Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, Кривизна и числа Тачибаны, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 135–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:03:27

УДК 514.764.212

С. Е. Степанов

Кривизна и числа Тачибаны

Цель статьи состоит в определении r -чисел Тачибаны t_r для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия как размерности пространства конформно киллинговых r -форм для $r = 1, 2, \dots, n - 1$ и описании свойств этих чисел по аналогии со свойствами r -чисел Бетти b_r компактного ориентированного риманова многообразия.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: компактное риманово многообразие, дифференциальные формы, эллиптический оператор, скалярные инварианты.

§ 1. Введение

1.1. В настоящей статье мы определяем числа Тачибаны компактного ориентированного риманова многообразия и, опираясь на это определение, интерпретируем хорошо известные результаты теории римановых многообразий, в том числе и полученные нами. В работе использованы идеи классической монографии [1].

В основе статьи – доклад автора на Международной конференции “Дифференциальные уравнения и топология”, посвященной 100-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, которая состоялась в Москве 17–22 июня 2008 г. (см. [2]).

1.2. В дальнейшем мы сконцентрируем внимание на четырех подпространствах векторного пространства $\Omega^r(M, \mathbb{R})$ внешних дифференциальных r -форм на римановом многообразии (M, g) , а именно на подпространствах $\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R})$ гармонических, $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ конформно киллинговых, $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ козамкнутых конформно киллинговых и $\mathbf{P}^r(M, \mathbb{R})$ замкнутых конформно киллинговых дифференциальных r -форм для всех $r = 1, 2, \dots, n - 1$.

Для компактного и ориентированного многообразия (M, g) назовем число $t_r = \dim \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ *числом Тачибаны*, $k_r = \dim \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ – *числом Киллинга* и $p_r = \dim \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R})$ – *числом планарности* многообразия (M, g) подобно тому, как число $b_r = \dim \mathbf{H}^r(M, \mathbb{R})$ называют *числом Бетти* многообразия (M, g) .

Мы установим, что числа Тачибаны t_r являются конформными скалярными инвариантами, а числа Киллинга k_r и числа планарности p_r являются проективными скалярными инвариантами компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) и обладают следующими свойствами дуальности: $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$ для всех $r = 1, 2, \dots, n - 1$.

Кроме того, мы выведем тождество $t_r = k_r + p_r$ для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) с положительным оператором

кривизны, а также докажем теорему исчезновения для чисел Тачибаны t_r , $1 \leq r \leq n - 1$.

§ 2. Семь векторных пространств дифференциальных r -форм

В этом параграфе мы определим семь подпространств пространства внешних дифференциальных r -форм на n -мерном римановом многообразии (M, g) , опираясь на теорию естественных дифференциальных операторов первого порядка, задаваемых на внешних дифференциальных r -формах, $1 \leq r \leq n - 1$.

2.1. Более тридцати лет назад Ж.-П. Бургиньон (см. [3]) рассмотрел пространство $\text{Diff}_1(\Lambda^r M, \Psi(M))$ естественных (относительно изометрических диффеоморфизмов) дифференциальных операторов порядка 1 на пространстве C^∞ -сечений векторного расслоения $\Lambda^r M$ внешних дифференциальных r -форм со значениями в пространстве $\Psi(M)$ однородных тензоров на (M, g) .

Ж.-П. Бургиньон доказал существование в пространстве $\text{Diff}_1(\Lambda^r M, \Psi(M))$ базиса из трех операторов D_1 , D_2 и D_3 , но при этом только два из них определил (см. [3]). Оператором D_1 стал оператор внешнего дифференцирования $d: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{r+1} M$, а оператором D_2 – оператор кодифференцирования $d^*: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{n-r} M$, определяемый посредством равенства (см. [4; гл. I, п. 1.55], [5; гл. 8, § 11])

$$d^* = (-1)^{nr+n+1} * d, \quad (2.1)$$

где $*$ – оператор Ходжа, отображающий каждую внешнюю дифференциальную r -форму в $(n - r)$ -форму так, что $*$: $\Omega^r(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{n-r}(M, \mathbb{R})$ становится изоморфизмом и при этом $*^2 = (-1)^{r(n-r)} \text{Id}_{\Lambda^r M}$ для фиксированной локальной ориентации многообразия (M, g) .

О третьем базисном естественном дифференциальном операторе D_3 в [3] было сказано, что для случая $r > 1$ он не имеет какой-либо геометрической интерпретации. При этом было добавлено, что для случая $r = 1$ ядро оператора D_3 состоит из инфинитезимальных конформных преобразований многообразия (M, g) .

2.2. В [6] при уточнении результата Ж.-П. Бургиньона нами было доказано, что базис естественных дифференциальных операторов первого порядка на внешних дифференциальных r -формах состоит из трех операторов вида

$$D_1 = \frac{1}{r+1} d, \quad D_2 = \frac{1}{n-r+1} g \wedge d^*, \quad D_3 = \nabla - \frac{1}{r+1} d - \frac{1}{n-r+1} g \wedge d^*,$$

где

$$\begin{aligned} (g \wedge d^* \omega)(X_0, X_1, \dots, X_r) \\ = \sum_{\alpha=2}^r (-1)^\alpha g(X_0, X_\alpha) (d^* \omega)(X_1, \dots, X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1}, \dots, X_r) \end{aligned}$$

для произвольных r -формы ω и векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_r$ на (M, g) .

Ядро оператора D_1 состоит из замкнутых внешних дифференциальных r -форм, ядро оператора D_2 состоит из козамкнутых внешних дифференциальных r -форм и, наконец, ядро оператора D_3 состоит из конформно киллинговых внешних дифференциальных r -форм, или, по другой терминологии, из конформно киллинговых кососимметрических тензоров порядка r (см. [7], [8]), которые составляют три векторных пространства $\mathbf{D}^r(M, \mathbb{R})$, $\mathbf{F}^r(M, \mathbb{R})$ и $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конформно киллинговые кососимметрические тензоры были введены в рассмотрение Ш. Тачибаной более сорока лет назад (см. [8]) как обобщение конформно киллинговых векторных полей (или, по другой терминологии, инфинитезимальных конформных преобразований). Им же были описаны их свойства. Дальнейшее развитие теории конформно киллинговых тензоров нашла во множестве других работ (см. [6], [7], [9], [10] и др.).

2.3. В отсутствие требования компактности для многообразия (M, g) условие $\omega \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$ характеризует r -форму ω как гармоническую (см. [1; гл. II, п. 9], [5; гл. 8, § 11]). Следовательно, пространство гармонических r -форм может быть определено как $\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{D}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{F}^r(M, \mathbb{R})$.

Условие $\omega \in \text{Ker } D_3 \cap \text{Ker } D_2$ характеризует r -форму ω как козамкнутую конформно киллинговую r -форму. Козамкнутую конформно киллинговую форму называют еще *тензором Киллинга* (см., например, [7], [8] и [11]). Векторное пространство козамкнутых конформно киллинговых r -форм определяется тогда как $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{F}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$.

Условие $\omega \in \text{Ker } D_3 \cap \text{Ker } D_1$ характеризует r -форму ω как замкнутую конформно киллинговую r -форму. Иногда замкнутые конформно киллинговые формы называют *планарными*. В итоге векторное пространство замкнутых конформно киллинговых r -форм мы можем определить как

$$\mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{D}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}).$$

2.4. Обозначим на (M, g) , как и раньше, векторное пространство всех внешних дифференциальных r -форм через $\mathbf{\Omega}^r(M, \mathbb{R})$, а векторное пространство параллельных в связности Леви-Чивита ∇ r -форм через $\mathbf{C}^r(M, \mathbb{R})$. В этом случае мы можем составить следующую диаграмму включений:

Здесь, например, запись $\mathbf{F}^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ означает, что векторное пространство $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ является подпространством векторного пространства $\mathbf{F}^p(M, \mathbb{R})$.

§ 3. Числа Бетти

В этом параграфе мы суммируем известные сведения о числах Бетти компактного риманова многообразия.

3.1. Пусть (M, g) будет n -мерным компактным ориентированным римановым многообразием. Рассмотрим пространство C^∞ -сечений векторного расслоения $\Lambda^r M$ как векторное пространство $\Omega^r(M, \mathbb{R})$ всех дифференциальных форм r -форм ω на римановом многообразии (M, g) .

Внешняя дифференциальная r -форма ω называется *гармонической*, если $\Delta\omega = 0$, где $\Delta = d^*d + dd^*$ является лапласианом Ходжа–де Рама, действующим на внешних дифференциальных формах (см. [4; гл. I, п. 1.57], [5; гл. 8, § 11], [12; гл. V, § 25]).

На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) ядро $\text{Ker } \Delta$ конечномерно и условие $\omega \in \text{Ker } \Delta$ равносильно (см. [12; гл. V, § 25]) условию $\omega \in \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$, поэтому гармонические r -формы, определяемые условием $\omega \in \text{Ker } \Delta$, по-прежнему будут составлять векторное пространство $\mathbf{H}^r(n, \mathbb{R})$.

Важным свойством лапласиана Ходжа–де Рама является его коммутативность $(*\Delta = \Delta*)$ с оператором Ходжа $*$ (см. [12; гл. V, § 25]). Поэтому если ω является гармонической r -формой, то $(n - r)$ -форма $*\omega$ также будет гармонической, т.е. отображение $*$: $\mathbf{H}^r(n, \mathbb{R}) \cong \mathbf{H}^{n-r}(n, \mathbb{R})$ является изоморфизмом. Это означает справедливость равенства $b_r = b_{n-r}$, которое хорошо известно как теорема двойственности Пуанкаре для чисел Бетти.

3.2. Для риманова многообразия (M, g) произвольная $\omega \in \mathbf{H}^r(n, \mathbb{R})$ останется гармонической r -формой после конформного преобразования метрики $\hat{g} = e^{2f}g$ для произвольной дифференцируемой функции f на (M, g) , если $n = 2r$ (см. [4; гл. I, п. 1.162]). Это означает, что числа Бетти b_r являются конформными скалярными инвариантами риманова многообразия (M, g) размерности $n = 2r$.

3.3. *Грубый лапласиан Бохнера* определяется как $\nabla^*\nabla$ для связности Леви-Чивита ∇ в расслоении $\Lambda^r M$ внешних дифференциальных r -форм и формально сопряженного ∇ оператора ∇^* (см. [4; гл. I, п. 1.135]). Грубый лапласиан Бохнера и лапласиан Ходжа–де Рама связаны классической формулой Бохнера–Вайценбека

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + F_r(\omega),$$

где $F_r(\omega)$ – квадратичная форма, коэффициентами которой являются компоненты тензора кривизны и тензора Риччи многообразия (M, g) (см. [4; гл. 1, п. 1.136], [13; гл. 7, п. 3.3]).

Из формулы Бохнера–Вайценбека в силу теоремы Грина $\int_M \text{div } X \, dv = 0$ (см. [1; гл. 2, п. 2]) непосредственно следует интегральная формула

$$\int_M g(\Delta\omega, \omega) \, dv = \int_M \|\nabla\omega\|^2 \, dv + \int_M g(F_r(\omega), \omega) \, dv.$$

Если при этом r -форма ω является гармонической, то из этой интегральной формулы мы выводим (см. [13; с. 221])

$$0 = \int_M \|\nabla\omega\|^2 dv + \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|[\Theta_{\alpha}, \omega]\|^2 dv, \quad (3.1)$$

где λ_{α} являются собственными значениями стандартного симметрического риманова оператора кривизны $\bar{R}: \Lambda^2(TM) \rightarrow \Lambda^2(TM)$, задаваемого равенством

$$g(\bar{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = g(R(X, Y)U, Z)$$

для произвольных векторных полей X, Y, Z и U , тензора кривизны R многообразия (M, g) и форм Θ_{α} , дуальных собственным векторам оператора кривизны $\bar{R}$.

Скажем, что (M, g) имеет *положительный оператор кривизны*, если собственные значения $\bar{R}$ положительные. В этом случае будем писать $\bar{R} > 0$.

Пусть (M, g) имеет положительный оператор кривизны; тогда $\lambda_{\alpha} > 0$ и формула (3.1) влечет $\nabla\omega = 0$ и $[\Theta_{\alpha}, \omega] = 0$ для всех α . В этом случае ω должна обратиться в нуль для всех r , не равных 0 и n (см. [13; с. 221]). Следовательно, $b_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Если же $\bar{R} \geq 0$, то из (3.1) следует $\nabla\omega = 0$; в результате

$$b_r = \dim \mathbf{H}^r(n, \mathbb{R}) \leq \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

при этом равенство возможно только на плоском римановом n -торе (см. [13; с. 212]). В частности, для компактного риманова многообразия постоянной положительной секционной кривизны или для компактного конформно плоского ориентированного риманова многообразия с положительно определенным тензором Риччи $b_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Это наиболее известные результаты “техники Бохнера” (см., например, [1], [13; гл. 7]).

§ 4. Числа Тачибаны

4.1. Пусть (M, g) будет n -мерным компактным римановым многообразием. В статье [14] мы определили оператор D_3^* , формально сопряженный естественному базисному оператору D_3 , как оператор

$$D_3^* = \nabla^* - \frac{1}{r+1} d^* - \frac{1}{n-r+1} d \circ \text{trace},$$

сконструировали грубый лапласиан (см. [4; гл. I, п. 1.35], [3; § 3]) в виде

$$D_3^* D_3 = \frac{1}{r(r+1)} \left(\nabla^* \nabla - \frac{1}{r+1} d^* d - \frac{1}{n-r+1} dd^* \right) \quad (4.1)$$

и описали его свойства. В частности, получили

$$\begin{aligned}\omega \in \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3), \\ \omega \in \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3) \cap \text{Ker } d^*, \\ \omega \in \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3) \cap \text{Ker } d.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Оператор $D_3^* D_3$ является типичным примером так называемого оператора Стейн–Вейса, рассмотренного Т. Брансоном в [15]. В частности, в [15] было доказано, что такого рода операторы являются эллиптическими. А потому $D_3^* D_3$ также является эллиптическим оператором (см. также [16]) и на компактном римановом многообразии (M, g) его ядро, как это следует из общей теории (см. [4; приложение]), должно иметь конечную размерность. На этом основании заключаем, что $\dim \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker } D_3^* D_3) < \infty$. Более того, используя последний факт, заключаем также, что $\dim \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) < \infty$ и $\dim \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числом Тачибаны t_r n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) называется размерность пространства всех конформно киллинговых r -форм $(1 \leq r \leq n-1)$ на (M, g) .

Числа $k_r = \dim \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ и $p_r = \dim \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R})$ мы назовем *числом Киллинга* и *планарным числом* риманова многообразия (M, g) .

4.2. Зафиксируем ориентацию риманова многообразия (M, g) и рассмотрим действие оператора Ходжа $*$: $\Omega^r(M, \mathbb{R}) \cong \Omega^{n-r}(M, \mathbb{R})$. Очевидны следующие два изоморфизма:

$$*: \Omega^r(M, \mathbb{R}) \cong \Omega^{n-r}(M, \mathbb{R}), \quad *: \mathbf{C}^r(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{C}^{n-r}(M, \mathbb{R}).$$

В силу (2.1) мы имеем также следующий изоморфизм:

$$*: \mathbf{F}^r(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{D}^{n-r}(M, \mathbb{R}).\tag{4.3}$$

В свою очередь из (4.3) выводится известный изоморфизм $*$: $\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{H}^{n-r}(M, \mathbb{R})$ векторных пространств гармонических форм. Изоморфизм (см. [10] и [17])

$$*: \mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{T}^{n-r}(M, \mathbb{R})\tag{4.4}$$

векторных пространств конформно киллинговых форм также хорошо известен. Из (4.3) и (4.4) выводим справедливость следующего изоморфизма (см. также [6]):

$$*: \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{K}^{n-r}(M, \mathbb{R}).\tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) мы заключаем, что t_r , k_r и p_r обладают свойствами дуальности вида $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$. Эти равенства являются аналогами теоремы двойственности Пуанкаре для чисел Бетти. Доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть (M, g) является компактным ориентированным римановым многообразием размерности $n \geq 2$. Числа Тачибаны t_r , Киллинга k_r и числа планарности p_r многообразия (M, g) обладают свойствами дуальности вида $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) относительно глобального скалярного произведения

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega'$$

подпространства $\text{Im } d$ и $\text{Ker } d^*$ являются ортогональными дополнениями друг друга (см. [5; гл. 8, § 11], [13; гл. 7, п. 2]). Кроме того (см. [5; гл. 8, § 11]), ортогональное дополнение подпространства $\text{Im } d$ в $\text{Ker } d$ совпадает с подпространством $\text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$. Поэтому в случае, когда на многообразии (M, g) оператор кривизны $\bar{R} > 0$, векторные пространства $\text{Im } d$ и $\text{Ker } d$ будут совпадать вследствие отсутствия на (M, g) гармонических форм.

Рассмотрим над компактным ориентированным римановым многообразием (M, g) с положительно определенным оператором кривизны векторное пространство конформно киллинговых r -форм $\mathbf{T}^r(n, \mathbb{R})$, которое конечномерно и снабжено скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. На основании сказанного заключаем, что для векторного подпространства $\mathbf{K}^r(n, \mathbb{R})$, состоящего из козамкнутых конформно киллинговых r -форм, ортогональным дополнением до всего $\mathbf{T}^r(n, \mathbb{R})$ будет векторное подпространство $\mathbf{P}^r(n, \mathbb{R})$, состоящее из точных конформно киллинговых r -форм:

$$\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}). \quad (4.6)$$

В итоге будет справедливой следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (M, g) – n -мерное ($n \geq 2$) ориентированное риманово многообразие с положительно определенным оператором кривизны. Тогда числа Тачибаны t_r многообразия допускают разложение $t_r = k_r + p_r$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Заметим, что в статьях [7] и [8] было получено разложение (4.6) на римановом многообразии постоянной секционной кривизны в отсутствие требований компактности и ориентируемости.

4.3. Одним из важных свойств конформно киллинговых форм является их конформная инвариантность (см. [7], [18]), т.е. если рассмотреть тождественное конформное отображение $\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, \hat{g})$ такое, что $\hat{g} := e^{2f}g$ для любой дифференцируемой функции f на (M, g) , то для любой конформно киллинговой r -формы ω форма $\hat{\omega} := e^{(r+1)f}\omega$ будет конформно киллинговой r -формой риманова многообразия $(M, \hat{g})$ с метрикой $\hat{g} := e^{2f}g$.

С другой стороны, если рассмотреть тождественное проективное отображение $\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, \hat{g})$, т.е. отображение, сохраняющее геодезические, то для каждой замкнутой (соответственно козамкнутой) конформно киллинговой r -формы ω форма $\hat{\omega} := e^{-(r+1)f}\omega$, где $f = (n+1)^{-1} \ln \sqrt{\det g / \det \hat{g}}$, будет замкнутой (соответственно козамкнутой) конформно киллинговой r -формой риманова многообразия $(M, \hat{g})$ с проективно эквивалентной метрикой $\hat{g}$ (см. [11], [18]).

В результате мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (M, g) – компактное ориентированное риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Числа Тачибаны t_r являются конформными скалярными инвариантами, а числа Киллинга k_r и числа планарности p_r являются проективными скалярными инвариантами многообразия (M, g) .

Эта теорема является аналогом утверждения о конформной инвариантности чисел Бетти.

§ 5. О существовании чисел Тачибаны

5.1. Пусть E^{n+1} будет евклидовым пространством с ортогональной системой координат $\{x^1, x^2, \dots, x^{n+1}\}$. Тогда произвольная козамкнутая конформно киллинговая 2-форма ω в E^{n+1} имеет компоненты $\omega_{i_1 i_2} = A_{ki_1 i_2} x^k + B_{i_1 i_2}$, где $A_{ki_1 i_2}$ и $B_{i_1 i_2}$ являются компонентами кососимметричных постоянных тензоров и $k, i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n+1$ (см. [19]).

Пусть $S^n: (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1$ будет n -мерной единичной радиуса гиперсферой евклидова пространства E^{n+1} . Ш. Тачибана доказал в [19], что $\omega_{i_1 i_2} = A_{ki_1 i_2} x^k$ являются компонентами киллинговой 2-формы, глобально заданной на S^n . На основании этого можно утверждать, что число Киллинга k_2 не равно нулю для произвольной единичной гиперсферы S^n евклидова $(n+1)$ -мерного пространства E^{n+1} . Одновременно из равенства $t_2 = k_2 + p_2$ имеем $t_2 \geq k_2 > 0$ и, следовательно, $t_2 \neq 0$.

В [6] мы также доказали следующее. Пусть (M, g) – n -мерное локально плоское риманово многообразие с ортогональной системой координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда произвольная козамкнутая конформно киллинговая r -форма ω имеет компоненты $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = A_{ki_1 i_2 \dots i_r} x^k + B_{i_1 i_2 \dots i_r}$, где $A_{ki_1 i_2 \dots i_r}$ и $B_{i_1 i_2 \dots i_r}$ являются компонентами постоянных кососимметричных тензоров и $k, i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$. В статье [20] вслед за Ш. Тачибаной мы построили пример $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = A_{ki_1 i_2 \dots i_r} x^k$ козамкнутой конформно киллинговой r -формы ($1 \leq r \leq n-1$), глобально заданной на единичной гиперсфере S^n . В итоге можем заключить, что число Киллинга k_r , $1 \leq r \leq n-1$, не равно нулю на произвольной единичной гиперсфере S^n евклидова $(n+1)$ -мерного пространства E^{n+1} . Более того, мы получаем $t_r \neq 0$, поскольку $t_r = k_r + p_r > 0$ для всех $r = 1, \dots, n-1$.

ТЕОРЕМА 4. Числа Тачибаны t_r , $1 \leq r \leq n-1$, не равны нулю на n -мерной единичной сфере S^n евклидова пространства E^{n+1} .

5.2. Пусть $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ – римановы многообразия такие, что $\dim M_1 = 1$ и $\dim M_2 = n-1$. Пусть f – положительная гладкая функция на M_1 . Искривленным произведением $M_1 \times_f M_2$ римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2) является многообразие (см. [4; гл. 9, пп. 9.9–9.11]) топологического произведения $M = M_1 \times M_2$ с метрикой $g = g_1 \times_f g_2$, определяемой равенством

$$g_1 \times_f g_2 = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1) \pi_2^* g_2,$$

где $\pi_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ и $\pi_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ – естественные проекции на M_1 и M_2 соответственно. Если (M_1, g_1) и (M_2, g_2) являются компактными ориентированными римановыми многообразиями, то их искривленное произведение $M_1 \times_f M_2$ также является компактным ориентированным римановым многообразием.

Для произвольной не обращающейся в нуль дифференцируемой периодической функции $\lambda: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ форма $\omega = \text{grad } \lambda$ является глобально заданной на $S^1 \times_f S^{n-1}$ замкнутой конформно киллинговой 1-формой (или, по другой терминологии, конциркулярным векторным полем); см. [21].

Поэтому мы можем заключить, что $p_1 = k_{n-1} \geq 1$.

ТЕОРЕМА 5. *Каждое из чисел планарности p_1 и Киллинга k_{n-1} не меньше единицы на искривленном произведении $S^1 \times_f S^{n-1}$.*

5.3. Известно (см. [22]), что на келеровом многообразии каждая гамильтонова 2-форма определяет конформно киллинговую 2-форму. Если принять во внимание классификацию (глобальную) келеровых многообразий, допускающих гамильтонову 2-форму (см. [23]), то можно составить список келеровых многообразий с $t_2 \geq 1$.

§ 6. Теорема исчезновения для чисел Тачибаны

В этом параграфе мы докажем теорему исчезновения для чисел Тачибаны компактного ориентированного риманова многообразия с отрицательно определенным оператором кривизны, используя “технику Бохнера” (см., например, [1], [13; гл. 7]).

6.1. Пусть (M, g) – n -мерное компактное риманово многообразие. Из равенства

$$D_3^* D_3 \omega = \frac{1}{r(r+1)} \left(\nabla^* \nabla \omega - \frac{1}{r+1} d^* d \omega - \frac{1}{n-r+1} dd^* \omega \right)$$

для произвольной внешней дифференциальной r -формы ω на основании теоремы Грина выводим интегральную формулу

$$\begin{aligned} r(r+1) \int_M \|D_3 \omega\|^2 dv \\ = \int_M \|\nabla \omega\|^2 dv - \frac{1}{r+1} \int_M \|d\omega\|^2 dv - \frac{1}{n-r+1} \int_M \|d^* \omega\|^2 dv. \end{aligned} \quad (6.1)$$

С другой стороны, из классической формулы Бохнера–Вайценбека

$$\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + F_r(\omega)$$

интегрированием по многообразию (M, g) мы получаем вторую интегральную формулу (см. [13; гл. 7, п. 4])

$$\int_M \|d\omega\|^2 dv + \int_M \|d^* \omega\|^2 dv = \int_M \|\nabla \omega\|^2 dv + \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|[\Theta_{\alpha}, \omega]\|^2 dv. \quad (6.2)$$

И, наконец, из (6.1) и (6.2) выводим следующую интегральную формулу:

$$\begin{aligned} & r(r+1) \int_M \|D_3\omega\|^2 dv \\ &= \frac{r}{r+1} \int_M \|d\omega\|^2 dv + \frac{n-r}{n-r+1} \int_M \|d^*\omega\|^2 dv - \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|[\Theta_{\alpha}, \omega]\|^2 dv. \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2. Рассмотрим компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с отрицательно определенным оператором кривизны $\bar{R}$, что означает выполнение неравенств $\lambda_{\alpha} < 0$ для всех α . Более того, будем считать в (6.3) r -форму ω конформно киллинговой. Тогда из (6.3) следует, что $\nabla\omega = 0$ и $[\Theta_{\alpha}, \omega] = 0$ для всех α . В этом случае r -форма ω должна обратиться в нуль, если только r не равно нулю или n (см. [13; с. 205–213]). Это означает, что не существует ненулевых конформно киллинговых r -форм ($1 \leq r \leq n-1$) на n -мерном компактном ориентированном римановом многообразии с отрицательно определенным оператором кривизны (см. также [24]). Следовательно, числа Тачибаны t_r должны быть равны нулю, если только $r = 1, \dots, n-1$. Доказана следующая

ТЕОРЕМА 6. Числа Тачибаны t_r , $1 \leq r \leq n-1$, равны нулю для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) с отрицательно определенным оператором кривизны.

Если же $\bar{R} \leq 0$, то из (6.3) следует $\nabla\omega = 0$, а в результате

$$t_r = \dim \mathbf{T}^r(n, \mathbb{R}) \leq \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

поскольку каждая параллельная r -форма полностью определяется заданием своих компонент в некоторой точке многообразия (см. [13; с. 212]).

Из теоремы 6 вытекает, в частности, что для компактного риманова многообразия постоянной отрицательной секционной кривизны или для компактного конформно плоского ориентированного риманова многообразия с отрицательно определенным тензором Риччи $t_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$ (см. [1], [7], [9], [10] и [25]).

Эта теорема является аналогом теоремы исчезновения для чисел Бетти.

Список литературы

- [1] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957; пер. с англ.: K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Stud., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.
- [2] S. E. Stepanov, “On analogue of the Poincaré duality theorem for Betti Numbers”, *Abstracts of the International Conference “Differential equations and topology”* (Moscow, 2008), Moscow, 2008, 456–457.
- [3] Ж. Аверу, Л. Берар-Бержери, Ж.-П. Бургиньон, *Четырехмерная риманова геометрия*, Семинар Артура Бессе 1978/79, Мир, М., 1985; пер. с фр.: *Géométrie riemannienne en dimension 4*, Séminaire Arthur Besse 1978/79, Textes Math., **3**, CEDIC, Paris, 1981.

- [4] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [5] Д. Б. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, “Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии”, *Геометрия* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **28**, ВИНТИ, М., 1988, 5–289; англ. пер.: D. V. Alekseev, A. M. Vinogradov, V. V. Lychagin, “Basic ideas and concepts of differential geometry”, *Geometry*, v. I, Encyclopaedia Math. Sci., **28**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–264.
- [6] S. E. Stepanov, “On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field”, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 191–209.
- [7] T. Kashiwada, “On conformal Killing tensor”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **19**:2 (1968), 67–74.
- [8] Sh. Tachibana, “On conformal Killing tensor in a Riemannian space”, *Tohoku Math. J. (2)*, **21**:1 (1969), 56–64.
- [9] U. Semmelmann, “Conformal Killing forms on Riemannian manifolds”, *Math. Z.*, **245**:3 (2003), 503–527.
- [10] M. Kora, “On conformal Killing forms and the proper space of Δ for p -forms”, *Math. J. Okayama Univ.*, **22**:2 (1980), 195–204.
- [11] С. Е. Степанов, “О тензоре Киллинга–Яно”, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 382–387; англ. пер.: S. E. Stepanov, “The Killing–Yano tensor”, *Theoret. and Math. Phys.*, **134**:3 (2003), 333–338.
- [12] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956; пер. с фр.: G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [13] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Grad. Texts in Math., **171**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [14] С. Е. Степанов, “Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 452–458; англ. пер.: S. E. Stepanov, “A new strong Laplacian on differential forms”, *Math. Notes*, **76**:3 (2004), 420–425.
- [15] Th. Branson, “Stein–Weiss operators and ellipticity”, *J. Funct. Anal.*, **151**:2 (1997), 334–383.
- [16] S. E. Stepanov, “New theorem of duality and its applications”, *Новейшие проблемы теории поля 1999–2000*, Изд-во КГУ, Казань, 2000, 373–376.
- [17] С. Е. Степанов, “Об изоморфизме пространств конформно киллинговых форм”, *Дифф. геом. многообразий фигур*, **31** (2000), 81–84.
- [18] С. Е. Степанов, “О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 902–907; англ. пер.: S. E. Stepanov, “Some conformal and projective scalar invariants of Riemannian manifolds”, *Math. Notes*, **80**:6 (2006), 848–852.
- [19] Sh. Tachibana, “On Killing tensors in a Riemannian space”, *Tohoku Math. J. (2)*, **20**:2 (1968), 257–264.
- [20] С. Е. Степанов, В. М. Исаев, “Примеры киллинговой и конформно киллинговой форм”, *Дифф. геом. многообразий фигур*, **32** (2001), 52–57.
- [21] J. Mikeš, “On existence of nontrivial global geodesic mappings of n -dimensional compact surfaces of revolution”, *Differential geometry and its applications* (Brno, Czechoslovakia, 1989), World Sci. Publ., Singapore, 1990, 129–137.
- [22] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, “Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. I. General theory”, *J. Differential Geom.*, **73**:3 (2006), 359–412.
- [23] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, “Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. II. Global classification”, *J. Differential Geom.*, **68**:2 (2004), 277–345.
- [24] S. E. Stepanov, “On a generalization Kashiwada’s theorem”, *Webs and quasigroups*, Tver State Univ. Press, Tver, 1999, 162–167.

- [25] С. Е. Степанов, “Векторное пространство конформно киллинговых форм на римановом многообразии”, *Геометрия и топология*. 4, Зап. научн. сем. ПОМИ, **261**, ПОМИ, СПб., 1999, 240–265; англ. пер.: S. E. Stepanov, “The vector space of conformal Killing forms on a Riemannian manifold”, *J. Math. Sci. (New York)*, **110**:4 (2002), 2892–2906.

С. Е. Степанов (S. E. Stepanov)

Финансовый университет при Правительстве РФ,

г. Москва

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Поступила в редакцию

13.03.2010 и 12.12.2010