Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева, Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 43–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:22:33

УДК 517.54

В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева

Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса

Получены аналоги формулы Берксона–Порты инфинитезимальной отображающей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя для случая, когда кроме точки Данжуа–Вольфа имеются другие неподвижные точки. С каждой однопараметрической полугруппой ассоциируется так называемая функция Кёнигса, которая является общим решением для всех элементов однопараметрической полугруппы некоторого функционального уравнения (Шрёдера – в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа и Абеля – в случае граничной точки Данжуа–Вольфа). Дано параметрическое представление классов функций Кёнигса как с учетом точки Данжуа–Вольфа, так и с учетом других неподвижных точек отображений однопараметрической полугруппы.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: однопараметрическая полугруппа, инфинитезимальная образующая, неподвижные точки, дробные итерации, функция Кёнигса.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{F}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f , принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{F}$ можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Роль единицы в этой полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{F}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{F}$. Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t \geq 0}$ функций из $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям:

- (i) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geq 0$;
- (ii) $f^t(z) \rightarrow z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \rightarrow 0$.

Заметим, что при целых неотрицательных значениях t мы получаем обычные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, функции $f = f^1$. Поэтому элементы семейства $\{f^t\}_{t \geq 0}$ называют также дробными итерациями функции f . Исследование проблемы дробных итераций имеет богатую историю и восходит к работам Шрёдера [1] и Кёнигса [2] конца 19-го века. Отметим также, что однопараметрические полугруппы аналитических функций возникают во многих вопросах анализа и его приложений. Часто они описывают динамику того или иного процесса.

Синтез алгебраических и топологических свойств приводит к тому, что семейство $\{f^t\}_{t \geq 0}$ является дифференцируемым по t (см. [3]). Более того, оно даже бесконечно дифференцируемо (см., например, [4]). Производная

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^t(z) - z}{t} = v(z)$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и вполне характеризует однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z))$$

и начального условия $f^t(z) \Big|_{t=0} = z$. Функцию v называют *инфинитезимальной образующей* однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$. В случае, когда функции f^t однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ оставляют неподвижным начало координат и сохраняют положительное направление вещественной оси в нуле, вид инфинитезимальной образующей v был получен в знаменитой работе Лёвнера [5]. В общем случае функция $f \in \mathfrak{P}$ может не иметь в круге $\mathbb{D}$ неподвижных точек. Однако классический результат, известный как теорема Данжуа–Вольфа (см., например, [6]), утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка q из замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга $\mathbb{D}$ такая, что $f^n(z) \rightarrow q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \rightarrow \infty$. При этом если $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$, т.е. q является неподвижной точкой отображения $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Если q является граничной точкой, т.е. лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \rightarrow q} f(z), \quad f'(q) = \lim_{z \rightarrow q} f'(z) = \lim_{z \rightarrow q} \frac{f(z) - q}{z - q}.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leq 1$, т.е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой. В литературе q называют точкой Данжуа–Вольфа функции f , и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t , $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа–Вольфа q . С учетом этого записывается (см. [3]) вид инфинитезимальной образующей:

$$v(z) = (q - z)(1 - \bar{q}z)p(z), \tag{1}$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Обратно, всякая функция v вида (1) является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа q . Равенство (1) известно также как формула Берксона–Порты и лежит в основе многих исследований.

Целью настоящей работы является получение аналога формулы (1) с учетом других неподвижных точек функций однопараметрической полугруппы. Другое направление наших исследований связано с асимптотическим поведением однопараметрических полугрупп и их описанием посредством функциональных уравнений.

Пусть $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя и имеет точку Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$. Если производная в этой точке $f'(q) = \gamma$ не обращается в нуль, то (см., например, [6; гл. VI]) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z) - q}{\gamma^n} = F(z),$$

который представляет собой голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям $F(q) = 0, F'(q) = 1$. Это и есть функция Кёнигса, которая также является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F(f(z)) = \gamma F(z).$$

В вероятностных приложениях (см., например, [7]) функция Кёнигса как предел нормированной последовательности итераций связана с предельными теоремами и распределениями.

Если $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$, то в силу однолистности функций $f^t, t \geq 0$ (это следует из единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, воспроизводящего однопараметрическую полугруппу по инфинитезимальной образующей), производная $(f^t)'(q) = \gamma^t$ в нуль не обращается. Поэтому можно определить функцию Кёнигса F , которая будет общей для всех $f^t, t > 0$. При этом F будет однолистной и

$$F(f^t(z)) = \gamma^t F(z),$$

т.е. функцию Кёнигса F можно использовать для получения итераций функции f посредством функционального уравнения Шрёдера.

В случае граничной точки Данжуа–Вольфа, т.е. $q \in \mathbb{T}$, нет полного аналога определения функции Кёнигса как предела некоторой нормированной последовательности итераций. Однако для однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с граничной точкой Данжуа–Вольфа естественно возникает функция F , которая удовлетворяет уравнению Абеля

$$F(f^t(z)) = F(z) + t,$$

где $t \geq 0$, и также может быть использована для получения дробных итераций.

В настоящей работе получено параметрическое представление классов функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}$ с учетом наличия неподвижных точек.

Отметим также, что связь между наличием неподвижных точек у однопараметрической полугруппы и поведением функции Кёнигса изучалась в работе [8]. Кроме того, аналог формулы Берксона–Порты в случае граничной точки был получен в [9]. Результаты, приведенные ниже, позволяют конструктивно получать функцию Кёнигса и однопараметрические полугруппы с заданными неподвижными точками.

В § 2 приводится терминология и формулируются основные результаты, касающиеся случая, когда наряду с точкой Данжуа–Вольфа имеется еще одна неподвижная точка у элементов однопараметрической полугруппы. Некоторым вспомогательным результатам, которые понадобятся для доказательства

основных теорем и позволят расширить их формулировки на случай нескольких неподвижных точек, посвящен § 3. В § 4 содержится доказательство теоремы 1 – аналога формулы Берксона–Порты в случае одной дополнительной неподвижной точки, кроме точки Данжуа–Вольфа. Описанию классов функций Кёнигса однопараметрических полугрупп с внутренней и граничной точками Данжуа–Вольфа посвящены § 5 и § 6 соответственно. При этом изучен вопрос, как меняется вид функции Кёнигса, если кроме точки Данжуа–Вольфа однопараметрическая полугруппа имеет еще одну неподвижную точку. В § 7 содержится обобщение формулы Берксона–Порты для нескольких неподвижных точек. Здесь также получены параметрические представления классов функций Кёнигса, позволяющих получать однопараметрические полугруппы с заданным множеством неподвижных точек.

§ 2. Терминология и формулировка основных результатов

Обозначим через $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$, совокупность функций f из $\mathfrak{P}$, для которых q является точкой Данжуа–Вольфа. Очевидно, что всякая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$, у которой f^t , $t > 0$, не являются дробно-линейными преобразованиями единичного круга на себя, представляет собой однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}[q]$ при некотором $q \in \mathbb{D}$. Таким образом, формула (1) определяет вид инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{P}[q]$.

Если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от тождественного преобразования, то в силу леммы Шварца внутри единичного круга $\mathbb{D}$ других неподвижных точек, кроме точки Данжуа–Вольфа, функция f иметь не может. С другой стороны, у нее могут быть неподвижные (в смысле углового предела) точки на границе $\mathbb{T}$ единичного круга. При этом если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то для всех f^t , $t > 0$, множество неподвижных точек должно быть одним и тем же (см., например, [8]).

Для $q \in \mathbb{D}$ и $a \in \mathbb{T}$, $a \neq q$, через $\mathfrak{P}[q; a]$ обозначим подмножество функций f из $\mathfrak{P}$, для которых q является точкой Данжуа–Вольфа и в точке a существуют угловые пределы

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = a, \quad \lim_{z \rightarrow a} f'(z) = f'(a) < \infty.$$

Другими словами, $\mathfrak{P}[q; a]$ является подполугруппой полугруппы $\mathfrak{P}[q]$, функции f которой оставляют неподвижной точку a и имеют в ней конечные угловые производные.

Следующий результат можно рассматривать как аналог формулы Берксона–Порты для полугруппы $\mathfrak{P}[q; a]$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция v являлась инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$v(z) = \alpha(q - z)(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z)h(\bar{a}z), \quad (2)$$

где $\alpha > 0$, а функция h определяется формулой

$$h(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \quad (3)$$

с некоторой вероятностной (регулярной, борелевской с единичной общей массой) мерой μ на $\mathbb{T}$.

Как отмечалось выше, с каждой однопараметрической полугруппой $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$, однозначно связана функция Кёнигса F . Следующая теорема дает интегральное представление класса функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}$ с внутренней точкой Данжуа–Вольфа.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде

$$F(z) = (z - q) \left(\frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2} \right)^{\sigma^2} \exp \left\{ (1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right\} \quad (4)$$

с некоторым $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. При этом под степенной функцией и логарифмом понимаются непрерывные ветви, которые принимают значения 1 и 0 соответственно при $z = q$.

Ответ на вопрос, как меняется вид функции Кёнигса, если кроме точки Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$ для однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ неподвижной является также точка $a \in \mathbb{T}$, в которой функции f^t , $t > 0$, имеют конечные угловые производные, дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде

$$F(z) = (z - q) \left(\frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2} \right)^{\sigma^2} \left(\frac{1 - \bar{a}q}{1 - \bar{a}z} \right)^{\lambda_1(1+\sigma^2)} \times \exp \left\{ \lambda_2(1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right\} \quad (5)$$

с некоторыми $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. При этом под степенными функциями и логарифмом понимаются непрерывные ветви, которые принимают значения 1 и 0 соответственно при $z = q$.

Пусть теперь $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$. Тогда из формулы (1) видно, что инфинитезимальная образующая v этой однопараметрической полугруппы не обращается в нуль в единичном круге. Поэтому аналитическая в $\mathbb{D}$ функция F определяется однозначно с точностью до аддитивной константы посредством равенства $F'(z) = 1/v(z)$. Нормируем ее условием $F(0) = 0$ и будем называть функцией

Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$. Эта функция связана с однопараметрической полугруппой также равенством

$$F(f^t(z)) = F(z) + t,$$

где $t \geq 0$, которое относительно F является функциональным уравнением Абе-ля. Более подробно свойства функции Кёнигса F обсуждаются в § 6. Следующая теорема дает параметрическое представление класса функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам с граничной точкой Данжуа–Вольфа.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$F(z) = i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_1 \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\mu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}} \quad (6)$$

с некоторыми $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$. При этом под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Наличие дополнительной неподвижной точки, в которой функции однопараметрической полугруппы имеют конечные угловые производные, уточняет формулу (6) следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$F(z) = i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_1 \ln \frac{1 - \bar{a}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_2 \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} + \lambda_3 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\mu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}} \quad (7)$$

с некоторыми $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$. При этом под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$.

§ 3. Некоторые предварительные сведения и результаты

Основные сведения и результаты, связанные с гиперболической геометрией в единичном круге и угловой производной, которые понадобятся нам в дальнейшем, можно найти, например, в монографиях [10] и [11].

В связи с описанием инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{P}[q; a]$ естественно возникает класс $\mathcal{Q}$ функций h , голоморфных в единичном круге и допускающих представление в виде (3) с некоторой вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. Приведем два эквивалентных определения класса $\mathcal{Q}$ и изучим некоторые свойства функций этого класса.

ЛЕММА 1. Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция h принадлежала классу $\mathcal{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде

$$h(z) = \frac{1 - \varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}, \quad (8)$$

где φ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in \mathcal{Q}$ и имеет место представление (3) с вероятностной мерой на $\mathbb{T}$. Замечая, что

$$\frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} + 1 \right) - \frac{1}{z} \left(\frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} - 1 \right) \right],$$

приходим к равенству

$$h(z) = \frac{1}{2} \left[(p(z) + 1) - \frac{1}{z} (p(z) - 1) \right], \quad (9)$$

где

$$p(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa). \quad (10)$$

Поскольку p голоморфна в $\mathbb{D}$, имеет положительную вещественную часть и $p(0) = 1$, то функция

$$\psi(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

удовлетворяет условиям леммы Шварца, т.е. $|\psi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$ и $\psi(0) = 0$. Но тогда $\varphi(z) = \psi(z)/z$ также является голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией и удовлетворяет условию $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Выражая теперь функцию p через φ и подставляя полученное выражение в (9), приходим к равенству (8).

Обратно, пусть h имеет представление (8) с некоторой голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией φ , удовлетворяющей условию $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Полагая

$$p(z) = \frac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)},$$

получаем голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию с положительной вещественной частью и удовлетворяющую условию $p(0) = 1$. По теореме Рисса–Герглотца найдется такая вероятностная мера μ на $\mathbb{T}$, которая связана с функцией p равенством (10). Но тогда

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1 - \varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} + 1 \right) - \frac{1}{z} \left(\frac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(p(z) + 1) - \frac{1}{z} (p(z) - 1) \right] = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из представления (8) следует, что либо функция h класса $\mathcal{Q}$ тождественно обращается в нуль, либо $h(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

ЛЕММА 2. Пусть h – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция и $h(z) \neq 0$. Тогда h принадлежит классу $\mathcal{Q}$ в том и только том случае, если имеет место представление

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{2}(1-z) \left[\frac{1+z}{1-z} + g(z) \right], \quad (11)$$

где g – голоморфная с неотрицательной вещественной частью в $\mathbb{D}$ функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in \mathcal{Q}$ и $h(z) \neq 0$. В силу леммы 1 функция h допускает представление (8) с некоторой голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией φ , удовлетворяющей условиям $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$ и $\varphi(z) \neq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(z)} &= \frac{1 - z\varphi(z)}{1 - \varphi(z)} = \frac{1}{1 - \varphi(z)} - z \frac{\varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} + 1 \right) - z \left(\frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2}(1-z) \left[\frac{1+z}{1-z} + g(z) \right], \end{aligned}$$

где $g(z) = (1 + \varphi(z))/(1 - \varphi(z))$.

Обратно, пусть имеет место представление (11), тогда функция $\varphi(z) = (g(z) - 1)/(g(z) + 1)$ будет голоморфной в $\mathbb{D}$ и $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$. При этом $g(z) = (1 + \varphi(z))/(1 - \varphi(z))$ и

$$h(z) = \frac{2}{(1-z) \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \right)} = \frac{1 - \varphi(z)}{1 - z\varphi(z)},$$

т.е. h принадлежит классу $\mathcal{Q}$ в силу леммы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции h класса $\mathcal{Q}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\{(1-z)h(z)\} \geq 0$$

при всех $z \in \mathbb{D}$.

ЛЕММА 3. Пусть z_0 – фиксированная точка единичного круга $\mathbb{D}$. Тогда множество

$$K_{z_0} = \{w = h(z_0) : h \in \mathcal{Q}\}$$

представляет собой замкнутый круг

$$\left\{ w : \left| w - \frac{1 - \bar{z}_0}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{|1 - z_0|}{1 - |z_0|^2} \right\}.$$

При этом граничную точку $\zeta \in \partial K_{z_0}$ вносит единственная функция класса $\mathcal{Q}$, определяемая равенствами

$$h(z) = \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z}, \quad \varkappa = \frac{1 - \zeta}{1 - \zeta z_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из формулы (3), определяющей класс $\mathcal{Q}$, следует, что множество K_{z_0} представляет собой замкнутую выпуклую оболочку кривой Γ_{z_0} , которая является образом единичной окружности $\mathbb{T}$ при дробно-линейном преобразовании

$$L(\zeta) = \frac{1 - \zeta}{1 - z_0 \zeta}.$$

Из кругового свойства дробно-линейных отображений следует, что Γ_{z_0} – окружность. Ее центр w_0 в силу принципа симметрии является образом точки $\bar{z}_0$, которая симметрична относительно единичной окружности $\mathbb{T}$ полюсу $1/z_0$ дробно-линейного преобразования L . Следовательно,

$$w_0 = L(\bar{z}_0) = \frac{1 - \bar{z}_0}{1 - |z_0|^2}.$$

Замечая также, что Γ_{z_0} проходит через начало координат, делаем вывод, что радиус этой окружности равен $|w_0|$.

Граничную точку ζ круга K_{z_0} вносит функция h , которой в представлении (3) соответствует атомарная мера μ , сосредоточенная в точке $\varkappa \in \mathbb{T}$, определяемой из равенства $\zeta = L(\varkappa)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции h из класса $\mathcal{Q}$ выполняется неравенство

$$|h(z)| \leq \frac{2|1 - z|}{1 - |z|^2} \quad (12)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$.

§ 4. Аналог формулы Берксона–Порты

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Пусть $t \mapsto f^t$ – нетривиальная ($f^t(z) \neq z$ при $t > 0$) однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q; a]$ и

$$v(z) = \left. \frac{\partial}{\partial t} f^t(z) \right|_{t=0}$$

– ее инфинитезимальная образующая. Нам нужно доказать, что v можно представить в виде (2) с некоторой функцией h из класса $\mathcal{Q}$.

Допустим вначале, что $q = 0$ и $a = 1$. Для любой функции $f \in \mathfrak{P}[0; 1]$ выполняется неравенство $f'(1) \geq 1$ и знак равенства достигается лишь в случае $f(z) \equiv z$ (см., например, [5] или [10]). Поэтому из условия $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ и свойств угловой производной следует, что функция

$$\beta(t) = (f^t)'(1)$$

является возрастающей и удовлетворяет условиям

$$\beta(t + s) = \beta(t)\beta(s), \quad \beta(0) = 1.$$

Следовательно, $\beta(t) = e^{\lambda t}$, где $\lambda = \ln(f^1)'(1) > 0$.

Рассмотрим семейство дробно-линейных преобразований

$$U_t(z) = \frac{z + u(t)}{1 + u(t)z}, \quad u(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1},$$

где $t > 0$, которые отображают единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и оставляют неподвижными точки $z = \pm 1$. Полагая

$$g_t(z) = f^t \circ U_t(z),$$

получаем семейство $\{g_t\}_{t \geq 0}$ отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя, которое дифференцируемо по t , и $g_0(z) \equiv z$. Кроме того, при каждом $t > 0$ функция g_t оставляет неподвижной точку $z = 1$ и в этой точке имеет угловую производную $g'_t(1) = 1$. В силу теоремы Жюлиа–Каратеодори образ $g_t(z)$ точки $z \in \mathbb{D}$ попадает внутрь орицикла, на границе которого лежит z , т.е. внутрь круга с центром в точке

$$\xi = \frac{1 - |z|^2}{2(1 - \operatorname{Re} z)}$$

и радиуса

$$r = \frac{|1 - z|^2}{2(1 - \operatorname{Re} z)}.$$

Отмеченное обстоятельство означает, что угол между векторами $\xi - z$ и $g_t(z) - z$ не должен превышать $\pi/2$. Замечая также, что

$$\begin{aligned} \arg \left\{ \frac{1 - |z|^2}{2(1 - \operatorname{Re} z)} - z \right\} &= \arg \{1 - |z|^2 - 2z(1 - \operatorname{Re} z)\} \\ &= \arg \{1 - z\bar{z} - z((1 - z) + (1 - \bar{z}))\} = \arg \{(1 - z)^2\}, \end{aligned}$$

приходим к условию

$$\operatorname{Re} \frac{g_t(z) - z}{(1 - z)^2} > 0$$

при $z \in \mathbb{D}$. Отсюда видно, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_t(z) - z}{t} = (1 - z)^2 p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} f^t(U_t(z)) \right|_{t=0} + (f^t)'(U_t(z)) \left. \frac{\partial}{\partial t} U_t(z) \right|_{t=0} \\ &= v(z) + \frac{\lambda}{2}(1 - z^2), \end{aligned}$$

где v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

Таким образом, мы приходим к равенству

$$v(z) = (1 - z) \left[(1 - z)p(z) - \frac{\lambda}{2}(1 + z) \right].$$

Поскольку мы предполагали, что $q = 0$, т.е. точка $z = 0$ является неподвижной для функций f^t , $t > 0$, то $v(0) = 0$. Но тогда $p(0) = \lambda/2$ и функция

$$p_1(z) = \frac{2}{\lambda} p(z)$$

имеет в $\mathbb{D}$ положительную вещественную часть и нормирована условием $p_1(0) = 1$. По теореме Рисса–Герглота найдется такая вероятностная мера μ на $\mathbb{T}$, что

$$p_1(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \kappa z}{1 - \kappa z} d\mu(\kappa).$$

Это позволяет представить инфинитезимальную образующую v в виде

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{\lambda}{2}(1-z) \left[(1-z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\kappa z}{1-\kappa z} d\mu(\kappa) - (1+z) \right] \\ &= -\lambda z(1-z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1-\kappa}{1-\kappa z} d\mu(\kappa). \end{aligned}$$

Полученное представление инфинитезимальной образующей v совпадает с приведенным в формулировке теоремы в случае, когда $q = 0$ и $a = 1$.

Допустим теперь, что $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{T}$, т.е. точка Данжуа–Вольфа q является внутренней и все функции f^t , $t > 0$, оставляют также неподвижной точку $a \in \mathbb{T}$, в которой имеют конечные угловые производные. Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{1 - \bar{q}a}{a - q} \frac{z - q}{1 - \bar{q}z},$$

которое отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет условиям $L(q) = 0$, $L(a) = 1$. Для каждого $t \geq 0$ определим

$$\tilde{f}^t(\zeta) = L \circ f^t \circ L^{-1}(\zeta).$$

Очевидно, что $t \mapsto \tilde{f}^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[0; 1]$. Поэтому по доказанному ее инфинитезимальная образующая

$$\tilde{v}(\zeta) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}^t(\zeta) \right|_{t=0}$$

допускает представление в виде

$$\tilde{v}(\zeta) = -\alpha \zeta(1 - \zeta) \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa \zeta} d\mu(\kappa),$$

где $\alpha > 0$, а μ – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. С другой стороны,

$$\tilde{v}(L(z)) = \left. \frac{\partial}{\partial t} L(f^t(z)) \right|_{t=0} = L'(z)v(z),$$

где v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$. Следовательно,

$$v(z) = -\alpha \frac{L(z)(1 - L(z))}{L'(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa L(z)} d\mu(\kappa).$$

Замечая, что

$$\frac{L(z)(1 - L(z))}{L'(z)} = \frac{(z - q)(1 - \bar{a}z)}{1 - \bar{a}q}, \quad \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa L(z)} = \frac{1 - \bar{q}z}{1 - \bar{a}q} \frac{1 - \eta}{1 - \eta \bar{a}z},$$

где

$$\eta = \frac{(1 - a\bar{q})\kappa + \bar{q}(a - q)}{(1 - \bar{a}q) + q(\bar{a} - \bar{q})\kappa}$$

пробегаёт единичную окружность $\mathbb{T}$ вместе с $\varkappa$, приходим к равенству

$$v(z) = \frac{\alpha}{|1 - \bar{a}q|^2} (q - z)(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \eta}{1 - \eta \bar{a}z} d\nu(\eta),$$

в котором ν – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. Таким образом, в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q; a]$ имеет инфинитезимальную образующую v , вид которой определяется формулами (2), (3).

Приступая к рассмотрению случая граничной точки Данжуа–Вольфа, допустим вначале, что $t \mapsto f^t$ – нетривиальная однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[-1; 1]$, т.е. функции f^t , $t > 0$, имеют точку Данжуа–Вольфа $q = -1$ и оставляют неподвижной точку $a = 1$, в которой конечны угловые производные $(f^t)'(1)$. В силу формулы Берксона–Порты (1) инфинитезимальная образующая v этой однопараметрической полугруппы допускает представление в виде

$$v(z) = -(1 + z)^2 p_1(z),$$

где p_1 – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с положительной вещественной частью. Однако эта формула не учитывает того, что функции f^t имеют кроме $q = -1$ также неподвижную точку $a = 1$.

Снова, как и в случае $q = 0, a = 1$, выполняется равенство $(f^t)'(1) = e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, с некоторым $\lambda > 0$. Поэтому, определяя семейство функций $g_t(z) = f^t \circ U_t(z)$, $t \geq 0$, получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) \right|_{t=0} = (1 - z)^2 p_2(z),$$

где p_2 также является голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией с положительной вещественной частью. Вычисление этой производной другим способом приводит к равенству

$$(1 - z)^2 p_2(z) = v(z) + \frac{\lambda}{2}(1 - z^2),$$

которое с учетом вида инфинитезимальной образующей v можно переписать следующим образом:

$$(1 - z)^2 p_2(z) = \frac{\lambda}{2}(1 - z^2) - (1 + z)^2 p_1(z).$$

Полагая в последнем равенстве $z = 0$, получаем

$$p_1(0) + p_2(0) = \frac{\lambda}{2}.$$

Это означает, что к функции

$$p(z) = \frac{2}{\lambda}(p_1(z) + p_2(z))$$

применима теорема Рисса–Герглотца, согласно которой

$$p(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa),$$

где μ – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. Далее, используя полученные выше равенства, выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} v(z) &= (1-z) \left[(1-z)p_2(z) - \frac{\lambda}{2}(1+z) \right] \\ &= (1-z) \left[(1-z)(p_2(z) + p_1(z)) - \frac{\lambda}{2}(1+z) \right] - (1-z)^2 p_1(z) \\ &= \frac{\lambda}{2}(1-z) [(1-z)p(z) - (1+z)] + \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 v(z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left[1 - \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 \right] v(z) = -\lambda z(1-z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1-\kappa}{1-\kappa z} d\mu(\kappa),$$

и после очевидных преобразований получаем

$$v(z) = -\frac{\lambda}{4}(1+z)^2(1-z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1-\kappa}{1-\kappa z} d\mu(\kappa).$$

Таким образом, в случае $q = -1$ и $a = 1$ мы снова получили вид инфинитезимальной образующей, описанный формулами (2), (3).

Остается рассмотреть случай, когда однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ имеет точку Данжуа–Вольфа q и неподвижную точку a , произвольно расположенные на единичной окружности $\mathbb{T}$. Используя дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{q - (2 - a\bar{q})z}{(q - 2a) + a\bar{q}z},$$

которое отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет условиям $L(q) = -1$, $L(a) = 1$, определим семейство функций:

$$\tilde{f}^t(\zeta) = L \circ f^t \circ L^{-1}(\zeta),$$

где $t \geq 0$. Легко видеть, что $t \mapsto \tilde{f}^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[-1; 1]$. По доказанному инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto \tilde{f}^t$ имеет вид

$$\tilde{v}(\zeta) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}^t(\zeta) \Big|_{t=0} = -\alpha(1+\zeta)^2(1-\zeta) \int_{\mathbb{T}} \frac{1-\kappa}{1-\kappa\zeta} d\mu(\kappa),$$

где $\alpha > 0$, а μ – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. Но тогда инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ будет определяться равенством

$$v(z) = -\alpha \frac{(1+L(z))^2(1-L(z))}{L'(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-\kappa}{1-\kappa L(z)} d\mu(\kappa).$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{(1+L(z))^2(1-L(z))}{L'(z)} &= \frac{4\alpha(q-z)(1-\bar{q}z)(1-\bar{a}z)}{(q-2a) + a\bar{q}z}, \\ \frac{1-\kappa}{1-\kappa L(z)} &= -\frac{(q-2a) + a\bar{q}z}{a|q-a|^2} \frac{1-\eta}{1-\eta\bar{a}z}, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{a\bar{q} + (2 - a\bar{q})\varkappa}{\bar{a}q\varkappa + (2 - \bar{a}q)}$$

пробегают единичную окружность $\mathbb{T}$ вместе с $\varkappa$, приходим к равенству

$$v(z) = \frac{4\alpha}{|q - a|^2} (q - z)(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z) \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \eta}{1 - \eta\bar{a}z} d\nu(\eta),$$

где ν – вероятностная мера на $\mathbb{T}$.

В результате мы установили, что при любых $q \in \mathbb{D}$ и $a \in \mathbb{T}$ вид инфинитезимальной образующей v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q; a]$ определяется формулами (2), (3).

Достаточность. Допустим теперь, что функция v имеет вид, определяемый формулами (2), (3), т.е.

$$v(z) = \alpha(q - z)(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z)h(\bar{a}z),$$

где $\alpha > 0$, $q \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{T}$ и h – функция класса $\mathcal{Q}$. В силу следствия 1 выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\{(1 - \bar{a}z)h(\bar{a}z)\} \geq 0$$

при $z \in \mathbb{D}$. Это означает, что v можно рассматривать как инфинитезимальную образующую некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. Остается показать, что функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижной точку a и имеют в ней конечные угловые производные.

Покажем вначале, что сама инфинитезимальная образующая v имеет конечную угловую производную $v'(a)$ в точке a . Для $M > 1$ через

$$\Delta_M(a) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|a^2 - z^2|}{1 - |z|^2} < M \right\}$$

обозначим круговую луночку с вершинами в точках a и $-a$. С точки зрения гиперболической геометрии в круге $\mathbb{D}$, которая обычно определяется элементом длины

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

граница $\partial\Delta_M(a)$ этой луночки представляет собой множество точек, равноудаленных от диаметра круга $\mathbb{D}$ с концевыми точками a и $-a$. Через

$$\Delta_M^+(a) = \{z \in \Delta_M(a) : \operatorname{Re}\{\bar{a}z\} > 0\}$$

будем обозначать половину луночки $\Delta_M(a)$, которая примыкает к точке a . Используя неравенство (12) для функций класса $\mathcal{Q}$, получаем

$$\left| \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa\bar{a}z} \right| \leq \frac{2|1 - \bar{a}z|}{1 - |z|^2} = \frac{2}{|1 + \bar{a}z|} \frac{|a^2 - z^2|}{1 - |z|^2} \leq 2M$$

при всех $\varkappa \in \mathbb{T}$ и $z \in \Delta_M^+(a)$. Поэтому в интеграле, определяющем функцию h , можно осуществить предельный переход при $z \rightarrow a$, $z \in \Delta_M^+(a)$, в результате чего получим

$$\lim_{z \rightarrow a} h(\bar{a}z) = \lim_{z \rightarrow a} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa\bar{a}z} d\mu(\varkappa) = \mu(\mathbb{T} \setminus \{1\}).$$

Отсюда следует, что при $z \rightarrow a$, $z \in \Delta_M^+(a)$, имеют место предельные соотношения

$$\lim_{z \rightarrow a} v(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{v(z)}{z - a} = \alpha |1 - \bar{q}a|^2 \mu(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = v'(a).$$

Таким образом, угловая производная $v'(a)$ существует и конечна. Кроме того, $v'(a) > 0$, если только мера μ не сосредоточена в одной точке $\varkappa = 1$. Последний случай соответствует тому, что $v(z) \equiv 0$ и $f^t(z) \equiv z$ при всех $t \geq 0$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $v'(a) > 0$.

Пусть $R_a = \{z = ra : 1/2 < r < 1\}$ – половина радиуса с концевой точкой a . Фиксируем $M > 1$ и выберем $\delta > 0$ так, чтобы оно было меньше гиперболического расстояния от R_a до границы $\partial\Delta_M^+(a)$ области $\Delta_M^+(a)$. Для каждого $z \in R_a$ через

$$\tau_z = \inf\{t > 0 : f^t(z) \in \partial\Delta_M^+(a)\}$$

обозначим момент первого выхода точки $f^t(z)$ на границу области $\Delta_M^+(a)$. Через γ_z обозначим кривую с параметризацией $\zeta(t) = f^t(z)$, $0 \leq t < \tau_z$. Используя неравенство (12), для $z \in \Delta_M^+(a)$ получаем

$$\frac{|v(z)|}{1 - |z|^2} \leq \frac{4\alpha|a - z| |h(\bar{a}z)|}{1 - |z|^2} \leq \frac{8\alpha|a - z| |1 - \bar{a}z|}{(1 - |z|^2)^2} \leq 8\alpha \frac{|a^2 - z^2|^2}{(1 - |z|^2)^2} \leq 8\alpha M^2.$$

Но тогда гиперболическая длина $l_H(\gamma_z)$ кривой γ_z будет удовлетворять неравенству

$$l_H(\gamma_z) = 2 \int_{\gamma_z} \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2} = 2 \int_0^{\tau_z} \frac{|v(f^t(z))|}{1 - |f^t(z)|^2} dt \leq 16\alpha M^2 \tau_z.$$

В силу условий выбора δ для всех $z \in R_a$ получаем

$$\delta \leq l_H(\gamma_z) \leq 16\alpha M^2 \tau_z,$$

откуда следует неравенство

$$\tau_z \geq \frac{\delta}{16\alpha M^2} = \tau^*.$$

Таким образом, если $t \in [0, \tau^*]$ и $z \in R_a$, то гиперболическое расстояние от z до $f^t(z)$ не превышает $16\alpha M^2 \tau^* = \delta$. Следовательно, при всех $t \in [0, \tau^*]$ образ $f^t(R_a)$ радиального отрезка R_a содержится в $\Delta_M^+(a)$ и $f^t(z) \rightarrow a$ при $z \rightarrow a$ вдоль R_a .

Далее, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{f^t(z) - a}{z - a} = \frac{v(f^t(z))}{f^t(z) - a},$$

где под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $t = 0$, то

$$\ln \frac{f^t(z) - a}{z - a} = \int_0^t \frac{v(f^s(z))}{f^s(z) - a} ds.$$

Как было показано выше, инфинитезимальная образующая v имеет в точке a конечный угловой предел $v'(a) > 0$. Поэтому, осуществляя в последнем равенстве предельный переход при $z \rightarrow a$ вдоль отрезка R_a , получаем

$$\lim_{z \rightarrow a} \ln \frac{f^t(z) - a}{z - a} = v'(a)t.$$

Это означает, что функции f^t , $0 < t \leq \tau^*$, имеют в точке a угловую производную и

$$(f^t)'(a) = e^{tv'(a)}.$$

В силу полугруппового свойства $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ существование угловой производной в точке a и полученное для нее равенство распространяются на все функции f^t , $t > 0$, однопараметрической полугруппы. Этим завершается доказательство теоремы 1.

§ 5. Функция Кёнигса в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа

Как уже отмечалось в § 1, история проблемы дробных итераций восходит к работам Шрёдера [1] и Кёнигса [2]. Следует также отметить, что они рассматривали эту проблему в локальной постановке, т.е. когда функция и ее итерации определены в окрестности неподвижной точки. В частности, Шрёдер связал проблему дробных итераций с решением функциональных уравнений. Позже это направление получило развитие в многочисленных работах различных авторов (см., например, [12] и приведенную там библиографию). Кёнигс предложил конструкцию из натуральных итераций и показал, что она сходится к непостоянной аналитической функции, которая является решением уравнения Шрёдера. Вопросы сходимости нормированных последовательностей итераций аналитических функций в круге (или полуплоскости) подробно рассмотрены в монографии [6]. В частности, если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя и имеет внутреннюю точку Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$, в которой $f'(q) \neq 0$, то существует локально равномерный в $\mathbb{D}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z) - q}{(f'(q))^n} = F(z).$$

Очевидно, что F является аналитической в $\mathbb{D}$ функцией и $F(q) = 0$, $F'(q) = 1$. Ее называют функцией Кёнигса и она является решением уравнения Шрёдера

$$F \circ f(z) = f'(q)F(z).$$

Легко видеть, что и все натуральные итерации f^n , $n = 2, 3, \dots$, функции f имеют ту же самую функцию Кёнигса F .

Допустим теперь, что $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$. Тогда функции f^t , $t > 0$, будут однолиственными в $\mathbb{D}$, и для них будет определена функция Кёнигса

$$F(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f^t(z) - q}{(f^t)'(q)}.$$

Заметим, что в этом случае функция F как предел последовательности однолистных функций также будет однолистной. При этом для всех $t \geq 0$ будет выполняться соотношение

$$F \circ f^t(z) = (f^t)'(q)F(z).$$

Если v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$, то, дифференцируя последнее равенство по t , получаем

$$F'(f^t(z))v(f^t(z)) = v'(q)e^{tv'(q)}F(z).$$

Здесь мы воспользовались равенством $(f^t)'(q) = e^{v'(q)t}$, которое получается в результате интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(f^t)'(q) = v'(q)(f^t)'(q)$$

с начальным условием $(f^t)'(q)|_{t=0} = 1$. В частности, полагая в полученном выше соотношении $t = 0$, приходим к равенству

$$F'(z)v(z) = v'(q)F(z), \quad (13)$$

которое связывает функцию Кёнигса F однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$, и ее инфинитезимальную образующую v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость. Пусть $t \mapsto f^t$ – нетривиальная однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$, и F – ее функция Кёнигса. Нам нужно показать, что F допускает представление (4) с некоторым $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$.

Поскольку F однолистка в единичном круге $\mathbb{D}$ и $F(q) = 0$, $F'(q) = 1$, то $F(z)/(z - q)$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$ и можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln(F(z)/(z - q))$, обращающуюся в нуль при $z = q$. При этом если v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$, то в силу равенства (13) получаем

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = \frac{1}{z - q} \left(\frac{(z - q)v'(q)}{v(z)} - 1 \right).$$

Согласно формуле Берксона–Порты инфинитезимальную образующую v можно представить в виде

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \bar{q}z)}{p(z)},$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с положительной вещественной частью. Но тогда

$$v'(q) = -\frac{1 - |q|^2}{p(q)}, \quad \frac{(z - q)v'(q)}{v(z)} - 1 = \frac{(1 - |q|^2)p(z) - p(q)(1 - \bar{q}z)}{p(q)(1 - \bar{q}z)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = \frac{(1 - |q|^2)p(z) - p(q)(1 - \bar{q}z)}{p(q)(z - q)(1 - \bar{q}z)}.$$

Используя формулу Рисса–Герглотца, функцию p можно представить в виде

$$p(z) = \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta,$$

где $\lambda > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а ν – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. При этом

$$\begin{aligned} & (1 - |q|^2)p(z) - (1 - \bar{q}z)p(q) \\ &= (1 - |q|^2) \left[\lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta \right] - (1 - \bar{q}z) \left[\lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} d\nu(\varkappa) + i\beta \right] \\ &= \lambda(z - q) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa(1 + \varkappa q)(1 - \bar{q}z) + (\varkappa + \bar{q})(1 - \varkappa q)}{(1 - \varkappa q)(1 - \varkappa z)} d\nu(\varkappa) + i\beta \bar{q}(z - q). \end{aligned}$$

Теперь дифференциальное соотношение для функции Кёнигса можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} \\ &= \frac{\lambda}{p(q)} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} + \frac{\varkappa + \bar{q}}{(1 - \varkappa z)(1 - \bar{q}z)} \right) d\nu(\varkappa) + \frac{i\beta}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \\ &= \frac{\lambda}{p(q)} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} + \frac{\varkappa + \bar{q}}{\varkappa - \bar{q}} \left(\frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} - \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \right) \right) d\nu(\varkappa) + \frac{i\beta}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \\ &= \frac{\lambda}{p(q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa) - \frac{1}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \left(\lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \bar{\varkappa} \bar{q}}{1 - \bar{\varkappa} \bar{q}} d\nu(\varkappa) - i\beta \right) \\ &= \frac{2\lambda}{p(q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa) - \frac{\overline{p(q)}}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение меру μ на $\mathbb{T}$ посредством равенства

$$d\mu(\varkappa) = \frac{\lambda}{\operatorname{Re} p(q)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa).$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{T}} d\mu(\varkappa) = \frac{1}{\operatorname{Re} p(q)} \operatorname{Re} \left\{ \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} d\nu(\varkappa) \right\} = 1,$$

то μ является вероятностной мерой, и теперь

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = \frac{2 \operatorname{Re} p(q)}{p(q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) - \frac{\overline{p(q)}}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}.$$

Замечая, что $\operatorname{Re} p(q) > 0$, определим $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, посредством равенства $\sigma^2 = \overline{p(q)}/p(q)$. Тогда

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = (1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) - \sigma^2 \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}$$

и после интегрирования по z с учетом выбора ветви логарифма получаем

$$\ln \frac{F(z)}{z - q} = (1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) + \sigma^2 \ln \frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2},$$

где под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = q$. Потенцируя полученное равенство, приходим к формуле (4) для функции Кёнигса, и необходимость доказана.

Достаточность. Покажем теперь, что при любом $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и любой вероятностной мере μ на $\mathbb{T}$ формула (4) определяет функцию Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{D}$. Действительно, дифференцируя равенство (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{1}{z-q} - \sigma^2 \frac{\bar{q}}{1-\bar{q}z} + (1+\sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1-\varkappa z} d\mu(\varkappa) \\ &= \frac{1}{z-q} - \sigma^2 \frac{\bar{q}}{1-\bar{q}z} + (1+\sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\varkappa - \bar{q}}{(1-\bar{q}z)(1-\varkappa z)} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{q}z} \right) d\mu(\varkappa) \\ &= \frac{1-|q|^2}{(z-q)(1-\bar{q}z)} + (1+\sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa - \bar{q}}{(1-\bar{q}z)(1-\varkappa z)} d\mu(\varkappa). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z-q)(1-\bar{q}z) \frac{F'(z)}{F(z)} \\ = (1-|q|^2) \left[\bar{\sigma} + (\sigma + \bar{\sigma}) \int_{\mathbb{T}} \frac{(z-q)(\varkappa - \bar{q})}{(1-|q|^2)(1-\varkappa z)} d\mu(\varkappa) \right] = (1-|q|^2)p(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p(z) &= \bar{\sigma} + (\sigma + \bar{\sigma}) \int_{\mathbb{T}} \frac{(z-q)(\varkappa - \bar{q})}{(1-|q|^2)(1-\varkappa z)} d\mu(\varkappa) \\ &= \bar{\sigma} - \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2} + \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} \frac{|1-\varkappa q|^2}{1-|q|^2} d\mu(\varkappa) - i2(\operatorname{Re} \sigma) \int_{\mathbb{T}} \frac{\operatorname{Im}\{\varkappa q\}}{1-|q|^2} d\mu(\varkappa) \\ &= (\operatorname{Re} \sigma) \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} \frac{|1-\varkappa q|^2}{1-|q|^2} d\mu(\varkappa) - i \operatorname{Im} \left\{ \sigma + 2(\operatorname{Re} \sigma) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa q}{1-|q|^2} d\mu(\varkappa) \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Покажем теперь, что F однолистка в единичном круге $\mathbb{D}$ и отображает его на θ -спиральную область, т.е. $F(\mathbb{D})$ вместе с каждой точкой $F(z)$, $z \in \mathbb{D}$, содержит полную дугу θ -спирали $w(t) = F(z)e^{-\sigma t}$, $t \geq 0$. Напомним (см., например, [13], [14]), что аналитическая в $\mathbb{D}$ функция Φ , удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \neq 0$ и $\Phi(\zeta) \neq 0$ при $0 < |\zeta| < 1$, является θ -спиральной в том и только том случае, если

$$\operatorname{Re} \left\{ \bar{\sigma} \frac{\zeta \Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \right\} > 0$$

при $\zeta \in \mathbb{D}$.

Пусть

$$\zeta = L(z) = \frac{q-z}{1-\bar{q}z}$$

и $\Phi(\zeta) = F(L^{-1}(\zeta))$. Тогда функция Φ будет удовлетворять условиям $\Phi(0) = F(q) = 0$, $\Phi'(0) \neq 0$ и $\Phi(\zeta) \neq 0$ при $0 < |\zeta| < 1$. Кроме того,

$$\frac{\zeta \Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = \frac{L(z)F'(z)}{L'(z)F(z)} = \frac{(z-q)(1-\bar{q}z)}{1-|q|^2} \frac{F'(z)}{F(z)}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re} \left\{ \bar{\sigma} \frac{\zeta \Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \right\} = \operatorname{Re} p(z) > 0$$

при $\zeta \in \mathbb{D}$. Таким образом, $F(\mathbb{D}) = \Phi(\mathbb{D})$ является θ -спиральной областью, и мы можем определить однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ посредством равенств

$$f^t(z) = F^{-1}(e^{-\sigma t} F(z)),$$

где $t \geq 0$. Поскольку $F(q) = 0$, то q будет неподвижной точкой для всех функций f^t , $t > 0$. Кроме того, инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ будет иметь вид

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}(e^{-\sigma t} F(z)) \Big|_{t=0} = -\sigma \frac{F(z)}{F'(z)} = \frac{(q-z)(1-\bar{q}z)}{(1-|q|^2)p(z)}.$$

Таким образом, $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[q]$, а F является ее функцией Кёнига, и теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть теперь $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q; a]$, т.е. функции f^t , $t > 0$, кроме точки Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$ оставляют неподвижной точку $a \in \mathbb{T}$, в которой они имеют конечные угловые производные. Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2 инфинитезимальную образующую v этой однопараметрической полугруппы можно представить в виде

$$v(z) = \frac{(q-z)(1-\bar{q}z)}{\alpha \left(\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} + g(z) \right)},$$

где $\alpha > 0$, а функция g голоморфна в $\mathbb{D}$ и имеет неотрицательную вещественную часть. Случай, когда функция g тождественно равна мнимой константе, тривиален. Поэтому будем считать, что $\operatorname{Re} g(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Другими словами, в общем представлении (рассмотренном выше) инфинитезимальной образующей

$$v(z) = \frac{(q-z)(1-\bar{q}z)}{p(z)}$$

функция p имеет специальный вид

$$p(z) = \alpha \left(\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} + g(z) \right).$$

По теореме Рисса–Герглотца функцию g можно представить в виде

$$g(z) = \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta,$$

где $\lambda > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а ν — вероятностная мера на $\mathbb{T}$. Но тогда

$$\begin{aligned} (1-|q|^2)p(z) - (1-\bar{q}z)p(q) &= \alpha \left[(1-|q|^2) \frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} - (1-\bar{q}z) \frac{1+\bar{a}q}{1-\bar{a}q} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_{\mathbb{T}} \left((1-|q|^2) \frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} - (1-\bar{q}z) \frac{1+\varkappa q}{1-\varkappa q} \right) d\nu(\varkappa) + i\beta \bar{q}(z-q) \right] \end{aligned}$$

$$= \alpha(z - q) \left[\frac{\bar{a}(1 + \bar{a}q)(1 - \bar{q}z) + (\bar{a} + \bar{q})(1 - \bar{a}q)}{(1 - \bar{a}q)(1 - \bar{a}z)} + \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa(1 + \varkappa q)(1 - \bar{q}z) + (\varkappa + \bar{q})(1 - \varkappa q)}{(1 - \varkappa q)(1 - \varkappa z)} d\nu(\varkappa) + i\beta\bar{q} \right],$$

и для функции Кёнигса F получаем следующее дифференциальное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} &= \frac{\alpha}{p(q)} \left[\frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} + \frac{\bar{a} + \bar{q}}{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{q}z)} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} + \frac{\varkappa + \bar{q}}{(1 - \varkappa z)(1 - \bar{q}z)} \right) d\nu(\varkappa) + i\beta \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \right] \\ &= \frac{\alpha}{p(q)} \left[\frac{2\bar{a}}{1 - \bar{a}z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} \right\} - \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \frac{1 + a\bar{q}}{1 - a\bar{q}} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{2\varkappa}{1 - \varkappa z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa) - \lambda \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \overline{\varkappa q}}{1 - \overline{\varkappa q}} d\nu(\varkappa) + i\beta \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \right] \\ &= \frac{2\alpha}{p(q)} \left[\frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} \right\} + \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa) \right] - \frac{\overline{p(q)}}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\delta = \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa)$$

и определим вероятностную на $\mathbb{T}$ меру μ посредством равенства

$$d\mu(\varkappa) = \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \right\} d\nu(\varkappa).$$

Тогда полученное соотношение переписывается в виде

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = \frac{2\alpha}{p(q)} \left[\frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} \right\} + \lambda \delta \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right] - \frac{\overline{p(q)}}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}.$$

Полагая теперь

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} p(q)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} \right\}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\lambda\delta}{\operatorname{Re} p(q)},$$

получим положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\alpha}{\operatorname{Re} p(q)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \bar{a}q}{1 - \bar{a}q} + \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} d\nu(\varkappa) \right\} = 1.$$

В этих терминах дифференциальное соотношение для функции Кёнигса F принимает вид

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z - q} = \frac{2 \operatorname{Re} p(q)}{p(q)} \left[\lambda_1 \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right] - \frac{\overline{p(q)}}{p(q)} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}.$$

Снова определим $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, посредством равенства $\sigma^2 = \frac{p(\bar{q})}{p(q)}$ и перепишем соотношение для F в виде

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z-q} = (1 + \sigma^2) \left[\lambda_1 \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right] - \sigma^2 \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z}.$$

Интегрирование этого равенства по z дает

$$\ln \frac{F(z)}{z-q} = \sigma^2 \ln \frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2} + (1 + \sigma^2) \left[\lambda_1 \ln \frac{1 - \bar{a}q}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right],$$

где под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = q$. Потенцирование последнего равенства приводит к виду функции Кёнигса F , который определяет формула (5).

Обратно, пусть функция F имеет вид (5) с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. Покажем, что найдется такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{T}$, что F является для нее функцией Кёнигса.

Выполняя очевидные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{1}{z-q} - \sigma^2 \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} + \lambda_1 (1 + \sigma^2) \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 (1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \\ &= \frac{1}{z-q} + \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \\ &\quad + (1 + \sigma^2) \left[\lambda_1 \left(\frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}z} - \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \right) + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} - \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} \right) d\mu(\varkappa) \right] \\ &= \frac{1 - |q|^2}{(z-q)(1 - \bar{q}z)} \\ &\quad + (1 + \sigma^2) \left[\lambda_1 \frac{\bar{a} - \bar{q}}{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{q}z)} + \frac{\lambda_2}{1 - \bar{q}z} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa - \bar{q}}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right] \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z-q)(1 - \bar{q}z) \frac{F'(z)}{F(z)} &= \bar{\sigma}(1 - |q|^2) + (\sigma + \bar{\sigma}) \left[\lambda_1 \frac{(\bar{a} - \bar{q})(z-q)}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \frac{(\varkappa - \bar{q})(z-q)}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right]. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{a} - \bar{q})(z-q)}{1 - \bar{a}z} &= \frac{|1 - \bar{a}q|^2}{2} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} - \frac{1}{2}(1 - |q|^2) - i \operatorname{Im}\{\bar{a}q\}, \\ \frac{(\varkappa - \bar{q})(z-q)}{1 - \varkappa z} &= \frac{|1 - \varkappa q|^2}{2} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} - \frac{1}{2}(1 - |q|^2) - i \operatorname{Im}\{\varkappa q\}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z-q)(1 - \bar{q}z) \frac{F'(z)}{F(z)} &= (\operatorname{Re} \sigma) \left[\lambda_1 |1 - \bar{a}q|^2 \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} |1 - \varkappa q|^2 d\mu(\varkappa) \right] \\ &\quad - i \operatorname{Im} \left\{ (1 - |q|^2) \sigma + 2q(\operatorname{Re} \sigma) \left(\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T}} \varkappa d\mu(\varkappa) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку в правой части последнего равенства стоит функция с положительной вещественной частью, то $F(\mathbb{D})$ является θ -спиральной областью, и снова можно определить однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$ посредством равенства

$$f^t(z) = F^{-1}(e^{-\sigma t} F(z)),$$

где $t \geq 0$. Инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в терминах функции F записывается в виде

$$v(z) = -\sigma \frac{F(z)}{F'(z)} = -\frac{F(z)}{\sigma F'(z)}.$$

Однако из предыдущих вычислений выводим

$$(z - q)(1 - \bar{q}z) \frac{\bar{\sigma} F'(z)}{F(z)} = \alpha \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right),$$

где $\alpha > 0$, а g – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью. Следовательно,

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \bar{q}z)}{\alpha \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right)},$$

что в силу леммы 2 эквивалентно представлению из теоремы 1. Это означает, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[q; a]$, а F является ее функцией Кёнигса. Таким образом, теорема 3 доказана.

§ 6. Функция Кёнигса в случае граничной точки Данжуа–Вольфа

В случае, когда точка Данжуа–Вольфа q функции $f \in \mathfrak{P}$ является внутренней (т.е. $q \in \mathbb{D}$), происхождение функции Кёнигса обусловлено, с одной стороны, асимптотическим поведением итераций функции f и связью с решением функционального уравнения – с другой.

Пусть теперь $f \in \mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{T}$, т.е. точка Данжуа–Вольфа q является граничной. В монографии [6] показано, что если угловая производная $f'(q)$ не равна 1, то можно нормировать последовательность натуральных итераций f^n , $n = 1, 2, \dots$, так, чтобы она сходилась к некоторой аналитической функции, которую Валирон также называет функцией Кёнигса. Эта функция, как и в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа, является общим решением для всех итераций функции f уравнения Шрёдера. Случай $f'(q) = 1$ оказался значительно сложнее. В работах [15], [16] изучались другие способы нормировки последовательности итераций – так, чтобы она сходилась к непостоянной аналитической функции. При этом во всех выделенных случаях, кроме гиперболического, предельная функция является решением функционального уравнения Абеля для всех итераций функции f . Уравнение Абеля возникает также при изучении итераций вероятностных производящих функций, относящихся к случаю критических ветвящихся процессов (см. [17]). Для однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$ при $q \in \mathbb{T}$ единственным образом возникает функция F , которая для всех f^t , $t > 0$, удовлетворяет функциональному уравнению Абеля

$$F \circ f^t(z) = F(z) + t. \quad (14)$$

Действительно, пусть $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{T}$, и v – ее инфинитезимальная образующая. Поскольку $|q| = 1$, то инфинитезимальную образующую v можно в силу формулы Берксона–Порты представить в виде

$$v(z) = \frac{q(1 - \bar{q}z)^2}{p(z)}, \quad (15)$$

где p – голоморфная с неотрицательной вещественной частью в $\mathbb{D}$ функция. Случай, когда p тождественно равняется мнимой константе, отвечает однопараметрической полугруппе дробно-линейных преобразований единичного круга на себя. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Определим голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию F посредством равенств $F(0) = 0$ и

$$F'(z) = \frac{p(z)}{q(1 - \bar{q}z)^2}. \quad (16)$$

Это определение корректно, поскольку $\mathbb{D}$ – односвязная область. Кроме того, для функции $L(z) = z/(q - z)$, которая отображает $\mathbb{D}$ на полуплоскость, выполняется равенство

$$\frac{F'(z)}{L'(z)} = p(z).$$

Отсюда следует, что F является близкой к выпуклой функцией (см., например, [14]). В частности, F однолистка в $\mathbb{D}$. Кроме того, образ $F(\mathbb{D})$ единичного круга обладает тем свойством, что вместе с каждой точкой $w \in F(\mathbb{D})$ он содержит и весь луч $\{w + t : t \geq 0\}$. Действительно, пусть $w_0 \in F(\mathbb{D})$, т.е. $w_0 = F(z_0)$ при некотором $z_0 \in \mathbb{D}$. Тогда кривая $w(t) = F(f^t(z_0))$, $t \geq 0$, содержится в $F(\mathbb{D})$ и $w(0) = w_0$. При этом

$$\frac{d}{dt}w(t) = F'(f^t(z_0))v(f^t(z_0)) = 1,$$

т.е. $w(t) = w_0 + t$, $t \geq 0$. Таким образом, при всех $t \geq 0$ выполняется равенство $F(f^t(z)) = F(z) + t$, $z \in \mathbb{D}$.

Итак, с каждой однопараметрической полугруппой $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{T}$, однозначно ассоциируется функция F , которая является решением уравнения (14) при всех $t \geq 0$ и удовлетворяет условию $F(0) = 0$. Эту функцию мы будем называть *функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$* . Как следует из геометрических свойств функции F , однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ восстанавливается с помощью своей функции Кёнигса посредством равенства

$$f^t(z) = F^{-1}(F(z) + t),$$

где $t \geq 0$.

Приведем теперь параметрическое представление классов функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}[q]$ и $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Допустим вначале, что $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q]$, $q \in \mathbb{T}$. Тогда ее инфинитезимальная образующая v имеет вид (15), а функция Кёнигса определяется равенством (16).

Представим функцию p в виде

$$p(z) = \alpha \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а ν – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. Тогда равенство (16) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} \left[\alpha \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta \right] \\ &= i\beta \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} + \alpha \nu(\{\bar{q}\}) \frac{\bar{q}(1 + \bar{q}z)}{(1 - \bar{q}z)^3} + \alpha \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\varkappa q}{(1 - \varkappa q)^2} \frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}z} + \frac{2\varkappa q}{(1 - \varkappa q)^2} \frac{\varkappa}{1 - \varkappa z} \right) d\nu(\varkappa). \end{aligned}$$

Интегрирование этого равенства с учетом условия $F(0) = 0$ дает

$$\begin{aligned} F(z) &= i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \alpha \nu(\{\bar{q}\}) \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} \\ &\quad + \alpha \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} - \frac{2\varkappa q}{(1 - \varkappa q)^2} \ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} \right) d\nu(\varkappa), \end{aligned}$$

где под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$. Замечая, что

$$\frac{1 + \varkappa q}{1 - \varkappa q} = \frac{i \operatorname{Im}\{\varkappa q\}}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}}, \quad -\frac{2\varkappa q}{(1 - \varkappa q)^2} = \frac{1}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}},$$

получаем

$$\begin{aligned} F(z) &= i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \alpha \nu(\{\bar{q}\}) \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} \\ &\quad + \alpha \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\nu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}} \\ &= i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_1 \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\mu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}}, \end{aligned}$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, а μ – вероятностная мера на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$. Сходимость интеграла в последнем равенстве обеспечивается тем, что

$$\lim_{\varkappa \rightarrow \bar{q}} \left\{ \frac{1}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \right\} = \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2}.$$

Обратно, пусть для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и вероятностной меры μ на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$ определена функция F по формуле (6). Тогда

$$\begin{aligned} F'(z) &= i\beta \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} + \lambda_1 \frac{\bar{q}(1 + \bar{q}z)}{(1 - \bar{q}z)^3} \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\frac{\bar{q} - \kappa}{(1 - \bar{q}z)(1 - \kappa z)} + i(\operatorname{Im}\{\kappa q\}) \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} \right) \frac{d\mu(\kappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\kappa q\}} \\ &= i\beta \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} + \lambda_1 \frac{\bar{q}(1 + \bar{q}z)}{(1 - \bar{q}z)^3} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \frac{\bar{q}(1 + \kappa z)}{(1 - \bar{q}z)^2(1 - \kappa z)} d\mu(\kappa) \\ &= \frac{p(z)}{q(1 - \bar{q}z)^2}, \end{aligned}$$

где

$$p(z) = i\beta + \lambda_1 \frac{1 + \bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \frac{1 + \kappa z}{1 - \kappa z} d\mu(\kappa).$$

Поскольку $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ при $z \in \mathbb{D}$, то легко проверяется, что F является близкой к выпуклой функцией и, следовательно, однолистной. Для выяснения геометрии образа $F(\mathbb{D})$ единичного круга изучим свойства образов орициклов

$$H_\varrho(q) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re} \frac{1 + \bar{q}z}{1 - \bar{q}z} > \frac{1}{\varrho} \right\},$$

где $\varrho > 0$, при отображении их посредством F .

Пусть $z = z(s)$, $-\infty < s < \infty$, – параметризация границы $\partial H_\varrho(q)$ орицикла $H_\varrho(q)$ такая, что при возрастании параметра s точка $z(s)$ движется по $\partial H_\varrho(q)$ в положительном направлении, т.е. орицикл $H_\varrho(q)$ остается слева. При этом

$$\operatorname{Im} \frac{1 + \bar{q}z(s)}{1 - \bar{q}z(s)}$$

будет строго монотонно убывать по s и

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Im} \frac{1 + \bar{q}z(s)}{1 - \bar{q}z(s)} = \operatorname{Im} \frac{2\bar{q}z'(s)}{(1 - \bar{q}z(s))^2} < 0.$$

Кроме того, дифференцируя по s равенство

$$\operatorname{Re} \frac{1 + \bar{q}z(s)}{1 - \bar{q}z(s)} = \frac{1}{\varrho},$$

получаем

$$\operatorname{Re} \frac{\bar{q}z'(s)}{(1 - \bar{q}z(s))^2} = 0.$$

Таким образом, при всех s , $-\infty < s < \infty$, выражение

$$\frac{\bar{q}z'(s)}{(1 - \bar{q}z(s))^2}$$

принимает значения на отрицательной части мнимой оси. Но тогда

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Im} F(z(s)) = \operatorname{Im}\{F'(z(s))z'(s)\} = \operatorname{Im}\left\{ \frac{z'(s)p(z(s))}{q(1 - \bar{q}z(s))^2} \right\} < 0.$$

Это означает, что образ $F(H_\varrho(q))$ орицикла $H_\varrho(q)$ представляет собой область, которая вместе с каждой точкой w содержит и весь луч $w + t$, $t \geq 0$. Это свойство распространяется и на весь образ $F(\mathbb{D})$ единичного круга. Следовательно, при каждом $t > 0$ корректно определены функции

$$f^t(z) = F^{-1}(F(z) + t).$$

Легко видеть, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[q]$, а F – ее функция Кёнигса. В результате теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть теперь $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}[q; a]$, $q \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{T}$, т.е. q является точкой Данжуа–Вольфа для функций f^t , $t > 0$, и кроме q неподвижной также является точка $a \neq q$, в которой функции f^t имеют конечные угловые производные. Поскольку $|q| = 1$, то в силу теоремы 1 и леммы 2 инфинитезимальную образующую v этой однопараметрической полугруппы можно представить в виде

$$v(z) = \frac{q(1 - \bar{q}z)^2}{\alpha\left(\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} + g(z)\right)},$$

где $\alpha > 0$, а функция g голоморфна в $\mathbb{D}$ и имеет неотрицательную вещественную часть в $\mathbb{D}$. Равенство (16), определяющее функцию Кёнигса, запишется в этом случае в виде

$$F'(z) = \frac{\alpha}{q(1 - \bar{q}z)^2} \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right).$$

Для функции g в силу теоремы Рисса–Герглота имеет место интегральное представление

$$g(z) = \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta,$$

где $\lambda \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а ν – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. С учетом этого равенство, определяющее функцию Кёнигса, перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\alpha}{q(1 - \bar{q}z)^2} \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\nu(\varkappa) + i\beta \right) \\ &= i\alpha\beta \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} + \alpha \frac{\bar{q}(1 + \bar{a}z)}{(1 - \bar{q}z)^2(1 - \bar{a}z)} + \alpha\lambda\nu(\{\bar{q}\}) \frac{\bar{q}(1 + \bar{q}z)}{(1 - \bar{q}z)^3} \\ &\quad + \alpha\lambda \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\frac{\bar{q} - \varkappa}{(1 - \bar{q}z)(1 - \varkappa z)} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} \right) \frac{d\nu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}}. \end{aligned}$$

После интегрирования этого равенства с учетом условия $F(0) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} F(z) &= i\alpha\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \frac{\alpha}{1 - \operatorname{Re}\{\bar{a}q\}} \ln \frac{1 - \bar{a}z}{1 - \bar{q}z} \\ &\quad + i \frac{\alpha \operatorname{Im}\{\bar{a}q\}}{1 - \operatorname{Re}\{\bar{a}q\}} \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \alpha\lambda\nu(\{\bar{q}\}) \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} \\ &\quad + \alpha\lambda \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\nu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученное равенство для функции Кёнигса F приводится к виду (7).

Обратно, пусть функция F определяется формулой (7) с некоторыми $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} F'(z) &= i\beta \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} + \lambda_1 \frac{\bar{q} - \bar{a}}{(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z)} + \lambda_2 \frac{\bar{q}(1 + \bar{q}z)}{(1 - \bar{q}z)^3} \\ &\quad + \lambda_3 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\frac{\bar{q} - \kappa}{(1 - \bar{q}z)(1 - \kappa z)} + i(\operatorname{Im}\{\kappa q\}) \frac{\bar{q}}{(1 - \bar{q}z)^2} \right) \frac{d\mu(\kappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\kappa q\}} \\ &= \frac{p(z)}{q(1 - \bar{q}z)^2}, \end{aligned}$$

где

$$p(z) = i\beta + \lambda_1 \frac{(1 - \bar{a}q)(1 - \bar{q}z)}{1 - \bar{a}z} + \lambda_2 \frac{1 + \bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \lambda_3 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \frac{1 + \kappa z}{1 - \kappa z} d\mu(\kappa).$$

Замечая, что

$$\frac{(1 - \bar{a}q)(1 - \bar{q}z)}{1 - \bar{a}z} = (1 - \operatorname{Re}\{\bar{a}q\}) \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} - i \operatorname{Im}\{\bar{a}q\},$$

функцию p представим в виде

$$p(z) = \alpha \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right),$$

где $\alpha = \lambda_1(1 - \operatorname{Re}\{\bar{a}q\}) > 0$, а g — голоморфная в $\mathbb{D}$ с неотрицательной вещественной частью функция. Следовательно,

$$F'(z) = \frac{\alpha}{q(1 - \bar{q}z)^2} \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right),$$

откуда видно, что F является функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q; a]$ с инфинитезимальной образующей

$$v(z) = \frac{q(1 - \bar{q}z)^2}{\alpha \left(\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + g(z) \right)},$$

и теорема 5 доказана.

§ 7. Однопараметрические полугруппы с заданным множеством неподвижных точек

Найти явный вид итераций аналитической функции удается крайне редко, хотя этот вопрос в приложениях часто является актуальным и тесно связан с динамикой описываемого процесса. Например, однопараметрические полугруппы вероятностных производящих функций являются аналитическим описанием однородных марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем (см. [7]). Однопараметрические полугруппы инверсированных преобразований Коши вероятностных распределений связаны с описанием процессов с независимыми приращениями в некоммутативной вероятности (см. [18]).

В теории композиционных операторов существенную роль играет наличие у функций однопараметрической полугруппы неподвижных точек (см. [19]). Кроме того, изучение неподвижных точек является центральной темой теории итераций. В связи с этим представляет интерес получение явных формул для функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}$ с заданными неподвижными точками. Этому вопросу и посвящен данный параграф.

Следующий результат можно рассматривать как дальнейшую детализацию формулы Берксона–Порты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $q \in \overline{\mathbb{D}}$ и $a_1, \dots, a_n$ – попарно различные точки на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любых положительных чисел $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и голоморфной в $\mathbb{D}$ функции p с неотрицательной вещественной частью равенство

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \bar{q}z)}{\alpha \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z} + p(z) \right)} \quad (17)$$

определяет инфинитезимальную образующую однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. При этом функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижными точки $a_1, \dots, a_n$ и имеют в этих точках конечные угловые производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что поскольку

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z} + p(z) \right\} > 0$$

при $z \in \mathbb{D}$, то функция v , определяемая по формуле (17), является инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. Далее, для любого k , $k = 1, \dots, n$, функцию v можно представить в виде

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \bar{q}z)}{\alpha_k \left(\frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z} + g_k(z) \right)},$$

где $\alpha_k = \alpha \lambda_k$ и

$$g_k(z) = \sum_{j \neq k} \frac{\lambda_j}{\lambda_k} \frac{1 + \bar{a}_j z}{1 - \bar{a}_j z} + \frac{1}{\lambda_k} p(z).$$

Поскольку $\operatorname{Re} g_k(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, то из теоремы 1 и леммы 2 следует, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}[q; a_k]$. Это означает, что каждая точка a_k , $k = 1, \dots, n$, является неподвижной для функций f^t , $t > 0$, и предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $q \in \mathbb{D}$ и $a_1, \dots, a_n$ – попарно различные точки на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любых положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и неотрицательного γ , удовлетворяющих условию $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \gamma = 1$, $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной меры μ на $\mathbb{T}$ равенство

$$\begin{aligned} F(z) &= (z - q) \left(\frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2} \right)^{\sigma^2} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - \bar{a}_k q}{1 - \bar{a}_k z} \right)^{\lambda_k(1+\sigma^2)} \\ &\quad \times \exp \left\{ \gamma(1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где под степенными функциями и логарифмом понимаются непрерывные ветви, которые принимают значения 1 и 0 соответственно при $z = q$, определяет функцию Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. При этом функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижными точки $a_1, \dots, a_n$ и имеют в этих точках конечные угловые производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно k , $k = 1, \dots, n$, и заметим, что функцию F , определяемую равенством (18), можно также представить в виде

$$F(z) = (z - q) \left(\frac{1 - \bar{q}z}{1 - |q|^2} \right)^{\sigma^2} \left(\frac{1 - \bar{a}_k q}{1 - \bar{a}_k z} \right)^{\lambda_k(1+\sigma^2)} \\ \times \exp \left\{ (1 - \lambda_k)(1 + \sigma^2) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa q}{1 - \varkappa z} d\mu_k(\varkappa) \right\},$$

где вероятностная мера μ_k на $\mathbb{T}$ определяется как выпуклая комбинация

$$\mu_k = \frac{\gamma}{1 - \lambda_k} \mu + \sum_{j \neq k} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} \delta_{\bar{a}_j},$$

в которой под δ_a понимается мера Дирака на $\mathbb{T}$, единичная масса которой сосредоточена в точке a . Полученное представление функции F вполне согласуется с видом (5). Следовательно, в силу теоремы 3 функции

$$f^t(z) = F^{-1}(e^{-\sigma t} F(z)),$$

где $t \geq 0$, корректно определены и образуют однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q; a_k]$, $k = 1, \dots, n$, т.е. функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижными точки $a_1, \dots, a_n$ и имеют в этих точках конечные угловые производные.

Аналогичный результат имеет место и в случае граничной точки Данжуа–Вольфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $q, a_1, \dots, a_n$ – попарно различные точки на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любых $\beta \in \mathbb{R}$, положительных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, неотрицательных γ_1, γ_2 и вероятностной меры μ на $\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}$ равенство

$$F(z) = i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln \frac{1 - \bar{a}_k z}{1 - \bar{q}z} + \gamma_1 \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} \\ + \gamma_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \left(\ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} + i(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}) \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} \right) \frac{d\mu(\varkappa)}{1 - \operatorname{Re}\{\varkappa q\}}, \quad (19)$$

где под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$, определяет функцию Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. При этом функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижными точки $a_1, \dots, a_n$ и имеют в этих точках конечные угловые производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция F определяется равенством (19). Используя вычисления, проведенные в ходе доказательства теоремы 5, получаем

$$F'(z) = \frac{p(z)}{q(1 - \bar{q}z)^2},$$

где

$$\begin{aligned} p(z) &= i\beta + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{(1 - \bar{a}_k q)(1 - \bar{q}z)}{1 - \bar{a}_k z} + \gamma_1 \frac{1 + \bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \gamma_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa) \\ &= i\beta + \sum_{k=1}^n \lambda_k (1 - \operatorname{Re}\{\bar{a}_k q\}) \frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z} - i \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{Im}\{\bar{a}_k q\} \\ &\quad + \gamma_1 \frac{1 + \bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \gamma_2 \int_{\mathbb{T} \setminus \{\bar{q}\}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $v(z) = 1/F'(z)$ имеет вид (17), и доказываемое утверждение следует из предложения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Класс функций Кёнигса, представленный в предложении 3, содержит в себе следующее подмножество. Пусть $q, a_1, \dots, a_n$ — попарно различные точки на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любых $\beta \in \mathbb{R}$, положительных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, неотрицательных γ_1, γ_2 и вероятностной меры μ на $\mathbb{T}$ равенство

$$F(z) = i\beta \frac{\bar{q}z}{1 - \bar{q}z} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln \frac{1 - \bar{a}_k z}{1 - \bar{q}z} + \gamma_1 \frac{\bar{q}z}{(1 - \bar{q}z)^2} + \gamma_2 \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1 - \varkappa z}{1 - \bar{q}z} d\mu(\varkappa),$$

где под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$, определяет функцию Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}[q]$. При этом функции f^t , $t > 0$, оставляют неподвижными точки $a_1, \dots, a_n$ и имеют в этих точках конечные угловые производные.

Список литературы

- [1] E. Schröder, “Ueber iterirte Functionen”, *Math. Ann.*, **3**:2 (1871), 296–322.
- [2] G. Koenigs, “Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **1** (1884), 3–41.
- [3] E. Berkson, H. Porta, “Semigroups of analytic functions and composition operators”, *Michigan Math. J.*, **25**:1 (1978), 101–115.
- [4] В. В. Горяйнов, “Однопараметрические полугруппы аналитических функций и композиционный аналог безграничной делимости”, *Тр. ИПММ НАН Украины*, **5** (2000), 44–57.
- [5] K. Löwner, “Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I”, *Math. Ann.*, **89**:1–2 (1923), 103–121.
- [6] Ж. Валирон, *Аналитические функции*, ГИТТЛ, М., 1957; пер. с англ.: G. Valiron, *Fonctions analytiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1954.
- [7] Т. Харрис, *Теория ветвящихся случайных процессов*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [8] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, Ch. Pommerenke, “Fixed points and boundary behaviour of the Koenigs function”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **29**:2 (2004), 471–488.
- [9] В. В. Горяйнов, “Дробные итерации аналитических в единичном круге функций с заданными неподвижными точками”, *Матем. сб.*, **182**:9 (1991), 1281–1299; англ. пер.: V. V. Goryajnov, “Fractional iterates of functions analytic in the unit disk, with given fixed points”, *Math. USSR-Sb.*, **74**:1 (1993), 29–46.

- [10] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants. Topics in geometric function theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [11] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [12] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1968.
- [13] P. L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren Math. Wiss., **259**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
- [14] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [15] Ch. Pommerenke, “On the iteration of analytic functions in a halfplane. I”, *J. London Math. Soc.* (2), **19**:3 (1979), 439–447.
- [16] I. N. Baker, Ch. Pommerenke, “On the iteration of analytic functions in a half-plane. II”, *J. London Math. Soc.* (2), **20** (1979), 255–258.
- [17] В. В. Горяйнов, “Функция Кёнигса и дробное итерирование вероятностных производящих функций”, *Матем. сб.*, **193**:7 (2002), 69–86; англ. пер.: V. V. Goryainov, “Koenigs function and fractional iterates of probability generating functions”, *Sb. Math.*, **193**:7 (2002), 1009–1025.
- [18] U. Franz, N. Muraki, “Markov property of monotone Lévy processes”, *Infinite dimensional harmonic analysis. III* (University of Tübingen, Tübingen, Germany, 2003), World Scientific, Hackensack, NJ, 2005, 37–57.
- [19] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext Tracts Math., Springer-Verlag, New York, 1993.

В. В. Горяйнов (V. V. Goryainov)

Волжский гуманитарный институт
Волгоградского государственного университета,
г. Волжский, Волгоградская область
E-mail: goryainov_vv@hotmail.com

Поступила в редакцию
09.03.2010

О. С. Кудрявцева (O. S. Kudryavceva)

Волжский гуманитарный институт
Волгоградского государственного университета,
г. Волжский, Волгоградская область
E-mail: kudryavceva@vgi.volsu.ru