений в частных производных (см. [10], [11]).

В § 4 получены и доказаны формулы сильной асимптотики для многочленов совместной ортогональности (1.9), (1.2). Для этого использован метод матричной задачи Римана–Гильберта (см. [12], [13]) (характеризацию совместно ортогональных многочленов с помощью матричной задачи Римана–Гильберта см. в [14]; новые моменты, необходимые для решений при $n \rightarrow \infty$ краевых задач для (3×3) -матричных аналитических функций см. в [5], [15]–[17]).

В § 5 сформулирован вариационный принцип для предельных средних мер распределения собственных значений матричных унитарных ансамблей с внешним источником (1.3) и проверено, что полученные для потенциала (1.2) предельные меры удовлетворяют этому принципу для любого режима параметров (a, b) . Рассматриваемая вариационная задача по сути такая же, как задачи, возникающие в теории аппроксимаций Эрмита–Паде (см. [15], [18]–[22]). В процессе проверки решения вариационной задачи также доказана ее эквивалентность (в рассматриваемом случае) некоторой другой вариационной задаче с ограничением на величины мер. Последняя задача вызвала недавно повышенный интерес в связи с ее приложениями к теории случайных матриц (см. [23], [24]). Тот факт, что предельные меры (1.11) являются решениями этой вариационной задачи с ограничениями, был сообщен нам Куэлаарсом (см. [25]).

В процессе работы над этой статьей мы имели полезное общение с А. Куэлаарсом, который ознакомил нас с препринтом [25] его совместной работы с П. Блехером и С. Делво по данной тематике, а также указал нам на одну неточность в нашей работе [2] (которую мы исправляем в этой статье, см. замечание 2.1), за что мы выражаем ему особую благодарность. Мы также

благодарим Б. Беккермана за сделанную им для нашей работы программу вычисления траекторий квадратичных дифференциалов.

§ 2. Основные результаты работы

2.1. Глобальный режим распределения собственных значений. Определим в полуплоскости $\Xi := \{(b, a) : b \in \mathbb{R}, a > 0\}$ кривые

$$a_m(b) := \frac{\sqrt{6b^3 - 27b - 6(b^2 - 3)^{3/2}}}{9}, \quad b \in (-2, -\sqrt{3}), \quad (2.1)$$

$$a_M(b) := \frac{\sqrt{6b^3 - 27b + 6(b^2 - 3)^{3/2}}}{9}, \quad b \in (-\infty, -\sqrt{3}). \quad (2.2)$$

Эти алгебраические кривые являются ветвями одной кривой, определяемой следующим условием: дискриминант $D_H(z)$ алгебраического уравнения (1.10) для функции $H(z)$ (см. также (1.14), (1.15)) имеет в начале координат нуль кратности четыре. Также определим кривую

$$a_{\text{cr}}(b) := 2 \operatorname{Im} \left[\left(\frac{b + 2i\sqrt{6}}{6} \right)^{3/2} \right], \quad b \in (-\sqrt{3}, \infty), \quad (2.3)$$

которая характеризуется условием совпадения в начале координат двух точек ветвления у $H(z)$ (см. (1.10), (1.14), (1.15)). Обозначим через Ξ_1 треугольную область, ограниченную сверху кривыми $a_m(b)$ и $a_M(b)$, а снизу – действительной осью $\{a = 0\}$. Пусть $\Xi_0 := \Xi \setminus \Xi_1$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Разбиение полуплоскости Ξ на Ξ_0 и Ξ_1

В области Ξ_1 параметров (b, a) определим алгебраическую функцию $H(z)$ рода один как решение уравнения

$$H^3 - (z^3 + bz)H^2 + z^2H + a^2z^3 = 0. \quad (2.4)$$

Эта функция имеет шесть точек ветвления (четыре действительные и две чисто мнимые) в корнях уравнения

$$4a^2z^6 + (1 + 12a^2b)z^4 + (2b + 12b^2a^2 - 18a^2)z^2 - (27a^4 - b^2 + 18a^2b - 4b^3a^2 + 4) = 0. \quad (2.5)$$

Заметим, что (2.4) получается из (1.10) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. Для ансамбля случайных матриц (1.1) с произвольными значениями параметров $a > 0$ – внешнего источника (1.3), и $b \in \mathbb{R}$ – потенциала (1.2), существует предельная средняя плотность собственных значений (1.11), определяемая формулой (1.12), где для параметров $(b, a) \in \Xi_0$ ветвь $H_0(z)$ (1.13) берется у алгебраической функции рода нуль (см. (1.10), (1.14), (1.15)), а для $(b, a) \in \Xi_1$ – у алгебраической функции рода один (см. (2.4)).

Из теоремы 2.1 следует, что носитель плотности ρ имеет следующую структуру: в $\Xi_0^{(I)}$, замыкании области параметров (b, a) , ограниченной кривыми $a_m(b)$, $a_{cr}(b)$ и $\{a = 0, b > -2\}$, носитель состоит из одного отрезка с концами в действительных корнях уравнения (1.14); соответственно при $(b, a) \in \Xi \setminus \Xi_0^{(I)} =: \Xi_0^{(II)}$ носитель состоит из двух отрезков, при этом при $(b, a) \in \Xi_1$ концы отрезков суть действительные корни (2.5), а при $(b, a) \in \Xi_0^{(II)}$ – корни (1.14) (см. рис. 2).

Рис. 2. Области $\Xi_0^{(II)}$, $\Xi_0^{(I)}$ и Ξ_1

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При $(b, a) \in \Xi_0$ утверждение теоремы 2.1 получено в [2] (см. теорему 4.3 из [2]). Отметим одну неточность в формулировке этого результата в [2] (указанную нам А. Куэлларсом). В [2] неправильно описана одна из границ множества Ξ_0 , а именно, формула (4.11) в [2] должна быть заменена на формулу (2.2) настоящей статьи. Соответственно, в доказательстве теоремы 4.3 из [2] нужно удалить несколько предложений, касающихся формулы (4.11).

2.2. Сильная асимптотика; главный член. Прежде чем сформулировать результаты о сильной асимптотике многочленов (1.9), мы определим ряд стандартных функций, связанных с римановой поверхностью $\Re$ алгебраической функции $H(z)$. Напомним, что при $(b, a) \in \Xi_0$ функция $H(z)$ определяется уравнением (1.10) с коэффициентами (1.14), (1.15), а при $(b, a) \in \Xi_1 := \{a > 0, b \in \mathbb{R}\} \setminus \Xi_0$ функция $H(z)$ определяется уравнением (2.4). Пусть

$$G := \int H dz \quad (2.6)$$

– абелев интеграл с чисто мнимыми периодами. Тогда вещественнозначная функция $\operatorname{Re} G(\zeta) =: g(\zeta)$ однозначна на $\Re$ с точностью до аддитивной константы, которую мы фиксируем нормировкой суммы трех ветвей функции $g(\zeta)$

в точке ∞ (следовательно, по принципу максимума модуля и глобально):

$$\operatorname{Re} G =: g =: \{g_j\}_{j=0}^2 : g_0(z) + g_1(z) + g_2(z) = T(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.7)$$

В силу симметрии задачи и соглашения о четности n , также однозначной на $\mathfrak{R}$ аналитической функцией (с существенной особенностью в точке ∞) является функция

$$\Phi^n := e^{nG}, \quad \Phi^n = \{\Phi_j^n\}_{j=0}^2. \quad (2.8)$$

Фиксация в точке ∞ ветвей алгебраической функции $H(z)$, где

$$H(z) \asymp \begin{cases} T'(z) - \frac{1}{z} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ -a + \frac{1}{2z} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ +a + \frac{1}{2z} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(2)}, \end{cases}$$

индуцирует следующее определение ветвей в окрестности точки ∞ у $\Phi^n(z)$:

$$\Phi^n(z) = \begin{cases} e^{nT(z)} \frac{1}{c_0^n z^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ e^{-naz} \frac{z^{n/2}}{c_1^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ e^{+naz} \frac{z^{n/2}}{c_2^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), & z \rightarrow \infty^{(2)}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Нормировка (2.7) влечет связь нормировочных констант в (2.9): $c_0 c_1 c_2 = 1$.

Определим ветви однозначных на $\mathfrak{R}$ функций глобально, т.е. опишем разрезы и листы $\{\mathfrak{R}_j\}_{j=0}^2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть

$$\{-e_1, -e_2, e_2, e_1, -ie_3, ie_3\}, \quad e_2 < e_1, \quad e_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

– обозначения для точек ветвления $\mathfrak{R}$ при различных (b, a) . А именно, точки ветвления $\mathfrak{R}$ таковы:

$$\varepsilon := \begin{cases} \{-e_1, -e_2, e_2, e_1\} & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})}, \\ \{-e_1, e_1, -ie_3, ie_3\} & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}, \\ \{-e_1, -e_2, e_2, e_1, -ie_3, ie_3\} & \text{при } (b, a) \in \Xi_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Обозначим разрезы (отрезки), соединяющие точки ветвления (ориентация слева направо, снизу вверх) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \begin{cases} [-e_1, -e_2] & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})} \cup \Xi_1, \\ [-e_1, 0] & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}, \end{cases} \\ \Delta_2 &:= \begin{cases} [e_2, e_1] & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})} \cup \Xi_1, \\ [0, e_1] & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}, \end{cases} \\ \delta &:= \begin{cases} [-ie_3, ie_3] & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})} \cup \Xi_1, \\ \emptyset & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})}, \end{cases} \\ \Sigma &:= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \delta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь по определению

$$\mathfrak{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\}, \quad \mathfrak{R}_j := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_j \cup \delta\}, \quad j = 1, 2. \quad (2.12)$$

Функция

$$e^{nT(z)} \Phi_0^{-n}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\},$$

определяет главный член асимптотики $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ (см. (1.9)) при $n \rightarrow \infty$.

2.3. Сильная асимптотика; функция Сегё. Другим важным ингредиентом формул сильной асимптотики является решение некоторой краевой задачи для аналитических функций с граничными условиями, не зависящими от n . В формулах сильной асимптотики для ортогональных многочленов такой член называют *функцией Сегё*.

Пусть (3×3) -матричнозначная функция $X(z)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} 1) X \in H^{(3 \times 3)}(\mathbb{C} \setminus \Sigma), \quad \exists x_\pm \in L(\Sigma), \\ 2) X_+ = X_- J \quad \text{на } \Sigma, \\ 3) X(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь и далее I – единичная матрица, а скачок J на Σ (см. (2.11)) определяется так:

$$J := J_\gamma \quad \text{на } \gamma \in \{\Delta_1, \Delta_2, \delta\}, \quad (2.14)$$

где

$$J_{\Delta_1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Delta_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_\delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Интегрируемость граничных значений решения задачи (2.13) влечет единственность этого решения.

При $(b, a) \in \Xi_0$ знание конформного отображения $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ позволяет воспользоваться приемом работ [4], [5] для построения решения (2.13). В этом случае (как показано в [2]) рациональная на $\mathfrak{R}$, с единственным полюсом функция $t(z)$, являющаяся решением уравнения

$$t^3 - \frac{z}{c}t^2 + \left(\frac{1}{u} - 1\right)t + \frac{z}{c} = 0, \quad (2.15)$$

где c и u определены в (1.15), осуществляет конформное отображение $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ такое, что

$$t(z) = \begin{cases} \infty, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ -1, & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ +1, & z \rightarrow \infty^{(2)}. \end{cases}$$

Глобальная структура ветвей $t = \{t_j\}_{j=0}^2$ определена в (2.12), разрезы проведены по Σ и для точек ветвления имеем

$$\begin{aligned} T_1 &:= t_0(-e_1) = t_1(-e_1), & T_4 &:= t_0(e_1) = t_2(e_1), \\ T_2 &:= \begin{cases} t_0(-e_2) = t_1(-e_2) & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})}, \\ t_1(-ie_3) = t_2(-ie_3) & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}, \end{cases} \\ T_3 &:= \begin{cases} t_0(e_2) = t_2(e_2) & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})}, \\ t_1(ie_3) = t_2(ie_3) & \text{при } (b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Определяя функции $X_0(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$ по формулам

$$X_0^2 := \frac{(t^2 - 1)^2}{\prod_{k=1}^4 (t - T_k)}, \quad X_{1,2}^2 := \frac{(t \mp 1)^2}{\prod_{k=1}^4 (t - T_k)} \quad (2.17)$$

и фиксируя ветвь корня (для перехода от X_j^2 к X_j) разрезами вдоль образов положительных берегов Σ (детали см. ниже в п. 4.8), получаем, что (2.15) и (2.17) в случае $(b, a) \in \Xi_0$ дают решение (2.13) в виде

$$X(t) := \begin{pmatrix} X_0(t_0(z)) & X_0(t_1(z)) & X_0(t_2(z)) \\ X_1(t_0(z)) & X_1(t_1(z)) & X_1(t_2(z)) \\ X_2(t_0(z)) & X_2(t_1(z)) & X_2(t_2(z)) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Оказывается, что и при $(b, a) \in \Xi_1$ решение задачи (2.13) также может быть представлено в виде (2.18). В этом случае (детали и доказательство см. ниже в п. 4.8), рациональная на поверхности $\mathfrak{R}$ рода один функция $t(z)$, являющаяся решением уравнения

$$t^3 - (z^2 + b)t^2 + t + a^2 = 0 \quad (2.19)$$

осуществляет конформное отображение трехлистной поверхности $\mathfrak{R}$ в двулистную поверхность рода один, заданную в форме Вейерштрасса:

$$z = \frac{\sqrt{P}}{t}, \quad P(t) = t^3 - t^2b + t + a^2 =: (t - P_1)(t - P_2)(t - P_3). \quad (2.20)$$

Пусть $P_1 < P_2 < P_3$. Глобальная структура ветвей $t = \{t_j\}_{j=0}^2$ такова, что разрезы проведены по Σ и для точек ветвления имеем

$$\begin{aligned} T_3^{(+)} &:= t_0(e_2) = t_2(e_2), & T_2^{(+)} &:= t_1(+ie_3) = t_2(ie_3), \\ T_3^{(-)} &:= t_0(-e_2) = t_1(-e_2), & T_2^{(-)} &:= t_1(-ie_3) = t_2(-ie_3), \\ T_1^{(+)} &:= t_0(e_1) = t_2(e_1), \\ T_1^{(-)} &:= t_0(-e_1) = t_1(-e_1), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ – точки на двулистной римановой поверхности функции $\sqrt{P(t)}$ с одинаковой проекцией T . Листы на этой римановой поверхности выделяются разрезами вдоль отрезков $[-\infty, P_1]$, $[P_2, P_3]$. При этом образы точек ветвления ie_3 и $-ie_3$ попадают на разные берега $[P_2, P_3]$. Отметим также, что

$$P_1 < T_3 < P_2 < T_2 < P_3 < 0 < T_1. \quad (2.22)$$

Определим рациональные на римановой поверхности $\sqrt{P(t)}$ функции

$$X_0^2(t) := \frac{t^2(t - P_2)}{t^3 - t - 2a^2}, \quad X_{1,2}^2 := -\frac{2a^2 + t \mp 2a\sqrt{P(t)} - P_2t^3}{2(t^3 - t - 2a^2)}. \quad (2.23)$$

Фиксируем ветвь корня (для перехода от X_j^2 к X_j) разрезами на римановой поверхности $\sqrt{P(t)}$ вдоль образов положительных берегов Σ (детали см. ниже в п. 4.8); при этом образом положительного берега отрезка $[-ie_3, ie_3]$ будет дуга, соединяющая точки $T_2^{(+)}$, $T_2^{(-)}$ и проходящая вдоль разреза поверхности $\sqrt{P(t)}$ через точку ветвления P_3 .

Сформулируем полученные результаты в виде следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Решение краевой задачи (2.13) имеет вид (2.18), где*

- 1) *в случае $(b, a) \in \Xi_0$ функции $\{t_j\}_{j=0}^2$ определяются с помощью (2.15) и (2.16), а функции $\{X_j\}_{j=0}^2$ – с помощью (2.17);*
- 2) *в случае $(b, a) \in \Xi_1$ функции $\{t_j\}_{j=0}^2$ определяются с помощью (2.19) и (2.21), а функции $\{X_j\}_{j=0}^2$ – с помощью (2.23) и (2.20).*

2.4. Сильная асимптотика многочленов $P_n(x)$; результат. Теперь мы можем сформулировать теорему о сильной асимптотике совместно ортогональных многочленов с ангармоническим потенциалом (1.2) в весе ортогональности (1.9).

ТЕОРЕМА 2.2. *Для многочленов P_n (1.9), (1.2) справедливы следующие формулы сильной асимптотики при $n \rightarrow \infty$:*

$$\begin{aligned} 1) \quad P_n(z) &= \frac{X_{00}(z)e^{nT(z)}}{c_0^n \Phi_0^n(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\}, \\ 2) \quad P_n(x) &= \left[\left(\frac{X_{00}(x)e^{nT(x)}}{c_0^n \Phi_0^n(x)} \right)_+ + \left(\frac{X_{00}(x)e^{nT(x)}}{c_0^n \Phi_0^n(x)} \right)_- \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ & \quad x \in K \Subset \Delta_1^\circ \cup \Delta_2^\circ, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где Φ_0^n – экспонента от абелевого интеграла (2.6), (2.8), c_0 – нормировочная константа из (2.9), а X_{00} – элемент матрицы $X = \{X_{kj}\}_{k,j=0}^2$ (см. (2.18)), являющийся решением краевой задачи (2.13).

Отметим унифицированный вид асимптотик многочленов P_n для любых режимов $(b, a) \in \Xi_0 \cup \Xi_1$.

Ясно, что теорема 2.1 является следствием теоремы 2.2.

2.5. Функции второго рода; дополнительные нули. Знания только сильной асимптотики средних характеристических многочленов P_n недостаточно для описания ряда свойств распределения собственных значений случайных матричных ансамблей (1.1), (1.2), (1.3). Важными характеристиками рассматриваемого матричного ансамбля также являются следующие преобразования Коши:

$$R_n^{(j)}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_n(x)e^{-n[T(x)+a_jx]}}{x - z} dx, \quad a_j = (-1)^{j-1}a, \quad j = 1, 2, \quad (2.25)$$

называемые *функциями второго рода* для совместно ортогонального многочлена P_n . (Как доказано в [26], для унитарных матричных ансамблей с $A = 0$ в (1.1) функции второго рода являются математическим ожиданием обратного характеристического полинома. Подобные интерпретации можно провести и в случае ненулевого внешнего источника.)

Остановимся вкратце на необычном свойстве функций второго рода совместно ортогональных многочленов (необычном по сравнению с ортогональными многочленами). Как следует из соотношений ортогональности (1.9), функции $R_n^{(j)}(z)$ имеют в точке ∞ нуль кратности $n/2 + 1$. Оказывается (и в этом есть новый момент), что при некоторых режимах $(b, a) \in \Xi$ эти функции имеют нули в конечной части комплексной плоскости z . Причем при $n \rightarrow \infty$ число этих дополнительных нулей стремится к бесконечности и они аккумулируются у некоторых аналитических кривых в комплексной плоскости. Поэтому, чтобы сформулировать результаты о сильной асимптотике функций второго рода, нам для отражения этих эффектов необходимо обсудить некоторые дополнительные геометрические понятия, связанные с рассматриваемыми римановыми поверхностями.

2.6. Функции второго рода; геометрия задачи. Пусть Γ – объединение аналитических дуг и кривых в комплексной плоскости, определяемых следующим образом:

$$\Gamma := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : g_j(z) = g_k(z), j \neq k, j, k = 0, 1, 2\}, \quad (2.26)$$

где $\{g_j\}_{j=0}^2$ – ветви действительной части абелевого интеграла (2.6), (2.7). Множество Γ состоит из следующих компонент, перечисленных ниже.

Рис. 3. а) Множество $\Gamma_{\Delta_1} \cup \Gamma_{\Delta_2}$; б) множество $\Gamma_{\Delta} \cup \Gamma_{\delta}$

- а) При $(b, a) \in \Xi_0^{(II)} \cup \Xi_1$ имеем $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Gamma$ и из концов $\{-e_1, -e_2, e_2, e_1\}$ выходят под углом $2\pi/3$ (по отношению к Δ_j , $j = 1, 2$) по две аналитические дуги, уходящие в бесконечность. Обозначим эти связанные компоненты через Γ_{Δ_j} , $j = 1, 2$ (см. рис. 3, а), 4).

- б) При $(b, a) \in \Xi_0^{(I)} \cup \Xi_1$ аналогичные две аналитические дуги, уходящие в бесконечность, выходят под углом $2\pi/3$ (по отношению к разрезу $i\mathbb{R}_- \setminus \delta$) из точки ветвления $-ie_3$, а также две дуги из ie_3 . Объединение этих дуг с $i\mathbb{R} \setminus \delta$ обозначим через Γ_δ (см. рис. 3, б), 4).
- в) При $(b, a) \in \Xi_0^{(I)}$ компонента Γ_Δ состоит из $\Delta := [-e_1, e_1]$ и аналогичных аналитических дуг, выходящих из концов Δ .

Эти компоненты обусловлены точками ветвления.

Рис. 4. Множество $\Gamma_{\Delta_1} \cup \Gamma_{\Delta_2} \cup \Gamma_\delta$ при $(b, a) \in \Xi_1$

По сравнению с исследовавшимся ранее случаем $T(x) = x^2/2$, у ангармонического потенциала (1.2) в множестве Γ появляются компоненты, не связанные с точками ветвления, а обусловленные высоким порядком полюса потенциала T в бесконечности.

- г) При $(b, a) \in \Xi_0$ имеются дополнительно четыре аналитические кривые, проходящие через точку ∞ – это $\Gamma_1, \bar{\Gamma}_1, \Gamma_2, \bar{\Gamma}_2$. Кривые Γ_1 и Γ_2 симметричны относительно мнимой оси, а кривые Γ_1 и $\bar{\Gamma}_1$ – относительно действительной оси (см. рис. 5).
- д) При $(b, a) \in \Xi_1$ две из этих дополнительных кривых образуют Γ_δ , и мы имеем две аналитические кривые – Γ_* и Γ^* , проходящие через точку ∞ (так, что Γ_* и Γ^* симметричны относительно мнимой либо действительной оси).

Итак,

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_{\Delta_1} \cup \Gamma_{\Delta_2} \cup (\Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \bar{\Gamma}_2) \cup i\mathbb{R}, & (b, a) \in \Xi_0^{(II)}, \\ \Gamma_{\Delta} \cup \Gamma_\delta \cup (\Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \bar{\Gamma}_2), & (b, a) \in \Xi_0^{(I)}, \\ \Gamma_{\Delta_1} \cup \Gamma_{\Delta_2} \cup \Gamma_\delta \cup (\Gamma_* \cup \Gamma^*), & (b, a) \in \Xi_1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Множество Γ разбивает комплексную область $\bar{\mathbb{C}}$ на области, в которых строго упорядочены по величине ветви функции g . Обозначим эти области через Ω_{jkl} , т.е.

$$\Omega_{jkl} := \{z \in \bar{\mathbb{C}} : g_j(z) < g_k(z) < g_l(z)\}, \quad j, k, l \in \{0, 1, 2\}, \quad j \neq k \neq l \neq j. \quad (2.28)$$

Рис. 5. а) Множество Γ при $(b, a) \in \Xi_0^{(II)}$; б) множество Γ при $(b, a) \in \Xi_0^{(I)}$. Обозначение (jkl) на рисунке соответствует индексу Ω_{jkl}

Решающее значение для асимптотики функций второго рода (2.25) имеет ответ на вопрос – какие из множеств Ω_{jkl} примыкают к отрезкам Δ_1, Δ_2 ?

Рис. 6. а) Множество Γ при $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(II)}$; б) критический режим

Мы будем называть геометрию Γ “простой” (ниже станет ясно, почему), если к отрезку Δ_j (сверху и снизу) примыкает лишь область из Ω_{k0j} (см. рис. 5, а)). Соответственно, нарушением “простоты” мы будем считать появление в окрест-

ности Δ_j (сверху и снизу) областей из Ω_{0jk} . Существуют две следующие причины нарушения “простоты” геометрии Γ :

1) при появлении комплексных точек ветвления (при $(b, a) \in \Xi_0^{(I)} \cup \Xi_1$) аналитические дуги из Γ_δ пересекают отрезки Δ_1 и Δ_2 и под ними возникают области из Ω_{012} и Ω_{021} соответственно (см. рис.5, b), 3, b) и 4).

2) существуют значения (b, a) , когда кривая Γ_j (не проходящая через точку ветвления) пересекается со своим сопряженным отражением $\bar{\Gamma}_j$ и между их пересечением в окрестности Δ_j образуется компонента Ω_{0jk} (см. рис.6, a)).

Рис. 7. Области $\Xi_{0*}^{(II)}$, $\Xi_{0*}^{(I)}$ – критические режимы

Ниже (см. п. 3.2) мы приведем нелинейное уравнение, описывающее процесс касания Γ_j и $\bar{\Gamma}_j$ (см. рис. 6, b)). Численное решение этого уравнения дает области $\Xi_{0*}^{(II)} \subset \Xi_0^{(II)}$ и $\Xi_{0*}^{(I)} \subset \Xi_0^{(I)}$ (см. рис. 7), в которых реализуется причина 2). Обозначим для краткости объединение компонент Ω_{0jk} , лежащих в окрестности (сверху и снизу) отрезка Δ_j , через Ω_j^* , т.е.

$$\Omega_j^* := \{z \in \Omega_{0jk} : \Delta_j \cap \partial\Omega_{0jk} \neq \emptyset\}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k. \quad (2.29)$$

2.7. Сильная асимптотика функций второго рода; результат. Теперь мы можем сформулировать результат о сильной асимптотике функций второго рода (2.25).

ТЕОРЕМА 2.3. Для функций второго рода $R_n^{(j)}(z)$ из (2.25), $j = 1, 2$, справедливы следующие формулы сильной асимптотики:

$$\begin{aligned} 1) \quad R_n^{(1)}(z) &= \frac{X_{01}(z)}{c_0^n \Phi_1^n(z) e^{naz}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad z \in K \Subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1 \cup \Omega_2^*\}, \\ 2) \quad R_n^{(1)}(z) &= \frac{X_{02}(z)}{c_0^n \Phi_2^n(z) e^{naz}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad z \in K \Subset \Omega_2^*, \\ 3) \quad R_{n\pm}^{(1)}(z) &= \left(\frac{X_{01}(z)}{c_0^n \Phi_1^n(z) e^{naz}} \right)_\pm \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad z \in K \Subset \Delta_1, \\ 4) \quad R_n^{(1)}(z) &= \left(\frac{X_{01}(z)}{c_0^n \Phi_1^n(z) e^{naz}} + \frac{X_{02}(z)}{c_0^n \Phi_2^n(z) e^{naz}} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad z \in K \Subset \partial\Omega_2^* \setminus \delta, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
5) \quad R_{n+}^{(1)}(z) &= \left(\frac{X_{01}(z)}{c_0^n \Phi_1^n(z) e^{naz}} \right)_+ \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \left(\frac{X_{02}(z)}{c_0^n \Phi_2^n(z) e^{naz}} \right)_- \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = R_{n-}^{(1)}(z), \quad z \in K \Subset \delta.
\end{aligned}$$

Здесь Φ_j^n – экспоненты от абелева интеграла (2.6), (2.8), c_0 – нормировочная константа из (2.9), а $X_{0,j}$ – элементы матрицы $X =: \{X_{i,j}\}_{i,j=0}^2$, являющейся решением краевой задачи (2.13).

Для функции $R_n^{(2)}(z)$ асимптотические формулы получаются из (2.30) путем замены индексов 1 на 2, 2 на 1, а также a на $-a$.

Обсудим следствие теоремы 2.3, касающееся дополнительных нулей функций второго рода (на примере $R_n^{(1)}$). Как следует из формулы 4) в (2.30), при возникновении области Ω_2^* эти нули появляются в окрестности отрезка Δ_2 , аккумулируясь к аналитической кривой $\partial\Omega_2^* \setminus \delta$.

При этом, когда $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(II)}$ (см. рис. 7), имеем $\delta = \emptyset$ и нули $R_n^{(1)}$ аккумулируются к кусочно аналитической кривой $\Gamma_2^* \subseteq \partial\Omega_2^*$, охватывающей часть отрезка Δ_2 (см. рис. 6, а)). Аналогично, нули $R_n^{(2)}$ стремятся к симметричной кривой $\partial\Omega_1^*$ возле отрезка Δ_1 .

Когда $(b, a) \in \{\Xi_0^{(I)} \cup \Xi_1\} \setminus \Xi_{0*}^{(I)}$ (см. рис. 7), нули $R_n^{(1)}$ стремятся к подмножеству Γ_δ , двум аналитическим дугам, соединяющим мнимые точки ветвления $\pm ie_3$ с некоторой точкой отрезка Δ_2 (см. рис. 3, b), 4 и 5, b)). Обозначим объединение этих дуг через $\Gamma_{\delta,2}^*$.

В случае же, когда $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(I)}$ (см. рис. 7), носитель предельной меры распределения дополнительных нулей $R_n^{(1)}$ не является связным. Он состоит как из дуг $\Gamma_{\delta,2}^*$, так и из кривой Γ_2^* (см. рис. 8).

Рис. 8. Множество Γ при $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(I)}$

2.8. Вариационное описание предельных мер. В заключение обзора результатов, полученных в работе, мы остановимся на вариационной задаче, решением которой являются предельные меры распределения нулей многочлена совместной ортогональности P_n и предельные меры распределения дополнительных нулей функций второго рода $R_n^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Напомним обозначение ν_{P_n} меры, равномерно распределенной в нулях многочлена совместной ортогональности P_n (см. (1.6)),

$$\nu_{P_n}(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(z - z_{n,k}), \quad P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{n,k}).$$

Пусть $\{z_{n,k}^{(j)}\}$ – нули (в конечной части $\mathbb{C}$) функций второго рода $R_n^{(j)}(z)$ и

$$\nu_{R_n^{(j)}}(z) := \frac{1}{n} \sum_k \delta(z - z_{n,k}^{(j)}), \quad R_n^{(j)}(z_{n,k}^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

– считающие их меры.

Мы сформулируем вариационную задачу на меры и их носители, решение которой дает нам меры

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \quad \nu_{R_n^{(j)}} \xrightarrow{*} \mu_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

Существенную роль в вариационной задаче играет то обстоятельство, что носители мер $\{\mu_j\}_{j=1}^2$ лежат, вообще говоря, в комплексной плоскости. Рассмотрим

$$\Omega^* := \Omega_1^* \cup \Omega_2^*, \quad \text{supp}(\mu_j) \subset \partial\Omega^*, \quad j = 1, 2.$$

Граница $\partial\Omega^*$ представляет собой объединение жордановых кривых. При $(b, a) \in \{\Xi_0^{(I)} \cup \Xi_1\} \setminus \Xi_{0*}^{(I)}$ – это одна кривая (Ω^* связно), при $(b, a) \in \Xi_0^{(II)}$ – это две кривые (Ω^* двусвязно), при $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(I)}$ – это три кривые (Ω^* трехсвязно). Имеем из теоремы 2.1

$$\text{supp } \lambda = \Delta_1 \cup \Delta_2 \subset \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$\lambda_j := \lambda|_{\Delta_j}, \quad \tilde{\lambda}_j := \lambda|_{\Delta_j \setminus \Omega^*}, \quad \Lambda_j := \lambda_j + \lambda_k - \tilde{\lambda}_k, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k. \quad (2.32)$$

Сейчас мы сформулируем вариационную задачу, решением которой будет векторная мера

$$\vec{\lambda} := (\Lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2)$$

Решением “дуальной” задачи будет векторная мера

$$(\Lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1),$$

симметричная в определенном смысле вышеприведенной мере. Введем понятия, необходимые для постановки вариационной задачи.

1) Класс вектор-компактов

$$\mathcal{E} := \{\vec{E}\} := \{(E_1, E_2, E_3)\}, \quad (2.33)$$

компоненты которых имеют попарно непересекающиеся внутренности, т.е.

$$\mathring{E}_1 \cap \mathring{E}_2 = \mathring{E}_1 \cap \mathring{E}_3 = \mathring{E}_2 \cap \mathring{E}_3 = \emptyset,$$

и, кроме того,

$$E_1 \subseteq \mathbb{R}, \quad E_2 \subseteq \mathbb{R} \setminus \Omega, \quad E_3 \subseteq \partial\Omega,$$

где Ω – конечное объединение непересекающихся областей (пример: $\Omega = \Omega^*$) с жордановыми кусочно аналитическими границами.

2) Класс вектор-мер

$$\mathcal{L}_{\vec{E}} := \{\sigma_k\}_{k=1}^3 : \begin{cases} S(\sigma_k) \subseteq E_k, & k = 1, 2, 3, \\ |\sigma_1| + |\sigma_2| = 1, & |\sigma_1| - |\sigma_3| = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.34)$$

3) Матрица взаимодействия и вектор-столбец внешних полей

$$\mathcal{A} := \{a_{jk}\} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\vec{Q} := (Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)})^T := (\operatorname{Re} T(z) + \operatorname{Re} az, \operatorname{Re} T(z) - \operatorname{Re} az, 2a \operatorname{Re} z)^T.$$

4) Энергия векторной меры с матрицей взаимодействия и внешним полем

$$I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}(\vec{\sigma}) := \sum_j \sum_k a_{jk} I(\sigma_j, \sigma_k) + 2 \sum_j \int Q^{(j)} d\sigma_j, \quad (2.36)$$

где $I(\sigma_i, \sigma_j)$ – функционал взаимной энергии с логарифмическим ядром,

$$I(\sigma_j, \sigma_k) := \iint \ln \frac{1}{|x - t|} d\sigma_j(x) d\sigma_k(t).$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СЕДЛОВОЙ ТОЧКЕ ФУНКЦИОНАЛА $I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}$. Требуется найти векторную меру $\vec{\sigma}^* := (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \in \mathcal{L}_{\vec{E}}$, $\vec{E} \in \mathcal{E}$, такую, что

$$I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}(\vec{\sigma}^*) = \max_{\vec{E} \in \mathcal{E}} \min_{\vec{\sigma} \in \mathcal{L}_{\vec{E}}} I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}(\vec{\sigma}). \quad (2.37)$$

Приведем соотношения равновесия, характеризующие решения задачи (2.37). Обозначим через $\vec{U} := (U_1, U_2, U_3)^T$ вектор-столбец потенциалов

$$\vec{U}(\vec{\sigma}, \mathcal{A}, \vec{Q}) := \mathcal{A} \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{\sigma}) + \vec{Q}, \quad U_k(z) := \sum_j a_{kj} \mathcal{P}^{\sigma_j}(z) + Q^{(k)}(z), \quad (2.38)$$

где $\vec{\mathcal{P}}(\vec{\sigma})$ – вектор-столбец с координатами

$$\mathcal{P}^{\sigma_j}(z) := \int \ln \frac{1}{|z - t|} d\sigma_j(t).$$

При фиксированном $\vec{E}$ вектор-мера $\vec{\sigma}^*$, минимизирующая функционал (2.36) в $\mathcal{L}_{\vec{E}}$, существует и единственна (см. [21]). Она определяется следующими соотношениями равновесия:

$$U_k(z) \quad \begin{cases} = \gamma_k, & z \in \text{supp}(\sigma_k^*), \\ \geq \gamma_k, & z \in E_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.39)$$

где в силу связей величин мер в (2.34) константы равновесия γ_k (они, как известно, тоже однозначно определяются (2.39)) удовлетворяют соотношению

$$\gamma_3 = \gamma_1 - \gamma_2. \quad (2.40)$$

Дальнейшая максимизация функционала энергии в классе $\mathcal{E}$ (по сути, речь идет о максимизации $I_{\mathcal{A}}^Q$ при вариации E_3 , см. (2.33)) добавляет к соотношениям (2.39), (2.40) (равновесиям мер на компактах $\vec{E}$) условие симметрии в поле (т.е. равновесия в поле самого компакта):

$$\frac{\partial U_3}{\partial n_+} = \frac{\partial U_3}{\partial n_-} \quad \text{на} \quad \text{supp}(\sigma_3^*). \quad (2.41)$$

Таким образом, соотношения равновесия (2.39)–(2.41) эквивалентны экстремальной задаче (2.37), причем они не только однозначно определяют экстремальную (равновесную) меру, но также определяют и константы равновесия (2.40).

Вопрос о существовании седловой точки (2.37) функционала энергии (2.36), (2.35) с произвольным вещественным аналитическим потенциалом $T(z)$ является открытым вопросом. Важность этой вариационной задачи заключается в том, что при доказательстве ее разрешимости в общем случае она может быть использована для нахождения меры λ для ансамблей (1.1), (1.3) с общими потенциалами V , для которых не представляется возможным прямое нахождение алгебраической функции для выражения плотности λ . В настоящей работе мы решаем эту задачу для ангармонического потенциала $T(z)$ (см. (1.2)).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть потенциал $T(z)$ в функционале энергии $I_{\mathcal{A}}^Q$ из (2.36), (2.35) имеет вид (1.2), т.е.

$$T(z) := \frac{z^4}{4} + b \frac{z^2}{2}.$$

Тогда для любого (b, a) , где $a > 0$ – параметр внешнего поля в (2.35),

1) существует $\vec{\sigma}^*$ – седловая точка (2.37) функционала $I_{\mathcal{A}}^Q$ в классе вектор-мер $\mathcal{L}_{\vec{E}}$, $\vec{E} \in \mathcal{E}$ (см. (2.34), (2.33));

2) компоненты экстремальной меры $\vec{\sigma}^* := (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ дают выражения для предельных мер распределения нулей P_n и R_n (см. (2.31))

$$\lambda = \sigma_1^* + \sigma_2^*, \quad \mu_2 = \sigma_3^*;$$

при этом (см. обозначение (2.32)) $\sigma_1^* = \Lambda_2$, $\sigma_2^* = \tilde{\lambda}_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. 1) Аналогичное утверждение справедливо и для дуальной задачи, которая получается в результате перестановки первых двух компонент внешнего поля (2.35), т.е.

$$(Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}) \text{ заменяется на } (Q^{(2)}, Q^{(1)}, Q^{(3)}),$$

при этом третья компонента экстремальной меры будет равна μ_1 , точнее, экстремальная мера дуальной задачи имеет вид $(\Lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$.

2) Факт существования экстремальной меры и ее явный вид в теореме 2.4 мы получаем проверкой свойств равновесия (2.39)–(2.41) меры (1.11), (1.12), задаваемой алгебраической функцией $H(z)$. При этом единственность экстремальной меры является следствием единственности предельных точек в (2.31).

При проверке соотношений равновесия (2.39)–(2.41) мы в § 5 рассматриваем, следуя [15], эквивалентную задаче (2.32)–(2.37) задачу равновесия для двухкомпонентной меры

$$\vec{\tau} := (\tau_1, \tau_2), \quad |\tau_1| = 1, \quad |\tau_2| = \frac{1}{2}, \quad (2.42)$$

с так называемой *никишинской матрицей взаимодействия*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

(см. [27], [28], [22]). В нашей ситуации для носителей $\vec{\tau}$ имеем

$$\text{supp}(\tau_1) \subset \mathbb{R}, \quad \text{supp}(\tau_2) \subset i\mathbb{R}, \quad (2.44)$$

на компоненту τ_1 действует внешнее поле

$$Q^{(1)}(x) = T(x) + a|x|, \quad Q^{(2)}(x) = 0, \quad (2.45)$$

а вторая компонента τ_2 должна удовлетворять ограничению

$$\tau_2 \leq \tilde{\sigma}, \quad \text{где} \quad d\tilde{\sigma} = \frac{a}{\pi}|dz| \quad \text{на} \quad i\mathbb{R}. \quad (2.46)$$

При этом для экстремальной меры $\vec{\tau}^* = (\tau_1^*, \tau_2^*)$ соотношения равновесия на пластинах $\mathbb{R}$ и $i\mathbb{R}$ (см. (2.44)) имеют следующий вид (обозначения см. в (2.38)):

$$U_1(x) \begin{cases} = \gamma_1^{\vec{\tau}^*}, & x \in \text{supp}(\tau_1^*), \\ \geq \gamma_1^{\vec{\tau}^*}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad U_2(x) \begin{cases} = \gamma_2^{\vec{\tau}^*}, & x \in \text{supp}(\tau_2^*) \cap \text{supp}(\tilde{\sigma} - \tau_2), \\ \geq \gamma_2^{\vec{\tau}^*}, & x \in \text{supp}(\tilde{\sigma} - \tau_2), \\ \leq \gamma_2^{\vec{\tau}^*}, & x \in i\mathbb{R} \setminus \text{supp}(\tilde{\sigma} - \tau_2). \end{cases} \quad (2.47)$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для ангармонического потенциала $T(z)$ из (1.2) задача (2.37) о седловой точке в классе (2.33), (2.34) функционала энергии $I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}$ из (2.36) с параметрами (2.35) эквивалентна задаче о минимуме функционала $I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}$ в классе (2.42), (2.44), (2.46) с параметрами (2.43), (2.45).

Эквивалентность в предложении 2.2 понимается в следующем смысле: для экстремальной меры $\vec{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ первой задачи и экстремальной меры $\vec{\tau}^* = (\tau_1^*, \tau_2^*)$ второй задачи справедливо соотношение

$$\sigma_1^* + \sigma_2^* = \tau_1^*.$$

Задача минимизации энергии $I_{\mathcal{A}}^{\vec{Q}}$ из (2.36) с никишинской матрицей взаимодействия $\mathcal{A}$ из (2.43) и ограничением вида (2.46) на вторую компоненту рассматривалась ранее (см. [23], [24], [29]). Что касается задачи, рассматриваемой в настоящей работе, т.е. задачи определения предельных средних мер распределения собственных значений ансамбля (1.1), (1.3) с четным полиномиальным потенциалом $V(x) = nT(x)$, то она была предложена в [25].

Задача (2.42)–(2.47) имеет “действительный” характер, в ней отсутствует условие типа (2.41) – условие равновесия в комплексной плоскости носителя экстремальной меры (соответственно, в постановке для функционала энергии речь идет о минимуме функционала, а не о седловой точке (2.37)). Существование и единственность решения задачи (2.42)–(2.47) может быть доказана стандартными методами (см. [28], [30]–[32]). Поэтому она может быть использована для доказательства существования и описания предела средних мер распределения собственных значений ансамблей (1.1), (1.3) с произвольным четным потенциалом.

В случае потери симметрии относительно мнимой оси задача (2.42)–(2.47) нуждается в модификации. При этом мы предполагаем, что предложенная нами “комплексная” задача (2.33)–(2.41) годится для описания ответа и в этой ситуации. Доказательство существования решения “комплексной” задачи в общем случае (т.е. для несимметричных $T(x)$) подтвердило бы наше предположение.

§ 3. Геометрия задачи

В этом параграфе мы рассмотрим детально алгебраическую функцию $H(z)$, ее риманову поверхность $\mathfrak{R}$, порождаемый H абелев интеграл $G(z)$ и его однозначную действительную часть $g(z) := \operatorname{Re} G(z)$, а также разбиение $\mathbb{C}$ множеством

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : g_j(z) = g_k(z), \ j \neq k, \ j, k = 0, 1, 2\}$$

на объединение областей

$$\Omega_{jkl} := \{z \in \mathbb{C} : g_j(z) < g_k(z) < g_l(z)\}, \quad j, k, l \in \{0, 1, 2\}, \quad j \neq k \neq l \neq j.$$

Совокупность этих объектов и их свойства мы назовем *геометрией задачи*.

3.1. Алгебраическая функция $H(z)$ и ее риманова поверхность $\mathfrak{R}$. В работе [2] мы решили задачу нахождения алгебраической кривой $H(z)$ третьего порядка рода нуль, ветви которой не имеют полюсов в $\mathbb{C}$, а в окрестности $z = \infty$

имеют следующие разложения:

$$H(z) := \{H_j(z)\}_{j=0}^2 : \begin{cases} H_0(z) = T'(z) - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ H_1(z) = -a + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ H_2(z) = +a + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $T(z)$ – многочлен (1.2). Напомним, сначала мы нашли униформизацию этой кривой (униформизирующий параметр t) и уравнение ее римановой поверхности $t(z)$:

$$H(z) : \begin{cases} H = c^3(t^3 - 3t) + t \frac{u}{c}, \\ z = ct + \frac{ct}{u(t^2 - 1)}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где параметры c и u определены в (1.15). Отсюда получаем

- а) уравнение для $H(z)$ (1.10), (1.14) и уравнение для точек ветвления (1.16);
- б) уравнение (2.3) для кривой $a_{\text{cr}}(b)$ в полуплоскости параметров Ξ , разделяющей режимы: при $(b, a) \in \Xi_0^{(I)}$ носитель предельной меры собственных значений есть один отрезок Δ ; при $(b, a) \in \Xi_0^{(II)}$ носитель состоит из двух отрезков $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

Уравнение (2.1) кривой $a_m(b)$, разделяющей режимы $\Xi_0^{(I)}$ и Ξ_1 , получалось из условия, что дискриминант алгебраического уравнения функции $H(z)$ (см. (1.10), (1.14)) имеет нуль кратности четыре в точке $z = 0$. При прохождении точки (b, a) из $\Xi_0^{(I)}$ через эту границу данный нуль расщепляется на два нуля кратности два,двигающиеся по действительной оси в положительном и отрицательном направлениях. В этих нулях мнимая часть $H(z)$ меняет знак, следовательно, ее скачок (1.12) не является плотностью положительной меры и алгебраическая функция рода нуль (1.10), (1.14) неприменима для представления $H(z)$.

Другая ветвь кривой (2.1) – кривая $a_M(b)$ (2.2) является границей, разделяющей режимы $\Xi_0^{(II)}$ и Ξ_1 (см. рис. 1).

Отметим, что выбор параметров (b, a) на границе области Ξ_1 влечет в уравнении (1.10) для $H(z)$ рода нуль равенство нулю параметров (1.14),

$$\alpha(a, b) = 0, \quad \beta(a, b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \begin{cases} a_m(b), & b \in (-2, -\sqrt{3}), \\ a_M(b), & b \in (-\infty, -\sqrt{3}). \end{cases}$$

Для $(b, a) \in \Xi_1$ мы решаем задачу (3.1) в классе алгебраических функций $H(z)$ (см. (1.10)) рода один. В результате получается некоторая алгебраическая система уравнений на параметры α и β (которую мы здесь не приводим), имеющая тривиальное решение

$$\alpha(a, b) = 0, \quad \beta(a, b) = 0, \quad (b, a) \in \Xi_1.$$

При этом в униформизирующих переменных $(\sqrt{P}, t)$, где

$$P(t) = t^3 - t^2b + t + a^2, \quad (3.3)$$

мы получаем эллиптическую униформизацию $H(z)$:

$$H(z) : \begin{cases} H = \sqrt{P}, \\ z = \frac{\sqrt{P}}{t}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Дальнейшее рассмотрение геометрии задачи (см. п. 3.2) покажет, что выбор в качестве $H(z)$ при $(b, a) \in \Xi_0$ алгебраической функции (1.10), (1.14) рода нуль,

Рис. 9. Структура листов $\mathfrak{R}$ при $(b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})}$

Рис. 10. Структура листов $\mathfrak{R}$ при $(b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}$

Рис. 11. Структура листов $\mathfrak{R}$ при $(b, a) \in \Xi_1$

а при $(b, a) \in \Xi_1$ – алгебраической функции (2.4) рода один позволяет провести асимптотический анализ многочленов P_n (1.9), (1.2) и функций второго рода $R_n^{(j)}$ из (2.25) (см. § 4).

Напомним фиксацию (в соответствии с (3.1)) глобально ветвей функции $H(z)$ (см. (2.12)). На рис. 9–11 приведена выбранная “естественная” структура листов $\{\mathfrak{R}_j\}_{j=0}^2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ функции $H(z)$ при различных значениях параметров (b, a) .

3.2. Абелев интеграл G и множество Γ . Напомним, что нашей целью в изучении абелева интеграла G из (2.6) является построение множества Γ из (2.26) и разбиение $\mathbb{C}$ на объединение областей Ω_{jkl} . Стандартная процедура приближенного построения множества Γ такова. Берется точка ветвления $H(z)$ такая, что

$$H_j(e) = H_k(e), \quad j \neq k,$$

и строятся траектории (ломанные Эйлера), выходящие из e , вдоль которых выражение

$$(H_j(z) - H_k(z)) dz$$

является чисто мнимым, т.е.

$$e \nearrow z_1 \nearrow z_2 \nearrow \dots : \begin{cases} \operatorname{Re}[(H_j(z_1) - H_k(z_1))(z_1 - e)] = 0, \\ \operatorname{Re}[(H_j(z_2) - H_k(z_2))(z_2 - z_1)] = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.5)$$

Так как уравнения, описывающие функцию H , у нас имеются, то эта процедура легко и с достаточной точностью реализуется с помощью стандартных программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений (см. примеры на рис. 3 и 4).

Однако множество Γ не исчерпывается аналитическими дугами, выходящими из точек ветвления H . Имеются аналитические кривые, принадлежащие Γ и не проходящие через точки ветвления H . Специальный анализ местоположения этих кривых требуется при $\text{gen } H = 0$, так как в этом случае H имеет меньше точек ветвления и, следовательно, меньшее число компонент Γ определяется процедурой (3.5).

Используя униформизацию H из (3.2), мы можем в явном виде определить абелев интеграл $G(z)$:

$$G(z) : \begin{cases} G = \frac{c^4 t^4}{4} + \frac{(u^2 - (3u + 1)c^4)t^2}{2u} + \frac{u - 2c^4}{u(t^2 - 1)} - \ln(t^2 - 1), \\ z = z(t) = ct + \frac{ct}{u(t^2 - 1)}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Для нахождения Γ мы перейдем из плоскости униформизирующей переменной t в плоскость вспомогательной переменной s , где

$$s := \frac{1}{u(t^2 - 1)}. \quad (3.7)$$

Описание образа множества Γ в плоскости s дано в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Множество Γ из (2.26) для $(b, a) \in \Xi_0$ имеет вид

$$\Gamma = \{z(t_{\pm}(s)), s \in \tilde{\Gamma}\},$$

где

$$\tilde{\Gamma} := \{s : \operatorname{Re} \mathcal{F}(s) = 0\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) := \ln & \left(\frac{1 + u(s+2) - \sqrt{\frac{1}{s} + u} \sqrt{s + u(s+2)^2}}{1 + u(s+2) + \sqrt{\frac{1}{s} + u} \sqrt{s + u(s+2)^2}} \right) \\ & + \sqrt{\frac{1}{s} + u} \sqrt{s + u(s+2)^2} \left(s + 2 + \frac{c^4(s-2)(s + u(s+2)^2)}{2u^2} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем через один корень $t(z)$ уравнения $\mathfrak{R}$ вида

$$ct^3 - zt^2 + \left(\frac{1}{u} - 1 \right) ct + z = 0 \quad (3.9)$$

выразить два других корня t_1 и t_2 , а именно,

$$t_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{R}}{2u(t^2 - 1)}, \quad R := 4u^2 t^4 + (1 + 4u - 8u^2)t^2 + 4u(u - 1). \quad (3.10)$$

Подставляя t_1 и t_2 в первое соотношение из (3.2) и вычитая одно выражение из другого, имеем при $j \neq k$:

$$H_j - H_k = \frac{[(2c^4 u^2 - u^3)t^4 + (2u^3 - 4c^4 u^2 - c^4 u - c^4)t^2 - u^3 + 2c^4 u^2 + c^4 u] \sqrt{R}}{u^3(t-1)^3(t+1)^3 c}.$$

Умножая обе части этого равенства на

$$\frac{dz}{dt} = \frac{c(ut^4 - 2ut^2 + u - t^2 - 1)}{u(t-1)^2(t+1)^2}$$

и интегрируя по t , получаем

$$\begin{aligned} \int (H_j - H_k)(t) \frac{dz}{dt} dt &= \frac{t\sqrt{R}[2u^3(t^2 - 1)^2(2u(t^2 - 1) + 1) - c^4(2u(t^2 - 1) - 1)R]}{2u^4(t^2 - 1)^4} \\ &+ \ln \frac{2u(t^2 - 1) + t^2 - t\sqrt{R}}{2u(t^2 - 1) + t^2 + t\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Наконец, делаем в полученном выражении замену переменной (3.7). Приходим к (3.8). Предложение доказано.

Локальный анализ уравнения $\operatorname{Re} \mathcal{F}(s) = 0$ в окрестности $s = \infty$ дает нам восемь решений, которые (численно решая нелинейное уравнение $\operatorname{Re} \mathcal{F}(s) = 0$) можно продолжить в конечную часть плоскости s и получить множество $\tilde{\Gamma}$. Применяя к точкам множества $\tilde{\Gamma}$ преобразования вида

$$t = \sqrt{1 + \frac{1}{us}}, \quad z = ct + \frac{ct}{u(t^2 - 1)},$$

мы приходим к множеству Γ в плоскости z . Именно такой процедурой был получен явный вид множеств Γ для различных параметров $(b, a) \in \Xi_0$ (см. рис. 5, 7, 8).

Как уже отмечалось в § 2 (п. 2.6), для анализа асимптотики дополнительных нулей функций второго рода необходима информация о местонахождении компонент множества Γ , не содержащих точки ветвления (ранее для $(b, a) \in \Xi_0$ мы их обозначили через $\Gamma_1, \bar{\Gamma}_1, \Gamma_2, \bar{\Gamma}_2$, см. (2.27)). При $(b, a) \in \Xi_0$, когда $\Gamma_j \cap \bar{\Gamma}_j \neq \emptyset$, $j = 1, 2$ (см. рис. 6, а)), возникают дополнительные нули функций второго рода. Укажем, при каких $(b, a) \in \Xi_0$ происходит касание Γ_j и $\bar{\Gamma}_j$, $j = 1, 2$ (очевидно, это происходит в момент касания компоненты Γ действительной оси, см. рис. 6, б)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. При $(b, a) \in \Xi_0$ таких, что

$$\begin{cases} c^4 u s^4 + 3c^4 u s^3 + c^4 s^3 + u^2 s^2 - 2u^2 s + 4c^4 u s - 2c^4 = 0, \\ \tilde{s} = -\frac{1}{2u} \left(u s + 2u + 1 + \sqrt{u + \frac{1}{s}} \sqrt{u(s+2)^2 + s} \right), \\ s \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} \mathcal{F}(\tilde{s}) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

имеет место касание компоненты Γ с действительной осью ($\mathcal{F}(s)$ определено в (3.8)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество Γ – это множество комплексных z , на котором $\operatorname{Re}(H_j(z)) = \operatorname{Re}(H_k(z))$. Если дуга этого множества касается действительной оси, то при действительных z кривая значений $H_j(z) - H_k(z)$ касается мнимой оси. От вещественного параметра z можно перейти к вещественному параметру s , а $\tilde{s}$ – другое (комплексное) значение s , соответствующее тому же z ;

$$H_j(z(s)) - H_k(z(s)) = \mathcal{F}(\tilde{s}).$$

В силу (3.7) касание Γ с действительной осью плоскости t есть следствие касания $\mathcal{F}(\tilde{s})$ с мнимой осью для вещественного s (см. рис. 12).

Рис. 12. Множество значений $\mathcal{F}(\tilde{s}(s))$, $s \in \mathbb{R}$ – критический режим

Подставив выражение для $\tilde{s}$ (см. второе уравнение в (3.11)) в формулу (3.8), можно добиться следующего вида у производной $\mathcal{F}'(\tilde{s})$:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(\tilde{s}) = \frac{A(s) + B\sqrt{C}}{D}.$$

Условие $A(s) = 0$ дает первое уравнение системы (3.11). Предложение доказано.

Систему (3.11), в которой уже произведена подстановка второго соотношения в третье, нужно дополнить уравнениями, выражающими u и s через (b, a) (см. (1.15)), и снабдить приближенными интервалами, в которых при заданном b лежат вещественные переменные a , s , u , s – предполагаемые решения полученной системы из четырех нелинейных уравнений. После этого система может быть решена численно. Именно так нами была получена кривая $a^*(b)$, изображенная на рис. 6.

Что же касается построения множества Γ при $(b, a) \in \Xi_1$, т.е. когда $\text{gen } H = 1$, то для этой цели мы пользуемся стандартной процедурой, описанной в начале этого пункта (см. (3.5)). Мы стартуем из точек ветвления и получаем компоненты Γ_{Δ_1} , Γ_{Δ_2} , Γ_δ (см. рис. 4). Положение оставшихся симметричных компонент Γ_* и Γ^* , во-первых, не влияет на асимптотику нулей, а, во-вторых, Γ_* и Γ^* проходят через точки пересечения Γ_δ с Γ_{Δ_1} и Γ_{Δ_2} , поэтому их также нетрудно получить этой же стандартной процедурой, стартуя из указанных точек пересечения.

Глобальная структура множества Γ , описание которой приведено в п. 2.6, также может быть обоснована применением теорем о глобальной структуре критических траекторий квадратичных дифференциалов. Пример таких рассуждений см. в [16].

§ 4. Матричная краевая задача Римана–Гильберта и сильная асимптотика

В этом параграфе мы докажем основные технические теоремы настоящей работы – теоремы 2.2 и 2.3. Теоремы 2.1 и 2.4 являются следствиями из этих теорем.

4.1. Постановка матричной краевой задачи и схема ее решения.

Для нахождения сильных асимптотик совместно ортогональных многочленов P_n из (1.7), (1.9), порождаемых ими ядер K_n из (1.8) и функций второго рода R_n из (2.25) мы используем метод матричной задачи Римана–Гильберта (см. [13]). Следуя оригинальной постановке этой задачи в работе [12] (для ортогональных многочленов), в случае совместно ортогональных многочленов (см. [14]) мы получаем, что матричная функция

$$Y := \begin{pmatrix} P_n & R_n^{(1)} & R_n^{(2)} \\ m_1 P_n & m_1 R_n^{(1)} & m_1 R_n^{(2)} \\ m_2 P_n & m_2 R_n^{(1)} & m_2 R_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

является решением следующей краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) Y \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ 2) Y \text{ на } \mathbb{R} \text{ имеет непрерывные граничные значения такие, что} \\ \quad Y_+ = Y_- J_0, \quad J_0(x) := \begin{pmatrix} 1 & e^{-n[T(x)+ax]} & e^{-n[T(x)-ax]} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3) Y(z) = (I + O(z^{-1})) \operatorname{diag}(z^n, z^{-n/2}, z^{-n/2}) \text{ при } z \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

В формуле (4.1) индексы $\tilde{n}$ и $\check{n}$ выбраны так, что для $\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 = \tilde{n}$ и для $\check{n}_1 + \check{n}_2 = \check{n}$ (см. определение (1.7)) выполняются соотношения

$$\tilde{n}_1 = \frac{n}{2} - 1, \quad \tilde{n}_2 = \frac{n}{2}, \quad \check{n}_1 = \frac{n}{2}, \quad \check{n}_2 = \frac{n}{2} - 1,$$

а константы m_1 и m_2 выбраны так, чтобы выполнялось третье условие в (4.2).

Отметим, что для воспроизводящего ядра (1.8) справедливо следующее равенство

$$K_n(x, y) = \frac{e^{-n(T(x)+T(y))}}{2\pi i(x-y)} \{e^{nay}[Y^{-1}(y)Y(x)]_{21} + e^{-nay}[Y^{-1}(y)Y(x)]_{31}\}$$

(см. [3]). Таким образом, чтобы получить асимптотики при $n \rightarrow \infty$ для P_n и K_n , нужно найти аппроксимацию решения задачи (4.2) при больших n . Это делается сведением обратимыми преобразованиями краевой задачи (4.2) к краевой задаче для функции $\mathcal{J}$ со скачком на некоторой системе контуров $\check{\Sigma}$ так, чтобы новый скачок при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $\check{\Sigma}$ стремился к единичной матрице, т.е.

$$\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{J} \in H(\mathbb{C} \setminus \check{\Sigma}), \\ \mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_- \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{на } \check{\Sigma}, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{J}(z) = I. \end{cases} \quad (4.3)$$

Про решение последней задачи можно сказать, что оно при $n \rightarrow \infty$ стремится к единичной матрице равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$ (детали см. в [13]), т.е.

$$\mathcal{J} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\overline{\mathbb{C}}} I. \quad (4.4)$$

Обращая эквивалентные преобразования, возвращаясь назад от $\mathcal{J}$ к Y , из (4.2) получаем асимптотику для элементов матрицы Y .

4.2. Нормировка задачи в бесконечности. Пусть

$$S := \operatorname{diag}\left(\frac{\Phi_0^n(z)}{e^{nT(z)}}, \frac{\Phi_1^n(z)}{e^{-naz}}, \frac{\Phi_2^n(z)}{e^{naz}}\right), \quad C := \operatorname{diag}\{c_0^n, c_1^n, c_2^n\},$$

(см. (2.8), (2.9)). Глобально ветви $\{\Phi_j^n\}_{j=0}^2$ определяются выбранными листами $\mathfrak{R}$ (см. рис. 9–11). Определим матричнозначную функцию

$$Z := CYS. \quad (4.5)$$

Функция Z удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} 1) Z \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbb{R} \cup \delta\}), \\ 2) \exists Z_{\pm} \in C(\mathbb{R} \cup \delta) : Z_+ = Z_- J \text{ на } \mathbb{R} \cup \delta, \\ 3) Z(z) = (I + O(z^{-1})), \quad z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$J = S_-^{-1} J_0 S_+ = \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{0+}^n}{\Phi_{0-}^n} & \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{0-}^n} & \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{0-}^n} \\ 0 & \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{1-}^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{2-}^n} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Отметим, что на δ скачок (4.7) принимает следующий вид:

$$J = \text{diag} \left\{ 1, \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{1-}^n}, \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{2-}^n} \right\}.$$

Цель последующих шагов в трансформации исходной краевой задачи (4.2) в задачу (4.3) состоит в переходе от задачи (4.6) к краевой задаче со скачками, не зависящими от n или скачками, стремящимися (во внутренних точках граничных дуг) к единичной матрице при $n \rightarrow \infty$ (см. пп. 4.3–4.5). Эти шаги называются “раскрытия линз” и основываются они на удачных факторизациях-декомпозициях скачка J из (4.7).

4.3. Раскрытие локальных линз (“простая” геометрия). Пусть

$$(b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})} \setminus \Xi_{0*}^{(\text{II})}. \quad (4.8)$$

В этом случае $\delta = \emptyset$, а на $\mathbb{R}$ имеем

$$J = \begin{cases} I + O(q^n) & \text{на } K \in \mathbb{R} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\}, \\ J^{(1)} + O(q^n) & \text{на } K \in \Delta_1, \\ J^{(2)} + O(q^n) & \text{на } K \in \Delta_2, \end{cases} \quad 0 < q \leq q_0 < 1, \quad (4.9)$$

(см. рис. 5 и 9), где

$$J^{(1)} := \begin{pmatrix} \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)_+^n & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)_-^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^{(2)} := \begin{pmatrix} \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_2} \right)_+^n & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_2} \right)_-^n \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_2} \right)^n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Матрицы $J^{(j)}$, $j = 1, 2$, допускают следующую декомпозицию:

$$J^{(1)} = D_{1-} J_{\Delta_1} D_{1+}, \quad J^{(2)} = D_{2-} J_{\Delta_2} D_{2+}, \quad (4.11)$$

где

$$J_{\Delta_1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Delta_2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. обозначение (2.14)). Наряду с каждым отрезком Δ_j , $j = 1, 2$, рассмотрим две гладкие кривые Δ_j^+ и Δ_j^- , концы которых совпадают с концами Δ_j , а сами они расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Обозначим через $L_j^{(+)}$ (соответственно через $L_j^{(-)}$) “линзообразную” область между Δ_j и Δ_j^+ (соответственно между Δ_j и Δ_j^-); см. рис. 13.

Рис. 13. Локальные линзы

Также обозначим

$$\Sigma_L := \Delta_1^+ \cup \Delta_1^- \cup \Delta_2^+ \cup \Delta_2^-.$$

Исходя из (4.9) и (4.11), определим

$$\widehat{Z} := \begin{cases} Z D_1^{-1} & \text{в } L_1^{(+)}, \\ Z D_1 & \text{в } L_1^{(-)}, \\ Z D_2^{-1} & \text{в } L_2^{(+)}, \\ Z D_2 & \text{в } L_2^{(-)}, \\ Z & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Функция $\widehat{Z}$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} 1) \widehat{Z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \Sigma_L\}), \\ 2) \exists \widehat{Z}_{\pm} \in C(\mathbb{R} \cup \Sigma_L) : \widehat{Z}_+ = \widehat{Z}_- \widehat{J} \text{ на } \mathbb{R} \cup \Sigma_L, \\ 3) \widehat{Z}(z) = (I + O(z^{-1})), \quad z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.13)$$

где в силу (4.9) и (4.11)

$$\widehat{J} = O(q^n) + \begin{cases} I & \text{на } \mathbb{R} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\}, \\ J_{\Delta_1} & \text{на } \Delta_1, \\ J_{\Delta_2} & \text{на } \Delta_2, \\ D_1 & \text{на } L_1^{(+)} \cup L_1^{(-)}, \\ D_2 & \text{на } L_2^{(+)} \cup L_2^{(-)} \end{cases}$$

(см. обозначение (2.14)). Так как по определению случая (4.8) (см. п. 2.6, рис. 5, а))

$$L_1^{(+)} \cup L_1^{(-)} \subset \Omega_{201}, \quad L_2^{(+)} \cup L_2^{(-)} \subset \Omega_{102},$$

то в силу (2.28) и (4.10)

$$D_j = I + O(q^n) \quad \text{на } K \in \{L_j^{(+)} \cup L_j^{(-)}\} \setminus \varepsilon,$$

где ε есть множество точек ветвления (см. (2.10)).

Таким образом, промежуточная цель, определенная в конце п. 4.2, для случая (4.8) достигнута.

4.4. Раскрытие глобальных линз (нарушение “простоты” геометрии – причина вторая). Пусть

$$(b, a) \in \Xi_{0*}^{(\text{II})}. \quad (4.14)$$

В этом случае (см. рис. 6, а)) в окрестности отрезков Δ_j возникают области Ω_j^* (см. (2.29)) и скачок J уже не может быть представлен в виде (4.9), непосредственно допускающим декомпозицию (4.11). Однако, скачок J (см. (4.7)) может быть подвергнут другой полезной декомпозиции. Обозначим

$$D_{21} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\Phi_2^n}{\Phi_1^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi_1^n}{\Phi_2^n} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Для J (см. (4.7)) справедливы следующие формальные тождества:

$$J = D_{21-} \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{0+}^n}{\Phi_{0-}^n} & \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{0-}^n} & 0 \\ 0 & \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{1-}^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{2-}^n} \end{pmatrix} D_{21+}^{-1} = D_{12-} \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{0+}^n}{\Phi_{0-}^n} & 0 & \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{0-}^n} \\ 0 & \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{1-}^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{2-}^n} \end{pmatrix} D_{12-}^{-1}. \quad (4.16)$$

Обозначим через $\widetilde{\Omega}_j^*$ область, содержащую Ω_j^* и отрезок Δ_j (см. рис. 14, а)), т.е.

$$\widetilde{\Omega}_j^* : \{\Omega_j^* \cup \Delta_j\} \subset \widetilde{\Omega}_j^*, \quad j = 1, 2. \quad (4.17)$$

Рис. 14. а) Глобальные линзы – открытие; б) взаимодействие линз

В случае (4.14) считаем, что

$$\tilde{\Omega}_1^* \cap \tilde{\Omega}_2^* = \emptyset. \quad (4.18)$$

Исходя из (4.16), определим

$$\tilde{Z} := \begin{cases} ZD_{21} & \text{в } \tilde{\Omega}_1^*, \\ ZD_{12} & \text{в } \tilde{\Omega}_2^*, \\ Z & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z}_+ = \tilde{Z}_- \tilde{J} \quad \text{на } \mathbb{R} \cup \{\partial\tilde{\Omega}_1^* \cup \partial\tilde{\Omega}_2^*\}, \quad (4.19)$$

В результате функция $\tilde{Z}$ будет иметь на $\mathbb{R}$ скачок вида (4.9),

$$\tilde{J} := \begin{cases} I + O(q^n) & \text{на } \mathbb{R} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2\}, \quad q \leq q_0 < 1, \\ J^{(1)} & \text{на } \Delta_1, \\ J^{(2)} & \text{на } \Delta_2, \end{cases} \quad (4.20)$$

а на $\{\partial\tilde{\Omega}_1^* \cup \partial\tilde{\Omega}_2^*\}$ имеем

$$\tilde{J} := \begin{cases} D_{21} & \text{на } \partial\tilde{\Omega}_1^*, \\ D_{12} & \text{на } \partial\tilde{\Omega}_2^*, \end{cases}$$

и так как $\partial\tilde{\Omega}_1^* \subset \Omega_{201}$, $\partial\tilde{\Omega}_2^* \subset \Omega_{102}$, то из (4.15) получаем

$$\tilde{J} = I + O(q^n) \quad \text{на } \partial\tilde{\Omega}_1^* \cup \partial\tilde{\Omega}_2^* =: \partial\tilde{\Omega}^*.$$

Далее, можно открыть локальные линзы $L_j^{(\pm)}$ вокруг отрезков Δ_j , $j = 1, 2$, преобразуя скачок (4.20) декомпозицией (4.11). Окончательно для геометрии

(4.14) получим, что функция

$$\hat{Z} := \begin{cases} ZD_{21}D_1^{-1} & \text{в } L_1^{(+)}, \\ ZD_{21}D_1 & \text{в } L_1^{(-)}, \\ ZD_{12}D_2^{-1} & \text{в } L_2^{(+)}, \\ ZD_{12}D_2 & \text{в } L_2^{(-)}, \\ ZD_{21} & \text{в } \Omega_1^* \setminus \{L_1^{(+)} \cup L_1^{(-)}\}, \\ ZD_{12} & \text{в } \Omega_2^* \setminus \{L_2^{(+)} \cup L_2^{(-)}\}, \\ Z & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4.21)$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} 1) \hat{Z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*\}), \quad \exists \hat{Z}_{\pm} \in C(\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*), \\ 2) \hat{Z}_+ = \hat{Z}_- \hat{J} \quad \text{на } \mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*, \\ 3) \hat{Z}(z) = (I + O(z^{-1})), \quad z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.22)$$

со скачком

$$\hat{J} = \begin{cases} J_{\Delta_1} & \text{на } \Delta_1, \\ J_{\Delta_2} & \text{на } \Delta_2, \\ I + O(q^n) & \text{на } K \Subset \{\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*\} \setminus \varepsilon. \end{cases} \quad (4.23)$$

4.5. Взаимодействие глобальных линз (нарушение “простоты” геометрии – причина первая). Пусть

$$(b, a) \in \{\Xi_0^{(1)} \cup \Xi_1\} \setminus \Xi_{0*}^{(1)}. \quad (4.24)$$

В этих случаях (см. рис. 3, б), 4 и 5, б)) возникают комплексные точки ветвления, $\delta \neq \emptyset$, аналитические дуги из Γ_δ (см. (2.27)) пересекают отрезки Δ_1 и Δ_2 и под ними образуются области Ω_1^* и Ω_2^* соответственно. Обратим внимание на то, что теперь Ω_1^* и Ω_2^* имеют общую границу δ и поэтому, открывая глобальные линзы $\tilde{\Omega}_j^*$ из (4.17) (см. рис. 14, б)), мы не сможем реализовать условие (4.18) и нам придется учитывать их взаимодействие на разрезе δ , соединяющем комплексные точки ветвления. Напомним (см. (4.7)), что функция Z (см. (4.6)) на δ имеет скачок

$$J = \text{diag} \left\{ 1, \frac{\Phi_{1+}^n}{\Phi_{1-}^n}, \frac{\Phi_{2+}^n}{\Phi_{2-}^n} \right\}. \quad (4.25)$$

Отметим замечательное тождество, позволяющее проконтролировать взаимодействие скачков (глобальных линз) на разрезе δ . Имеем для J (см. (4.25)) формально

$$D_{12-}^{-1} J D_{21+} = D_{21-}^{-1/2} J_\delta D_{12+}^{1/2}, \quad (4.26)$$

где, напомним (2.14),

$$J_\delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при открытии глобальных линз (4.19) скачки с внешних границ линз Ω_1^* и Ω_2^* , встречаясь со скачком J на δ , устраняют его осцилляции (превращая в постоянный скачок J_δ), а сами, проходя через δ , попадают в области, где они стремятся к единичной матрице. Другими словами, если мы откроем глобальные линзы $\tilde{\Omega}_j^*$, касающиеся вдоль разреза δ , то скачок функции (4.19) (см. левую часть (4.26)) допускает декомпозицию, стоящую в правой части (4.26), которую, в свою очередь, можно интерпретировать как открытие локальной линзы $L_\delta^{(\pm)}$ вокруг отрезка $\Delta_\delta : \Delta_\delta^+ \cup \Delta_\delta^- := \partial\{L_\delta^{(+)} \cup L_\delta^{(-)}\}$.

Рис. 15. Разрезы, определяющие ветви $\{X_j(t)\}_{j=0}^2$: а) случай $(b, a) \in \Xi_0^{(II)}$, б) случай $(b, a) \in \Xi_0^{(I)}$

Итак, для геометрии (4.24) можно сделать следующие выводы. Функция

$$\hat{Z} := \begin{cases} ZD_{21}D_1^{-1} & \text{в } L_1^{(+)}, \\ ZD_{21}D_1 & \text{в } L_1^{(-)}, \\ ZD_{21}D_{12}^{-1/2} & \text{в } L_\delta^{(+)}, \\ ZD_{12}D_{21}^{1/2} & \text{в } L_\delta^{(-)}, \\ ZD_{12}D_2^{-1} & \text{в } L_2^{(+)}, \\ ZD_{12}D_2 & \text{в } L_2^{(-)}, \\ ZD_{21} & \text{в } \Omega_1^* \setminus \{L_1^{(+)} \cup L_1^{(-)} \cup L_\delta^{(+)}\}, \\ ZD_{12} & \text{в } \Omega_2^* \setminus \{L_2^{(+)} \cup L_2^{(-)} \cup L_\delta^{(-)}\}, \\ Z & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4.27)$$

удовлетворяет краевой задаче (4.22), т.е.

$$\begin{cases} 1) \hat{Z} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*\}), \quad \exists \hat{Z}_\pm \in C(\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*), \\ 2) \hat{Z}_+ = \hat{Z}_- \hat{J} \quad \text{на } \mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*, \\ 3) \hat{Z}(z) = (I + O(z^{-1})), \quad z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.28)$$

где теперь

$$\Sigma_L := \Delta_\delta^+ \cup \Delta_\delta^- \cup \Delta_1^+ \cup \Delta_1^- \cup \Delta_2^+ \cup \Delta_2^-,$$

и скачок задачи (4.28) имеет следующий вид:

$$\hat{J} = \begin{cases} J_{\Delta_1} & \text{на } \Delta_1, \\ J_{\Delta_2} & \text{на } \Delta_2, \\ J_{\Delta_\delta} & \text{на } \Delta_\delta, \\ I + O(q^n) & \text{на } K \Subset \{\mathbb{R} \cup \Sigma_L \cup \partial\tilde{\Omega}^*\} \setminus \varepsilon. \end{cases} \quad (4.29)$$

Наконец, когда

$$(b, a) \in \Xi_{0*}^{(I)}, \quad (4.30)$$

обе причины возникновения областей Ω_j^* (комплексные точки ветвления и пересечение компонент Γ в точках Δ_j) реализуются, в результате чего Ω_j^* теряет связность (см. рис. 8). Тем не менее, для геометрии (4.30) преобразование $Z \rightarrow \hat{Z}$ остается формально тем же, что и в случае (4.24), т.е. определяется по (4.27)–(4.29), где Ω_j^* теперь есть объединение областей.

4.6. Краевая задача со скачком, не зависящим от n , и локальные краевые задачи. Заключительное преобразование. Для того чтобы перейти к задаче (4.3) с равномерно стремящимся к единичной матрице скачком, нам потребуется матричнозначная функция $X(z)$, являющаяся решением (см. п. 2.3) краевой задачи (2.13), с не зависящими от n скачками (2.14). Решение этой задачи сформулировано в предложении 2.1, которое мы докажем позднее в п. 4.8.

Также нам потребуется решение следующих локальных краевых задач в окрестностях O_e точек ветвления $e \in \varepsilon := \{-e_1, -e_2, e_2, e_1, ie_3, -ie_3\}$:

$$U^{(e)} : \begin{cases} 1) U^{(e)} \in H(O_e \setminus \Sigma_e), \quad \exists U_{\pm}^{(e)} \in C(\Sigma_e), \quad \exists U^{(e)} \in C(\partial O_e), \\ 2) U_+^{(e)} = U_-^{(e)} \hat{J} \quad \text{на } \Sigma_e, \\ 3) U^{(e)} = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) X \quad \text{равномерно на } \partial O_e \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.31)$$

где

$$\Sigma_e := \begin{cases} \{\Sigma_L \cup \mathbb{R}\} \cap O_e, & e \in \{-e_1, -e_2, e_2, e_1\}, \\ \{\Sigma_L \cup i\mathbb{R}\} \cap O_e, & e \in \{-ie_3, ie_3\}, \end{cases}$$

скачок $\hat{J}$ определен в (4.29), а X – решение задачи (2.13).

Решение задачи (4.31) зависит от поведения скачка функции H на разрезе, выходящем из точки ветвления e (другими словами, от характера особенности H в e).

При $(b, a) \in \Xi_0 \setminus \partial\Xi_0 =: \mathring{\Xi}_0$ задача (4.31) была решена в [4]–[6]. В этом случае при $(b, a) \in \mathring{\Xi}_0 \setminus \{a_{\text{cr}}(b) : b \in (-\sqrt{3}, \infty)\}$ скачок функции H имеет простой нуль (в локальных переменных) в квадратичной точке ветвления e и решения (4.31) строятся (следуя [13]) с помощью функций Айри (детали см. в [4], [5]). Точно такие же решения задачи (4.31) имеем в случае $(b, a) \in \Xi_1$.

При $(b, a) \in \{a_{\text{cr}}(b) : b \in (-\sqrt{3}, \infty)\}$ функция H имеет простой нуль в точке e ветвления кубического порядка и решения (4.31) строятся с помощью функций Пирси (см. [6]).

Когда параметры (b, a) проходят через границу

$$\partial\Xi_0 = \{a_M(b) : b \in (-\infty, -\sqrt{3})\} \cup \{a_m(b) : b \in (-2, -\sqrt{3})\} =: A_M \cup A_m$$

(см. (2.1), (2.2)), алгебраическая функция H (спектральная кривая) меняет свой род (с нуля на единицу). При этом при прохождении верхней (левой) части границы A_M увеличение рода происходит благодаря возникновению комплексных точек ветвления (рождение отрезка $[-ie_3, +ie_3]$). При прохождении нижней (правой) части границы A_m увеличение рода происходит благодаря возникновению действительных точек ветвления (рождение лакуны $[-e_2, e_2]$ в спектре $[-e_1, e_1]$). Такие же критические режимы (рождение отрезка, рождение лакуны) хорошо известны и изучены в случае гиперэллиптических спектральных кривых. Существование решения локальных краевых задач (4.31) для точек e , порождающих отрезок или порождающих лакуну) было доказано в [13] (также см. [33]). Явный вид решения таких задач был получен в [34], [35] с помощью решения Хастинга–Маклеода уравнения Пенлеве II.

Наконец, если

$$(b, a) = (-\sqrt{3}, 3^{-3/4}),$$

то существование решения задачи (4.31) может быть установлено методами работы [13] (также см. [33]). Найти явный вид решения в этом случае было бы очень интересной задачей.

Таким образом, применительно к нашему случаю решение задачи (4.31) известно для любых $(b, a) \in \Xi$. При этом явный вид этого решения для наших целей несущественен.

Теперь с помощью решений краевых задач (2.13)–(2.14) и (4.31) мы определим заключительное преобразование функции $\hat{Z}$ (см. (4.27)). Пусть

$$\mathcal{J} := \begin{cases} \hat{Z}X^{-1} & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\bigcup_e O_e\}, \\ \hat{Z}[U^{(e)}]^{-1} & \text{в } O_e, \quad e \in \varepsilon. \end{cases} \quad (4.32)$$

Краевые условия задач (4.28), (2.13) и (4.31) позволяют заключить, что функция $\mathcal{J}$ удовлетворяет граничной задаче (4.3):

$$\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{J} \in H(\mathbb{C} \setminus \check{\Sigma}), \\ \mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_- \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) & \text{на } \check{\Sigma}, \\ \mathcal{J}(\infty) = I, \end{cases}$$

где контур $\check{\Sigma}$ состоит из $\bigcup_e \partial O_e, \bigcup_j \Delta_j^{(\pm)}, \Delta_\delta^{(\pm)}$ и $\{\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\} \setminus \{\bigcup_j \Delta_j \cup \Delta_\delta\}$.

Следовательно, справедливо (4.4), т.е.

$$\mathcal{J} = I + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно по $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

4.7. Обратные преобразования; получение асимптотических формул (доказательство теорем 2.2 и 2.3). Теперь мы можем обратить последовательность преобразований (4.32), (4.27), (4.19) и (4.5),

$$\mathcal{J} \longrightarrow \widehat{Z} \longrightarrow \widetilde{Z} \longrightarrow Z \longrightarrow Y, \quad (4.33)$$

и так как решение задачи (4.3) – функция $\mathcal{J}$ существует, то и решение задачи (4.2) существует и в силу единственности решения (4.2) оно равно (4.1). Поэтому асимптотика (4.4) после цепочки преобразований (4.33) перейдет в асимптотики для P_n и $R_n^{(j)}$, $j = 1, 2$, составляющие содержание теорем 2.2 и 2.3. Отметим, что для получения этих асимптотик в преобразованиях (4.33) достаточно контролировать только первую строку матриц.

Мы начнем с асимптотик на компактах в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\Sigma}$, где $\widetilde{\Sigma} := \bigcup_{j=1}^2 \{\Delta_i \cup \partial\Omega_i^*\}$. Сравнивая обратные и прямые преобразования в (4.33), имеем

$$\widetilde{Z} = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) X \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\Sigma}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} = Z &= \begin{pmatrix} \frac{c_0^n \Phi_0^n P_n}{e^{nT}} & \frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} & \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^2 (\Delta_i \cup \Omega_i^*) \right\}, \\ \widetilde{Z} = Z D_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{c_0^n \Phi_0^n P_n}{e^{nT}} & \frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} & \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} & -\frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{в } \Omega_1^*, \\ \widetilde{Z} = Z D_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{c_0^n \Phi_0^n P_n}{e^{nT}} & \frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} & -\frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} & \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{в } \Omega_2^*. \end{aligned}$$

Это сразу дает нам следующую асимптотику:

$$P_n = \frac{X_{00} e^{nT}}{c_0^n \Phi_0^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\Sigma},$$

(т.е. формула 1) теоремы 2.2 получена), а также дает асимптотики вида

$$\frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} = X_{01} \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Omega_2^*\} \quad (4.34)$$

(т.е. получили 1) в теореме 2.3 с учетом непрерывности на $\Delta_2 \setminus \Omega_2^*$ левой и правой частей формулы (4.34)). Также имеем

$$\begin{cases} \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} = X_{02} \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\ \frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} - \frac{\Phi_1^n X_{02} (I + O(1/n))}{\Phi_2^n} = X_{01} \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{cases} \quad \text{на } K \Subset \Omega_2^*.$$

Откуда следует, что

$$R_n^{(1)} = \frac{e^{naz}}{c_0^n} \left(\frac{X_{01}}{\Phi_1^n} + \frac{X_{02}}{\Phi_2^n} \right) \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{на } K \in \Omega_2^* \quad (4.35)$$

(т.е. получили 2) в теореме 2.3 с учетом того, что $\Omega_2^* \subset \Omega_{021}$).

Теперь рассмотрим асимптотики на компактах в $\tilde{\Sigma} \setminus \varepsilon$, где ε – множество точек ветвления. Так как формула (4.35) верна на более широком, чем Ω_2^* множестве (а именно, на $\tilde{\Omega}_2^* \supset \Omega_2^*$), получаем справедливость осциллирующей асимптотики 4) в (2.30). Так как $X_{01\pm} = X_{02\mp}$, $\Phi_{1\pm} = \Phi_{2\mp}$ на δ , (см. (2.13)–(2.14) и рис. 10, 11) то (4.34) и (4.35) дают непрерывную в окрестности $\delta \setminus \varepsilon$ асимптотику 5) в (2.30).

Наконец, рассмотрим асимптотики на Δ_j , $j = 1, 2$. Из (4.27) в окрестности $\Delta_1 \setminus \{-e_1, -e_2\}$, в $L_1^\pm$

$$\hat{Z} = \tilde{Z} D_1^{(\mp 1)} = \begin{pmatrix} \frac{c_0^n \Phi_0^n P_n}{e^{nT}} \mp \frac{c_0^n \Phi_0^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} & \frac{c_0^n \Phi_1^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} & \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(2)}}{e^{naz}} - \frac{c_0^n \Phi_2^n R_n^{(1)}}{e^{-naz}} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Взяв предельные значения сверху и снизу, сначала получаем асимптотическую формулу 3) теоремы 2.3, затем формулу 2) теоремы 2.2.

Итак, теоремы 2.2 и 2.3 (в предположении справедливости предложения 2.1) доказаны.

4.8. Доказательство предложения 2.1. Напомним, мы ищем решение следующей матричной краевой задачи (2.13), (2.14):

- 1) $X \in H(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$, $\Sigma := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \delta$,
- 2) $\exists X_\pm \in L(\Sigma)$: $X_+ = X_- J$ на Σ ,
- 3) $X(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \rightarrow \infty$,

где

$$J|_{\Delta_1} = J_{\Delta_1}, \quad J|_{\Delta_2} = J_{\Delta_2}, \quad J|_{\delta} = J_{\delta}$$

(см. обозначение (2.14)). Отметим, что структура матриц скачков такова, что у матрицы решения X при переходе через Σ (объединение разрезов, соединяющих точки ветвления) меняются местами два столбца, причем один из них к тому же меняет знак. Это дает основание предположить, что решение нужно искать в следующем виде:

$$X(z) := \begin{pmatrix} X_0(t_0(z)) & X_0(t_1(z)) & X_0(t_2(z)) \\ X_1(t_0(z)) & X_1(t_1(z)) & X_1(t_2(z)) \\ X_2(t_0(z)) & X_2(t_1(z)) & X_2(t_2(z)) \end{pmatrix},$$

где $X_j^2(t)$ – однозначные (рациональные) функции от t , а $\{t_j(z)\}_{j=0}^2$ – ветви однозначной функции на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Функции $\{X_j(t)\}_{j=0}^2$ и

$\{t_j(z)\}_{j=0}^2$ нужно подобрать так, чтобы выполнялось условие 3) в (2.13) и чтобы функции $X_j(t(z))$, $j = 0, 1, 2$, имели квадратичные точки ветвления в соответствующих точках ветвления $\mathfrak{R}$.

Для $\mathfrak{R}$, для которой $\text{gen } \mathfrak{R} = 0$, эта схема была реализована в [4], [5], поэтому для случая $(b, a) \in \Xi_0$ мы (для полноты изложения) можем ее повторить. В качестве $t(z)$ мы берем функцию, осуществляющую конформное отображение $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ с нормировкой

$$t(z) = \begin{cases} \infty, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ -1, & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ +1, & z \rightarrow \infty^{(2)}. \end{cases}$$

Тогда при выборе функций $X_j(t)$, $j = 0, 1, 2$, в следующем виде:

$$X_0^2 := \frac{(t^2 - 1)^2}{\prod_{k=1}^4 (t - T_k)}, \quad X_{1,2}^2 := \frac{(t \mp 1)^2}{\prod_{k=1}^4 (t - T_k)}$$

(см. (2.17); $\{T_k\}_{k=1}^4$ – образы точек ветвления в плоскости $t = t(z)$, см. (2.16)), во-первых, выполнено условие нормировки в ∞ – условие 3) в (2.13), во-вторых, $X_j(t)$ имеют квадратичные точки ветвления в $\{T_k\}_{k=1}^4$.

Чтобы выделить однозначные ветви функции $X_j(t)$ в плоскости t , нужно провести разрезы, соединяющие образы соответствующих точек ветвления $t(z)$. Для этого обратимся к неявному заданию $t(z)$ при помощи следующего уравнения:

$$z = ct + \frac{ct}{u(t-1)(t+1)}. \quad (4.36)$$

Пусть

$$T_j^* : \quad z(T_j) = z(T_j^*), \quad T_j^* \neq T_j,$$

– образы в плоскости t регулярных точек $\mathfrak{R}$, имеющие ту же проекцию, что и точки ветвления. Далее, пусть t – один из корней уравнения (4.36). Тогда два других корня таковы:

$$t_{1,2}(t) = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 1 + 2[u(t^2 - 1) + 1]^2}}{2u(t^2 - 1)}. \quad (4.37)$$

Теперь, в случае

$$(b, a) \in \Xi_0^{(\text{II})},$$

когда $T \in \{[T_2^*, T_1^*] \cup [-T_2^*, -T_1^*]\} \subset \mathbb{R}$, два других корня описывают кривые в комплексной плоскости, которые являются границами образов листов $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ при конформном отображении. Фиксируя кривую, описываемую корнем t_1 в (4.37) (знак $+$ перед радикалом), получаем разрезы, определяющие ветви $\{X_j(t)\}_{j=0}^2$ (см. рис. 15, а)).

В случае

$$(b, a) \in \Xi_0^{(\text{I})}$$

образы $\{T_2, -T_2\}$ комплексных точек ветвления $\{ie_3, -ie_3\}$ остаются на мнимой оси. Поэтому в этом случае разрезы для $\{X_j(t)\}_{j=0}^2$ представляют собой

отрезок мнимой оси $[T_2, -T_2]$ и кривую $t_1(t)$ (см. (4.5)), когда $t \in [-T_1^*, T_1^*]$ (см. рис. 15, b)).

Перейдем к нахождению решения (2.13) в виде (2.18) для $\mathfrak{R}$, для которой $\text{gen } \mathfrak{R} = 1$, т.е. для случая

$$(b, a) \in \Xi_1. \quad (4.38)$$

Теперь нашу риманову поверхность

$$z = \frac{\sqrt{P(t)}}{t}, \quad P(t) = t^3 - t^2b + t + a^2 =: (t - P_1)(t - P_2)(t - P_3) \quad (4.39)$$

(см. (3.4), (3.3)) мы отображаем на риманову поверхность функции $\sqrt{P}$. Найдем образы $t(e_j)$ точек ветвления $\mathfrak{R}$ на римановой поверхности $\sqrt{P}$. Пусть $t \in \{T_j\}_{j=1}^3$ – корни уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t^3 - t - 2a^2}{2t^2\sqrt{P}} = 0. \quad (4.40)$$

Сделаем подстановку

$$a := \sqrt{\frac{\hat{A}^3 + \hat{A}^{-3}}{6\sqrt{3}}}.$$

Имеем

$$0 < a < 3^{-3/4} \implies \hat{A} \in \{e^{i\varphi}\}_{\varphi=0}^{2\pi} \implies a = \sqrt{\frac{\cos 3\varphi}{3\sqrt{3}}}.$$

Поэтому для корней уравнения (4.40) можно записать, введя параметр $\varphi \in [0, \pi/6]$:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\hat{A} + \hat{A}^{-1}}{\sqrt{3}}, \\ T_{2,3} = -\frac{T_1}{2} \pm \frac{\hat{A} - \hat{A}^{-1}}{2i}, \end{cases} \implies \begin{cases} T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi, \\ T_{2,3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \varphi\right). \end{cases}$$

Полученные выражения можно обратить, а именно,

$$\begin{aligned} e_1^2 = z^2(T_1) &= -b + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[2 \cos \varphi + \frac{1}{2 \cos \varphi} \right], \\ e_2^2 = z^2(T_3) &= -b + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) + \frac{1}{2 \cos(2\pi/3 + \varphi)} \right], \\ -e_3^2 = z^2(T_2) &= -b + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{1}{2 \cos(2\pi/3 - \varphi)} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получили глобальную структуру листов римановой поверхности $\sqrt{P}$ и ее соответствие с $\mathfrak{R}$ (см. п. 2.3, (2.21), (2.22)).

Как и ранее, X_k^2 , $k = 0, 1, 2$, в (2.18) ищутся как рациональные функции на римановой поверхности функции $z(t)$. Полюса X_k^2 кратности один располагаем

в образах точек ветвления $t(z)$ на римановой поверхности $\sqrt{P}$ (итого шесть простых полюсов на $\sqrt{P}$). В силу (4.40) в униформирующих переменных $(t, \sqrt{P})$ знаменатель запишется в виде $(t^3 - t - 2a^2)$. Числители выбираются в виде линейных комбинаций $1, t, \sqrt{P}, t^2, t\sqrt{P}, t^3$, т.е. в виде

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 + \alpha_5 \sqrt{P} + \alpha_6 t\sqrt{P}.$$

Найдем коэффициенты $\{\alpha_j\}_{j=1}^6$ из условия нормировки $X_k^2(z)$ в точке ∞ . Напомним, что

z	$\infty^{(0)}$	$\infty^{(1)}$	$\infty^{(2)}$
t	∞^2	$0 _{t(1)}$	$0 _{t(2)}$
$\sqrt{P}$	∞^3	$-a$	a

Для X_0 имеем

$$\begin{cases} X_0^2(t^{(1)}(\infty)) = 0 & \implies \sqrt{P} = -a, t = 0 & \implies \alpha_1 - \alpha_5 a = 0, \\ X_0^2(t^{(2)}(\infty)) = 0 & \implies \sqrt{P} = a, t = 0 & \implies \alpha_1 + \alpha_5 a = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$. Эти нули двойные, поэтому берем производную по t и получаем

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_6 a = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_6 a = 0 \end{cases} \implies \alpha_2 = \alpha_6 = 0.$$

Далее,

$$X_0^2(t^{(0)}(\infty)) = 1 \implies \alpha_4 = 1.$$

Наконец, α_3 выбирается из условия, что все нули $t^2(t - \alpha_3)$ кратны на римановой поверхности $\sqrt{P}$. Это возможно лишь в точках ветвления

$$\alpha_3 \in \{P_1, P_2, P_3\}$$

(см. (4.39)). Единственное значение

$$\alpha_3 = P_2$$

выбирается из условия, чтобы функция (X_0^2) после извлечения корня не приобретала бы некрatного 2π приращения аргумента при обходе замкнутых контуров, на $\Re$ – контуров, не пересекающих прообразы разрезов $\sqrt{P}$, сделанных для извлечения корня из (X_0^2) . Итак, первая формула для решения (2.23) получена.

Для $X_1(t)$ имеем

$$X_1^2(t^{(0)}(\infty)) = 0 \implies \alpha_4 = 0.$$

Двойная кратность этого нуля влечет $\alpha_6 = 0$. Далее,

$$X_1^2(t^{(2)}(\infty)) = 0 \implies \alpha_1 + a\alpha_5 = 0,$$

и двойная кратность дает

$$\alpha_2 + \frac{\alpha_5}{2a} = 0.$$

Выразим все параметры через α_2 :

$$\alpha_1 = 2a^2\alpha_2, \quad \alpha_5 = -2a\alpha_2.$$

Далее,

$$X_1^2(t^{(1)}(\infty)) = 1 \implies \alpha_1 - a\alpha_5 = -2a^2.$$

Таким образом,

$$\alpha_1 = -a^2, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_5 = a.$$

Проводя аналогичные рассуждения для $X_2(t)$, получаем

$$X_{1,2}^2(t) = -\frac{2a^2 + t \mp 2a\sqrt{P} - \alpha_3 t^2}{2(t^3 - t - 2a^2)}.$$

Условие выбора α_3 : нули $X_{1,2}^2$ должны быть кратными. Подставив выражение для P в явном виде (см. (4.39)) в $X_{1,2}^2(t)$ и приравняв к нулю числитель, получим

$$(2a^2 + t - \alpha_3 t^2)^2 = (2a\sqrt{t^3 - 6t^2 + t + a^2})^2.$$

Поделив обе части на t^2 , получим квадратное уравнение относительно t . Равенство нулю дискриминанта дает нам

$$\alpha_3^3 - \alpha_3^2 b + \alpha_3 + a^2 = 0,$$

т.е.

$$\alpha_3 \in \{P_1, P_2, P_3\}$$

(см. (4.39)). Проверим, что нули $X_{1,2}^2$ кратные. Имеем

$$2a^2 + t - \alpha_3 t^2 = \frac{(\sqrt{P})^2}{1 - t/\alpha_3} + a^2 \left(1 - \frac{t}{\alpha_3}\right).$$

Откуда

$$X_{1,2}^2(t) = -\frac{\left(\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-t/\alpha_3}} \mp a\sqrt{1-t/\alpha_3}\right)^2}{2(t^3 - t - 2a^2)}.$$

Те же соображения, что и для X_0 , диктуют единственный выбор

$$\alpha_3 = P_2.$$

Таким образом, формулы (2.23) для решения (2.13) в случае (4.38) получены.

Осталось указать разрезы на римановой поверхности $\sqrt{P}$ для фиксации однозначных ветвей функции $(X_k^2)^{1/2}$, $k = 0, 1, 2$. Один разрез идет по двум берегам разреза $[P_2, P_3]$, начинаясь и оканчиваясь на поднятии на $\sqrt{P}$ точки T_2 и проходя через P_3 . Второй разрез соединяет аналитическими кривыми поднятия T_3 и T_2 на оба листа римановой поверхности функции $\sqrt{P}$ (см. рис. 16).

Опишем эти аналитические кривые. Пусть

$$T_i^* : \begin{cases} z^2(T_i^*) = z^2(T_i), \\ z'(T_i) = 0, \quad z'(T_i^*) \neq 0. \end{cases}$$

Рис. 16. Образ $\mathfrak{R}$ на двулистной римановой поверхности $\sqrt{P}$ ($b = -1.85$, $a = 0.395$)

Тогда

$$T_1^* = \frac{1 - \hat{A}^2 - \hat{A}^{-2}}{2\sqrt{3}(\hat{A} + \hat{A}^{-1})} = \frac{3 - 4\cos^2\varphi}{4\sqrt{3}\cos\varphi} = \frac{1 - T_1^2}{2T_1}.$$

Аналогично,

$$T_j^* = \frac{1 - T_j^2}{2T_j}, \quad j = 2, 3.$$

Теперь пусть $t^* \in [T_3^*, T_1^*]$. Тогда поднятие кривой

$$t(t^*) = \frac{t^* + a^2 \pm \sqrt{t^{*2} + 2t^*a^2 + a^4 + 4t^{*3}a^2}}{2t^{*2}}$$

со знаком “плюс” на один лист римановой поверхности $\sqrt{P}$ и со знаком “минус” на другой лист (см. рис. 17) дает указанные криволинейные разрезы $\sqrt{P}$.

Рис. 17. Никишинская структура листов $\mathfrak{R} =: \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$

Предложение 2.1 доказано.

§ 5. Равновесие векторного потенциала в $\mathbb{C}$

В этом параграфе мы докажем теорему 2.4 и предложение 2.2. Схема доказательства такова. Мы последовательно для римановых поверхностей $\mathfrak{R}$, соответствующим различным областям $(\{\Xi_0^{(\text{II})} \setminus \Xi_{0*}^{(\text{II})}\}; \Xi_{0*}^{(\text{II})}; \{\Xi_0^{(\text{I})} \cup \Xi_1\})$ параметров (b, a) , рассматриваем абелев интеграл $g := \text{Re } G$ (см. (2.7)). Имеем $g \in \text{Harm}(\mathfrak{R} \setminus \{\infty^{(0)}, \infty^{(1)}, \infty^{(2)}\})$ и в бесконечности

$$g(z) = \begin{cases} \text{Re } T(z) - \ln |z| + \dots, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ -\text{Re } az + \frac{1}{2} \ln |z| + \dots, & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ \text{Re } az + \frac{1}{2} \ln |z| + \dots, & z \rightarrow \infty^{(2)}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Стандартное разбиение $\mathfrak{R}$ на листы (см. (2.12), рис. 9–11) определяет ветви $\{g_i\}_{j=0}^2$ глобально в $\mathbb{C}$, причем на $\mathbb{R}$ ветви непрерывны. На проекциях разрезов $\mathfrak{R}$, т.е. на отрезках Δ_1, Δ_2 , производные соответствующих ветвей претерпевают разрыв, что позволяет нам (с помощью теоремы Рисса) ввести на Δ_1, Δ_2 меры, потенциалы которых будут (с точностью до гармонических функций) представлять ветви $\{g_i\}_{j=0}^2$. При этом соотношения непрерывности $\{g_i\}_{j=0}^2$ на $\mathbb{R}$ будут представлять собой соотношения равновесия этих потенциалов в поле некоторых гармонических функций. Далее, кроме стандартного (см. рис. 9–11) разбиения $\mathfrak{R}$ на листы $\{\mathfrak{R}_i\}_{i=0}^2$, мы будем рассматривать другие листовые структуры $\mathfrak{R}$, переклеивая $\mathfrak{R}$ вдоль поднятий различных компонент множества Γ . В результате аналогичной процедуры (с помощью теоремы Рисса) у нас будут появляться другие наборы мер (с носителями на компонентах Γ), которые связаны с мерами на стандартных разрезах Δ_1, Δ_2 некоторыми соотношениями выметания. Эти новые наборы, о существовании которых утверждается в теореме 2.4 и предложении 2.2, и будут реализовывать соотношения равновесия (2.39)–(2.41) и (2.47) соответственно.

5.1. Случай $(b, a) \in \{\Xi_0^{(\text{II})} \setminus \Xi_{0*}^{(\text{II})}\}$. Рассмотрим область $\tilde{\Omega}_1$, ограниченную компонентой $\{\Gamma_{\Delta_1} \setminus \Delta_1\}$ множества Γ из (2.26) (см. рис. 3, а):

$$\tilde{\Omega}_1 \supset \Delta_1, \quad \partial(\tilde{\Omega}_1) = \Gamma_{\Delta_1} \setminus \Delta_1 = \{z : g_0(z) = g_1(z), \text{Re } z < 0, \text{Im } z \neq 0\}.$$

Ветвь g_2 в этой области гармонична. Так как однозначная на $\mathfrak{R}$ функция g над каждой точкой $\mathbb{C}$ имеет три локально гармонические ветви, то над $\tilde{\Omega}_1$ можно выделить в каждой точке области две гармонические ветви $\{\tilde{g}_j\}_{j=0}^1$, так что $\tilde{g}_0 \neq g_2 \neq \tilde{g}_1$.

Определим в $\tilde{\Omega}_1$ структуру ветвей g следующим образом:

$$g_2 := g_2, \quad g_0 := \min\{\tilde{g}_0, \tilde{g}_1\} \quad \text{в } \tilde{\Omega}_1, \quad g_1 := g \setminus \{g_0, g_2\}.$$

Отметим, что введенная таким образом структура ветвей g совпадает с начальной структурой $\{\tilde{g}_j\}_{j=0}^2$, задаваемой выбором листов $\mathfrak{R}$ (см. рис. 9), но теперь мы можем заметить, что g_0 является супергармонической функцией в $\tilde{\Omega}_1$ и, следовательно, по теореме Рисса является в $\tilde{\Omega}_1$ суммой потенциала меры и гармонической функции. Проводя аналогичные рассуждения для области в $\tilde{\Omega}_2$

при $\operatorname{Re} z > 0$ с учетом поведения $g(z)$ на бесконечности (см. (5.1)), получаем глобально в $\mathbb{C}$, что

$$\begin{cases} g_0(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\lambda_1}(z) + \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) - \kappa_1 - \kappa_2, \\ g_1(z) = -\operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\lambda_1}(z) + \kappa_1, \\ g_2(z) = +\operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) + \kappa_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

где меры λ_j таковы, что

$$|\lambda_j| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{supp} \lambda_j \subset \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.3)$$

Соотношение непрерывности $g_0 = g_1$ на Δ_1 , т.е.

$$g_0(x) - g_1(x) = ax + T(x) + 2\mathcal{P}^{\lambda_1}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_2}(x) - (2\kappa_1 - \kappa_2) \begin{cases} = 0 & \text{на } \Delta_1, \\ > 0 & \text{на } \mathbb{R} \setminus \Delta_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

и аналогичное соотношение $g_0 = g_2$ на Δ_2 , т.е.

$$g_0(x) - g_2(x) = -ax + T(x) + 2\mathcal{P}^{\lambda_2}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_1}(x) - (2\kappa_2 - \kappa_1) \begin{cases} = 0 & \text{на } \Delta_2, \\ > 0 & \text{на } \mathbb{R} \setminus \Delta_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

являют собой соотношения равновесия из теоремы 2.4 (см. (2.39)) с $\Lambda_2 = \lambda_2$ и $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = 0$. Таким образом, теорема 2.4 для рассматриваемого случая параметров (b, a) доказана.

Перейдем к доказательству предложения 2.2. Определим теперь ветви g по-другому: $g := \{g_j^*\}_{j=0}^2$, где

$$\begin{cases} g_0^* = g_0 & \text{в } \overline{\mathbb{C}}, \\ g_1^* = \begin{cases} g_1 & \text{в } \{z : \operatorname{Re} z < 0\}, \\ g_2 & \text{в } \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}, \end{cases} \\ g_2^* = \begin{cases} g_2 & \text{в } \{z : \operatorname{Re} z < 0\}, \\ g_1 & \text{в } \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\} \end{cases} \end{cases} \quad (5.6)$$

(см. рис. 16). В силу равенства $g_1 = g_2$ на $i\mathbb{R}$ это опять непрерывные и кусочно гармонические ветви g . Обозначим

$$v_a(z) := \begin{cases} -\operatorname{Re} az, & \operatorname{Re} z < 0, \\ \operatorname{Re} az, & \operatorname{Re} z \geq 0. \end{cases}$$

Эта функция субгармонична в $\mathbb{C}$ (как максимум двух гармонических).

Функция

$$\mathcal{F}(z) := \begin{cases} -\mathcal{P}^{\lambda_1}(z), & \operatorname{Re} z < 0, \\ -\mathcal{P}^{\lambda_2}(z), & \operatorname{Re} z \geq 0, \end{cases}$$

супергармонична в окрестности $i\mathbb{R}$ (как минимум двух гармонических функций) и, следовательно, в этой окрестности она есть потенциал меры (которую мы обозначим через λ_2^*) и гармонической функции. Отсюда имеем

$$g_1^*(z) = v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_1}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) + \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_1,$$

где мера λ_2^* обладает следующими свойствами:

$$|\lambda_2^*| = \frac{1}{2}, \quad \text{supp } \lambda_2 \subseteq i\mathbb{R}, \quad \lambda_2^* \leq \sigma, \quad \text{где } d\sigma = \frac{a}{\pi} |dz|, \quad (5.7)$$

в силу локального поведения ветвей g в точке ∞ и того, что g_1^* субгармонична в окрестности $i\mathbb{R}$. Обозначая

$$\lambda_1^* := \lambda_1 + \lambda_2, \quad |\lambda_1^*| = 1, \quad \text{supp } \lambda_1 \subset \mathbb{R},$$

получаем

$$\begin{cases} g_0^*(z) = \text{Re } T(z) + \mathcal{P}^{\lambda_1} - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ g_1^*(z) = v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_1^*} + \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_1, \\ g_2^*(z) = -v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_2, \end{cases} \quad (5.8)$$

По построению имеем следующие соотношения выметания:

$$\begin{aligned} g_2 = g_2^* \quad \text{в } \text{Re } z \leq 0 &\implies \text{Re } az - \mathcal{P}^{\lambda_2} + \kappa_2 = \text{Re } az - \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_2 \\ &\implies \mathcal{P}^{\lambda_2} = \mathcal{P}^{\lambda_2^*} \quad \text{в } \text{Re } z \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично, с учетом симметрии $\kappa_2 = \kappa_1$ имеем

$$\mathcal{P}^{\lambda_1} = \mathcal{P}^{\lambda_2^*} \quad \text{в } \text{Re } z \geq 0.$$

Наконец, получим никишинские соотношения равновесия (2.42)–(2.47). Это условия непрерывности g :

$$g_0^* = g_1^* \quad \text{на } \Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \implies T(x) + \mathcal{P}^{\lambda_1} - (\kappa_1 + \kappa_2) = a|x| - \mathcal{P}^{\lambda_1^*} + \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_1,$$

т.е.

$$2\mathcal{P}^{\lambda_1^*} - \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + T(x) - a|x| \begin{cases} = 2\kappa_1 - \kappa_2, \\ \geq 2\kappa_1 - \kappa_2, \end{cases} \quad (5.9)$$

так как $g_0^* - g_1^* > 0$ на $\mathbb{R} \setminus \Delta$. На $i\mathbb{R}$ (с учетом условия $v_a|_{i\mathbb{R}} = 0$) равенство $g_1^* = g_2^*$ дает

$$-\mathcal{P}^{\lambda_1^*} + \mathcal{P}^{\lambda_2^*} = -\mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_2 - \kappa_1 \implies 2\mathcal{P}^{\lambda_2^*} - \mathcal{P}^{\lambda_1^*} = \kappa_2 - \kappa_1 \quad \text{на } i\mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Предложение 2.2 в случае $(b, a) \in \{\Xi_0^{(\text{II})} \setminus \Xi_{0*}^{(\text{II})}\}$ доказано.

5.2. Случай $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(II)}$. Как и в предыдущем случае, стандартное разбиение на листы (см. рис. 9) дает нам глобальное представление (5.2) для $g(z)$ и определяет меры $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$. Непрерывность $g(z)$ также дает для этих мер соотношения равновесия (5.4), (5.5) на отрезках Δ_j , $j = 1, 2$:

$$\begin{cases} 2\mathcal{P}^{\lambda_1}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_2}(x) + T(x) + ax = 2\kappa_1 - \kappa_2, & x \in \Delta_1, \\ 2\mathcal{P}^{\lambda_2}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_1}(x) + T(x) - ax = 2\kappa_2 - \kappa_1, & x \in \Delta_2. \end{cases}$$

Однако появление зон Ω_j^* (см. (2.29) и рис. 6, а)) нарушает неотрицательность соотношений (5.4) вне Δ_j и, следовательно, непосредственно из этих соотношений доказательство теоремы 2.4 не следует.

Для достижения цели мы будем модифицировать разбиение $g(z)$ на непрерывные, кусочно гармонические ветви путем переклейки различных областей нашей римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

Начнем (как и в предыдущем пункте) с разрезания и переклейки $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ по мнимой оси. Полученная структура $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$ (см. рис. 18) дает нам новые глобальные ветви $g := \{g_j^*\}_{j=0}^2$ (см. (5.6)), для которых справедливо представление (5.8) с потенциалами мер $\lambda_1^* = \lambda_1 + \lambda_2$ и λ_2^* (см. (5.7)). Непрерывность $\{g_j^*\}$ и представление (5.8) (как и в предыдущем пункте) приводят к никишинским соотношениям равновесия (5.9), (5.10), в которых ограничение меры λ_2^* не достигается. Таким образом, для $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(II)}$ предложение 2.2 также доказано.

Продолжим доказательство теоремы 2.4 в рассматриваемом случае. Нам предстоит еще две переклейки вида

$$\mathfrak{R} : \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2 \xrightarrow{1)} \{\tilde{\mathfrak{R}}_j^*\}_{j=0}^2 \xrightarrow{2)} \{\tilde{\mathfrak{R}}_j\}_{j=0}^2.$$

Рис. 18. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(II)}$

1) Разрежем листы $\mathfrak{R}_1^*$ и $\mathfrak{R}_2^*$ по границам $\partial\Omega_j^*$, $j = 1, 2$, и переклеим $\mathfrak{R}_1^*$ и $\mathfrak{R}_2^*$ по этим разрезам так, чтобы поднятия каждой области Ω_j^* , $j = 1, 2$, на этих листах поменялись местами (с листа на лист, см. рис. 17 и рис. 18). Полученную структуру листов $\mathfrak{R}$ обозначим через $\{\tilde{\mathfrak{R}}_j^*\}_{j=0}^2$. Она индуцирует новые глобальные ветви $g := \{\tilde{g}_j^*\}_{j=0}^2$, анализ которых с учетом разбиения $\mathbb{C}$ на объединения областей Ω_{ijk} из (2.27) (см. рис. 6, а)), дает (с помощью теоремы Рисса) новые меры μ_j , $j = 1, 2$, для которых

$$\text{supp } \mu_1 \subset \partial\Omega_2^*, \quad \text{supp } \mu_2 \subset \partial\Omega_1^*,$$

и представления для ветвей $\{\tilde{g}_j^*\}_{j=0}^2$ в виде

$$\begin{cases} \tilde{g}_0^*(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\lambda_1^*}(z) - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ \tilde{g}_1^*(z) = v_a(z) - \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) - \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_2}(z) - \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\mu_1}(z) + \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_1, \\ \tilde{g}_2^*(z) = -v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_{21}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_{12}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_1}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2^*} + \kappa_2, \end{cases} \quad (5.11)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \tilde{\lambda}_1 + \lambda_{21}, & \operatorname{supp} \tilde{\lambda}_1 &\subset \Delta_1 \setminus \Omega_1^*, & \operatorname{supp} \lambda_{21} &\subset \Delta_1 \cap \Omega_1^*, \\ \lambda_2 &:= \tilde{\lambda}_2 + \lambda_{12}, & \operatorname{supp} \tilde{\lambda}_2 &\subset \Delta_2 \setminus \Omega_2^*, & \operatorname{supp} \lambda_{12} &\subset \Delta_2 \cap \Omega_2^*. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Отметим также, что поведение в бесконечности представлений (5.9) дает следующие соотношения:

$$\begin{cases} |\tilde{\lambda}_1| + |\mu_2| = 1, & |\lambda_{21}| = |\mu_2|, \\ |\tilde{\lambda}_2| + |\mu_1| = 1, & |\lambda_{12}| = |\mu_1|. \end{cases} \quad (5.13)$$

2) Наконец, переклеим листы $\tilde{\mathfrak{R}}_1^*$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_2^*$ по $\partial\Omega_2^*$, а затем их же переклеим по мнимой оси (см. рис. 19). В результате полученные листы $\{\tilde{\mathfrak{R}}_j\}$ при $\operatorname{Re} z > 0$ совпадают со стандартными листами $\{\mathfrak{R}_j\}$, а при $\operatorname{Re} z < 0$ они совпадают с листами $\{\tilde{\mathfrak{R}}_j^*\}$.

Рис. 19. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\tilde{\mathfrak{R}}_j\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(\Pi)}$

Новая структура $\mathfrak{R}$ определяет глобальные ветви $g := \{g_j\}_{j=0}^2$, для которых справедливо представление

$$\begin{cases} \tilde{g}_0(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\Lambda_2 + \tilde{\lambda}_1}(z) - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ \tilde{g}_1(z) = -\operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) - \mathcal{P}^{\mu_2}(z) + \kappa_1, \\ \tilde{g}_2(z) = \operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\lambda_{21}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) + \kappa_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

(см. (5.9)), где использованы следующие обозначения:

$$\Lambda_2 := \lambda_2 + \lambda_{21}, \quad \Lambda_1 := \lambda_1 + \lambda_{12}.$$

Отметим соотношения выметания. Равенство $\tilde{g}_1 = g_1$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1^*$ дает

$$\mathcal{P}^{\mu_2} = \mathcal{P}^{\lambda_{21}} \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1^*,$$

а равенство $\tilde{g}_2 = g_0$ в Ω_1^* дает

$$\mathcal{P}^{\mu_2}(z) = 2\mathcal{P}^{\lambda_2}(z) + 2\mathcal{P}^{\lambda_{21}}(z) + \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) + \operatorname{Re} T(z) - \operatorname{Re} az - (2\kappa_2 + \kappa_1), \quad z \in \Omega_1^*.$$

Теперь из соотношений (5.10) и непрерывности $\{\tilde{g}_j\}_{j=0}^2$ выведем для векторной меры

$$\vec{\lambda} = (\Lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2)$$

соотношения равновесия (2.39)–(2.41), доказывающие теорему 2.4.

1) На пластине $E_1 := \mathbb{R}$

$$\operatorname{supp}(\Lambda_2) = \Delta_{21} \cup \Delta_2 \subset E_1.$$

На $\Delta_{21} \cup \Delta_2$ имеем $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_2$, что дает

$$2\mathcal{P}^{\Lambda_2}(z) + \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) - \mathcal{P}^{\mu_2}(z) + \operatorname{Re} T(z) - \operatorname{Re} az = 2\kappa_2 + \kappa_1 =: \gamma_1.$$

Отметим, что $\tilde{g}_0 > \tilde{g}_2$ на $\mathbb{R} \setminus (\Delta_2 \cup \Delta_{21})$.

2) На пластине $E_2 := \mathbb{R} \setminus \Delta_{21}$

$$\operatorname{supp} \tilde{\lambda}_1 = \Delta_1 \setminus \Delta_{21},$$

равенство $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_2$ на $\Delta_1 \setminus \Delta_{21}$ дает

$$2\mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) + \mathcal{P}^{\Lambda_2}(z) + \mathcal{P}^{\mu_2}(z) + \operatorname{Re} T(z) - \operatorname{Re} az = 2\kappa_1 + \kappa_2 =: \gamma_2.$$

Отметим, что $\tilde{g}_0 > \tilde{g}_1$ на $\mathbb{R} \setminus (\Delta_1 \setminus \Delta_2)$.

3) На пластине $E_3 := \partial\Omega_1^*$

$$\operatorname{supp} \mu_2 \in \partial\Omega_1^*,$$

равенство $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$ на $\partial\Omega_1^*$ дает

$$2\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z) + \mathcal{P}(z) + 2\operatorname{Re} az = \kappa_1 - \kappa_2 = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Таким образом, соотношения равновесия, из которых следует теорема 2.4 в случае $(b, a) \in \Xi_{0*}^{(\Pi)}$, получены.

5.3. Случай $(b, a) \in \{\Xi_0^{(1)} \cup \Xi_1\}$. Наконец, рассмотрим значения параметров (b, a) , при которых у $\mathfrak{R}$ возникают комплексные точки ветвления. Стандартная структура листов $\{\mathfrak{R}_j\}_{j=0}^2$ в этом случае изображена на рис. 10, 11. Отметим, что $\{\mathfrak{R}_j\}_{j=0}^2$ уже не индуцирует разбиение $g(z)$ на непрерывные ветви $\{g_j\}_{j=0}^2$ – ветви g_1 и g_2 претерпевают разрыв при переходе через разрез $[-ie_3, ie_3] =: \delta \notin \Gamma$. Перейдем к структуре листов $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$, получающейся из стандартной структуры переклейкой правых полуплоскостей у $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ (см. рис. 20, 21).

Эта структура листов индуцирует разбиение $g(z)$ на непрерывные в $\mathbb{C}$ ветви $\{g_j^*\}_{j=0}^2$:

$$\begin{cases} g_0^*(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\lambda_1^*}(z) - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ g_1^*(z) = v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_1^*}(z) + \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_1, \\ g_2^*(z) = -v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_2. \end{cases}$$

Рис. 20. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_0^{(1)}$ Рис. 21. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\mathfrak{R}_j^*\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_1$

Здесь

$$|\lambda_1^*| = 1, \quad \text{supp } \lambda_1^* = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad |\lambda_2^*| = 2, \quad \text{supp } \lambda_2^* = i\mathbb{R}.$$

Отметим замечательный факт, следующий из этого представления. В силу гармоничности g_2^* на $[-ie_3, ie_3] = \delta$ функция g_2^* на этом отрезке равна константе κ_2 . Более того, это верно в области $\tilde{\Omega}^*$, содержащей δ , с границей, принадлежащей Γ_δ . Таким образом,

$$v_a + \mathcal{P}^{\lambda_2^*} = 0 \quad \text{на } \tilde{\Omega}^*,$$

и, возвращаясь к (5.7), получаем, что

$$d\lambda_2^*(z) = d\tilde{\sigma}(z) = \frac{a}{\pi} |dz|, \quad z \in \delta,$$

т.е. в никишинской задаче равновесия (5.9), (5.10) мера λ_2^* достигает ограничения.

Предложение 2.2 доказано полностью.

Закончим доказательство теоремы 2.4. Введем меры μ_1 и μ_2 :

$$\text{supp } \mu_1 \subset \partial\Omega_2^*, \quad \text{supp } \mu_2 \subset \partial\Omega_1^*.$$

Делаем это, как и ранее, переклеивая область Ω^* у $\mathfrak{R}_1^*$ и $\mathfrak{R}_2^*$ и обращаясь к теореме Рисса (см. рис. 22, 23).

Рис. 22. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\tilde{\mathfrak{R}}_j^*\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_0^{(1)}$

Рис. 23. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\tilde{\mathfrak{R}}_j^*\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_1$

Новая структура листов дает следующие глобальные ветви $g = \{\tilde{g}_j^*\}_{j=0}^2$:

$$\begin{cases} \tilde{g}_0^*(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\lambda_1^*}(z) - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ \tilde{g}_1^*(z) = v_a(z) - \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) - \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\mu_1}(z) + \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_1, \\ \tilde{g}_2^*(z) = -v_a(z) - \mathcal{P}^{\lambda_{21}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_{12}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_1}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2^*}(z) + \kappa_2, \end{cases}$$

где обозначения см. в (5.12). Массы введенных мер удовлетворяют (5.13).

Наконец, переклеивая листы $\tilde{\mathfrak{R}}_1^*$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_2^*$ справа от разреза $\{[ie_3, i\infty] \cup \operatorname{supp}(\mu_1) \cup [-ie_3, i\infty]\}$ (см. рис. 24, 25), мы приходим к глобальному определению ветвей g , имеющих в $\mathbb{C}$ следующее представление:

$$\begin{cases} \tilde{g}_0(z) = \operatorname{Re} T(z) + \mathcal{P}^{\Lambda_2 + \lambda_1}(z) - (\kappa_1 + \kappa_2), \\ \tilde{g}_1(z) = -\operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1}(z) - \mathcal{P}^{\mu_2}(z) + \kappa_1, \\ \tilde{g}_2(z) = \operatorname{Re} az - \mathcal{P}^{\lambda_{21}}(z) + \mathcal{P}^{\mu_2}(z) - \mathcal{P}^{\lambda_2}(z) + \kappa_2, \end{cases} \quad \Lambda_2 = \lambda_{21} + \lambda_2.$$

Теперь для меры $\vec{\lambda} = (\Lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2)$, сосредоточенной на $\vec{E} = \{\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \Omega^*, \partial\Omega^*\}$, имеем:

1) на $\operatorname{supp}(\Lambda_2)$ выполнено $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_2$, а на $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}(\Lambda_2)$ имеем $\tilde{g}_0 > \tilde{g}_2$, откуда следует, что

$$2\mathcal{P}^{\Lambda_2} + \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1} - \mathcal{P}^{\mu_2} \begin{cases} = \gamma_2 & \text{на } \operatorname{supp}(\Lambda_2), \\ \geq \gamma_2 & \text{на } \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}(\Lambda_2); \end{cases}$$

Рис. 24. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\tilde{\mathfrak{R}}_j\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_0^{(1)}$ Рис. 25. Переклейка римановой поверхности $\mathfrak{R} =: \{\tilde{\mathfrak{R}}_j\}_{j=0}^2$ при $(b, a) \in \Xi_1$

2) на $\text{supp}(\tilde{\lambda}_1)$ выполнено $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$, а на $\mathbb{R} \setminus \text{supp}(\tilde{\lambda}_1)$ имеем $\tilde{g}_0 > \tilde{g}_1$, откуда следует, что

$$\mathcal{P}^{\Lambda_2} + 2\mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1} + \mathcal{P}^{\mu_2} \begin{cases} = \gamma_1 & \text{на } \text{supp}(\tilde{\lambda}_1), \\ \geq \gamma_1 & \text{на } \mathbb{R} \setminus \text{supp}(\tilde{\lambda}_1); \end{cases}$$

3) на $\partial\Omega^*$ выполнено $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$, на $\partial\Omega_1^* = \text{supp } \mu_2$, а на $\partial\Omega_2^*$ имеем $\tilde{g}_2 > \tilde{g}_1$, откуда следует, что

$$-\mathcal{P}^{\Lambda_2} + \mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_1} + 2\mathcal{P}^{\mu_2} \begin{cases} = \gamma_1 - \gamma_2 & \text{на } \text{supp}(\mu_2), \\ \geq \gamma_1 - \gamma_2 & \text{на } \partial\Omega^* \setminus \text{supp}(\mu_2). \end{cases}$$

Теорема 2.4 доказана.

Список литературы

- [1] Л. А. Пастур, “О спектре случайных матриц”, *ТМФ*, **10:1** (1972), 102–112; англ. пер.: L. A. Pastur, “On the spectrum of random matrices”, *Theoret. and Math. Phys.*, **10:1** (1972), 67–74.
- [2] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159:1** (2009), 34–57; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Global eigenvalue distribution regime of random

- matrices with an anharmonic potential and an external source”, *Theoret. and Math. Phys.*, **159**:1 (2009), 448–468.
- [3] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, 2004, № 3, 109–129.
  - [4] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part I”, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 43–76.
  - [5] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
  - [6] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part III. Double scaling limit”, *Comm. Math. Phys.*, **270**:2 (2007), 481–517.
  - [7] K. T.-R. McLaughlin, “Asymptotic analysis of random matrices with external source and a family of algebraic curves”, *Nonlinearity*, **20**:7 (2007), 1547–1571.
  - [8] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
  - [9] A. I. Aptekarev, “Multiple orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 423–447.
  - [10] А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков, “О вариационном представлении решений некоторой гиперболической системы уравнений с помощью логарифмического потенциала во внешнем поле”, *Докл. РАН*, **409**:1 (2006), 12–14; англ. пер.: A. I. Aptekarev, Yu. G. Rykov, “A variational representation of solutions to a certain hyperbolic system of equations by using a logarithmic potential in the external field”, *Dokl. Math.*, **74**:1 (2006), 477–479.
  - [11] A. I. Aptekarev, Yu. G. Rykov, “On the variational representation of solutions to some quasilinear equations and systems of hyperbolic type on the basis of potential theory”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 4–12.
  - [12] A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev, “The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity”, *Comm. Math. Phys.*, **147**:2 (1992), 395–430.
  - [13] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
  - [14] W. Van Assche, J. S. Geronimo, A. B. J. Kuijlaars, “Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials”, *Special functions 2000: current perspective and future directions* (Tempe, AZ, USA, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **30**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 23–59.
  - [15] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, ID 007.
  - [16] В. Г. Лысов, “Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра”, *Матем. сб.*, **196**:12 (2005), 99–122; англ. пер.: V. G. Lysov, “Strong asymptotics of the Hermite–Padé approximants for a system of Stieltjes functions with Laguerre weight”, *Sb. Math.*, **196**:12 (2005), 1815–1840.
  - [17] V. Lysov, F. Wielonsky, “Strong asymptotics for multiple Laguerre polynomials”, *Constr. Approx.*, **28**:1 (2008), 61–111.
  - [18] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Докл. АН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.

- [19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, Наука, М., 1981, 31–48; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [20] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [21] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [22] М. А. Лапик, “О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 101–118; англ. пер.: M. A. Lapik, “Support of the extremal measure in a vector equilibrium problem”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1205–1221.
- [23] M. Duits, A. B. J. Kuijlaars, “Universality in the two-matrix model: a Riemann–Hilbert steepest-descent analysis”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **62**:8 (2009), 1076–1153.
- [24] A. B. J. Kuijlaars, A. Martinez-Finkelshtein, F. Wielonsky, “Non-intersecting squared bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified bessel weights”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 217–275.
- [25] P. M. Bleher, S. Delvaux, A. B. J. Kuijlaars, *Random matrix model with external source and a constrained vector equilibrium problem*, arXiv: abs/1001.1238.
- [26] Y. V. Fyodorov, Eu. Strahov, “An exact formula for general spectral correlation function of random Hermitian matrices”, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3203–3213.
- [27] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: E. M. Nikishin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [28] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [29] В. Н. Сорокин, “Обобщенные многочлены Полачека”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 113–130; англ. пер.: V. N. Sorokin, “Generalized Pollaczek polynomials”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 577–595.
- [30] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1213–1228.
- [31] P. D. Dragnev, E. B. Saff, “Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable”, *J. Anal. Math.*, **72**:1 (1997), 223–259.
- [32] A. B. J. Kuijlaars, E. A. Rakhmanov, “Zero distributions for discrete orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 255–274.
- [33] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.

- [34] P. M. Bleher, A. R. Its, “Double scaling limit in the random matrix model: The Riemann–Hilbert approach”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**:4 (2003), 433–516.
- [35] T. Claeys, A. B. J. Kuijlaars, “Universality of the double scaling limit in random matrix models”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59**:11 (2006), 1573–1603.

А. И. Аптекарев (A. I. Aptekarev)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва

E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступила в редакцию

28.01.2010 и 22.11.2010

В. Г. Лысов (V. G. Lysov)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва

E-mail: vlysov@mail.ru

Д. Н. Туляков (D. N. Tulyakov)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва

E-mail: dnt@mail.nnov.ru