Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Вариационная устойчивость задач оптимального управления с субдифференциальными операторами, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 123–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:32:05

УДК 517.977.57

А. А. Толстоногов

Вариационная устойчивость задач оптимального управления с субдифференциальными операторами

Рассматривается задача минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях управляемой системы в гильбертовом пространстве с ограничением на управление, представляющим собой зависящее от фазовой переменной многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями. Интегрант, субдифференциальные операторы, возмущение, начальные условия и ограничение на управление зависят от параметра. Наряду с исходной задачей рассматривается задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях этой же системы, но с овыпукленным ограничением на управление. Под решением управляемой системы понимается пара “траектория-управление”. Доказано, что при каждом значении параметра овыпукленная задача имеет решение, которое является пределом минимизирующей последовательности исходной задачи, а минимальное значение функционала с овыпукленным интегрантом является непрерывной функцией параметра. Обычно это свойство называют вариационной устойчивостью задач минимизации. Рассмотрен пример управляемой параболической системы с гистерезисным и диффузионным эффектами.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: сходимость по Моско, невыпуклые интегранты, оптимальное управление.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и σ -алгеброй Σ μ -измеримых множеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$, H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Функция $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если ее эффективная область $\text{dom } \varphi = \{x \in H, \varphi(x) < +\infty\}$ непуста. Множество всех функций $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, обозначим через $\Gamma_0(H)$. Для $\varphi \in \Gamma_0(H)$ через $\partial\varphi(x)$ обозначим ее субдифференциал в точке x , а через $\text{dom } \partial\varphi$ – область определения $\partial\varphi$. Известно, что $\overline{\partial\varphi}$ является максимально монотонным оператором, $\text{dom } \partial\varphi \subset \text{dom } \varphi$ и $\overline{\text{dom } \partial\varphi} = \overline{\text{dom } \varphi}$, где черта означает замыкание в H .

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 85 СО РАН-УрО РАН).

Пусть $(\Lambda, d_\Lambda(\cdot, \cdot))$ – компактное метрическое пространство параметра p и Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -A(p)\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + F(p)(t, x(p)(t)) + B(p)(t, x(p)(t))u(p)(t), \\ x(p)(0) &= x_0(p) \in \text{dom } \varphi^0(p), \end{aligned} \quad (1.1)$$

со смешанным ограничением на управление

$$u(p)(t) \in U(p)(t, x(p)(t)). \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, $A(p): H \rightarrow H$ – непрерывный линейный оператор, $B(p): T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, где $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов, $F(p): T \times Q(p) \rightarrow H$, $Q(p) \subset H$ – нелинейное отображение, $U(p): T \times \overline{Q(p)} \rightarrow Y$ – многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями. Здесь $\overline{Q(p)}$ – замыкание множества $Q(p)$ в H .

Наряду с ограничением (1.2) рассмотрим следующее ограничение:

$$u(p)(t) \in \overline{\text{co}} U(p)(t, x(p)(t)), \quad (1.3)$$

где символ $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку.

Под *решением управляемой системы* (1.1), (1.2) при фиксированном $p \in \Lambda$ понимается пара $(x(p), u(p))$, состоящая из траектории $x(p)$ и управления $u(p)$, удовлетворяющих (1.1), (1.2) почти всюду. Множества решений управляемой системы (1.1) с ограничениями (1.2) и (1.3) обозначим через $\mathcal{R}_U(p)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$, $p \in \Lambda$.

Для числовой функции $(t, x, u) \rightarrow g(p)(t, x, u)$ рассмотрим функцию

$$g_U(p)(t, x, u) = \begin{cases} g(p)(t, x, u), & u \in U(p)(t, x), \\ +\infty, & u \notin U(p)(t, x). \end{cases} \quad (1.4)$$

Пусть $g_U^{**}(p)(t, x, u)$ – биполяра (вторая сопряженная; см. [1]) функции $u \rightarrow g_U(p)(t, x, u)$. Рассмотрим задачи

$$J(p)(x, u) = \int_T g(p)(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (\text{P})$$

$$J^{**}(p)(x, u) = \int_T g_U^{**}(p)(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (\text{RP})$$

на решениях управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3).

Положим

$$m_U(p) = \inf \{ J(p)(x, u), (x, u) \in \mathcal{R}_U(p) \}, \quad (1.5)$$

$$m_{\overline{\text{co}} U}(p) = \inf \{ J^{**}(p)(x, u), (x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p) \}. \quad (1.6)$$

При определенных предположениях мы доказываем, что задача (RP) имеет решение, справедливо равенство

$$m_{\overline{\text{co}} U}(p) = m_U(p) \quad (1.7)$$

и функция $p \rightarrow m_{\overline{\text{co}} U}(p)$ непрерывна.

Пусть

$$\mathcal{R}_{\text{co}U}^{\text{опт}}(p) = \{(x(p), u(p)) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}(p), m_{\text{co}U}(p) = J^{**}(p)(x(p), u(p))\}. \quad (1.8)$$

Показано, что многозначная функция $p \rightarrow \mathcal{R}_{\text{co}U}^{\text{опт}}(p)$ является полунепрерывной сверху по Вьеторису.

Как правило, функции, описывающие управляемую систему, интегрант, возмущения, ограничения на управление не обладают достаточной степенью гладкости, позволяющей получить удобные условия оптимальности, которые можно использовать при разработке вычислительных алгоритмов. Полученные в работе результаты позволяют обосновать переход от негладких и невыпуклых задач оптимального управления к последовательности гладких и выпуклых задач оптимального управления, для которых известны условия оптимальности и разработаны методы их численного решения.

Вариационная устойчивость задач оптимального управления с невыпуклозначным по управлению интегрантом для рассматриваемого в работе класса систем с невыпуклозначными ограничениями на управление изучается впервые. Во всех известных работах (см., например, [2]–[6]), посвященных этому вопросу, рассматриваются задачи оптимального управления с выпуклыми по управлению интегрантами, в которых управляемые системы описываются другими классами уравнений и содержат выпуклозначные ограничения на управление.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть (X, d) – метрическое пространство. Всюду в дальнейшем используются следующие обозначения: $\text{с}X$ – семейство всех непустых, замкнутых подмножеств из X , $\text{сб}X$ – семейство всех непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X . Метрика Хаусдорфа на пространстве $\text{сб}X$ обозначается через $D_X(\cdot, \cdot)$. Пусть V – метрическое, а Z – топологическое пространства. Многозначное отображение $\Gamma: V \rightarrow \text{сб}X$ называется *непрерывным*, если оно является непрерывным из V в $(\text{сб}X, D_X(\cdot, \cdot))$.

В определениях полунепрерывности снизу, сверху и непрерывности по Вьеторису многозначного отображения $\Gamma: V \rightarrow Z$ мы следуем [7], а в определениях измеримости многозначного отображения $\Gamma: T \rightarrow V$ мы следуем [8].

Отметим, что если отображение $\Gamma: V \rightarrow \text{сб}X$ непрерывно, то оно полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график. Для банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ через $w\text{-}X$ обозначим пространство X , наделенное слабой топологией. Такое же обозначение используется для подмножеств пространства X с топологией, индуцированной топологией пространства $w\text{-}X$. В остальных случаях пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Пусть

$$S_X(r) = \{\|x\|_X \leq r\}, \quad r > 0. \quad (2.1)$$

Радиальной проекцией на множество $S_X(r)$ называется отображение $\text{grg}_S: X \rightarrow S_X(r)$, определенное следующим образом:

$$\text{grg}_S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \|x\|_X \leq r, \\ r \frac{x}{\|x\|_X}, & \text{если } \|x\|_X > r. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для радиальной проекции имеет место неравенство

$$\|\text{grg}_S(x) - \text{grg}_S(y)\|_X \leq 2\|x - y\|_X \quad (2.3)$$

(см. [9]). Множество K измеримых функций из T в X называется *разложимым*, если для любых $u, v \in K$, $E \in \Sigma$ элемент $\chi(E)u + \chi(T \setminus E)v$ принадлежит K , где $\chi(E)$ – характеристическая функция множества E .

Множество $K \subset L^1(T, X)$ называется *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|f(t)\|_X dt < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с мерой $\mu(E) \leq \delta(\varepsilon)$ и всех $f \in K$.

На пространстве $L^2(T, X)$ наряду со стандартной нормой мы рассмотрим так называемую “слабую” норму

$$\|f\|_w = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} f(s) ds \right\|_X. \quad (2.4)$$

Пространство $L^2(T, X)$ с нормой (2.4) обозначим через $L_w^2(T, X)$.

Известно, что если X – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, а последовательность $f_n \in L^2(T, X)$, $n \geq 1$, ограничена в $L^2(T, X)$ и сходится к f в $L_w^2(T, X)$, то она сходится к f в $w\text{-}L^2(T, X)$ (см. [10]).

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Так как $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором, то для него будут определены операторы из H в H

$$J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}, \quad (\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где I – тождественный оператор, и функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2, y \in H \right\},$$

которая является выпуклой и непрерывной на H . Известно, что $\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x)$, $(\partial\varphi)_\lambda = \partial\varphi_\lambda$, $x \in H$, $\lambda > 0$.

Пусть $\varphi_n \in \Gamma_0(H)$, $n \geq 1$. Последовательность φ_n , $n \geq 1$, сходится к $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в смысле Моско ($\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi$), если:

- 1) для любого $x \in H$ существует последовательность $x_n \rightarrow x$ такая, что $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$;
- 2) для любого $x \in H$ и любой последовательности $x_n \in H$, $n \geq 1$, сходящейся к x в пространстве $w\text{-}H$, имеет место неравенство

$$\varphi(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n).$$

Отметим, что введенное в [11] определение сходимости по Моско (определение 3.17) отличается от нашего. Однако согласно утверждению 3.19 из [11] эти определения эквивалентны.

При фиксированном $p \in \Lambda$ под *решением управляемой системы* (1.1) с ограничением (1.2) на управление мы понимаем пару $(x(p), u(p))$, $x(p) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(p)(0) = x_0(p)$, $u(p) \in L^2(T, Y)$, такую, что $x(p)(t) \in \text{dom } \partial \varphi^t(p)$ п.в. и имеют место включения (1.1), (1.2) п.в. Аналогично определяется решение управляемой системы (1.1) с ограничением (1.3) на управление.

Рассмотрим семейство функций $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$. Сделаем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(\varphi)$. Семейство $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi^t(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^t(p)$, $t \in T$, $p_n \rightarrow p$;
- 2) существует $c_0 > 0$ такое, что

$$\{x \in H, \varphi^0(p) < c_0\} \neq \emptyset \quad \forall p \in \Lambda;$$

- 3) для любых $r > 0$, $p \in \Lambda$ существуют функции $a_r(p) \in W^{1,2}(T)$, $b_r(p) \in W^{1,1}(T)$ такие, что для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, $x \in \text{dom } \varphi^s(p)$ с $\|x\| \leq r$ найдется $y \in \text{dom } \varphi^t(p)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq |a_r(p)(t) - a_r(p)(s)| (1 + |\varphi^s(p)(x)|^{1/2}), \\ \varphi^t(p)(y) - \varphi^s(p)(x) &\leq |b_r(p)(t) - b_r(p)(s)| (1 + |\varphi^s(p)(x)|); \end{aligned}$$

- 4) для каждого $r > 0$ множества $\{\dot{a}_r(p), p \in \Lambda\}$, $\{\dot{b}_r(p), p \in \Lambda\}$ относительно компактны в пространствах $w\text{-}L^2(T)$ и $w\text{-}L^1(T)$ соответственно;
- 5) для любого $r > 0$ множество

$$\{x \in H, \|x\| \leq r, |\varphi^t(p)(x)| \leq r, p \in \Lambda\}, \quad t \in T,$$

относительно компактно в H .

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем, что гипотезы $H(\varphi)$, 1)–4) имеют место. Нам понадобятся леммы, доказательства которых можно найти в [12].

ЛЕММА 2.1. Для любых $p_0 \in \Lambda$, $c \geq c_0$, $y_0 \in H$, $\varphi^0(p_0)(y_0) \leq c$ существует непрерывная функция $x_0: \Lambda \rightarrow H$ такая, что

$$x_0(p_0) = y_0, \quad \varphi^0(p)(x_0(p)) \leq c, \quad p \in \Lambda.$$

ЛЕММА 2.2. Существуют $\alpha > 0$, $k > 0$ такие, что

$$\varphi^t(p)(x) \geq \varphi_\lambda^t(p)(x) \geq -\alpha \|x\| - \alpha, \quad (2.5)$$

$$\|J_\lambda^t(p)(x)\| \leq k + \|x\|, \quad \|\partial \varphi_\lambda^t(p)(x)\| \leq \frac{1}{\lambda}(k + 2\|x\|), \quad (2.6)$$

$x \in H$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$.

Известно, что для любой функции $x \in L^2(T, H)$ функция $t \rightarrow \varphi^t(p)(x(t))$ измерима (см. [13]). Используя это свойство и неравенство (2.5), мы можем определить функции

$$\Phi(p)(x) = \int_T \varphi^s(p)(x(s)) ds, \quad x(\cdot) \in L^2(T, H), \quad p \in \Lambda, \quad (2.7)$$

которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу.

ЛЕММА 2.3. *Для любой последовательности $p_n \rightarrow p$, $n \geq 1$, последовательность $\Phi(p_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Phi(p)$ в смысле Моско. Если $f \in L^2(T, H)$, $x \in \text{dom } \partial\Phi(p)$, то $f \in \partial\Phi(p)(x)$ тогда и только тогда, когда $f(t) \in \partial\varphi^t(p)(x(t))$ п.в. на T .*

§ 3. Вспомогательные результаты

Сделаем основные предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(A)$. Оператор $A(p): H \rightarrow H$, $p \in \Lambda$, является линейным, непрерывным, самосопряженным и таким, что

- 1) выполняется неравенство

$$l_A \|x\|^2 \leq \langle x, A(p)x \rangle, \quad p \in \Lambda, \quad x \in H, \quad l_A > 0; \quad (3.1)$$

- 2) отображение $p \rightarrow A(p)$ является непрерывным из Λ в $\mathcal{L}(H, H)$, где $\mathcal{L}(H, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов с нормированной топологией.

Хорошо известно, что в рамках сделанных предположений оператор $A(p)$, $p \in \Lambda$, является субдифференциалом выпуклой непрерывной функции

$$\varphi_A(p)(x) = \|A^{1/2}(p)x\|^2,$$

где $A^{1/2}(p)$ – положительный квадратный корень из оператора $A(p)$, причем $A^{1/2}(p)$ является линейным, непрерывным и самосопряженным оператором.

ГИПОТЕЗЫ $H(F)$. Оператор $F(p): T \times Q(p) \rightarrow H$ является однозначным и, кроме того,

- 1) справедливо включение

$$Q(p) \supset \bigcup_{s \in T} \text{dom } \varphi^s(p), \quad p \in \Lambda, \quad (3.2)$$

где $Q(p)$ – выпуклое борелевское множество;

- 2) для каждого $x \in Q(p)$, $p \in \Lambda$ функция $t \rightarrow F(p)(t, x)$ измерима;
- 3) для почти каждого $t \in T$ оператор $F(p)(t, x)$ является деминепрерывным, т.е. если $p_n \rightarrow p$, $x_n \rightarrow x$ в H , $x_n \in Q(p_n)$, $n \geq 1$, $x \in Q(p)$, то $F(p_n)(t, x_n) \rightarrow F(p)(t, x)$ в $w\text{-}H$;
- 4) существует непрерывная функция $\omega: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$\langle F(p)(t, x) - F(p)(t, y), x - y \rangle + \omega(p)(t) \|x - y\|^2 \geq 0 \quad \text{п.в.}, \quad (3.3)$$

$x, y \in Q(p)$;

- 5) для каждого $0 < \eta \leq 1$ существует функция $L_\eta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $L_{\eta_1}(r_1) \leq L_{\eta_2}(r_2)$, $\eta_1 \leq \eta_2$, $r_1 \leq r_2$, $r_1, r_2 \in [0, \infty)$, такая, что

$$\|F(p)(t, x)\| \leq \eta \|(\partial \varphi^t(p)(x))^\circ\| + L_\eta(\|x\|), \quad (3.4)$$

где $(\partial \varphi^t(p)(x))^\circ$ – элемент минимальной нормы множества $\partial \varphi^t(p)(x)$.

ГИПОТЕЗЫ $H(U)$. Отображение $U(p): T \times \overline{Q(p)} \rightarrow \text{cb } Y$ обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $t \rightarrow U(p)(t, x)$, $x \in \overline{Q(p)}$, измеримо;
- 2) почти всюду на T для любых $p_n \rightarrow p$, $x_n \rightarrow x$ в H , $x_n \in \overline{Q(p_n)}$, $n \geq 1$, $x \in \overline{Q(p)}$, последовательность $U(p_n)(t, x_n)$, $n \geq 1$, сходится к $U(p)(t, x)$ в пространстве $(\text{cb } Y, D_Y(\cdot, \cdot))$;
- 3) имеет место равенство

$$\|U(p)(t, x)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y, u \in U(p)(t, x)\} \leq m \quad \text{п.в.}; \quad (3.5)$$

$m > 0$, $p \in \Lambda$, $x \in \overline{Q(p)}$.

- 4) для любого семейства компактов $\{C(p), p \in \Lambda\}$, $C(p) \subset \overline{Q(p)}$, существует непрерывная функция $l_C: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$D_Y(U(p)(t, x), U(p)(t, y)) \leq l_C(p)(t)\|x - y\| \quad \text{п.в.}, \quad p \in \Lambda, \quad (3.6)$$

$x, y \in \overline{C(p)}$.

ГИПОТЕЗЫ $H(B)$. Отображение $B(p): T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ является таким, что

- 1) отображение $t \rightarrow B(p)(t, x)u$ измеримо, $p \in \Lambda$, $x \in H$, $u \in Y$;
- 2) отображение $(p, x) \rightarrow B^*(p)(t, x)h$ непрерывно п.в. для любого $h \in H$, где $B^*(p)(t, x)$ – оператор, сопряженный к $B(p)(t, x)$;
- 3) имеет место неравенство

$$\|B(p)(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq c + d\|x\| \quad \text{п.в.}, \quad c, d > 0; \quad (3.7)$$

- 4) для любого семейства компактов $\{C(p), p \in \Lambda\}$, $C(p) \subset \overline{Q(p)}$, существует непрерывная функция $l_C: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$\|(B(p)(t, x) - B(p)(t, y))u\| \leq l_C(p)(t)\|x - y\| \quad \text{п.в.}, \quad p \in \Lambda, \quad (3.8)$$

$x, y \in C(p)$ и $u \in Y$, $\|u\|_Y \leq m$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что гипотезы $H(\varphi)$, $H(A)$, $H(F)$, $H(B)$, 1)–3), $H(U)$, 1)–3) имеют место.

Пусть

$$S_Y(m) = \{u \in Y, \|u\|_Y \leq m\}. \quad (3.9)$$

ГИПОТЕЗЫ $H(g)$. Для любого семейства компактов $\{C(p), p \in \Lambda\}$, $C(p) \subset \overline{Q(p)}$, функция $g(p): T \times Q(p) \times S_Y(m) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- 1) функция $t \rightarrow g(p)(t, x, u)$, $x \in \overline{Q(p)}$, $u \in S_Y(m)$, измерима;

- 2) функция $(p, x, u) \rightarrow g(p)(t, x, u)$ непрерывна равномерно по u п.в., т.е. для любых последовательностей $p_n \rightarrow p$, $x_n \rightarrow x$ в H , $x_n \in C(p_n)$, $n \geq 1$, $x \in C(p)$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|g(p_n)(t, x_n, u) - g(p)(t, x, v)| \leq \varepsilon,$$

как только $d_\Lambda(p_n, p) \leq \delta$, $\|x_n - x\| \leq \delta$, $\|u - v\| \leq \delta$, $u, v \in S_Y(m)$;

- 3) существуют непрерывные функции $a_C, b_C: \Lambda \rightarrow L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что

$$|g(p)(t, x, u)| \leq a_C(p)(t) + b_C(p)(t)\|x\| \quad \text{п.в.}, \quad (3.10)$$

$x \in C(p)$, $u \in S_Y(m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В качестве последовательности $p_n \in \Lambda$, $n \geq 1$, фигурирующей в гипотезах $H(F), 3)$, $H(U), 2)$, $H(g), 2)$, может быть взята стационарная последовательность $p_n = p$, $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Введение семейства компактов $\{C(p), p \in \Lambda\}$, $C(p) \subset \overline{Q(p)}$, обусловлено тем, что функции, фигурирующие в гипотезах $H(B)$, $H(U)$, $H(g)$, в конкретных примерах могут быть локально липшицевыми на своих областях определения. Однако известно, что локально липшицева функция на выпуклом компакте из области определения является липшицевой.

Рассмотрим включение

$$\begin{aligned} -A(p)\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + F(p)(t, x(p)(t)) + \omega(p)(t)x(p)(t) + f(t), \\ x(p)(0) &= x_0(p), \quad f \in L^2(T, H), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $x_0(p)$ – непрерывная функция, фигурирующая в утверждении леммы 2.1.

Под *решением включения* (3.11) при фиксированных $p \in \Lambda$, $f \in L^2(T, H)$ мы понимаем функцию $x(p) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(p)(0) = x_0(p)$, такую, что $x(p)(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t(p)$ п.в. и имеет место включение (3.11) п.в. Решение включения

$$\dot{v}(p)(t) \in \partial\varphi^t(p)(v(p)(t)), \quad v(p)(0) = x_0(p), \quad (3.12)$$

определяется аналогично.

ЛЕММА 3.1. Для любого $p \in \Lambda$ включение (3.12) имеет единственное решение $v(p)$ и существует $N_0 > 0$, при котором имеют место неравенства

$$\|v(p)(t)\| \leq N_0, \quad p \in \Lambda, \quad t \in T, \quad (3.13)$$

$$\|\dot{v}(p)(t)\|_{L^2(T, H)} \leq N_0, \quad p \in \Lambda, \quad (3.14)$$

$$|\varphi^t(p)(v(p)(t))| \leq N_0, \quad p \in \Lambda, \quad t \in T. \quad (3.15)$$

Утверждения леммы вытекают из теоремы 4.2 в [12].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $R > 0$. Тогда для любого $p \in \Lambda$ и $f \in L^2(T, H)$ с $\|f\|_{L^2(T, H)} \leq R$ включение (3.11) имеет единственное решение $x(p)(f)$ и существует $N_1(R) > 0$ такое, что

$$\|x(p)(f)(t)\| \leq N_1(R), \quad p \in \Lambda, \quad t \in T, \quad (3.16)$$

$$\|\dot{x}(p)(f)\|_{L^2(T, H)} \leq N_1(R), \quad p \in \Lambda, \quad (3.17)$$

$$|\varphi^t(p)(x(p)(f)(t))| \leq N_1(R), \quad p \in \Lambda, \quad t \in T, \quad (3.18)$$

и, кроме того,

$$\|x(p)(f_1)(t) - x(p)(f_2)(t)\| \leq l_A^{-1} \int_0^t \|f_1(s) - f_2(s)\| ds. \quad (3.19)$$

При фиксированном $p \in \Lambda$ утверждения теоремы составляют содержание теоремы 6.2 в [14]. Что же касается равномерных по $p \in \Lambda$ оценок (3.16)–(3.18), то они могут быть получены как и при доказательстве теоремы 6.2 в [14], сопутствующих ей лемм 5.1–5.5 и теоремы 6.1 из [14]. Следует только иметь в виду, что оценки в утверждении 3.6, в леммах 5.1–5.5 и в теореме 6.1 из [14], которые приводят к оценкам (3.16)–(3.18), будут равномерными по $p \in \Lambda$ в силу гипотез $H(\varphi, 4)$, $H(A)$, неравенств (2.5), (2.6), (3.13)–(3.15) и непрерывности функции $\omega: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$.

Обозначим через $\mathcal{T}r(p)(f)$, $p \in \Lambda$, оператор, который каждому $f \in L^2(T, H)$ ставит в соответствие единственное решение включения (3.11), т.е.

$$x(p)(f) = \mathcal{T}r(p)(f). \quad (3.20)$$

ЛЕММА 3.2. *Оператор $f \rightarrow \mathcal{T}r(p)(f)$, $p \in \Lambda$, является секвенциально непрерывным из $w\text{-}L^2(T, H)$ в $C(T, H)$.*

Утверждение леммы составляет содержание теоремы 7.1 в [14].

Положим

$$S_{L^2(T, Y)}(m) = \{u \in L^2(T, Y), \|u(t)\|_Y \leq m \text{ п.в.}\}. \quad (3.21)$$

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -A(p)\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + F(p)(t, x(p)(t)) + B(p)(x(p)(t))u(t), \\ x(p)(0) &= x_0(p), \end{aligned} \quad (3.22)$$

с ограничением на управление

$$u \in S_{L^2(T, Y)}(m). \quad (3.23)$$

Пусть $(x_*(p), u_*)$, $p \in \Lambda$, – решение управляемой системы (3.22), (3.23). Из гипотез $H(B)$, 1), 2) следует, что отображение $t \rightarrow B(p)(t, x_*(p)(t))u_*(t)$ измеримо (см. [10]). Поэтому из (3.7) вытекает, что функция

$$f_*(p)(t) = B(p)(t, x_*(p)(t))u_*(t) - \omega(p)(t)x_*(p)(t) \quad (3.24)$$

является элементом пространства $L^2(T, H)$ и

$$\|f_*(p)(t)\| \leq a + b(p)(t)\|x_*(p)(t)\|, \quad t \in T, \quad (3.25)$$

где

$$a = mc, \quad b(p)(t) = md + \omega(p)(t). \quad (3.26)$$

Из определения решения включения (3.11) и теоремы 3.1 следует, что $x_*(p)$ является единственным решением включения (3.11) с функцией $f(t) = f_*(p)(t)$, определенной равенством (3.24).

Пусть $y(p)(t)$ – решение включения (3.11) с $f(t) \equiv 0$. Тогда согласно (3.16) имеем

$$\|y(p)(t)\| \leq N_1(0), \quad p \in \Lambda, \quad t \in T.$$

Воспользовавшись (3.19), (3.25) и последним неравенством, получим, что

$$\|x_*(p)(t)\| \leq N_1(0) + l_A^{-1} \int_0^t (a + b(p)(s) \|x_*(p)(s)\|) ds. \quad (3.27)$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\|x_*(p)(t)\| \leq (N_1(0) + l_A^{-1}a) \exp\left(l_A^{-1} \int_0^t b(p)(s) ds\right). \quad (3.28)$$

В соответствии с (3.26) функция $b: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ непрерывна. Поэтому из (3.28) следует неравенство

$$\|x_*(p)(t)\| \leq M, \quad t \in T, \quad p \in \Lambda, \quad (3.29)$$

где

$$M = \sup\left\{(N_1(0) + l_A^{-1}a) \exp\left(l_A^{-1} \int_T b(p)(s) ds\right), p \in \Lambda\right\}. \quad (3.30)$$

Положим

$$S_H(M) = \{x \in H, \|x\| \leq M\},$$

где M – константа, определенная равенством (3.30).

Обозначим через pr оператор проектирования на множество $S_H(M)$, который каждой точке $x \in H$ ставит в соответствие единственную точку $\text{pr } x \in S_H(M)$ такую, что

$$\|\text{pr } x - x\| = \min\{\|y - x\|, y \in S_H(M)\}.$$

Тогда

$$\|\text{pr } x - \text{pr } y\| \leq \|x - y\|, \quad \|\text{pr } x\| \leq \|x\|. \quad (3.31)$$

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -A(p)\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + F(p)(t, x(p)(t)) + \omega(p)(t)x(p)(t) \\ &\quad + B(p)(t, \text{pr } x(p)(t))u(t) - \omega(p)(t)\text{pr } x(p)(t), \\ x(p)(0) &= x_0(p), \end{aligned} \quad (3.32)$$

с ограничением на управление (3.23).

Если $(x_*(p), u_*)$ – решение управляемой системы (3.22), (3.23), то, как было показано выше, для $x_*(p)(t)$ справедливо неравенство (3.29). Так как в этом случае $\text{pr } x_*(p)(t) = x_*(p)(t)$, то пара $(x_*(p), u_*)$ является решением управляемой системы (3.32), (3.23).

Пусть $(x_*(p), u_*)$ – решение управляемой системы (3.32), (3.23). Тогда по аналогии с (3.27), используя второе из неравенств (3.31), мы получим, что

$$\begin{aligned} \|x_*(p)(t)\| &\leq N_1(0) + l_A^{-1} \int_0^t (a + b(p)(s) \|\text{pr } x_*(p)(s)\|) ds \\ &\leq N_1(0) + l_A^{-1} \int_0^t (a + b(p)(s) \|x_*(p)(s)\|) ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что $x_*(p)(t)$ удовлетворяет неравенству (3.29). Поэтому $\text{pr } x_*(p)(t) = x_*(p)(t)$, $t \in T$, и пара $(x_*(p), u_*)$ является решением управляемой системы (3.22), (3.23).

Следовательно, для доказательства существования решения управляемой системы (3.22), (3.23) достаточно доказать существование решения управляемой системы (3.32), (3.23).

ТЕОРЕМА 3.2. *Для любого $p_* \in \Lambda$ управляемая система (3.22), (3.23) имеет решение $(x(p_*), u_*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_* \in S_{L^2(T, Y)}(m)$, а $\mathcal{L}: C(T, H) \rightarrow L^2(T, H)$ – оператор, определяемый следующим образом:

$$\mathcal{L}(x)(t) = B(p_*)(t, \text{pr } x(t))u_*(t) - \omega(p_*)(t) \text{pr } x(t), \quad x \in C(T, H). \quad (3.33)$$

Покажем, что оператор является непрерывным из $C(T, H)$ в $w\text{-}L^2(T, H)$.

Пусть $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$ и $h \in L^2(T, H)$. Тогда из гипотез $H(B)$, 1), 2) и первого из неравенств (3.31) следует, что отображение $t \rightarrow B^*(p_*)(t, \text{pr } x_n(t))h(t)$ является измеримым из T в Y^* и $B^*(p_*)(t, \text{pr } x_n(t))h(t) \rightarrow B^*(p_*)(t, \text{pr } x(t))h(t)$ п.в. в Y^* . Тогда в соответствии с (3.7) имеем

$$B^*(p_*)(t, \text{pr } x_n(t))h(t) \rightarrow B^*(p_*)(t, \text{pr } x(t))h(t) \quad \text{в } L^2(T, Y^*). \quad (3.34)$$

Так как для любого $h \in L^2(T, H)$

$$\int_T \langle h(t), B(p_*)(t, \text{pr } x_n(t))u_*(t) \rangle dt = \int_T \langle B^*(p_*)(t, \text{pr } x_n(t))h(t), u_*(t) \rangle dt,$$

то из этого равенства, (3.34) и сходимости $\omega(p_*)(t) \text{pr } x_n(t)$ к $\omega(p_*)(t) \text{pr } x(t)$ в $L^2(T, H)$ следует, что оператор $\mathcal{L}(x)$, определенный равенством (3.33), является непрерывным из $C(T, H)$ в $w\text{-}L^2(T, H)$.

Положим

$$S_{L^2(T, H)}(p_*) = \{f \in L^2(T, H), \|f(t)\| \leq a + b(p_*)(t)M \text{ п.в.}\}, \quad (3.35)$$

где $a, b(p_*)(t)$ определены равенствами (3.26), а M – равенством (3.30).

Рассмотрим оператор $\widetilde{\mathcal{L}}(p_*): S_{L^2(T, H)}(p_*) \rightarrow L^2(T, H)$,

$$\widetilde{\mathcal{L}}(p_*)(f) = \mathcal{L}(\mathcal{T}r(p_*)(f)), \quad (3.36)$$

где $\mathcal{T}r(p_*)$ – оператор, определенный равенством (3.20), который каждому f ставит в соответствие единственное решение включения (3.11).

Так как множество $S_{L^2(T, H)}(p_*)$ является выпуклым, компактным, метризуемым подмножеством пространства $w\text{-}L^2(T, H)$, то согласно лемме 3.2 оператор $\widetilde{\mathcal{L}}(p_*)$ является непрерывным из $w\text{-}S_{L^2(T, H)}(p_*)$ в $w\text{-}L^2(T, H)$.

Воспользовавшись (3.5), (3.7), (3.26), (3.33), (3.35) и (3.36), мы получим, что оператор $\widetilde{\mathcal{L}}(p_*)$ является непрерывным из $w\text{-}S_{L^2(T, H)}(p_*)$ в $w\text{-}S_{L^2(T, H)}(p_*)$. В силу теоремы Шаудера существует неподвижная точка $f_* \in w\text{-}S_{L^2(T, H)}(p_*)$ оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(p_*)$, т.е.

$$f_* = \widetilde{\mathcal{L}}(p_*)(f_*) = \mathcal{L}(\mathcal{T}r(p_*)(f_*)). \quad (3.37)$$

Положим $x(p_*) = \mathcal{T}r(p_*)(f_*)$. Тогда из (3.33), (3.37) вытекает, что

$$f_*(t) = B(p_*)(t, \operatorname{pr} x(p_*)(t))u_*(t) - \omega(p_*)(t) \operatorname{pr} x(p_*)(t). \quad (3.38)$$

Следовательно, $x(p_*)$ является при $p = p_*$ решением включения (3.11) с функцией $f(t) = f_*(t)$, определенной равенством (3.38). Поэтому пара $(x(p_*), u_*)$ является решением управляемой системы (3.32), (3.23). Как уже отмечалось выше, в этом случае пара $(x(p_*), u_*)$ является решением управляемой системы (3.22), (3.23). Теорема доказана.

§ 4. Существование и свойства решений исходной управляемой системы

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что выполняются все гипотезы $H(\varphi)$, $H(A)$, $H(F)$, $H(B)$, $H(U)$.

Из (3.26) и непрерывности функции $\omega: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ следует, что существует $R > 0$ такое, что при любом $p_* \in \Lambda$ для множества $S_{L^2(T, H)}(p_*)$, определенного равенством (3.35), имеет место включение

$$S_{L^2(T, H)}(p_*) \subset S_{L^2(T, H)}(R), \quad (4.1)$$

где

$$S_{L^2(T, H)}(R) = \{f \in L^2(T, H), \|f\|_{L^2(T, H)} \leq R\}. \quad (4.2)$$

Обозначим через $\mathcal{T}r(R)$ множество всех решений $x(p)(f)$, $p \in \Lambda$, включения (3.11) при $f \in S_{L^2(T, H)}(R)$. Тогда для $x(p) \in \mathcal{T}r(R)$, $p \in \Lambda$, будут иметь место неравенства (3.16)–(3.18). Из неравенства (3.17) и неравенства Гёльдера следует, что семейство функций $\mathcal{T}r(R)$ равностепенно непрерывно, а из неравенств (3.16), (3.18) и гипотезы $H(\varphi)$, 5) вытекает, что для каждого $t \in T$ множество $\{x(p)(f)(t), x(p)(f) \in \mathcal{T}r(R)\}$ относительно компактно в H . Поэтому в силу теоремы Арцела–Асколи множество $\mathcal{T}r(R)$ относительно компактно в $C(T, H)$.

Пусть $\mathcal{T}r(p)(R)$ – множество решений $x(p)$ управляемой системы (3.11) при фиксированном $p \in \Lambda$ и $f \in S_{L^2(T, H)}(R)$. Так как $\mathcal{T}r(p)(R) \subset \mathcal{T}r(R)$, $p \in \Lambda$, то в силу леммы 3.2 множество $\mathcal{T}r(p)(R)$ является компактом в $C(T, H)$. Поэтому множество

$$C(p) = \{x(p)(t), t \in T, x(p) \in \mathcal{T}r(p)(R)\}, \quad p \in \Lambda, \quad (4.3)$$

компактно в H .

Так как для любого $x(p) \in \mathcal{T}r(p)(R)$, $p \in \Lambda$, имеет место включение $x(p)(t) \in \operatorname{dom} \varphi^t(p)$, $t \in T$, то из (3.2) следует, что $C(p) \subset Q(p)$, $p \in \Lambda$.

Всюду в дальнейшем в качестве семейства компактов $C(p)$, $p \in \Lambda$, фигурирующего в гипотезах $H(B)$, 4), $H(U)$, 4), $H(g)$, мы будем брать компакты $C(p)$, определенные равенством (4.3). Поэтому в силу (3.6), (3.8) для любых $x(p)$, $y(p) \in \mathcal{T}r(p)(R)$, $u \in S_{L^2(T, Y)}(m)$ будут иметь место неравенства

$$\|(B(p)(t, x(p)(t)) - B(p)(t, y(p)(t)))u(t)\|_H \leq l_C(p)(t) \|x(p)(t) - y(p)(t)\| \quad \text{п.в.}, \quad (4.4)$$

$$D_Y(U(p)(t, x(p)(t)), U(p)(t, y(p)(t))) < l_C(p)(t) \|x(p)(t) - y(p)(t)\| \quad \text{п.в.} \quad (4.5)$$

Пусть $(x_*(p), u_*)$, $p \in \Lambda$, – решение управляемой системы (3.22), (3.23). Тогда $x_*(p)$ является единственным решением включения (3.11) с функцией $f(t) = f_*(p)(t)$, определенной равенством (3.24). Так как $\|x_*(p)(t)\| \leq M$, $t \in T$, то имеет место неравенство $\|f_*(p)(t)\| \leq a + b(p)(t)M$. Из этого неравенства и (3.35), (4.1) вытекает, что $x_*(p) \in \mathcal{T}r(p)(R)$.

Если $(x(p), u)$, $(y(p), v)$ – решение управляемой системы (3.22), (3.23), то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_A \|x(p)(t) - y(p)(t)\|^2 &\leq \int_0^t \langle B(p)(s, x(p)(s))u(s) - B(p)(s, y(p)(s))v(s) \\ &\quad - \omega(p)(s)(x(p)(s) - y(p)(s)), x(p)(s) - y(p)(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и леммы А5 в [15] получаем, что

$$\begin{aligned} \|x(p)(t) - y(p)(t)\| &\leq l_A^{-1} \int_0^t (\|B(p)(s, x(p)(s))u(s) \\ &\quad - B(p)(s, y(p)(s))v(s)\| + \omega(p)(s)\|x(p)(s) - y(p)(s)\|) ds. \end{aligned}$$

Поскольку $x(p), y(p) \in \mathcal{T}r(p)(R)$, то для них справедливо неравенство (4.4). Поэтому из последнего неравенства и (3.5), (3.7) вытекает, что

$$\|x(p)(t) - y(p)(t)\| \leq \int_0^t (\beta(p)(s)\|x(p)(s) - y(p)(s)\| + \gamma\|u(s) - v(s)\|_Y) ds, \quad (4.6)$$

где

$$\beta(p)(s) = l_A^{-1}(ml_C(p)(s) + \omega(p)(s)), \quad \gamma = l_A^{-1}(c + dM).$$

Из неравенства (4.6) и леммы Беллмана–Грунуолла вытекает, что

$$\|x(p)(t) - y(p)(t)\| \leq \left(\int_0^t \gamma\|u(s) - v(s)\|_Y ds \right) \exp \left(\int_0^t \beta(p)(s) ds \right).$$

Так как функция $p \rightarrow \beta(p)$ непрерывна из Λ в $L^2(T, R^+)$, то из последнего неравенства следует, что

$$\|x(p)(t) - y(p)(t)\| \leq N \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_Y ds, \quad p \in \Lambda, \quad (4.7)$$

при некотором $N > 0$.

ЛЕММА 4.1. Для любых $u \in S_{L^2(T, Y)}(m)$, $p \in \Lambda$ включение (3.22) имеет единственное решение $x(p)$. Для любого решения $x(p)$ справедливы неравенства (3.16)–(3.18).

Единственность решения включения (3.22) вытекает из неравенства (4.7), а справедливость неравенств (3.16)–(3.18) вытекает из включения $x(p) \in \mathcal{T}r(R)$.

Обозначим через $\Gamma(p)(u)$ оператор, который каждому $p \in \Lambda$, $u \in S_{L^2(T, Y)}(m)$ ставит в соответствие единственное решение включения (3.22), т.е.

$$x(p)(u) = \Gamma(p)(u). \quad (4.8)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Оператор $\Gamma(p)(u)$ является непрерывным оператором, действующим из $\Lambda \times w\text{-}S_{L^2(T,Y)}(m)$ в $C(T, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_n \rightarrow p$ в Λ и $u_n \rightarrow u$ в $w\text{-}S_{L^2(T,Y)}(m)$. Тогда $x(p_n)(u_n) \in \mathcal{T}r(p_n)(R) \subset \mathcal{T}r(R)$, $n \geq 1$. Поэтому для последовательности $x(p_n)(u_n)$, $n \geq 1$, будут иметь место неравенства (3.16)–(3.18).

Из неравенства (3.17) и относительной компактности в $C(T, H)$ множества $\mathcal{T}r(R)$ вытекает, что у последовательности $\{n\}$, $n \geq 1$, существует подпоследовательность $\{n_k\}$, $k \geq 1$, обозначаемая через $\{k\}$, $k \geq 1$, для которой имеет место сходимость

$$x(p_k)(u_k) \rightarrow x \quad \text{в } C(T, H), \quad (4.9)$$

$$\dot{x}(p_k)(u_k) \rightarrow \dot{x} \quad \text{в } w\text{-}L^2(T, H). \quad (4.10)$$

Обозначим для удобства $x_k = x(p_k)(u_k)$, $\dot{x}_k = \dot{x}(p_k)(u_k)$, $k \geq 1$.

Пусть

$$f_k(t) = -A(p_k)\dot{x}_k(t) - F(p_k)(t, x_k(t)) - B(p_k)(t, x_k(t))u_k(t), \quad k \geq 1. \quad (4.11)$$

Из гипотез $H(A)$, $H(B)$, 2), 3) и (4.9), (4.10) следует, что

$$A(p_k)\dot{x}_k(t) \rightarrow A(p)\dot{x}(t) \quad \text{в } w\text{-}L^2(T, H), \quad (4.12)$$

$$B(p_k)(t, x_k(t))u_k(t) \rightarrow B(p)(t, x(t))u(t) \quad \text{в } w\text{-}L^2(T, H). \quad (4.13)$$

Отметим, что в рамках гипотез $H(F)$ функции $t \rightarrow F(p_k)(t, x_k(t))$, $k \geq 1$, измеримы (см. [14]).

Возьмем в неравенстве (3.4) $\eta = 1/2$. Тогда из (3.22) получаем, что

$$\|F(p_k)(t, x_k(t))\| \leq 2\|A(p_k)\dot{x}_k(t)\| + 2\|B(p_k)(t, x_k(t))u_k(t)\| + 2L_{1/2}(\|x_k\|_{C(T,H)}). \quad (4.14)$$

Из этого неравенства и (4.11)–(4.13) следует, что последовательность f_k , $k \geq 1$, относительно компактна в пространстве $w\text{-}L^2(T, H)$.

Не нарушая общности, мы можем считать, что

$$f_k \rightarrow f \quad \text{в } w\text{-}L^2(T, H). \quad (4.15)$$

Так как $x_k, f_k \in L^2(T, H)$, $k \geq 1$, $x_k(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t(p_k)$ п.в., то в силу леммы 2.3

$$f_k \in \partial\Phi(p_k)(x_k), \quad k \geq 1, \quad (4.16)$$

где $\Phi(p_k)$ – функции, определенные в (2.7). Так как $x_k \rightarrow x$ в $L^2(T, H)$, то из (4.15), (4.16), леммы 2.3, утверждения 3.59 и теоремы 4.66 в [11] вытекает, что

$$f \in \partial\Phi(p)(x). \quad (4.17)$$

Следовательно, $x(t) \in \text{dom } \varphi^t(p)$ п.в. Поэтому в силу (3.2) имеем $x(t) \in Q(p)$ п.в. Теперь, воспользовавшись (4.9) и гипотезой $H(F)$, 3), мы получаем, что для любого $h \in L^2(T, H)$

$$\langle F(p_k)(t, x_k(t)), h(t) \rangle \rightarrow \langle F(p_k)(t, x(t)), h(t) \rangle \quad \text{п.в.} \quad (4.18)$$

Из (4.12)–(4.14) следует, что последовательность $\langle F(p_k)(t, x_k(t)), h(t) \rangle$, $k \geq 1$, равномерно интегрируема. Воспользовавшись (4.18) и утверждением 2.3 в [16], мы получим, что

$$\langle F(p_k)(t, x_k(t)), h(t) \rangle \rightarrow \langle F(p)(t, x(t)), h(t) \rangle \quad \text{в } L^1(T, R).$$

Последнее означает, что

$$F(p_k)(t, x_k(t)) \rightarrow F(p)(t, x(t)) \quad \text{в } w\text{-}L^2(T, H). \quad (4.19)$$

Из (4.11)–(4.13), (4.15), (4.19) вытекает, что

$$f(t) = -A(p)\dot{x}(t) - F(p)(t, x(t)) - B(p)(t, x(t))u(t). \quad (4.20)$$

Воспользовавшись (4.17), (4.20) и леммой 2.3, получим, что

$$-A(p)\dot{x}(t) - F(p)(t, x(t)) - B(p)(t, x(t)) \in \partial\varphi^t(p)(x(t)) \quad \text{п.в.}$$

Следовательно, $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t(p)$ п.в. Так как $x \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = x_0(p)$, то x является решением включения (3.22).

Используя лемму 4.1 и достаточно стандартные рассуждения (см. [12]), мы можем показать, что не только подпоследовательность $x(p_{n_k})(u_{n_k})$, $k \geq 1$, но и сама последовательность $x(p_n)(u_n)$, $n \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к $x(p)(u)$. Поэтому $\Gamma(p_n)(u_n) \rightarrow \Gamma(p)(u)$ в $C(T, H)$. Теорема доказана.

Продолжим оператор $\Gamma(p)(u)$ с пространства $\Lambda \times S_{L^2(T, Y)}(m)$ на пространство $\Lambda \times L^2(T, Y)$. Обозначим через $\text{gr}_m u$ радиальную проекцию точки $u \in Y$ на множество $S_Y(m)$, определенное равенством (3.9). Тогда будет определен оператор $\Gamma_0: L^2(T, Y) \rightarrow S_{L^2(T, Y)}(m)$, $\Gamma_0(u)(t) = \text{gr}_m u(t)$, $t \in T$. Согласно (2.3) имеет место неравенство

$$\|\Gamma_0(u)(t) - \Gamma_0(v)(t)\|_Y \leq 2\|u(t) - v(t)\|_Y, \quad t \in T. \quad (4.21)$$

Положим

$$\Gamma e(p, u) = \Gamma(p)(\Gamma_0(u)). \quad (4.22)$$

ЛЕММА 4.2. *Оператор $(p, u) \rightarrow \Gamma e(p, u)$ является непрерывным оператором, действующим из $\Lambda \times L^2(T, Y)$ в $C(T, H)$. Для любых $u, v \in L^2(T, Y)$ имеет место неравенство*

$$\|\Gamma e(p, u)(t) - \Gamma e(p, v)(t)\| \leq 2N \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_Y ds, \quad (4.23)$$

а функция $x(p)(u) = \Gamma e(p, u)$, $p \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$, является единственным решением включения

$$\begin{aligned} -A(p)\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(t, x(p)(t)) + F(p)(t, x(p)(t)) + B(p)(t, x(p)(t)) \text{gr}_m u(t), \\ x(p)(0) &= x_0(p). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Лемма вытекает из теоремы 4.1, неравенств (4.7), (4.21) и равенств (4.8), (4.22).

Для любых $p \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$ положим

$$G(p, u) = \{v \in L^2(T, Y), v(t) \in U(p)(t, \Gamma e(p, u)(t)) \text{ п.в.}\}. \quad (4.25)$$

Хорошо известно (см., например, [17]), что в рамках сделанных предположений множество $G(p, u)$ непусто и является ограниченным замкнутым разложимым подмножеством пространства $L^2(T, Y)$. Поэтому будет определено отображение $G: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow \text{cb } L^2(T, Y)$, которое называется *многозначным оператором Немыцкого*.

Наряду с оператором G рассмотрим оператор $\overline{\text{co}} G$, $(\overline{\text{co}} G)(p, u) = \overline{\text{co}} G(p, u)$. Известно, что

$$\overline{\text{co}} G(p, u) = \{v \in L^2(T, Y), v(t) \in \overline{\text{co}} U(p)(t, \Gamma e(p, u)(t)) \text{ п.в.}\}. \quad (4.26)$$

На пространстве $\Lambda \times L^2(T, Y)$ рассмотрим числовую функцию

$$\Pi(p, u) = \left(\int_T \rho^2(t, p, u(t)) dt \right)^{1/2}, \quad (4.27)$$

где

$$\rho(t, p, u) = \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot N_1^2 \int_0^t l_C^2(p)(\tau) d\tau \right) \|u\|_Y, \quad (4.28)$$

$N_1 = 2N$, а $l_C(p)(\tau)$ – функции, фигурирующие в неравенстве (4.5). Функция $\Pi(p, u)$ при фиксированном $p \in \Lambda$ является нормой, эквивалентной норме пространства $L^2(T, Y)$ (см. [17]).

Для каждого $p \in \Lambda$ обозначим через $D_L(p)(\cdot, \cdot)$ метрику Хаусдорфа на пространстве $\text{cb } L^2(T, Y)$, порожденную нормой $\Pi(p, \cdot)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Оператор Немыцкого $G: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow \text{cb } L^2(T, Y)$, определенный равенством (4.25), обладает следующими свойствами:*

- 1) *отображение $(p, u) \rightarrow G(p, u)$ является непрерывным из $\Lambda \times L^2(T, Y)$ в пространство $(\text{cb } L^2(T, Y), D_{L^2(T, Y)}(\cdot, \cdot))$;*
- 2) *сужение оператора $G(p, u)$ на $\Lambda \times S_{L^2(T, Y)}(m)$ является непрерывным из $\Lambda \times w\text{-}S_{L^2(T, Y)}(m)$ в $(\text{cb } L^2(T, Y), D_{L^2(T, Y)}(\cdot, \cdot))$ и*

$$D_L(p)(G(p, u), G(p, v)) \leq \frac{1}{2} \Pi(p, u - v), \quad p \in \Lambda, \quad u \in L^2(T, Y). \quad (4.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_n \rightarrow p$ в Λ и $u_n \rightarrow u$ в $L^2(T, Y)$. Тогда из леммы 4.2 следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma e(p_n, u_n) &\rightarrow \Gamma e(p, u) \quad \text{в } C(T, H), \\ \Gamma e(p_n, u_n)(t) &\in \text{dom } \varphi^t(p_n) \subset Q(p_n), \quad t \in T, \\ \Gamma e(p, u)(t) &\in \text{dom } \varphi^t(p) \subset Q(p), \quad t \in T. \end{aligned}$$

Из этих соотношений и гипотез $H(U), 2), 3)$ вытекает, что

$$D_Y(U(p_n)(t, \Gamma e(p_n, u_n)(t)), U(p)(t, \Gamma e(p, u)(t))) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(T, \mathbb{R}^+).$$

Теперь утверждение 1) теоремы следует из неравенства

$$D_{L^2(T,Y)}(G(p_n, u_n), G(p, u)) \leq \left(\int_T D_Y^2(U(p_n)(t), \Gamma e(p_n, u_n)(t)), U(p)(t), \Gamma e(p, u)(t)) dt \right)^{1/2}$$

(см. [16]). Так как сужение оператора $\Gamma e(p, u)$ на $\Lambda \times S_{L^2(T,Y)}(m)$ совпадает с оператором $\Gamma(p)(u)$, то утверждение 2) доказывается аналогично утверждению 1) с использованием теоремы 4.1.

Что же касается неравенства (4.29), то оно вытекает из (4.5), (4.23), (4.27), (4.28) и доказывается с помощью хорошо известных аргументов (см. [17]). Следует только отметить, что мы вправе использовать неравенство (4.5), поскольку для решения $x(p)(u) = \Gamma e(p, u)$ включения (4.24) имеет место соотношение $x(p)(u) \in \mathcal{F}r(p)(R)$. Теорема доказана.

Для фиксированного $p \in \Lambda$ обозначим через $\text{Fix } G(p)$ и $\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$ множества неподвижных точек операторов $G(p, u)$ и $\overline{\text{co}} G(p, u)$, определенных равенствами (4.25) и (4.26).

ТЕОРЕМА 4.3. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) для каждого $p \in \Lambda$ множество $\text{Fix } G(p)$ ($\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$) непусто и существует непрерывная функция $u: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что

$$u(p) \in \text{Fix } G(p) \text{ } (\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)), \quad p \in \Lambda; \quad (4.30)$$

- 2) если $D \subset \Lambda$ – замкнутое множество и $u_D: D \rightarrow L^2(T, Y)$ – непрерывная функция, $u_D(p) \in \text{Fix } G(p)$ ($\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$), $p \in D$, то существует непрерывная функция $u: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что справедливо включение (4.30) и $u(p) = u_D(p)$, $p \in D$;
- 3) отображение $p \rightarrow \text{Fix } G(p)$ ($\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$) является полунепрерывным снизу по Вьеторису из Λ в $L^2(T, Y)$ с замкнутыми значениями;
- 4) отображение $p \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$ является непрерывным по Вьеторису из Λ в $w\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными в $w\text{-}L^2(T, Y)$ значениями.

Доказательство утверждений теоремы проводится по аналогии с доказательством аналогичных утверждений в [17] с использованием теоремы 4.2.

Напомним, что через $\mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$), $p \in \Lambda$, мы обозначаем множество решений управляемой системы (1.1), (1.2) ((1.1), (1.3)).

Пусть

$$u(p) \in \text{Fix } G(p) \text{ } (\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)), \quad (4.31)$$

т.е. $u(p) \in G(p, u(p))$ ($\overline{\text{co}} G(p, u(p))$). Положим $x(p) = \Gamma e(p, u(p))$. Тогда из (4.25) ((4.26)) вытекает, что

$$u(p)(t) \in U(p)(t, x(p)(t)) \text{ } (\overline{\text{co}} U(p)(t, x(p)(t))) \quad \text{п.в.} \quad (4.32)$$

Так как $u(p) \in S_{L^2(T,Y)}(m)$, то в соответствии с (4.22) имеет место равенство $\Gamma e(p, u(p)) = \Gamma(p)(u(p))$. Поэтому

$$x(p) = \Gamma(p)(u(p)) = \Gamma e(p, u(p)). \quad (4.33)$$

Из (4.8), (4.31), (4.32) следует, что пара $(x(p), u(p))$, $p \in \Lambda$, является решением управляемой системы (1.1), (1.2) ((1.1), (1.3)) тогда и только тогда, когда имеют место соотношения (4.31), (4.33).

Поэтому если $u(p)$ является непрерывным селектором отображения $\text{Fix } G(p)$ ($\text{Fix } \overline{\text{co}} G(p)$), то $x(p)$, определенное равенством (4.33), в соответствии с теоремой 4.1 является непрерывным отображением из Λ в $C(T, H)$. Тогда функция $s(p) = (x(p), u(p))$ является непрерывным селектором отображения $\mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$).

ТЕОРЕМА 4.4. *Для отображений $p \rightarrow \mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$) справедливы следующие утверждения:*

- 1) *для любого $p \in \Lambda$ множество $\mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$) непусто и существует непрерывная функция $s: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такая, что*

$$s(p) \in \mathcal{R}_U(p) \text{ } (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)), \quad p \in \Lambda; \quad (4.34)$$

- 2) *если $D \subset \Lambda$ – замкнутое множество и $s_D: D \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ – непрерывная функция, $s_D(p) \in \mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$), $p \in D$, то существует непрерывная функция $s: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такая, что справедливо включение (4.34) и $s(p) = s_D(p)$, $p \in D$;*
- 3) *отображение $p \rightarrow \mathcal{R}_U(p)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$) является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми значениями в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$;*
- 4) *отображение $p \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p)$ является непрерывным по Вьеторису из Λ в $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$.*

Теорема непосредственно вытекает из теорем 4.1, 4.3 с использованием аргументов, которые применялись в работе [17] при доказательстве аналогичных утверждений.

§ 5. Основные результаты

В этом параграфе мы предполагаем, что выполняются все гипотезы $H(\varphi)$, $H(A)$, $H(F)$, $H(B)$, $H(U)$, $H(g)$.

Рассмотрим пространство $\tilde{Y} = Y \times \mathbb{R}$. Элементы пространства $\tilde{Y}$ обозначим через $\tilde{u} = (u, u^{\mathbb{R}})$, $u \in Y$, $u^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Пространство $\tilde{Y}$ наделим нормой $\|\tilde{u}\|_{\tilde{Y}} = \max\{\|u\|_Y, |u^{\mathbb{R}}|\}$. Тогда $\tilde{Y}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством.

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{U}(p): T \times C(p) \rightarrow \tilde{Y}$, определенное следующим образом:

$$\tilde{U}(p)(t, x) = \{(u, u^{\mathbb{R}}) \in \tilde{Y}, u \in U(t, x), u^{\mathbb{R}} = g(t, x, u)\}, \quad (5.1)$$

где множество $C(p)$ определено равенством (4.3). Очевидно, что значениями отображения $\tilde{U}(p)(t, x)$ являются замкнутые ограниченные множества.

ЛЕММА 5.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) *отображение $t \rightarrow \tilde{U}(p)(t, x)$ измеримо;*
- 2) *отображение $(p, x) \rightarrow \tilde{U}(p)(t, x)$ непрерывно п.в. на T , т.е. для любых последовательностей $p_n \rightarrow p$, $x_n \rightarrow x$ в H , $x_n \in C(p_n)$, $x \in C(p)$, последовательность $\tilde{U}(p_n)(t, x_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\tilde{U}(p)(t, x)$ в пространстве $(\text{cb } \tilde{Y}, D_{\tilde{Y}}(\cdot, \cdot))$;*

3) имеет место неравенство

$$\|\tilde{U}(p)(t, x)\|_{\tilde{Y}} \leq \max(m, a_C(p)(t) + b_C(p)(t)\|x\|) \quad \text{н.в.} \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $p \in \Lambda$, $x \in C(p)$. Из гипотез $H(U), 1)$, $H(g), 1), 2)$, теоремы Скорца–Драгоны и леммы 1.3 в [18] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $t \rightarrow U(p)(t, x)$ на T_ε полунепрерывно снизу по Вьеторису, а сужение отображения $(t, u) \rightarrow g(p)(t, x, u)$ на $T_\varepsilon \times B_Y(m)$ непрерывно. Тогда в соответствии с (5.2) сужение отображения $t \rightarrow \tilde{U}(p)(t, x)$ на T_ε полунепрерывно снизу по Вьеторису. Отсюда следует, что отображение $t \rightarrow U(p)(t, x)$ измеримо.

Пусть $p_n \rightarrow p$, $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$, $x_n \in C(p_n)$, $x \in C(p)$. Тогда из гипотез $H(U), 2)$, $H(g), 2)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $\gamma \leq \delta \leq \varepsilon$, такие, что

$$|g(p_n)(t, x_n, u) - g(p)(t, x, v)| \leq \varepsilon, \quad (5.3)$$

$$U(p_n)(t, x_n) \subset U(p)(t, x) + \delta B_Y(1), \quad (5.4)$$

$$U(p)(t, x) \subset U(p_n)(t, x_n) + \delta B_Y(1) \quad (5.5)$$

при $d_\Lambda(p_n, p) < \gamma$, $\|x_n - x\| < \gamma$, $\|u - v\| < \delta$.

Из (5.3)–(5.5) вытекает, что

$$\tilde{U}(p_n)(t, x_n) \subset \tilde{U}(p)(t, x) + \varepsilon B_{\tilde{Y}}(1), \quad \tilde{U}(p)(t, x) \subset \tilde{U}(p_n)(t, x_n) + \varepsilon B_{\tilde{Y}}(1)$$

при $\|x - x_n\| \leq \gamma$, $d_\Lambda(p_n, p) < \gamma$. Поэтому отображение $(p, x) \rightarrow \tilde{U}(p)(t, x)$ непрерывно.

Неравенство (5.2) с очевидностью вытекает из (3.5), (3.10) и (5.1). Лемма доказана.

Рассмотрим биполярную функцию $g_U^{**}(p)(t, x, u)$ функции $u \rightarrow g_U(p)(t, x, u)$, $p \in \Lambda$, $x \in C(p)$, $u \in Y$, определенной равенством (1.4). Положим

$$\text{dom } g_U^{**}(p)(t, x) = \{u \in Y, g_U^{**}(p)(t, x, u) < +\infty\}.$$

ЛЕММА 5.2. Для любого $p \in \Lambda$ справедливы следующие утверждения:

1) имеет место равенство

$$\text{dom } g_U^{**}(p)(t, x) = \overline{\text{co}} U(p)(t, x), \quad x \in C(p); \quad (5.6)$$

2) для любых $u \in \overline{\text{co}} U(p)(t, x)$, $x \in C(p)$ справедливо равенство

$$g_U^{**}(p)(t, x, u) = \min\{\lambda \in \mathbb{R}, (u, \lambda) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(p)(t, x)\}; \quad (5.7)$$

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$ такое, что $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и функция $(t, x, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times C(p) \times Y$.

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство подобной леммы 3.4 в [7] с использованием леммы 5.1.

Если $(x_*(p), u_*(p)) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(p)$, то в соответствии с (4.33) имеем $x_*(p) = \Gamma(p_*)(u_*(p))$. Тогда из (4.8) следует, что $x_*(p)(t) \in C(p)$, $t \in T$. Поэтому из (5.2), (5.7) и утверждения 3) леммы 5.2 вытекает, что функция $t \rightarrow g_U^{**}(p)(t, x_*(p)(t), u_*(p)(t))$ интегрируема.

ЛЕММА 5.3. *Для любого $(x_*(p), u_*(p)) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(p)$, $p \in \Lambda$, существует последовательность $v_n(p)$, $n \geq 1$, измеримых селекторов отображения $t \rightarrow U(p)(t, x_*(p)(t))$ такая, что*

$$\sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} (u_*(p)(s) - v_n(p)(s)) ds \right\|_Y \leq \frac{1}{n}, \quad (5.8)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left| \int_t^{t'} (g_U^{**}(p)(s, x_*(p)(s), u_*(p)(s)) - g(p)(s, x_*(p)(s), v_n(s))) ds \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (5.9)$$

При этом последовательность v_n , $n \geq 1$, сходится к $u_*(p)$ в топологии пространства $w\text{-}L^2(T, Y)$.

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство аналогичной леммы 3.5 в [7].

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любого $(x_*(p), u_*(p)) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(p)$, $p \in \Lambda$, существует последовательность $(x_n(p), u_n(p)) \in \mathcal{R}_U(p)$, $n \geq 1$, такая, что*

$$(x_n(p), u_n(p)) \rightarrow (x_*(p), u_*(p)) \quad (5.10)$$

в $C(T, H) \times L_w^2(T, Y)$ и в $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left| \int_t^{t'} (g_U^{**}(p)(s, x_*(p)(s), u_*(p)(s)) - g(p)(s, x_n(p)(s), u_n(p)(s))) ds \right| = 0. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_*(p), u_*(p)) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(p)$. Пусть $u_n(p) \in L^2(T, Y)$, $u_n(p)(t) \in U(p)(t, x_*(p)(t))$, $n \geq 1$, – последовательность, для которой имеют место неравенства (5.8), (5.9). Так как $x_*(p)(t) \in C(p)$, $t \in T$, то, используя гипотезу $H(U, 4)$, мы получаем, что для любого $x \in C(p)$ существует $z \in U(p)(t, x)$ такое, что

$$\|v_n(p)(t) - z\|_Y < \frac{1}{n} + l_C(p)(t) \|x_*(p)(t) - x\|. \quad (5.12)$$

Зафиксируем $n \geq 1$ и положим

$$D(p) = \Gamma(p)(S_{L^2(T, Y)}(m)), \quad (5.13)$$

где $\Gamma(p)(u)$ – оператор (4.8), который каждому $p \in \Lambda$, $u \in S_{L^2(T, Y)}(m)$ ставит в соответствие единственное решение включения (3.22). Согласно теореме 4.1 множество $D(p)$ является компактом в $C(T, H)$. Более того, для любого

$y \in D(p)$ справедливо включение $y(t) \in C(p)$, $t \in T$. Воспользовавшись неравенством (5.12) и дословно повторяя доказательство теоремы 5.1 в [7], мы получаем, что существует непрерывное отображение $z(p): D(p) \rightarrow L^2(T, Y)$ такое, что

$$z(p)(x)(t) \in U(p)(t, x(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (5.14)$$

$$\|v_n(p)(t) - z(p)(x)(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + l_C(p)(t) \|x_*(p) - x(t)\| \quad \text{п.в.}, \quad x \in D(p). \quad (5.15)$$

Согласно (5.13) мы можем рассмотреть оператор $Z: S_{L^2(T, Y)} \rightarrow L^2(T, Y)$, определенный по правилу

$$Z(p)(v) = z(p)(\Gamma(p)(v)).$$

Из (3.5), (3.21), (5.14) и теоремы 4.1 вытекает, что оператор $Z(p)$ является непрерывным из $w\text{-}S_{L^2(T, Y)}(m)$ в $w\text{-}S_{L^2(T, Y)}(m)$. Поэтому существует неподвижная точка $u_n(p) \in w\text{-}S_{L^2(T, Y)}(m)$ этого оператора, т.е.

$$u_n(p) = z(p)(\Gamma(p)(u_n(p))). \quad (5.16)$$

Положим

$$x_n(p) = \Gamma(p)(u_n(p)). \quad (5.17)$$

Тогда из (5.14)–(5.17) вытекает, что $(x_n(p), u_n(p)) \in \mathcal{R}_U(p)$, $n \geq 1$, и имеет место неравенство

$$\|v_n(p)(t) - u_n(p)(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + l_C(p)(t) \|x_*(p)(t) - x_n(p)(t)\| \quad \text{п.в.} \quad (5.18)$$

Положим

$$y_n(p) = \Gamma(p)(v_n(p)), \quad n \geq 1. \quad (5.19)$$

Из леммы 5.3 и теоремы 4.1 следует, что

$$y_n(p) \rightarrow x_*(p) \quad \text{в } C(T, H). \quad (5.20)$$

Воспользовавшись (5.18), (5.19) и (4.7), мы получим, что

$$\begin{aligned} \|x_n(p)(t) - y_n(p)(t)\| &\leq N \int_0^t \|u_n(p)(s) - v_n(p)(s)\|_Y ds \\ &\leq N \left[\int_0^t \left(l_C(p)(s) \|x_*(p)(s) - y_n(p)(s)\| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + l_C(p)(s) \|y_n(p)(s) - x_n(p)(s)\| + \frac{1}{n} \right) ds \right]. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и неравенства Беллмана–Гронуолла вытекает, что

$$\begin{aligned} \|x_n(p)(t) - y_n(p)(t)\| &\leq \left[N \left(\int_T l_C(p)(s) \|x_*(p)(s) - y_n(p)(s)\| ds + \frac{1}{n} \right) \right] \exp \left(N \int_T l_C(p)(s) ds \right). \end{aligned}$$

Тогда согласно (5.20) имеем

$$\|x_n(p) - y_n(p)\|_{C(T,H)} \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

Поэтому в соответствии с (5.20), (5.21)

$$x_n(p) \rightarrow x_*(p) \quad \text{в } C(T, H). \quad (5.22)$$

Воспользовавшись (5.18), (5.22), получим, что

$$\|v_n(p) - u_n(p)(t)\|_{L^2(T,Y)} \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

Теперь из (5.8), (5.23) и леммы 5.3 вытекает, что

$$u_n(p) \rightarrow u_*(p) \quad \text{в } L^2_w(T, Y) \quad \text{и в } w\text{-}L^2(T, Y). \quad (5.24)$$

Согласно (5.18), (5.22) и гипотезе $H(g, 2)$ имеем

$$|g(p)(t, x_n(p)(t), u_n(p)(t)) - g(p)(t, x_*(p)(t), v_n(p)(t))| \rightarrow 0 \quad \text{п.в.}$$

Поэтому в соответствии с (3.10) получаем, что

$$|g(p)(t, x_n(p)(t), u_n(p)(t)) - g(p)(t, x_*(p)(t), v_n(p)(t))| \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1(T, \mathbb{R}). \quad (5.25)$$

Воспользовавшись (5.9), (5.25), приходим к неравенству (5.11), а (5.22) и (5.24) дают (5.10). Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению задач (P) и (RP) (см. § 1).

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любого $p \in \Lambda$ задача (RP) имеет решение и*

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}(p)} J^{**}(p)(x, u) = \inf_{(x,u) \in \mathcal{R}_U(p)} J(p)(x, u).$$

Для любого решения $(x_*(p), u_*(p))$ задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $(x_n(p), u_n(p)) \in \mathcal{R}_U(p)$, $n \geq 1$, задачи (P), сходящаяся к $(x_*(p), u_*(p))$ в пространствах $C(T, H) \times L^2_w(T, Y)$ и $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$, и имеет место равенство (5.11).

Обратно, если $\{x_n(p), u_n(p)\}$, $n \geq 1$, — минимизирующая последовательность задачи (P), то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}(p), u_{n_k}(p)\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{x_n(p), u_n(p)\}$, $n \geq 1$, и решение $(x_*(p), u_*(p))$ задачи (RP) такие, что последовательность $\{x_{n_k}(p), u_{n_k}(p)\}$, $k \geq 1$, сходится к $(x_*(p), u_*(p))$ в пространстве $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$, и имеет место равенство (5.11).

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство подобной теоремы 6.1 в [7] с использованием лемм 5.1, 5.2 и теоремы 5.1.

Согласно теореме 5.2 для функций $m_U(p)$, $m_{\text{co}U}(p)$, $p \in \Lambda$, определенных соотношениями (1.5), (1.6), будет иметь место равенство (1.7), а множество $\mathcal{R}_{\text{co}U}^{\text{опт}}(p)$ (1.8), $p \in \Lambda$, непусто.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.3. *Функция*

$$p \rightarrow m_{\overline{\text{co}} U}(p) = m_U(p)$$

непрерывна, а многозначное отображение

$$p \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}^{\text{опт}}(p)$$

является полунепрерывным сверху по Вьеторису из Λ в $C(T, H) \times \text{w-}L^2(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times \text{w-}L^2(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.2), (5.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} |g_U^{**}(p)(t, x, u)| &\leq \max\{m, a_C(p)(t) + b_C(p)(t)\|x\|\} \quad \text{п.в.}, \\ x &\in C(p), \quad u \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(p)(t, x). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Пусть $p_n \rightarrow p_*$. Тогда из (5.26) и теорем 4.4, 5.2 получаем, что $|m_{\overline{\text{co}} U}(p_n)| \leq L$ при некотором $L > 0$ и

$$\begin{aligned} m_{\overline{\text{co}} U}(p_n) &= \int_T g_U^{**}(p)(t, x(p_n)(t), u(p_n)(t)) dt, \\ (x(p_n), u(p_n)) &\in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p_n), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Положим $r = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{\text{co}} U}(p_n)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{\text{co}} U}(p_n). \quad (5.28)$$

Из теоремы 4.4 и неравенства (5.26) следует, что существует подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{p_n\}$, $n \geq 1$, такая, что

$$\begin{aligned} (x(p_{n_k}), u(p_{n_k})) &\rightarrow (x(p_*), u(p_*)) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(p_*), \quad k \rightarrow \infty, \\ &\text{в } C(T, H) \times \text{w-}L^2(T, Y), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} g_U^{**}(p_{n_k})(t, x(p_{n_k})(t), u(p_{n_k})(t)) &\rightarrow v(t), \quad k \rightarrow \infty, \\ &\text{в } \text{w-}L^1(T, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

В соответствии с леммой 5.2 имеем

$$\begin{aligned} (u(p_{n_k})(t), g_U^{**}(p_{n_k})(t, x(p_{n_k})(t), u(p_{n_k})(t))) \\ \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(p_{n_k})(x(p_{n_k})(t)) \quad \text{п.в.}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Из этого включения, (5.29), (5.30), леммы 5.1 и теоремы Мазура вытекает, что

$$\begin{aligned} (u(p_*)(t), v(t)) &\in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{m=k}^{\infty} (u(p_{n_m})(t), g_U^{**}(p_{n_m})(t, x(p_{n_m})(t), u(p_{n_m})(t))) \\ &\in \overline{\text{co}} \tilde{U}(p_*)(x(p_*)(t)) \quad \text{п.в.} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Воспользовавшись (5.7), (5.31), получаем, что

$$g_U^{**}(p_*)(t, x(p_*)(t), u(p_*)(t)) \leq v(t) \quad \text{п.в.}$$

Из этого неравенства и (5.30) следует, что

$$\begin{aligned} m_{\overline{CO}U}(p_*) &\leq \int_T g_U^{**}(p_*)(t, x(p_*)(t), u(p_*)(t)) dt \\ &\leq \int_T v(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T g_U^{**}(p_{n_k})(t, x(p_{n_k})(t), u(p_{n_k})(t)) dt. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Поэтому в соответствии с (5.27), (5.28) имеем

$$m_{\overline{CO}U}(p_*) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{CO}U}(p_n). \quad (5.33)$$

Положим

$$r_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{CO}U}(p_n). \quad (5.34)$$

Мы можем считать, что

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{CO}U}(p_n). \quad (5.35)$$

Пусть

$$m_{\overline{CO}U}(p_*) = \int_T g_U^{**}(p_*)(t, x(p_*)(t), u(p_*)(t)) dt, \quad (x(p_*), u(p_*)) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(p_*). \quad (5.36)$$

Согласно теореме 5.2 существует последовательность $(y_k(p_*), v_k(p_*)) \in \mathcal{R}_U(p_*)$, $k \geq 1$, такая, что

$$(y_k(p_*), v_k(p_*)) \rightarrow (x(p_*), u(p_*)), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y) \quad (5.37)$$

и, кроме того,

$$J(p_*)(y_k, v_k) \rightarrow m_{\overline{CO}U}(p_*). \quad (5.38)$$

Из теоремы 4.4 вытекает, что для каждого $k \geq 1$ существует последовательность $(x_k(p_n), u_k(p_n)) \in \mathcal{R}_U(p_n)$, $n \geq 1$, такая, что

$$(x_k(p_n), u_k(p_n)) \rightarrow (y_k(p_*), v_k(p_*)), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } C(T, H) \times L^2(T, Y). \quad (5.39)$$

Не нарушая общности, мы можем считать, что

$$u_k(p_n)(t) \rightarrow v_k(p_*)(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } Y \quad \text{п.в.} \quad (5.40)$$

Тогда из неравенства (3.10), гипотезы $H(g, 2)$, (5.39), (5.40) вытекает, что

$$J(p_n)(x_k(p_n), u_k(p_n)) \rightarrow J(p_*)(y_k(p_*), v_k(p_*)). \quad (5.41)$$

Воспользовавшись (5.38), (5.41), выберем подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{p_n\}$, $n \geq 1$, так, чтобы

$$J(p_{n_k})(x_k(p_{n_k}), u_k(p_{n_k})) \rightarrow m_{\overline{CO}U}(p_*), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Из свойств биполяр вытекает, что

$$g_U^{**}(p_{n_k})(t, x_k(p_{n_k})(t), u_k(p_{n_k})(t)) \leq g_U(p_{n_k})(t, x_k(p_{n_k})(t), u_k(p_{n_k})(t)) \quad \text{п.в.}$$

Поэтому

$$m_{\overline{\text{co}}} U(p_{n_k}) \leq J^{**}(p_{n_k})(x_k(p_{n_k}), u_k(p_{n_k})) \leq J(p_{n_k})(x_k(p_{n_k}), u_k(p_{n_k})), \quad k \geq 1.$$

Из этого неравенства и (5.34), (5.35), (5.42) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{\overline{\text{co}}} U(p_n) \leq m_{\overline{\text{co}}} U(p_*). \quad (5.43)$$

Объединяя неравенства (5.33), (5.43), получаем, что функция $p \rightarrow m_{\overline{\text{co}}} U(p)$ непрерывна.

Согласно утверждению 4) в теореме 4.4 множество $\bigcup_{p \in \Lambda} \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(p)$ является компактом в пространстве $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$. Поэтому для доказательства полунепрерывности сверху по Вьеторису отображения $p \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}}^{\text{опт}} U(p)$ в пространстве $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$ и компактности его значений в этом пространстве достаточно доказать замкнутость графика этого отображения в пространстве $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$.

Пусть $p_n \rightarrow p_*$ ($x(p_n), u(p_n) \rightarrow (x, u)$ в $C(T, H) \times w\text{-}L^2(T, Y)$), $(x(p_n), u(p_n)) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}}^{\text{опт}} U(p_n)$, $n \geq 1$. Согласно теореме 4.4 имеем $(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(p_*)$. Как и при доказательстве неравенства (5.33), будет иметь место сходимость (5.30) для некоторой подпоследовательности p_{n_k} , $k \geq 1$. Поэтому по аналогии с (5.32) мы получаем, что

$$\begin{aligned} m_{\overline{\text{co}}} U(p_*) &\leq \int_T g_U^{**}(p_*)(t, x(t), u(t)) dt \leq \int_T v(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T g_U^{**}(p_{n_k})(t, x(p_{n_k})(t), u(p_{n_k})(t)) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{\overline{\text{co}}} U(p_{n_k}). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и непрерывности функции $p \rightarrow m_{\overline{\text{co}}} U(p)$ вытекает, что $(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}}^{\text{опт}} U(p_*)$. Теорема доказана.

§ 6. Пример

Пусть $T = [0, 1]$, $\Lambda = [0, 1]$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $H = Y = L^2(\Omega)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ и нормой $|\cdot|_H$. Как обычно, элемент $z \in L^2(T, L^2(\Omega))$ мы отождествляем с элементом пространства $L^2(T \times \Omega)$, полагая $z(t)(x) = z(t, x)$, $t \in T$, $x \in \Omega$.

Рассмотрим соболевское пространство $V = H^1(\Omega)$ с нормой

$$\|z\|_V = (|z|_H^2 + |\nabla z|_H^2)^{1/2}$$

и соболевское пространство $H^2(\Omega)$. Оператор Лапласа $-\Delta_N: D(-\Delta_N) \subset H \rightarrow H$ с однородными граничными условиями Неймана определяется следующим образом: для $z \in H^1(\Omega)$ и $z^* \in L^2(\Omega)$ полагаем

$$z^* = -\Delta_N z, \quad \text{если} \quad \int_{\Omega} \langle \nabla z, \nabla v \rangle dx = \langle z^*, v \rangle_H, \quad (6.1)$$

для всех $v \in H^1(\Omega)$. Тогда, как хорошо известно,

$$\begin{aligned} D(-\Delta_N) &= \{z \in H^1(\Omega), z^* = -\Delta_N z \text{ для некоторого } z^* \in L^2(\Omega)\} \\ &= \left\{z \in H^2(\Omega), \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ в } H^{1/2}(\Gamma)\right\} \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$-\Delta_N z = -\Delta z \quad \text{для всех } z \in D(-\Delta_N),$$

где n – единичный вектор внешней нормали.

Пусть

$$q_a(r) = \alpha r + a, \quad q_b = \alpha r + b, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0, \quad a < b, \quad 0 \in [a, b].$$

Для каждого $v \in H$ определим выпуклое замкнутое множество K_v в H ,

$$K_v = \{y \in H, q_a(v) \leq y \leq q_b(v) \text{ п.в. на } \Omega\},$$

и его индикаторную функцию $I_v(\cdot)$ на H ,

$$I_v(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in K_v, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через $\partial I_v(\cdot)$ обозначим субдифференциал функции $I_v(\cdot)$.

При $p \in \Lambda$, $p = 0$ рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} [v(0) + w(0)]_t - \Delta v(0) + \mu v(0) &= b(0)(v(0), w(0))u, \\ w_t(0) - k\Delta w(0) + \partial I_{v(0)}(w(0)) &\ni f(0)(v(0), w(0)) \text{ на } T \times \Omega, \\ v(0)(0, \cdot) &= v_0, \quad w(0)(0, \cdot) = w_0 \text{ на } \Omega, \\ \frac{\partial v(0)}{\partial n} &= \frac{\partial w(0)}{\partial n} = 0 \text{ на } T \times \Gamma, \\ |u| &\leq m(0) \text{ на } T \times \Omega, \end{aligned}$$

Эту управляемую систему будем обозначать через $Eq(0)$.

С физической точки зрения функции $v(0) = v(0)(t, x)$ и $w(0) = w(0)(t, x)$, где $t \in T$, $x \in \Omega$, являются относительной температурой и упорядоченным параметром (см. [19], [20]). Отметим, что второе уравнение системы $Eq(0)$ описывает связь между входом и выходом гистерезисного оператора с препятствиями $q_a(v)$ и $q_b(v)$ (см. [21; ч. III]).

Построим гладкие аппроксимации для системы $Eq(0)$. Пусть

$$s_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq r < +\infty, \\ -r^2, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq r < 0, \\ r + \frac{1}{4}, & \text{если } -\infty < r < -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$s_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < r < 0, \\ r^2, & \text{если } 0 \leq r < \frac{1}{2}, \\ r - \frac{1}{4}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq r < +\infty. \end{cases} \quad (6.3)$$

Ясно, что функции s_i , $i = 1, 2$, являются непрерывно дифференцируемыми с производными $s'_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

При $p \in (0, 1]$ рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} [v(p) + w(p)]_t - \Delta v(p) + \mu v(p) &= b(p)(v(p), w(p))u, \\ w_t(p) - k\Delta w(p) + \frac{1}{p} [s_1(w(p) - q_a(v(p))) + s_2(w(p) - q_b(v(p)))] \\ &= f(p)(v(p), w(p)) \quad \text{на } T \times \Omega, \\ v(p)(0, \cdot) &= v_0, \quad w(p)(0, \cdot) = w_0 \quad \text{на } \Omega, \\ \frac{\partial v(p)}{\partial n} &= \frac{\partial w(p)}{\partial n} = 0 \quad \text{на } T \times \Gamma, \\ |u| &\leq m(p) \quad \text{на } T \times \Omega. \end{aligned}$$

Эту управляемую систему обозначим через $Eq(p)$, $p \in (0, 1]$.

Пусть

$$U(p) = \{u \in Y, |u(x)| \leq m(p) \text{ п.в. на } \Omega\}, \quad p \in \Lambda. \quad (6.4)$$

Тройка $(v(0), w(0), u(0))$ называется *решением управляемой системы $Eq(0)$* , если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} v(0), w(0) &\in W^{1,2}(T, H) \cap C(T, V) \cap L^2(T, H^2(\Omega)), \\ u(0) &\in L^2(T, Y), \\ [\dot{v}(0) + \dot{w}(0)] - \Delta_N v(0) + \mu v(0) &= b(0)(v(0), w(0))u(0), \\ \dot{w}(0) - k\Delta_N w(0) + \partial I_{v(0)}(w(0)) &\ni f(0)(v(0), w(0)) \quad \text{в } H \text{ п.в. на } T, \\ v(0)(0, \cdot) &= v_0, \quad w(0)(0, \cdot) = w_0 \quad \text{в } H, \\ u(0) &\in U(0) \quad \text{п.в. на } T. \end{aligned}$$

Решение $(v(p), w(p), u(p))$ управляемой системы $Eq(p)$, $p \in (0, 1]$, определяется аналогично с заменой члена $\partial I_{v(0)}(w(0))$ на член $\frac{1}{p} [s_1(w(p) - q_a(v(p))) + s_2(w(p) - q_b(v(p)))]$ и включения $u(0) \in U(0)$ на включение $u(p) \in U(p)$.

Множества решений управляемых систем $Eq(p)$, $p \in \Lambda$, мы будем обозначать через $\mathcal{R}(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Для функций $f(p), b(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $u, v \in W^{1,2}(T, H)$ под $b(p)(v, w)$, $f(p)(v, w)$ мы понимаем функции

$$b(p)(v(t)(x), w(t)(x)), \quad f(p)(v(t)(x), w(t)(x)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Выпуклые ограничения $U(p)$ на управление мы рассматриваем исключительно для простоты и наглядности излагаемых результатов.

Сделаем следующие предположения:

- (A1) константа k удовлетворяет неравенству $0 < k < 1/(1 + \alpha)$;
- (A2) $v_0, w_0 \in V$ и $q_a(v_0) \leq w_0 \leq q_b(v_0)$.

ГИПОТЕЗЫ $H(f)$. Функция $f(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \Lambda$, обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $p \rightarrow f(p)(v, w)$ непрерывно;

- 2) $|f(p)(v_1, w_1) - f(p)(v_2, w_2)| \leq l(|v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|)$, $l > 0$, $p \in \Lambda$, $v_i, w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

ГИПОТЕЗЫ $H(b)$. Функция $b(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \Lambda$, обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $p \rightarrow b(p)(v, w)$ непрерывно;
 2) имеет место неравенство

$$|b(p)(v_1, w_1) - b(p)(v_2, w_2)| \leq l(|v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|),$$

$$l > 0, \quad p \in \Lambda, \quad v_i, w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2;$$

- 3) $|b(p)(v, w)| \leq d$, $d > 0$, $p \in \Lambda$, $v, w \in \mathbb{R}$.

ГИПОТЕЗЫ $H(m)$. Функция $p \rightarrow m(p)$ непрерывна и $m(p) \geq 2$, $p \in \Lambda$.

Пусть

$$S_{\mathbb{R}}(m) = \{u \in \mathbb{R}, |u| \leq m\}, \quad (6.5)$$

$$S_Y(m) = \{u \in Y, |u(x)| \leq m \text{ п.в. на } \Omega\}, \quad (6.6)$$

где $m > \max\{m(p), p \in \Lambda\}$.

Рассмотрим функцию $\tilde{g}(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S_{\mathbb{R}}(m) \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \Lambda$.

ГИПОТЕЗЫ $H(\tilde{g})$. Функция $\tilde{g}(p)(v, w, u)$ обладает следующими свойствами:

- 1) имеет место равенство

$$\tilde{g}(p)(v, w, u) = \tilde{g}_1(p)(v, w) + g_2(p)(u); \quad (6.7)$$

- 2) функция $(p, v, w) \rightarrow \tilde{g}_1(p)(v, w)$ непрерывна;
 3) имеет место неравенство

$$|\tilde{g}_1(p)(v, w)| \leq c_1 + d_1(|v| + |w|), \quad c_1, d > 0, \quad p \in \Lambda;$$

- 4) при $p = 0$ функция $g_2(p)(u)$ имеет следующий вид:

$$g_2(0)(u) = |1 - |u||, \quad u \in S_{\mathbb{R}}(m),$$

а при $p \in (0, 1]$ задается так:

$$g_2(p)(u) = \begin{cases} |1 - |u||, & \text{если } |u| \leq 1, \\ \frac{1}{p}(u - 1)^2, & \text{если } 1 < u \leq 1 + \frac{p}{2}, \\ (u - 1) - \frac{1}{4}p, & \text{если } 1 + \frac{p}{2} < u \leq m, \\ \frac{1}{p}(u + 1)^2, & \text{если } -1 - \frac{p}{2} \leq u < -1, \\ (-u - 1) - \frac{1}{4}p, & \text{если } -m \leq u < -1 - \frac{p}{2}. \end{cases}$$

Пусть

$$U_{\mathbb{R}}(p) = \{u \in \mathbb{R}, |u| \leq m(p)\}, \quad p \in \Lambda,$$

и $\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – функция, определенная по правилу

$$\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}(p)(v, w, u) = \begin{cases} \tilde{g}(p)(v, w, u), & \text{если } u \in U_{\mathbb{R}}(p), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(v, w, u)$, $v, w, u \in \mathbb{R}$, – биполярная функция $u \rightarrow \tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}(p)(v, w, u)$.

Рассмотрим задачи $\tilde{P}(p)$ и $R\tilde{P}(p)$, $p \in \Lambda$, минимизации функционалов

$$\tilde{J}(p)(v, w, u) = \int_T \int_{\Omega} \tilde{g}(p)(v(t)(x), w(t)(x), u(t)(x)) \, dx \, dt, \quad (6.8)$$

$$\tilde{J}^{**}(p)(v, w, u) = \int_T \int_{\Omega} \tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(v(t)(x), w(t)(x), u(t)(x)) \, dx \, dt \quad (6.9)$$

на решениях $\mathcal{K}(p)$ управляемой системы $Eg(p)$.

Пусть $I_{[a,b]}$ – индикаторная функция отрезка $[a, b]$ и $I_{\mathcal{K}}$ – индикаторная функция множества $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \{z \in H, z(x) \in [a, b] \text{ п.в. на } \Omega\}.$$

Тогда

$$I_{\mathcal{K}}(z) = \int_{\Omega} I_{[a,b]}(z(x)) \, dx, \quad z \in H.$$

Известно, что $\text{dom } I_{\mathcal{K}} = \text{dom } \partial I_{\mathcal{K}}$ и если $z \in \text{dom } I_{\mathcal{K}}$, $\xi \in H$, то $\xi \in \partial I_{\mathcal{K}}(z)$ тогда и только тогда, когда $\xi(x) \in \partial I_{[a,b]}(z(x))$ п.в. на Ω .

Введем новую переменную $\tilde{w} = w - \alpha v$.

ЛЕММА 6.1 (см. [19]). Пусть $v, w \in L^2(T, H)$ и $\tilde{w} = w - \alpha v$. Тогда

$$\partial I_{v(t)}(w(t)) = \partial I_{\mathcal{K}}(\tilde{w})(t) \quad \text{в } H \text{ п.в. на } T.$$

С учетом леммы 6.1 управляемые системы $Eg(p)$ в новых переменных примут следующий вид.

При $p = 0$ имеем

$$\begin{aligned} -[(1 + \alpha)v(0) + \tilde{w}(0)]_t &= -\Delta v(0) + \mu v(0) - \tilde{b}(0)(v(0), \tilde{w}(0))u, \\ -[v(0) + c(1 - k\alpha)\tilde{w}(0)]_t &\in -ck\Delta\tilde{w}(0) + c\partial I_{\mathcal{K}}(\tilde{w}(0)) - ck\alpha\mu v(0) \\ &\quad - c\tilde{f}(0)(v(0), \tilde{w}(0)) + ck\alpha\tilde{b}(0)(v(0), \tilde{w}(0))u \quad \text{на } T \times \Omega, \\ v(0)(0, \cdot) &= v_0, \quad \tilde{w}(0)(0, \cdot) = \tilde{w}_0 = w_0 - \alpha v_0 \quad \text{на } \Omega, \\ \frac{\partial v(0)}{\partial n} &= \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial n} = 0 \quad \text{на } T \times \Gamma, \\ |u| &\leq m(0) \quad \text{на } T \times \Omega. \end{aligned}$$

При $p \in (0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} -[(1 + \alpha)v(p) + \tilde{w}(p)]_t &= -\Delta v(p) + \mu v(p) - \tilde{b}(p)(v(p), \tilde{w}(p))u, \\ -[v(p) + c(1 - k\alpha)\tilde{w}(p)]_t &= -ck\Delta w + \frac{c}{p}[s_1(\tilde{w}(p) - a) + s_2(\tilde{w}(p) + b)] \\ &\quad - ck\alpha\mu v(p) - c\tilde{f}(p)(v(p), \tilde{w}(p)) + ck\alpha\tilde{b}(p)(v(p), \tilde{w}(p))u \quad \text{на } T \times \Omega, \\ v(p)(0, \cdot) &= v_0, \quad \tilde{w}(p)(0, \cdot) = \tilde{w}_0 = w_0 - \alpha v_0 \quad \text{на } \Omega, \\ \frac{\partial v(p)}{\partial n} &= \frac{\partial \tilde{w}(p)}{\partial n} = 0 \quad \text{на } T \times \Gamma, \\ |u| &\leq m(p) \quad \text{на } T \times \Omega. \end{aligned}$$

Эти управляемые системы обозначим через $\widetilde{E}q(p)$, $p \in \Lambda$.

В системах $\widetilde{E}q(p)$ константа c имеет следующий вид:

$$c = \frac{1}{\alpha(1 - k - \alpha k)}, \quad (6.10)$$

$$\tilde{b}(p)(v(p), w(p)) = b(p)(v(p), \tilde{w}(p) + \alpha v(p)), \quad (6.11)$$

$$\tilde{f}(p)(v(p), \tilde{w}(p)) = f(p)(v(p), \tilde{w}(p) + \alpha v(p)). \quad (6.12)$$

Решения управляемых систем $\widetilde{E}q(p)$, $p \in \Lambda$, определяются по аналогии с решениями управляемых систем $Eq(p)$. Множества решений этих систем обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}(p)$.

Обозначим через $\tilde{s}_i$, $i = 1, 2$, первообразные функций s_i , определенных равенствами (6.2), (6.3). Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(r) &= \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq r < +\infty, \\ -\frac{r^3}{3}, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq r < 0, \\ \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4}r + \frac{1}{24}, & \text{если } -\infty < r < -\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \tilde{s}_2(r) &= \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < r < 0, \\ \frac{r^3}{3}, & \text{если } 0 \leq r < \frac{1}{2}, \\ \frac{r^2}{2} - \frac{1}{4}r + \frac{1}{24}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq r < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Из предположения (A1) и (6.10) следует, что $c > 0$.

Пусть $\mathcal{H} = H \times H$ и $z = (v, \tilde{w}) \in \mathcal{H}$. При $p = 0$ определим на $\mathcal{H}$ функцию $\varphi(0)(z)$, полагая

$$\varphi(0)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}|v|_H^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|_H^2 + \frac{ck}{2}|\tilde{w}|_H^2 + \frac{ck}{2}|\nabla \tilde{w}|_H^2 + cI_{\mathcal{H}}(\tilde{w}), & \text{если } z = (v, \tilde{w}) \in V \times V \text{ и } I_{\mathcal{H}}(\tilde{w}) < +\infty, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.13)$$

Для $p \in (0, 1]$ положим

$$\varphi(p)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}|v|_H^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|_H^2 + \frac{ck}{2}|\tilde{w}|_H^2 + \frac{ck}{2}|\nabla \tilde{w}|_H^2 \\ + \frac{c}{p} \int_{\Omega} [\tilde{s}_1(\tilde{w} - a) + \tilde{s}_2(\tilde{w} - b)] dx, & \text{если } z = (u, \tilde{w}) \in V \times V, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.14)$$

Тем самым будут определены функции $\varphi(p): \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $p \in \Lambda$, которые являются выпуклыми, собственными и полунепрерывными снизу. Субдифференциалы этих функций имеют следующий вид:

$$\partial\varphi(0)(z) = \partial\varphi(0) \left(\begin{pmatrix} u \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} -\Delta_N v + v \\ -ck\Delta_N \tilde{w} + ck\tilde{w} + c\xi \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{H}, \quad (6.15)$$

$\xi \in H$, $\xi \in \partial I_{\mathcal{H}}(\tilde{w})$,

$$\partial\varphi(p)(z) = \partial\varphi(p) \left(\begin{pmatrix} u \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} -\Delta_N v + v \\ -ck\Delta_N \tilde{w} + ck\tilde{w} + \frac{c}{p}[s_1(\tilde{w} - a) + s_2(\tilde{w} - b)] \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{H}, \quad (6.16)$$

$p \in (0, 1]$.

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 \\ 1 & c(1 - k\alpha) \end{pmatrix}, \quad B(p)(z) = \begin{pmatrix} -\tilde{b}(p)(z) \\ ck\alpha\tilde{b}(p)(z) \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

$$F(p)(z) = \begin{pmatrix} -(\mu - 1)v \\ -ck\alpha\mu v - ck\tilde{w} - c\tilde{f}(p)(z) \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

$p \in \Lambda$, $z = (v, \tilde{w}) \in \mathcal{H}$.

Воспользовавшись видом управляемых систем $\widetilde{E}q(p)$, определением их решения, предположением (A2), (6.15)–(6.18), мы можем эти системы записать в пространстве $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$-A\dot{z}(p)(t) \in \partial\varphi(p)(z(p)(t)) + F(p)(z(p)(t)) + B(p)(z(p)(t))u(p)(t) \quad \text{п.в. на } T, \quad (6.19)$$

$$z(p)(0) = z_0 \in \text{dom } \varphi(p),$$

$$u(p)(t) \in U(p) \quad \text{п.в. на } T, \quad p \in \Lambda,$$

где функции $\tilde{b}(p)(z)$, $\tilde{f}(p)(z) \in H$, фигурирующие в (6.17), (6.18), определяются следующим образом:

$$\tilde{b}(p)(z)(x) = \tilde{b}(p)(z(x)), \quad \tilde{f}(p)(z)(x) = \tilde{f}(p)(z(x)), \quad z \in \mathcal{H}. \quad (6.20)$$

Покажем, что для $\varphi(p)$, A , $F(p)$, $B(p)$, $U(p)$, $p \in \Lambda$, выполняются гипотезы $H(\varphi)$, $H(A)$, $H(F)$, $H(B)$, $H(U)$, сформулированные в § 3. Согласно лемме 4.2 в [20] последовательность

$$\frac{1}{p_n} \int_{\Omega} [\tilde{s}_1(\cdot - a) + \tilde{s}_2(\cdot - b)] dx, \quad n \geq 1,$$

сходится к

$$\int_{\Omega} I_{[a,b]}(\cdot) dx = I_{\mathcal{H}}(\cdot)$$

в смысле Моско при $p_n \downarrow 0$. Отсюда и из (6.13), (6.14) непосредственно вытекает сходимость $\varphi(p_n) \rightarrow \varphi(0)$ в смысле Моско при $p_n \downarrow 0$.

Сходимость последовательности $\frac{1}{p_n} \int_{\Omega} [\tilde{s}_1(\cdot - a) + \tilde{s}_2(\cdot - b)] dx$, $n \geq 1$, к $\frac{1}{p} \int_{\Omega} [\tilde{s}_1(\cdot - a) + \tilde{s}_2(\cdot - b)] dx$ в смысле Моско при $p_n \rightarrow p$, где $p_n, p \in (0, 1]$, вытекает из теорем 2.40, 2.46 в [11]. Тогда из (6.14) получаем, что последовательность $\varphi(p_n) \rightarrow \varphi(p)$ в смысле Моско при $p_n \rightarrow p$, $p_n, p \in (0, 1]$. Таким образом, гипотеза $H(\varphi), 1)$ имеет место. Гипотезы $H(\varphi), 2)$ – $4)$ очевидны. Гипотеза $H(\varphi), 5)$ вытекает из (6.13), (6.14) и компактности вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Таким образом, для функций $\varphi(p)$, $p \in \Lambda$, определенных равенствами (6.13), (6.14), справедливы все гипотезы $H(\varphi)$.

Из предположения (A1), (6.10) и первого из равенств (6.17) вытекает, что матрица A симметрична и положительно определена. Поэтому оператор A из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, определенный равенством $(Az)(x) = Az(x)$, $z \in \mathcal{H}$, $x \in \Omega$, удовлетворяет всем гипотезам $H(A)$.

Из гипотез $H(f)$ вытекает, что функция $f(p): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \Lambda$, обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $(p, v, w) \rightarrow f(p)(v, w)$ непрерывно, $p \in \Lambda$, $v, w \in \mathbb{R}$;
- 2) $|f(p)(v, w)| \leq d + l(|v| + |w|)$, $p \in \Lambda$, $v, w \in \mathbb{R}$, при некотором $d > 0$.

Из этих свойств, гипотезы $H(f), 2)$ и (6.12), (6.20) вытекает, что для отображения $F(p)$, $p \in \Lambda$, определенного равенством (6.18), выполняются все гипотезы $H(F)$, поскольку липшицевы функции удовлетворяют неравенству (3.3).

Справедливость гипотез $H(B)$ для оператора $B(p)$, $p \in \Lambda$, определенного вторым из равенств (6.17), с очевидностью вытекает из гипотез $H(b)$ и (6.11), (6.20).

Гипотезы $H(U)$ для многозначного отображения $U(p)$, определенного равенством (6.4), вытекает из непрерывности функции $p \rightarrow m(p)$ (гипотеза $H(m)$).

Таким образом, для системы (6.19) выполняются все гипотезы, при которых справедливы утверждения теоремы 4.4. Поэтому управляемая система (6.19) имеет решение. Множество решений этой управляемой системы обозначим через $\mathcal{R}^*(p)$.

Ясно, что любое решение управляемой системы $\widetilde{Eq}(p)$ является решением системы (6.19). Покажем, что любое решение управляемой системы (6.19) является решением системы $\widetilde{Eq}(p)$, $p \in \Lambda$.

Рассмотрим функции $\varphi_1(0), \varphi_2(0): H \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(0)(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}|v|_H^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|_H^2, & \text{если } v \in V, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\varphi_2(0)(w) = \begin{cases} \frac{ck}{2}|w|_H^2 + \frac{ck}{2}|\nabla w|_H^2 + cI_{\mathcal{H}}(w), & \text{если } w \in V \text{ и } I_{\mathcal{H}}(w) < +\infty, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.22)$$

Пусть $(z(0), u(0)) \in \mathcal{R}^*(p)$, $z(0) = (v(0), \tilde{w}(0))$. Тогда $v(0), \tilde{w}(0) \in W^{1,2}(T, H)$. Так как $z(0)(t) \in \text{dom } \partial\varphi(0) \subset \text{dom } \varphi(0)$, то из (6.13) вытекает, что $I_{\mathcal{K}}(\tilde{w}(t)) = 0$, $t \in T$. Поэтому

$$\varphi_2(0)(\tilde{w}(0)(t)) = \frac{ck}{2} |\tilde{w}(0)(t)|_H + \frac{ck}{2} |\nabla \tilde{w}(0)(t)|_H.$$

Воспользовавшись (6.13), (6.15)–(6.19) и леммой 3.3 в [15], мы получим, что функции $t \rightarrow \varphi_1(0)(v(0)(t))$, $t \rightarrow \varphi_2(0)(\tilde{w}(0)(t))$ абсолютно непрерывны. Поэтому из (6.21), (6.22) вытекает, что функции

$$\begin{aligned} t \rightarrow |v(0)(t)|_V &= (|v(0)(t)|_H^2 + |\nabla v(0)(t)|_H^2)^{1/2}, \\ t \rightarrow |\tilde{w}(0)(t)|_V &= (|\tilde{w}(0)(t)|_H^2 + |\nabla \tilde{w}(0)(t)|_H^2)^{1/2} \end{aligned}$$

непрерывны.

Пусть V^* – пространство, топологически сопряженное к V . Так как функции $v(0), \tilde{w}(0) \in C(T, H)$, то из компактности вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, относительной компактности множеств $\{v(0)(t), t \in T\}$, $\{\tilde{w}(0)(t), t \in T\}$ в пространстве $w-V$ следует, что функции $t \rightarrow v(0)(t)$, $t \rightarrow \tilde{w}(0)(t)$ являются непрерывными из T в $w-V$. Так как функции $t \rightarrow |v(0)(t)|_V$, $t \rightarrow |\tilde{w}(0)(t)|_V$ непрерывны, то $v(0), \tilde{w}(0) \in C(T, V)$.

С помощью подобных рассуждений можно показать, что $v(p), \tilde{w}(p) \in C(T, V)$, $p \in (0, 1]$.

Рассмотрим следующие функции $\Phi(0), \Phi^1(0), \Phi^2(0): L^2(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$\Phi(0)(w) = \begin{cases} \int_T \left(\frac{ck}{2} |w(t)|_V^2 + \frac{ck}{2} |\nabla w(t)|_V^2 \right) dt, & \text{если } w \in L^2(T, V), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\Phi^1(0)(w) = \int_T c I_{\mathcal{K}}(w(t)) dt = \int_T I_{\mathcal{K}}(w(t)) dt, \quad (6.24)$$

$$\Phi^2(0)(w) = \int_T \varphi_2(0)(w(t)) dt, \quad w \in L^2(T, H). \quad (6.25)$$

Функции $\Phi(0)(w)$, $\Phi^1(0)(w)$, $\Phi^2(0)(w)$ являются выпуклыми, собственными и полунепрерывными снизу. Очевидно, что $\Phi^2(0)(w) = \Phi^1(0)(w) + \Phi(0)(w)$.

Пусть $I_{\mathcal{K}}^\lambda(w)$, $\lambda > 0$, – регуляризация Моро–Иосиды функции $I_{\mathcal{K}}(w)$. Известно, что

$$\partial I_{\mathcal{K}}^\lambda(w) = \frac{1}{\lambda} (w - \text{pr}_{\mathcal{K}} w), \quad w \in H, \quad (6.26)$$

где $\text{pr}_{\mathcal{K}} w$ – проекция точки $w \in H$ на множество $\mathcal{K}$ (см. [11]). Так как $0 \in [a, b]$, то множество $\mathcal{K}$ содержит нулевой элемент пространства H . Поэтому из теоремы 2.2.2 в [22] вытекает, что

$$\langle w, w - \text{pr}_{\mathcal{K}} w \rangle_H \geq 0, \quad w \in H. \quad (6.27)$$

Покажем, что

$$\partial \Phi^2(0) = \partial \Phi(0) + \partial \Phi^1(0). \quad (6.28)$$

Так как $\partial\Phi(0)$ и $\partial\Phi^1(0)$ являются максимально монотонными операторами, то для этого достаточно показать (см. [23; теорема 1.10]), что

$$\langle \partial\Phi(0)(w), \partial\Phi_\lambda^1(0)(w) \rangle_{L^2(T,H)} \geq 0, \quad (6.29)$$

$w \in \text{dom } \partial\Phi(0)$, где $\Phi_\lambda^1(0)(w)$ – регуляризация Моро–Иосиды функции $\Phi^1(0)(w)$. Из (6.23), (6.24) следует, что

$$\partial\Phi(0)(w)(t) = ckw(t) - ck\Delta_N w(t), \quad (6.30)$$

$$\partial\Phi_\lambda^1(0)(w)(t) = \partial I_{\mathcal{H}}^\lambda(w)(t), \quad \lambda > 0. \quad (6.31)$$

Воспользовавшись равенством $\partial I_{\mathcal{H}}^\lambda(w)(x) = \partial I_{[a,b]}^\lambda(w(x))$, $w \in H$, (6.1), (6.26), (6.27), (6.30), (6.31), мы получим, что

$$\langle \partial\Phi(0)(w), \partial\Phi_\lambda^1(0)(w) \rangle_{L^2(T,H)} \geq \int_T \int_\Omega ck \langle \nabla w(t)(x), \partial I_{[a,b]}^\lambda(w(t)(x)) \rangle_{\mathbb{R}} dx dt. \quad (6.32)$$

Теперь из леммы 7.2 в [12] и (6.32) вытекает, что имеет место неравенство (6.29). Поэтому равенство (6.28) доказано.

Пусть $(z(0), u(0)) \in \mathcal{X}^*(0)$, $z(0) = (v(0), \tilde{w}(0))$. Из определения решения системы (6.19) следует, что $z(0)(t) \in \text{dom } \partial\varphi(0)$ п.в. на T . Тогда из (6.15) и определения области $D(-\Delta_N)$ следует, что $v(0)(t), \tilde{w}(0)(t) \in H^2$ п.в. на T . Так как $v(0), \tilde{w}(0) \in C(T, H)$, то из компактности вложения $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^2(\Omega))^*$, где $(H^2(\Omega))^*$ – пространство, топологически сопряженное к $H^2(\Omega)$, мы получаем, что функции $v(0), \tilde{w}(0): T \rightarrow H^2(\Omega)$ скалярно измеримы и, следовательно, измеримы. Из (6.15), (6.17), (6.18) вытекает, что

$$\begin{aligned} f(t) = & -(\dot{v}(0)(t) + c(1 - k\alpha)\dot{\tilde{w}}(0)(t)) + ck\alpha\mu v(0)(t) + ck\tilde{w}(0)(t) + c\tilde{f}(0)(z(0)(t)) \\ & - ck\alpha\tilde{b}(0)(z(0))u(0)(t) \in ck\tilde{w}(0)(t) - ck\Delta_N \tilde{w}(0)(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\xi(t) \in \partial I_{\mathcal{H}}(\tilde{w}(0)(t)) \quad \text{п.в. на } T.$$

Из этого равенства и (6.15), (6.22) следует, что

$$f \in L^2(T, H), \quad f(t) \in \partial\varphi_2(0)(\tilde{w}(0)(t)) \quad \text{п.в. на } T.$$

Поэтому $f \in \partial\Phi^2(0)(\tilde{w})$. Воспользовавшись (6.28), получаем, что $f = f_1 + f_2$, $f_1, f_2 \in L^2(T, H)$, $f_1 \in \partial\Phi(0)(\tilde{w}(0))$, $f_2 \in \partial\Phi^1(0)(\tilde{w}(0))$. Тогда из (6.23), (6.24) вытекает, что

$$f_1(t) = ck\tilde{w}(0)(t) - ck\Delta_N \tilde{w}(0)(t) \quad \text{п.в. на } T, \quad (6.34)$$

$$f_2(t) \in \partial I_{\mathcal{H}}(\tilde{w}(0)(t)). \quad (6.35)$$

В соответствии с (6.33)–(6.35) имеем

$$\tilde{w}(0)(t) - \Delta_N \tilde{w}(0)(t) = \frac{1}{ck}(f(t) - f_2(t)). \quad (6.36)$$

Так как $\tilde{w}(0)(t) \in C(T, V)$, то из (6.36) и теоремы 3.4.3. в [24] получаем, что

$$\|\tilde{w}(0)(t)\|_{H^2} \leq C\|f(t) - f_2(t)\|_H, \quad t \in T,$$

при некотором $C > 0$. Из этого неравенства и измеримости функции $\tilde{w}(0): T \rightarrow H^2(\Omega)$ вытекает, что $\tilde{w}(0) \in L^2(T, H^2(\Omega))$. Таким образом, показано, что

$$\tilde{w}(0) \in W^{1,2}(T, H) \cap C(T, V) \cap L^2(T, H^2(\omega)). \quad (6.37)$$

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что $v(0), v(p), \tilde{w}(p), p \in (0, 1]$, удовлетворяют включению (6.37). Поэтому любое решение $(z(p), u(p))$ управляемой системы (6.19) является и решением системы $\tilde{E}q(p), p \in \Lambda$.

Минимизирующий функционал $\tilde{J}(p)(v, w, u)$, определенный равенством (6.8), в переменных $v, \tilde{w}$ примет следующий вид:

$$J(p)(v, \tilde{w}, u) = \int_T \int_\Omega \tilde{g}(p)(v(t)(x), \tilde{w}(t)(x), u(t)(x)) dx dt, \quad (6.38)$$

где $\tilde{g}(p)(v, \tilde{w}, u) = \tilde{g}(p)(v, \tilde{w} + \alpha v, u), p \in \Lambda$.

Из гипотез $H(g)$ следует, что для любых $z \in \mathcal{H}, u \in S_Y(m)$, где $S_Y(m)$ – множество, определенное равенством (6.6), функция $x \rightarrow \tilde{g}(p)(z(x), u(x))$ интегрируема. Поэтому на $\mathcal{H} \times S_Y(m)$ будет определена функция

$$g(p)(z, u) = \int_\Omega \tilde{g}(p)(z(x), u(x)) dx, \quad p \in \Lambda, \quad (6.39)$$

и функция

$$g_U(p)(z, u) = \begin{cases} g(p)(z, u), & \text{если } u \in U(p), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.40)$$

$z \in \mathcal{H}, u \in Y$, где $U(p)$ – множество (6.4). Из гипотез $H(\tilde{g}), 4)$ следует, что функции $g_2(p)(u), p \in \Lambda$, являются липшицевыми на множестве $S_{\mathbb{R}}(m)$ (см. (6.5)) с общей константой Липшица, равной единице, и $g_2(p_n)(u) \rightarrow g_2(p)(u)$ при $p_n \rightarrow p$, где $p_n, p \in \Lambda$. Поэтому из гипотез $H(\tilde{g})$ следует, что функция $g(p)(z, u), z \in \mathcal{H}$, определенная равенством (6.39), удовлетворяет всем гипотезам $H(g)$ из § 3.

Пусть $g_U^{**}(p)(z, u)$ – биполяра функции $u \rightarrow g_U(p)(z, u)$, определенной равенством (6.40). Рассмотрим задачи $\tilde{P}(p)$ и $R\tilde{P}(p), p \in \Lambda$, минимизации функционалов

$$J(p)(z, u) = \int_T g(p)(z(t), u(t)) dt, \quad J^{**}(p)(z, u) = \int_T g_U^{**}(p)(z(t), u(t)) dt$$

на множестве $\mathcal{R}^*(p)$ решений управляемой системы (6.19). Как уже отмечалось выше, для управляемой системы (6.19) и функции $g(p)(z, u)$ выполняются все предположения, при которых имеют место теоремы 5.2 и 5.3. Из этих теорем мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.1. В задачах минимизации функционалов $J(p)(z, u), J^{**}(p)(z, u)$ на решениях $\mathcal{R}^*(p)$ управляемой системы (6.19) имеет место равенство

$$\min_{(z, u) \in \mathcal{R}^*(p)} J^{**}(p)(z, u) = \inf_{(z, u) \in \mathcal{R}^*(p)} J(p)(z, u) = \min(p), \quad (6.41)$$

функция $p \rightarrow \min(p)$ непрерывна и многозначное отображение $p \rightarrow \mathcal{R}_{\text{опт}}^*(p), \mathcal{R}_{\text{опт}}^*(p) = \{(z, u) \in \mathcal{R}^*(p), J^{**}(p)(z, u) = \min(p)\}$, является полунепрерывным сверху по Вьеторису из Λ в $C(T, \mathcal{H}) \times w\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, \mathcal{H}) \times w\text{-}L^2(T, Y)$.

Пусть

$$\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}(p)(z, u) = \begin{cases} \tilde{g}(p)(z, u), & \text{если } u \in U_{\mathbb{R}}(p), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ и $\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(z, u)$ – биполяр функции $u \rightarrow \tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}(p)(z, u)$.

Воспользовавшись аргументами из [10; § 6], получим, что

$$g_U^{**}(p)(z, u) = \int_{\Omega} \tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(z(x), u(x)) dx. \quad (6.42)$$

Тогда из (6.39), (6.42) вытекает, что

$$J(p)(z, u) = \int_T \int_{\Omega} \tilde{g}(p)(z(t)(x), u(t)(x)) dx dt, \quad (6.43)$$

$$J^{**}(p)(z, u) = \int_T \int_{\Omega} \tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(z(t)(x), u(t)(x)) dx dt. \quad (6.44)$$

Так как множество решений $\mathcal{R}^*(p)$ совпадает с множеством $\tilde{\mathcal{R}}(p)$ решений управляемой системы $\tilde{E}q(p)$, то для задачи минимизации функционалов (6.43), (6.44) на решениях управляемой системы $\tilde{E}q(p)$ справедливы утверждения теоремы 6.1. Переходя от системы $\tilde{E}q(p)$ к системе $Eq(p)$ с переменными (v, w) и от функционалов (6.43), (6.44) к функционалам (6.8), (6.9) и используя теорему 6.1, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.2. *Задача минимизации функционала $\tilde{J}^{**}(p)(v, w, u)$ на решениях управляемой системы $Eq(p)$ имеет решение и*

$$\min_{(v, w, u) \in \mathcal{R}(p)} \tilde{J}^{**}(p)(v, w, u) = \inf_{(v, w, u) \in \mathcal{R}(p)} \tilde{J}(p)(v, w, u) = \min(p),$$

функция $p \rightarrow \min(p)$ непрерывна, а многозначное отображение $p \rightarrow \mathcal{R}_{\text{опт}}(p)$, $\mathcal{R}_{\text{опт}}(p) = \{(v, w, u) \in \mathcal{R}(p), \tilde{J}^{**}(p)(v, w, u) = \min(p)\}$, обладает теми же свойствами, что и отображение $\mathcal{R}_{\text{опт}}^*(p)$ в теореме 6.1.

Согласно гипотезам $H(\tilde{g})$ имеем

$$\tilde{g}_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(v, w, u) = \tilde{g}_1(p)(v, w) + g_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(u), \quad p \in \Lambda,$$

где

$$g_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } |u| < 1, \\ g_2(p)(u), & \text{если } 1 \leq |u| \leq m(p), \\ +\infty, & \text{если } m(p) < |u|. \end{cases}$$

Функция $u \rightarrow g_{U_{\mathbb{R}}}^{**}(p)(u)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $(-m(p), m(p))$, $p \in (0, 1]$, с производной, по модулю не превосходящей единицы.

Согласно теореме 6.2 негладкую задачу минимизации функционала $\tilde{J}(0)(v, w, u)$ на решениях управляемой системы $Eq(0)$ можно аппроксимировать с любой степенью точности решениями гладких задач минимизации функционалов $\tilde{J}(p)(v, w, u)$ на решениях управляемых систем $Eq(p)$ при $p \rightarrow 0$.

В заключение отметим, что аппроксимация задачи минимизации функционала

$$J(v, w, u) = \frac{1}{2} \int_T |v - v_*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_T |w - w_*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_T |u|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

$v_*, w_* \in L^2(\Omega)$, на решениях управляемой системы $Eq(0)$ при $\mu = 0$, $b(0)(v, w) = 1$, $f(0)(v, w) = v + w$ и без ограничений на управление исследовалась в [20]. В этой работе было показано, что решения u, w системы $Eq(0)$ являются элементами пространства $W^{1,2}(T, H) \cap L^\infty(T, V) \cap L^2(T, H^2(\Omega))$.

Список литературы

- [1] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
- [2] Z. Artstein, “A variational convergence that yields chattering systems”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **6**, suppl. (1989), 49–71.
- [3] S. Migórski, “Sensitivity analysis of distributed-parameter optimal control problems for nonlinear parabolic equations”, *J. Optim. Theory Appl.*, **87**:3 (1995), 595–613.
- [4] S. Migórski, “Variational stability analysis of optimal control problems for systems governed by nonlinear second order evolution equations”, *J. Math. Systems, Estimation, Control*, **6**:4 (1996), 469–472.
- [5] Sh. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, v. II: *Applications*, Math. Appl., **500**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [6] M. Majewski, “Stability analysis of an optimal control problem for a hyperbolic equation”, *J. Optim. Theory Appl.*, **141**:1 (2009), 127–146.
- [7] А. А. Толстоногов, “Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 177–206; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “Bogolyubov’s theorem under constraints generated by a controlled second-order evolution system”, *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 1031–1060.
- [8] C. J. Himmelberg, “Measurable relations”, *Fund. Math.*, **87** (1975), 53–72.
- [9] T. M. Flett, “Extensions of Lipschitz functions”, *J. London Math. Soc.* (2), **7**:4 (1974), 604–608.
- [10] А. А. Толстоногов, “Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 135–160; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “Relaxation in non-convex optimal control problems described by first-order evolution equations”, *Sb. Math.*, **190**:11 (1999), 1689–1714.
- [11] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Appl. Math. Ser., Pitman, Boston, MA, 1984.
- [12] А. А. Толстоногов, “Сходимость по Моско интегральных функционалов и ее приложения”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 119–146; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “Mosco convergence of integral functionals and its applications”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 429–454.
- [13] N. Kenmochi, “Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications”, *Bull. Fac. Educ. Chiba Univ.*, **30** (1981), 1–87.
- [14] А. А. Толстоногов, “Свойства множества пар “траектория-управление” управляемой системы с субдифференциальными операторами”, *Проблемы матем. анализа*, 2009, № 42, 95–127.

- [15] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1973.
- [16] A. A. Tolstonogov, D. A. Tolstonogov, “ L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems”, *Set-Valued Anal.*, **4**:2 (1996), 173–203.
- [17] А. А. Толстоногов, “Управляемые системы субдифференциального типа, зависящие от параметра”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 149–188; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “Control systems of subdifferential type depending on a parameter”, *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 985–1022.
- [18] А. А. Толстоногов, “К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения”, *Матем. заметки*, **48**:5 (1990), 109–120; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “Scorza–Dragoni’s theorem for multi-valued mappings with variable domain of definition”, *Math. Notes*, **48**:5 (1990), 1151–1158.
- [19] N. Yamazaki, M. Takahashi, M. Kubo, “Global attractors of phase transition models with hysteresis and diffusion effects”, *Free boundary problems: theory and applications*, v. II (Chiba, Japan, 1999), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **14**, Gakkōtoshō, Tokyo, 2000, 460–471.
- [20] К.-Н. Hoffmann, N. Kenmochi, M. Kubo, N. Yamazaki, “Optimal control problems for models of phase-field type with hysteresis of play operator”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **17**:1 (2007), 305–336.
- [21] A. Visintin, *Differential models of hysteresis*, Appl. Math. Sci., **111**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [22] П.-Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, М., 1975; пер. с фр.: P.-J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
- [23] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Res. Notes in Math., **100**, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1984.
- [24] V. Barbu, *Partial differential equations and boundary value problems*, Math. Appl., **441**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

А. А. Толстоногов (A. A. Tolstonogov)

Институт динамики систем и теории управления

СО РАН, г. Иркутск

E-mail: aatol@icc.ru

Поступила в редакцию

01.03.2010