Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Коняев, Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 9, 27–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:47:31

УДК 514.747.2

А. Ю. Коняев

Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли

Бифуркационная диаграмма представляет собой стратифицированное, вообще говоря, незамкнутое множество, и является одним из эффективных инструментов изучения топологии слоения Лиувилля. В рамках этой работы доказывается совпадение замыкания бифуркационной диаграммы $\bar{\Sigma}$ отображения момента, задаваемого функциями, полученными методом сдвига аргумента, а также замыкания дискриминанта $\bar{D}_z$ спектральной кривой для алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{g}_2$. Кроме того, для алгебры $\mathfrak{so}(2n)$ показано различие данных множеств.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: метод сдвига аргумента, алгебра Ли, бифуркационная диаграмма, спектральная кривая.

§ 1. Введение

Слоение фазового пространства интегрируемой системы, задаваемое первыми интегралами, несет важную информацию, характеризующую поведение системы. Одним из эффективных инструментов изучения топологии такого слоения является бифуркационная диаграмма, которая представляет собой множество сингулярных значений отображения момента. При помощи диаграммы различными авторами было исследовано большое количество как классических интегрируемых случаев (случай Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, геодезический поток на n -мерном эллипсоиде и т.д.), так и современных. Кроме того, бифуркационная диаграмма оказывается полезна при вычислении инвариантов Фоменко–Ципанга – важнейших инвариантов интегрируемых по Лиувиллю систем (подробнее см. [1]).

Когда гамильтонова система допускает лаксово представление со спектральным параметром, естественно ожидать, что особенности слоения фазового пространства на совместные поверхности уровня интегралов будут связаны со спектральной кривой соответствующего представления.

В настоящее время никаких общих теорем, связывающих спектральную кривую и бифуркационную диаграмму, нет, однако некоторые частные результаты в этом направлении известны. Так, например, в книге [2] для некоторых вещественных систем с малым числом степеней свободы показано, что бифуркационная диаграмма совпадает с дискриминантом спектральной кривой лаксова

представления системы. Фактически это означает, что точкам диаграммы соответствуют в точности такие значения интегралов, при которых спектральная кривая имеет особенность.

В настоящей работе будут рассматриваться интегрируемые системы на простых комплексных алгебрах Ли (обозначения см. в § 2), задаваемые так называемыми секционными операторами. Впервые данный термин появился в работе В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [3] (эти объекты изучались в работах А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [4], [5] и С. В. Манакова [6]; см. также [7]). В нашем (достаточно частном) случае эти объекты определяются следующим образом. *Секционными* называются операторы $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющие тождеству

$$[\varphi x, a] = [x, b] \quad (1)$$

для фиксированных a, b . При отождествлении алгебры и коалгебры задаваемая таким оператором гамильтонова система принимает вид

$$\dot{x} = [x, \varphi x].$$

Благодаря тождеству (1) введение спектрального параметра для естественного лаксова представления при фиксировании представления алгебры осуществляется простейшим образом, а именно $L_\lambda(X) = X + \lambda A$, $A_\lambda(X) = \varphi X + \lambda B$. В этом случае система приобретает вид

$$\dot{L}_\lambda(X) = [L_\lambda(X), A_\lambda(X)],$$

а спектральная кривая задается уравнением $\det(L_\lambda(X) - \mu E) = R(\lambda, \mu) = 0$. Системы данного класса изучались Ю. А. Браиловым (см. [8]), которому удалось доказать следующий замечательный факт: для представления минимальной размерности алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$ бифуркационная диаграмма совпадает со спектральной кривой соответствующего лаксова представления. В работе Ю. А. Браилова и А. Т. Фоменко [9] была высказана гипотеза о том, что данный результат остается верным для представлений минимальной размерности других простых алгебр Ли. При этом параметр a , на который совершается сдвиг, во всех случаях считался регулярным полупростым.

Целью настоящей работы является обобщение этого утверждения на случай, когда речь идет о произвольном регулярном элементе a , а алгебра Ли – одна из следующих: $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$. Сразу заметим, что в общем случае ситуация оказывается сложнее: дело в том, что априори бифуркационная диаграмма Σ и дискриминант D_z не обязательно являются замкнутыми множествами, поэтому естественно вместо самих этих объектов рассматривать их замыкания.

Структура работы следующая. В § 2 вводятся основные определения, а также доказываются технические теоремы, которые потребуются в дальнейшем. В § 3 формализуются понятия бифуркационной диаграммы Σ , спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$ и дискриминанта D_z . Основным результатом этого параграфа – предложение.

В § 4 изучается вопрос о сдвиге аргумента на субрегулярный полупростой элемент. Несмотря на то, что в контексте данной работы полученные в этом параграфе результаты также носят технический характер, ряд алгебраических вопросов представляет самостоятельный интерес. Так, например, ключевым результатом для изучения полученного семейства сдвигов оказывается теорема 2.

В § 5 доказывается основной результат данной работы – теорема 5.

Наконец, § 6 посвящен бифуркационной диаграмме и дискриминанту спектральной кривой алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$. Как оказывается, для этой алгебры D_z совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^N$. Кроме того рассматривается “исправленное” определение спектральной кривой, предложенное Ю. А. Браиловым, для которого также доказывается строгое включение. Таким образом, спектральная матрица для $\mathfrak{so}(2n)$ является контрпримером к гипотезе, сформулированной в работе [9]. Наконец, отдельно разбирается случай $\mathfrak{so}(4)$.

§ 2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. Принятые обозначения и определения. Всюду в работе термин “точка общего положения” обозначает точку, принадлежащую некоторому открытому всюду плотному множеству. Все топологические термины применяются исключительно в смысле обычной топологии $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Алгебры Ли, фигурирующие в работе, условимся обозначать готическими буквами (например, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и т.д.), а их элементы – латинскими. Под коалгеброй мы условимся понимать пространство, двойственное к алгебре Ли, и будем обозначать ее через $\mathfrak{g}^*$. Индекс алгебры, т.е. размерность ядра $\mathcal{A} = c_{ij}^k x_k$ в точке общего положения, считаем равным n . Так как форма Киллинга позволяет отождествить алгебру $\mathfrak{g}$ и коалгебру $\mathfrak{g}^*$, то индекс простой алгебры равен ее рангу. Через N обозначим число $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$.

Централизатор элемента x относительно присоединенного действия, т.е. множество таких $y \in \mathfrak{g}$, что $[x, y] = 0$, будем обозначать через $\mathfrak{g}^x$. Напомним, что *регулярным элементом* алгебры называется элемент, централизатор которого относительно присоединенного действия имеет минимальную возможную размерность. Элемент, не являющийся регулярным, будем называть *сингулярным*. *Субрегулярным элементом* простой алгебры называется элемент, размерность централизатора которого равна $\text{ind } \mathfrak{g} + 2$, т.е. минимально возможная для сингулярных элементов.

Считаем, что в простой алгебре $\mathfrak{g}$ зафиксирован базис Вейля. Картановскую подалгебру будем обозначать через $\mathfrak{h}$, а соответствующие корням $\alpha, \beta, \dots$ корневые векторы – через $e_\alpha, e_\beta, \dots$.

Кроме того, в дальнейшем будут встречаться некоторые фиксированные представления простых комплексных алгебр Ли. Условимся обозначать главной латинской буквой матрицу, соответствующую элементу, обозначаемому строчной, т.е. элементу x соответствует матрица X , элементу a – матрица A и т.д. Через X_{ij} будем обозначать элемент матрицы X , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца. Матрица E_{ij} обозначает матричную единицу,

т.е. матрицу, у которой все элементы нули, кроме стоящей на пересечении i -й строки и j -го столбца единицы.

2.2. Представления минимальной размерности и системы корней некоторых простых алгебр Ли. Опишем системы корней, а также представления минимальной размерности алгебр, которые нам потребуются в дальнейшем. Вся информация о них взята из работ [10]–[12].

Серия A_n . Простые корни обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Остальные положительные корни в этом случае имеют вид

$$a_{ij} = \alpha_i + \dots + \alpha_j, \quad \text{где } 1 \leq i < j \leq n.$$

Данной системе корней соответствует алгебра $\mathfrak{sl}(n+1)$, а представление минимальной размерности – матрицы с нулевым следом. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц. Простые корни представляют собой разности $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1, i+1}$, где $H \in \mathfrak{h}$, положительные корни имеют вид $a_{ij}(H) = H_{ii} - H_{jj}$, а корневые векторы – матричные единицы, т.е. $a_{ij} = E_{ij}$.

В качестве порождающих кольца инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ в этом представлении.

Серия B_n . Простые корни обозначаем через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Положительные корни делятся на три группы:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_j, & \text{где } 1 \leq i < j < n, \\ b_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \dots + 2\alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < j \leq n, \\ c_i &= \alpha_i + \dots + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

Данной системе корней соответствует алгебра $\mathfrak{so}(2n+1)$. Ее представление минимальной размерности имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & v^T & w^T \\ -w & A & B \\ -v & C & -A^T \end{pmatrix}$$

где v, w – вектор-столбцы размерности n , A – произвольная $(n \times n)$ -матрица, а B, C – кососимметрические матрицы, т.е. $B^T = -B$ и $C^T = -C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D^T \end{pmatrix}$$

где D является диагональной $(n \times n)$ -матрицей. Простые корни на данной подалгебре имеют вид $\alpha_i(H) = H_{i+1, i+1} - H_{i+2, i+2}$, где $1 \leq i < n+1$, и $\alpha_n(H) = H_{n+1, n+1}$, причем $H \in \mathfrak{h}$. Три группы положительных корней в этом случае представляются как

$$\begin{aligned} a_{ij}(H) &= H_{i+1, i+1} - H_{j+1, j+1}, \\ b_{ij}(H) &= H_{i+1, i+1} + H_{j+1, j+1}, \\ c_i(H) &= H_{i+1, i+1}. \end{aligned}$$

Соответствующие корневые векторы имеют следующий вид:

$$E_{i+1, j+1} - E_{j+n+1, i+n+1}, \quad E_{i+1, j+n+1} - E_{j+1, i+n+1}, \quad E_{i+1, 1} - E_{1, i+n+1}.$$

В качестве порождающих кольца инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ (коэффициенты при нечетных степенях μ) в представлении минимальной размерности.

Серия C_n . Простые корни, как и в предыдущих сериях, обозначаем через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Положительные корни в этом случае также разбиваются на три группы a_{ij} , b_{ij} и c_i , которые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_j, & \text{где } 1 \leq i < j < n, \\ b_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < j < n, \\ b_{in} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < n, \\ c_i &= 2\alpha_i + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

Данной системе корней соответствует алгебра $\mathfrak{sp}(2n)$. В представлении минимальной размерности это $(2n \times 2n)$ -матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix},$$

где A – произвольная матрица размера $n \times n$, а B , C симметрические, т.е. $B^T = B$ и $C^T = C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц вида

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D^T \end{pmatrix},$$

где D – диагональная матрица размера $n \times n$. Простые корни в этом случае имеют вид $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1, i+1}$ при $1 \leq i < n$ и $\alpha_n(H) = 2H_{nn}$. В этом случае три группы положительных корней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{ij}(H) &= H_{ii} - H_{jj}, & \text{где } 1 \leq i < j \leq n, \\ b_{ij}(H) &= H_{ii} + H_{jj}, & \text{где } 1 \leq i < j \leq n, \\ c_i(H) &= 2H_{ii}, & \text{где } 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

Соответствующие корневые векторы имеют следующий вид:

$$E_{ij} - E_{j+n, i+n}, \quad E_{i, j+n} + E_{j, i+n}, \quad E_{i, i+n}.$$

В качестве порождающих кольца инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ (коэффициенты при четных степенях μ) в представлении минимальной размерности.

Серия D_n . Простые корни, как и в предыдущих сериях, обозначаем через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Положительные корни в этом случае разбиваются на две группы,

a_{ij} и b_{ij} , которые задаются формулами

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_j, & \text{где } 1 \leq i < j < n, \\ b_{ij} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_i + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < j < n-1, \\ b_{i, n-1} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < n-1, \\ b_{in} &= \alpha_i + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_n, & \text{где } 1 \leq i < n-1. \end{aligned}$$

Данной системе корней соответствует алгебра $\mathfrak{so}(2n)$. В представлении минимальной размерности это $(2n \times 2n)$ -матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix},$$

где A – произвольная матрица размера $n \times n$, а B, C кососимметрические, т.е. $B^T = -B$ и $C^T = -C$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц вида

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D^T \end{pmatrix},$$

где D – диагональная матрица размера $n \times n$. Простые корни в этом случае имеют вид $\alpha_i(H) = H_{ii} - H_{i+1, i+1}$ при $1 \leq i < n$ и $\alpha_n(H) = H_{n-1, n-1} + H_{nn}$. В этом случае две группы положительных корней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{ij}(H) &= H_{ii} - H_{jj}, & \text{где } 1 \leq i < j \leq n, \\ b_{ij}(H) &= H_{ii} + H_{jj}, & \text{где } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Соответствующие им корневые векторы задаются формулами

$$E_{ij} - E_{j+n, i+n}, \quad E_{i, j+n} - E_{j, i+n}.$$

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять непостоянные коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ (коэффициенты при нечетных степенях μ), за исключением $\det X$ в представлении минимальной размерности. Вместо определителя необходимо взять пфаффиан $\text{Pf}(X) = \sqrt{\det \bar{X}}$.

Особая система G_2 . Простые корни обозначим через α_1, α_2 . Положительные корни имеют вид

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Этой системе корней соответствует особая алгебра $\mathfrak{g}_2$. Ее представление минимальной размерности – это (7×7) -матрицы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}y_1 & \sqrt{2}y_2 & \sqrt{2}y_6 & \sqrt{2}y_4 & \sqrt{2}y_5 & \sqrt{2}y_3 \\ -\sqrt{2}y_4 & a + 2b & x_1 & x_5 & 0 & -y_6 & -y_2 \\ -\sqrt{2}y_5 & x_4 & -b - a & x_6 & y_6 & 0 & -y_1 \\ -\sqrt{2}y_3 & x_2 & x_3 & -b & y_2 & y_1 & 0 \\ -\sqrt{2}y_1 & 0 & -y_3 & -y_5 & -a - 2b & -x_4 & -x_2 \\ -\sqrt{2}y_2 & y_3 & 0 & -y_4 & -x_1 & b + a & -x_3 \\ -\sqrt{2}y_6 & y_5 & y_4 & 0 & -x_5 & -x_6 & b \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $a, b, x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ – соответственно координаты на алгебре g_2 . Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D^T \end{pmatrix},$$

где D – диагональная (3×3) -матрица со следом нуль, а все остальные элементы равны нулю. Для $H \in \mathfrak{h}$ простые корни имеют вид

$$\alpha_1(H) = -H_{22}, \quad \alpha_2(H) = H_{22} - H_{33}.$$

Учитывая равенство $H_{22} + H_{33} + H_{44} = 0$, получаем, что

$$\alpha_1(H) = H_{33} + H_{44}.$$

Остальные положительные корни имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2(H) &= -H_{33} = H_{22} + H_{44}, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2(H) &= -H_{22} - H_{33}, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2(H) &= -2H_{22} - H_{33} = -H_{22} + H_{44}, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2(H) &= -H_{22} - 2H_{33} = -H_{33} + H_{44}. \end{aligned}$$

Соответствующие простым корням α_1 и α_2 корневые векторы задаются формулами

$$\sqrt{2}(E_{12} - E_{51}) - (E_{37} - E_{46}), \quad E_{23} - E_{65}.$$

Соответствующие остальным положительным корням корневые векторы в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(E_{13} - E_{61}) - (E_{27} - E_{45}), & \quad -\sqrt{2}(E_{41} - E_{17}) + (E_{62} - E_{53}), \\ E_{42} - E_{57}, & \quad E_{43} - E_{67}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В представлении (2) координаты выбраны таким образом, что корневые векторы корней $\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ – это в точности векторы, соответствующие координатам x_1, x_2, x_3 , а корневые векторы корней $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$ и $2\alpha_1 + \alpha_2$ – векторы, соответствующие y_1, y_2, y_3 .

В качестве порождающих кольцо инвариантов можно взять коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\mu) = \det(X - \mu E)$ в представлении минимальной размерности при μ и μ^5 .

2.3. Некоторые свойства сингулярных элементов простых комплексных алгебр Ли. Для дальнейшей работы нам потребуются результаты, касающиеся сингулярных элементов простых алгебр Ли. Будем называть собственное значение λ оператора X *критическим*, если $\text{corank}(X - \lambda E) \geq 2$, т.е. у оператора есть как минимум две жордановы клетки с собственным значением λ .

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная комплексная простая алгебра Ли, и пусть $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – произвольное представление этой алгебры. Если x – сингулярный элемент, то у оператора $X = \rho(x)$ есть критическое собственное значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так и у оператора X нет критических собственных значений, т.е. всякому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Тогда легко проверяется, что $\mathfrak{gl}^X$ (центральный элемент в смысле алгебры $\mathfrak{gl}(V)$) коммутативен. Отсюда вытекает, что $\rho(\mathfrak{g}^x) = \rho(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{gl}^X$ также коммутативен, а следовательно, коммутативен и $\mathfrak{g}^x$ в силу точности представления. Осталось воспользоваться тем фактом, что центральный элемент простой комплексной алгебры Ли коммутативен тогда и только тогда, когда элемент регулярный (см. [13]). Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть теперь x – элемент произвольной простой комплексной алгебры Ли, а $x = x_{\text{sem}} + x_{\text{nil}}$ – его абстрактное разложение Жордана (см. [12]), где x_{sem} – полупростой элемент, x_{nil} – нильпотентный и $[x_{\text{sem}}, x_{\text{nil}}] = 0$. Кроме того, если фиксировано представление простой алгебры Ли, то абстрактное разложение Жордана совпадает с обычным и $X_{\text{sem}} = p(X)$, $X_{\text{nil}} = q(X)$, где p, q – некоторые многочлены без свободного члена (см. [12]).

Следующие две леммы хорошо известны, однако для полноты изложения мы приведем их вместе с доказательствами.

ЛЕММА 2. Для произвольного элемента x простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ его центральный элемент совпадает с пересечением центральных элементов нильпотентной и полупростой частей элемента, т.е. $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^{x_{\text{sem}}} \cap \mathfrak{g}^{x_{\text{nil}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем представление простой алгебры. Так как $X_{\text{sem}} = p(X)$, $X_{\text{nil}} = q(X)$, то любой элемент Y , коммутирующий с X , коммутирует с X_{sem} и X_{nil} . С другой стороны, всякий элемент, коммутирующий одновременно с X_{sem} и X_{nil} , коммутирует с их суммой, т.е. с X . Лемма доказана.

Известно, что $\mathfrak{g}^{x_{\text{sem}}}$ – редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}$. Рассмотрим разложение

$$\mathfrak{g}^{x_{\text{sem}}} = \mathfrak{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k \oplus \mathbb{C}^r,$$

где $\mathfrak{l}_i$ – простые алгебры, а $\mathbb{C}^r$ – r -мерный центр, состоящий исключительно из полупростых элементов. Так как нильпотентный элемент x_{nil} лежит в $\mathfrak{g}^x$, то для него можно записать разложение

$$x_{\text{nil}} = x_{\text{nil}}^1 + \cdots + x_{\text{nil}}^k,$$

где $x_{\text{nil}}^i \in \mathfrak{l}_i$.

ЛЕММА 3. Элемент x – регулярный элемент простой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда x_{nil}^i – главный нильпотентный элемент в соответствующей простой алгебре $\mathfrak{l}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 получаем, что

$$\mathfrak{g}^x = \mathfrak{l}_1^{x_{\text{nil}}^1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{l}_k^{x_{\text{nil}}^k} \oplus \mathbb{C}^r.$$

Так как сумма рангов $\mathfrak{l}_i$ в точности равна $n - r$, элемент x регулярен тогда и только тогда, когда x_{nil}^i регулярен в соответствующей простой алгебре, т.е. является главным нильпотентным элементом. Лемма доказана.

Применим полученные результаты для описания сингулярных элементов алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$ (системы корней соответствующих алгебр и их представления минимальной размерности были описаны в п. 2.2).

ТЕОРЕМА 1. *В представлении минимальной размерности алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$ сингулярные элементы в точности задаются матрицами, у которых есть критические собственные значения, т.е. $x \in \mathfrak{g}$ регулярен тогда и только тогда, когда $\rho(x) = X \in \mathfrak{gl}(V)$ регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 вытекает, что для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что матрицы, соответствующие регулярным элементам алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$ в представлении минимальной размерности, не имеют критических собственных значений. Считаем, что во всех матрицах, которые встречаются ниже, на неотмеченных местах стоят нули.

Пусть x – регулярный элемент одной из перечисленных в условии алгебр Ли. Без ограничения общности считаем, что $x_{\text{sem}} \in \mathfrak{h}$ и системы корней $\mathfrak{g}^{x_{\text{sem}}}$ и $\mathfrak{g}$ согласованы (т.е. базис системы корней $\mathfrak{g}^{x_{\text{sem}}}$ является подмножеством базиса системы $\mathfrak{g}$). Действуя элементами из подгруппы $\text{Exp}(\mathfrak{g}^x)$, приведем элементы x_{nil}^i к стандартному виду, т.е. к сумме корневых векторов соответствующей алгебры $\mathfrak{l}_i$. Такой вид элемента x будем называть *приведенным*.

Случай $\mathfrak{sl}(n+1)$. Из описания корней в п. 2.2 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{\text{sem}} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & \\ & D_2 & & & \\ & & D_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_k \end{pmatrix},$$

где D_i – диагональные блоки с λ_i на диагонали, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Из того же описания получаем, что $\mathfrak{l}_i$ – это алгебры $\mathfrak{sl}(n_i+1)$, причем $\rho(\mathfrak{l}_i)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \mathfrak{sl}(n_i+1) & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix},$$

где $n_i + 1$ – размерность блока D_i . Таким образом, x_{nil}^i в приведенном виде

представляют собой жорданову клетку размерности $n_i + 1$ (т.е. для $\mathfrak{sl}(n + 1)$ приведенный вид x совпадает с нормальной жордановой формой). Теорема для $\mathfrak{sl}(n + 1)$ доказана.

Случай $\mathfrak{sp}(2n)$. Из описания корней в п. 2.2 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{\text{sem}} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & D_k & & & \\ & & & -D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -D_k \end{pmatrix},$$

где D_i – диагональные блоки с λ_i на диагонали.

ЛЕММА 4. Пусть X_s имеет описанный выше вид. Тогда $\lambda_i \neq \pm \lambda_j$ при $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_{pq}(x_{\text{sem}}) = 0$. Так как базисы систем корней $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{X_{\text{sem}}}$ согласованы, то немедленно получаем, что все простые корни $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_q$, входящие в разложение a_{pq} , обращаются в нуль на x_{sem} . Таким образом, в матрице X_{sem} равны элементы с p -го по $(q + 1)$ -й, т.е. они лежат в некотором блоке D_i . Следовательно, $a_{pq}(x_{\text{sem}}) \neq 0$ для индексов p, q из разных блоков D_i и D_j , т.е. $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Пусть теперь $b_{pq}(x_{\text{sem}})$ равно нулю. В разложение такого корня входят все простые, поэтому из согласованности систем корней немедленно вытекает, что $x_{\text{sem}} = 0$, т.е. тождество $\lambda_i \neq -\lambda_j$ при $i \neq j$ выполняется тривиальным образом. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь два варианта.

Первый вариант: длинный корень не обращается в нуль, т.е. $\alpha_n(x_{\text{sem}}) \neq 0$. Таким образом, все $\mathfrak{l}_i$, как и в случае $\mathfrak{sl}(n + 1)$, изоморфны $\mathfrak{sl}(n_i + 1)$, где $n_i + 1$ – размерность блока D_i . При этом, однако, в отличие от $\mathfrak{sl}(n + 1)$ образ $\rho(\mathfrak{l}_i)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & Y & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -Y^T & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $Y \in \mathfrak{sl}(n_i + 1)$. При этом для x_{nil}^i матрица Y равна $J_{n_i+1}(0)$, т.е. это жорданова клетка с нулевым собственным значением. Таким образом, для данного случая теорема выполнена.

Второй вариант: длинный корень на x_{sem} обращается в нуль. В этом случае $\lambda_k = 0$. Алгебры Ли $\mathfrak{l}_i$ при $i < k$ снова изоморфны $\mathfrak{sl}(n_i + 1)$, причем $\rho(\mathfrak{sl}(n_i + 1))$ такое же, как описывалось выше, а вот $\mathfrak{l}_k$ уже изоморфно $\mathfrak{sp}(2n_k)$, где уже n_k –

размерность соответствующего блока D_k . В этом случае $\rho(l_k)$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & A & \dots & B \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & C & \dots & -A^T \end{pmatrix},$$

где A – произвольная $(n_k \times n_k)$ -матрица, а B, C – симметричные $(n_k \times n_k)$ -матрицы. Рассуждая аналогично первому случаю, получаем, что все x_{nil}^i при $i < k$ задают по две жордановы клетки с собственными значениями λ_i и $-\lambda_i$ соответственно. Рассмотрим далее x_{nil}^k . В приведенном виде матрица этого элемента имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & J_{n_k}(0) & \dots & E_{n_k n_k} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & -J_{n_k}(0)^T \end{pmatrix},$$

где $J_{n_k}(0)$ – жорданова клетка размера $n_k \times n_k$, а $E_{n_k n_k}$ – матричная единица. Легко видеть, что ранг этой матрицы равен $2n_k - 1$, т.е. нулевому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что каждому $\lambda_i \neq -\lambda_i$, а также нулевому собственному значению в приведенном виде соответствует ровно по одной жордановой клетке. Теорема доказана для случая $\mathfrak{so}(2n)$.

Случай $\mathfrak{so}(2n + 1)$. Из описания корней в п. 2.2 немедленно вытекает, что в приведенном виде

$$X_{\text{sem}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & D_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & D_k & & \\ & & & & -D_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -D_k \end{pmatrix},$$

где D_i – диагональные блоки с λ_i на диагонали, причем $\lambda_i \neq \pm \lambda_j$ (этот факт доказывается аналогично лемме 4). Как и в предыдущем случае, возможны два варианта.

Первый вариант: на x_{sem} короткий базисный корень α_n не обращается в нуль. Тогда $\lambda_i \neq 0$, и все рассуждения аналогичны первому случаю для $\mathfrak{sp}(2n)$, т.е. все $\pm \lambda_i$ различны между собой и отличны от нуля, и каждому из них соответствует по одной жордановой клетке. Кроме того, у оператора X есть одно нулевое собственное значение, которому соответствует нульмерная жорданова клетка.

Если короткий базисный корень обращается в нуль, то $\lambda_k = 0$. В этом случае $\mathfrak{l}_i$, $i < k$, изоморфны $\mathfrak{sl}(n_i + 1)$, а $\mathfrak{l}_k$ представляет собой $\mathfrak{so}(2n_k + 1)$, где n_k – размерность блока D_k ; $\rho(\mathfrak{l}_i)$ при $i < k$ устроено так же, как и в случае $\mathfrak{sp}(2n)$. В свою очередь, $\rho(\mathfrak{l}_k)$ принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & v^T & \dots & w^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -w & \dots & A & \dots & B \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v & \dots & C & \dots & -A^T \end{pmatrix},$$

где A – произвольная $(n_k \times n_k)$ -матрица, B, C – кососимметричные $(n_k \times n_k)$ -матрицы, а v, w – вектор-столбцы высоты n_k . Рассуждая аналогично случаю $\mathfrak{sp}(2n)$, получаем, что все x_{nil}^i при $i < k$ задают по две жордановы клетки с собственными значениями λ_i и $-\lambda_i$ соответственно. Для D_k другая ситуация:

$$X_{\text{nil}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & e_{n_k}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -e_{n_k} & \dots & J_{n_k}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -J_{n_k}(0)^T \end{pmatrix},$$

где $J_{n_k}(0)$ – жорданова клетка с нулевым собственным значением размера $n_k \times n_k$, e_{n_k} – вектор-столбец высоты n_k , у которого на последнем месте стоит единица. Легко видеть, что ранг этой матрицы равен $2n_k - 1$, т.е. нулевому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. Таким образом, теорема доказана для случая $\mathfrak{so}(2n + 1)$.

Случай $\mathfrak{g}_2$. Здесь рассмотрим три варианта. Первый вариант:

$$\alpha_1(x_{\text{sem}}) = \alpha_2(x_{\text{sem}}) = 0.$$

В этом случае $x = x_{\text{nil}}$ – главный нильпотентный элемент $\mathfrak{g}_2$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Легко видеть, что ранг полученной матрицы равен 6, т.е. это в точности одна жорданова клетка.

Второй вариант:

$$\alpha_1(x_{\text{sem}}) = 0, \quad \alpha_2(x_{\text{sem}}) \neq 0.$$

Из этого получаем, что в описании $\mathfrak{g}_2$ в п. 2.2 $a = -2b$, причем $b \neq 0$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Легко видеть, что $\text{corank } X = 1$ и $\text{corank}(X \pm bE) = 1$, т.е. собственным значениям b , $-b$ и 0 соответствует по одной клетке размера 2, 2 и 3 соответственно.

Наконец, третий вариант: $\alpha_2(x_{\text{sem}}) = 0$ и $\alpha_1(x_{\text{sem}}) \neq 0$. Обозначим $a + 2b = -a - b$ через $-c$. Из $\alpha_1(x_{\text{sem}}) \neq 0$ вытекает, что $c \neq 0$. Учитывая, что по определению $b = -2c$, получаем, что $b \neq \pm c$ и $b \neq 0$. Таким образом, соответствующий элемент имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (5)$$

т.е. попарно различным собственным значениям 0 , c , $-c$, b , $-b$ соответствуют жордановы клетки размеров 1, 2, 2, 1 и 1.

Теорема 1 полностью доказана.

2.4. Функции, полученные методом сдвига аргумента, как функции на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная простая алгебра Ли. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ и для порождающих кольца инвариантов $I_1, \dots, I_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следующее разложение:

$$I_i(x + \lambda y) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x, y),$$

где $(x, y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ и $d_i = \deg I_i$. Всего мы получили, таким образом, $N + n$ функций.

Отождествив алгебру Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ с коалгеброй, получим, что на пространстве функций из $P(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$ возникает естественная структура скобки Пуассона. Аналогично [4] проверяется, что полученные функции $f_{ij}(x, y)$ коммутируют относительно нее.

В дальнейшем, когда речь будет идти об обычном методе сдвига аргумента, нам потребуется в некотором смысле менять местами x и a – вектор, на который производится сдвиг. Для этого нам потребуются следующие две леммы.

ЛЕММА 5. Пусть g – элемент группы G , соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда для построенных функций f_{ij} выполняется следующее свойство:

$$f_{ij}(x, y) = f_{ij}(\text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это свойство следует из того, что речь идет об инвариантах присоединенного представления: $I_i(\text{Ad}_g(x + \lambda y)) = I_i(x + \lambda y)$ для всех λ .

ЛЕММА 6. Для произвольной пары $(x, y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ выполнено равенство

$$f_{ij}(x, y) = f_{i, d_i - j}(y, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу однородности порождающих I_i получаем следующую цепочку равенств:

$$I_i(y + \lambda x) = \lambda^{d_i} I_i\left(\frac{1}{\lambda} y + x\right) = \lambda^{d_i} \sum_{j=0}^{d_i} \frac{1}{\lambda^j} f_{ij}(x, y) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^{d_i - j} f_{ij}(x, y).$$

Учитывая равенство

$$I_i(y + \lambda x) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(y, x)$$

и то, что равенства выполняются для всех ненулевых λ , получаем равенство коэффициентов в разложении при одинаковых степенях λ , т.е.

$$f_{ij}(x, y) = f_{i, d_i - j}(y, x).$$

Лемма доказана.

§ 3. Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой на простой алгебре $\mathfrak{g}$

3.1. Бифуркационная диаграмма. Пусть заданы некоторая система ОДУ $\dot{x} = v(x)$ на фазовом пространстве P и некоторый набор комплекснозначных интегралов $f_1, \dots, f_k$. Тогда возникает отображение $F: P \rightarrow \mathbb{C}^k$, задаваемое формулой $x \rightarrow f_1(x), \dots, f_k(x)$, которое будем называть *отображением момента*. Бифуркационной диаграммой Σ отображения момента будем называть множество особых значений этого отображения, т.е. множество таких точек $z \in \mathbb{C}^N$, что среди всех x из прообраза $F^{-1}(z)$ найдется x_0 , для которого $\text{rk } dF|_{x_0} < k$.

Применим данную конструкцию в нашем случае. Фазовое пространство P – простая комплексная алгебра $\mathfrak{g}$, отождествленная со своей коалгеброй $\mathfrak{g}^*$ при помощи формы Киллинга. Запишем уравнения Эйлера на коалгебре для случая, когда гамильтониан – это квадратичная однородная функция, задаваемая секционным оператором φ с параметрами a, b :

$$\dot{x} = [x, \varphi x].$$

Функции, полученные методом сдвига аргумента, являются интегралами данной системы

$$I_i(x + \lambda a) = \sum_j^{d_i} \lambda^j f_{ij},$$

где $I_1, \dots, I_n$ – порождающие кольца инвариантов и $d_i = \deg I_i$. Нас интересуют, разумеется, непостоянные функции f_{ij} , т.е. $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq d_i - 1$. Их в нашем случае ровно

$$N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$$

штук, так как в кольце инвариантов простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для любого набора порождающих $I_1, \dots, I_n$ выполнено равенство $\sum_i d_i = N$ (см., например, [14]).

Коммутативный набор Φ_a – неупорядоченное множество функций f_{ij} . Введем на множестве пар $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq d_i - 1$ порядок и порядковый номер пары i, j будем обозначать через $k(i, j)$ (фактически данная функция задает биекцию из конечного множества пар на $1, \dots, N$). При этом $k(i, j)$ будем называть *функцией порядка*. Считаем, что на $\mathbb{C}^N$ фиксированы координаты $z_1, \dots, z_N$. Отображение момента $F_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^N$ в этом случае действует по формуле $z_{k(i, j)} = f_{ij}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конструкция Σ не инвариантна. В качестве параметров в ее определение входят набор порождающих I_i , элемент $a \in \mathfrak{g}$ и функция порядка $k(i, j)$. Эти же параметры определяют отображение момента F_a .

Из критерия Болсинова (см. [15]) следует, что особые точки отображения момента F_a (т.е. такие $x \in \mathfrak{g}$, что ранг $d F_a$ падает) – это в точности цилиндр над множеством сингулярных элементов $\mathfrak{g}$ с образующей a (см., например, [16]), т.е. множество особых точек является алгебраическим множеством. Таким образом, Σ – это образ алгебраического множества при полиномиальном отображении из одного линейного пространства в другое, который, вообще говоря, не обязательно является замкнутым. Таким образом, вместо бифуркационной диаграммы Σ естественно рассматривать ее замыкание $\bar{\Sigma}$.

3.2. Спектральная кривая. Дадим сначала классическое определение спектральной кривой. Рассмотрим лагранжево представление некоторой системы со спектральным параметром λ

$$\dot{L}_\lambda(x) = [L_\lambda(x), A_\lambda(x)].$$

Каждой точке x фазового пространства можно поставить в соответствие кривую в $\mathbb{C}^2$ с координатами λ, μ , задаваемую уравнением

$$\det(L_\lambda(x) - \mu E) = 0.$$

Эта кривая и называется *спектральной кривой лаксова представления со спектральным параметром* (в дальнейшем это название мы будем сокращать просто до “спектральной кривой”). *Дискриминантом D спектральной кривой* будем называть множество точек фазового пространства, в которых спектральная кривая имеет особую точку, т.е. разрешима следующая система уравнений:

$$R(\lambda, \mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} R(\lambda, \mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} R(\lambda, \mu) = 0. \quad (6)$$

Применим эту конструкцию в нашем случае. Рассмотрим ту же систему ОДУ на $\mathfrak{g}$, что и при определении бифуркационной диаграммы Σ :

$$\dot{x} = [x, \varphi x],$$

где φ – секционный оператор с параметрами a, b . Зафиксируем некоторое представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и введем спектральный параметр λ :

$$L_\lambda(X) = X + \lambda A, \quad A_\lambda(X) = \varphi X + \lambda B.$$

Замечаем, что исходное уравнение преобразуется к виду

$$\dot{X} = [X, \varphi X] + \lambda([A, \varphi X] + [X, B]) + \lambda^2[A, B].$$

Коэффициент при λ обращается в нуль, так как это просто переформулировка определения секционного оператора, а $[A, B] = 0$ по известному свойству этих операторов. Таким образом, система приобрела вид

$$\dot{L}_\lambda(X) = [L_\lambda(X), A_\lambda(X)],$$

т.е. мы действительно получили ее лаксово представление со спектральным параметром λ . Спектральная кривая в точке X в нашем случае задается уравнением

$$R(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda A - \mu E) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из всего вышесказанного понятно, что определение спектральной кривой неинвариантно. В качестве параметров в это определение входит представление ρ и элемент a .

Работать с подобной спектральной кривой, однако, в нашем случае не очень удобно. В частности, дискриминант D лежит в $\mathfrak{g}$, а Σ – в $\mathbb{C}^N$, поэтому нам потребуется определение спектральной кривой на $\mathbb{C}^N$, индуцированное данным.

Пусть в кольце инвариантов присоединенного представления фиксирован набор порождающих $I_1, \dots, I_n$. Рассмотрим характеристический многочлен $\chi(\mu)$ для представления ρ на образе $\text{Im } \rho$. Каждый коэффициент этого многочлена – инвариант, а значит, в силу свободной порожденности кольца инвариантов он единственным образом представляется как многочлен от $I_1, \dots, I_n$. Подставляя в коэффициенты этого многочлена вместо I_i выражение $\sum_j \lambda^j z_{k(i,j)}$ и приводя подобные слагаемые, получаем многочлен $R_z(\lambda, \mu)$ от λ, μ , определенный в каждой точке $z \in \mathbb{C}^N$.

Таким образом, в каждой точке пространства $\mathbb{C}^N$ определена спектральная кривая $R_z(\lambda, \mu) = 0$. Дискриминантом спектральной кривой будем называть множество $D_z \subseteq \mathbb{C}^N$ таких точек, для которых соответствующая кривая имеет особенность. Система уравнений, задающих D_z , имеет вид, аналогичный системе для D :

$$R_z(\lambda, \mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} R_z(\lambda, \mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} R_z(\lambda, \mu) = 0. \quad (7)$$

Очевидно, что по построению $F_a(D) \subseteq D_z$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Новое определение спектральной кривой в некотором смысле еще “неинвариантнее” старого. В качестве параметров в определение этой кривой входят представление ρ , набор порождающих $I_1, \dots, I_n$, элемент алгебры a и функция порядка $k(i, j)$. Однако в данном случае дискриминант D_z лежит в $\mathbb{C}^N$.

Прежде чем перейти к свойствам дискриминанта спектральной кривой, отметим, что, вообще говоря, он может совпадать со всем $\mathbb{C}^N$. Например, рассмотрим спектральную кривую для произвольной $\mathfrak{g}$ с параметрами $\rho = \text{ad}$, а остальные параметры произвольные. Легко видеть, что у $R_z(\lambda, \mu)$ корень нуль имеет кратность как минимум n , т.е. представляется в виде $\mu^n Q(\lambda, \mu)$, где Q – некоторый многочлен от λ, μ . Отсюда немедленно вытекает, что пара $\lambda, 0$ удовлетворяет системе (7). Ниже будет показано, что D_z совпадает с $\mathbb{C}^N$ для $\text{so}(2n)$ в представлении минимальной размерности и для почти всех a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Рассмотрим произвольное представление ρ простой алгебры $\mathfrak{g}$, регулярный (не обязательно полупростой) элемент $a \in \mathfrak{g}$, произвольный набор порождающих $I_1, \dots, I_n$, для которого $d_i = \deg I_i$, и произвольную функцию порядка $k(i, j)$ на парах $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq d_i$. По данным параметрам определим спектральную кривую $R_z(\lambda, \mu) = 0$ и рассмотрим ее дискриминант D_z . По элементу a , набору порождающих инвариантов и функции порядка построим Σ . Для этих двух объектов выполнено включение

$$\Sigma \subseteq D_z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем более сильный результат, а именно, что

$$\Sigma \subseteq F_a(D).$$

Пусть $z \in \Sigma$, т.е. в прообразе $F_a^{-1}(z)$ есть такая точка x , что в ней падает ранг $d F_a$. По критерию Болсинова [15] для регулярного a матрица Якоби $d F_a$ (при любых прочих параметрах) имеет в точке x ранг меньше максимального тогда и только тогда, когда $x + \lambda a$ содержит сингулярный элемент. Пусть это элемент $x + \lambda_0 a$.

Зафиксируем представление ρ . По лемме 1 у оператора $X + \lambda_0 A$ есть критическое собственное значение. Обозначим это значение через μ_0 . Заметим, что первые два уравнения в системе (6) выполняются в точке (λ_0, μ_0) , так как μ_0 имеет кратность как минимум 2. С другой стороны, третье уравнение

системы по определению представляет собой линейную комбинацию миноров коразмерности 1 матрицы $X_0 - \mu_0 E$ с постоянными коэффициентами. Так как μ_0 – критическое собственное значение, то все эти миноры обращаются в нуль. Таким образом, в точке X у спектральной кривой есть особая точка (λ_0, μ_0) . Из этого вытекает, что $X \in D$, и так как $F_a(D) \subseteq D_z$, предложение доказано.

Разберем примеры спектральных кривых $R_z(\lambda, \mu)$, которые нам потребуются в дальнейшем.

ПРИМЕР 1. Для алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$ и $\mathfrak{sp}(2n)$ спектральные кривые в представлении минимальной размерности выглядят так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n+1) : \quad R_z(\lambda, \mu) &= \mu^{n+1} + \sum_{1 \leq i \leq n} I_i(a) \lambda^{d_i} \mu^{i-1} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq d_i-1}} z_{k(i,j)} \lambda^j \mu^{i-1}; \\ \mathfrak{so}(2n+1) : \quad R_z(\lambda, \mu) &= \mu^{2n+1} + \sum_{1 \leq i \leq n} I_i(a) \lambda^{d_i} \mu^{2i-1} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq d_i-1}} z_{k(i,j)} \lambda^j \mu^{2i-1}; \\ \mathfrak{sp}(2n) : \quad R_z(\lambda, \mu) &= \mu^{2n} + \sum_{1 \leq i \leq n} I_i(a) \lambda^{d_i} \mu^{2i-2} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq d_i-1}} z_{k(i,j)} \lambda^j \mu^{2i-2}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(2n)$ в представлении минимальной размерности. Определитель $\det X$ не входит в фиксированные нами порождающие кольца инвариантов и представляется в виде $\text{Pf}^2(X)$. Спектральная кривая в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu) &= \mu^{2n} + \sum_{2 \leq i \leq n} I_i(a) \lambda^{d_i} \mu^{2i-2} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq d_i-1}} \lambda^j \mu^{2i-2} \\ &\quad + \left(\sum_{0 \leq j \leq d_1-1} z_{k(1,j)} \lambda^j \mu^{2i-2} + I_1(a) \lambda^n \right)^2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Спектральная кривая для алгебры $\mathfrak{g}_2$ имеет следующий вид:

$$R(\lambda, \mu) = \mu^7 + I_2(X + \lambda A) \mu^5 + F(X + \lambda A) \mu^3 + I_1(X + \lambda A) \mu,$$

где I_1, I_2 – порождающие кольца инвариантов, а F выражается через них некоторым полиномиальным образом. Легко проверяется (данный факт достаточно проверить только для диагональных матриц), что $F = \frac{1}{4} I_2^2$. Для инвариантов имеются разложения

$$I_2(X + \lambda A) = f_{20} + \lambda f_{21} + \lambda^2 f_{22}, \quad I_1(X + \lambda A) = f_{10} + \lambda f_{11} + \dots + \lambda^6 f_{16},$$

где $f_{22} = I_2(A)$, $f_{16} = I_1(A)$. Таким образом, формула для спектральной кривой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu) &= \mu^7 + z_{k(2,0)} \mu^5 + z_{k(2,1)} \lambda \mu^5 + I_2(a) \lambda^2 \mu^5 + z_{k(2,0)}^2 \mu^3 \\ &\quad + (z_{k(2,1)}^2 + 2z_{k(2,0)} z_{k(2,1)}) \lambda \mu^3 + 2I_2(a) z_{k(2,0)} \lambda^2 \mu^3 + 2I_2(a) z_{k(2,1)} \lambda^3 \mu^3 \\ &\quad + I_2(a)^2 \lambda^4 \mu^3 + z_{k(1,0)} \mu + z_{k(1,1)} \lambda \mu + z_{k(1,2)} \lambda^2 \mu \\ &\quad + z_{k(1,3)} \lambda^3 \mu + z_{k(1,4)} \lambda^4 \mu + z_{k(1,5)} \lambda^5 \mu + I_1(a) \lambda^6 \mu. \end{aligned}$$

Заметим, что система (7) задает алгебраическое подмножество пространства $\mathbb{C}^{N+2}$. При этом, однако, D_z есть не что иное как образ этого алгебраического множества при естественной проекции на $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+2}$. Таким образом, данное множество, как и Σ , не обязательно является замкнутым. Поэтому вместо D_z естественно рассматривать $\overline{D}_z$. Отметим, что из теоремы 2 немедленно вытекает, что $\overline{\Sigma} \subseteq \overline{D}_z$.

§ 4. Метод сдвига аргумента для субрегулярных полупростых элементов простой алгебры Ли и центры централизаторов ее элементов

Теперь перейдем к формулировке и доказательству теоремы, которая не только понадобится нам в дальнейшем, но и сама по себе представляет значительный интерес: данная теорема связывает центр централизатора и дифференциалы инвариантов. Через Im ad_a обозначим образ оператора ad_a в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что для полупростого a имеем $\mathfrak{g} = \text{Im ad}_a \oplus \mathfrak{g}^a$.

Напомним, что на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует естественная градуировка, связанная с высотой корней. Пусть $\beta \in \Delta$ – некоторый корень. Пусть его разложение по базисным корням имеет вид $\beta = \sum_i n_i \alpha_i$. Тогда высотой корня β будем называть сумму $\sum_i n_i$. Рассмотрим теперь пространства $\mathfrak{g}_l$, $l \neq 0$, состоящие из корневых векторов, соответствующих корням высоты l , $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Легко проверяется, что данное разложение $\mathfrak{g} = \bigoplus_l \mathfrak{g}_l$ действительно задает градуировку.

Эта градуировка обладает замечательным свойством. Рассмотрим $e \in \mathfrak{g}_1$ – главный нильпотентный элемент в стандартном виде. Тогда (см., например, [17]) выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} \text{ad}_e: \mathfrak{g}_l &\rightarrow \mathfrak{g}_{l+1}, \quad l < 0 \quad (\text{инъекция}), \\ \text{ad}_e: \mathfrak{g}_l &\rightarrow \mathfrak{g}_{l+1}, \quad l \geq 0 \quad (\text{сюръекция}). \end{aligned} \tag{8}$$

В частности, из-за равенства размерностей $\text{ad}_e: \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ и $\text{ad}_e: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ суть изоморфизмы векторных пространств.

Наконец, рассмотрим моном $e_{\beta_1}^{n_1} \dots e_{\beta_k}^{n_k} m_{\mathfrak{h}}$, где $m_{\mathfrak{h}}$ – моном от элементов $\mathfrak{h}$, а $\beta_1, \dots, \beta_k$ – некоторый набор корней. *Высотой монома* будем называть суммарную высоту корней β_i . Легко видеть, что моном коммутирует с $\mathfrak{h}$ тогда и только тогда, когда его высота равна нулю. Теперь перейдем непосредственно к формулировке и доказательству теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая комплексная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{h}$ – полупростой элемент, а $I_1, \dots, I_n$ – порождающие кольца инвариантов присоединенного представления данной алгебры. Тогда $d I_1(a), \dots, d I_n(a)$ порождают центр централизатора $\mathfrak{g}^a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что в самом общем случае функции, полученные методом сдвига аргумента на элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, коммутируют с $\text{Ann } a$ (см., например, [3]). В нашем случае это означает, что функции $l_i(x) = (d I_i(a), x) -$

линейные функции, получаемые методом сдвига аргумента, коммутируют с $\mathfrak{g}^a$, т.е. $dI_i(a)$ лежат в центре централизатора для любого элемента a . Доказательство того факта, что для полупростого a дифференциалы инвариантов порождают пространство размерности, совпадающей с размерностью центра $\mathfrak{g}^a$, разобьем на несколько лемм.

ЛЕММА 7. *Для любого $\tau \in \mathbb{C}$ элемент $e_\tau = \tau a + e \in \mathfrak{g}$ регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в силу произвольности полупростого a утверждение леммы достаточно доказать для $\tau = 1$, т.е. для e_1 .

Рассмотрим произвольный корневой вектор $e_{-\alpha}$ из $\mathfrak{g}_k$ для $k < 0$ такой, что $ad_a e_{-\alpha} = 0$. Так как системы корней централизатора элемента a и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ согласованы, то $-\alpha$ раскладывается по простым корням, зануляющимся на a , с отрицательными коэффициентами. Легко видеть, что в этом случае выражение $\alpha_i + (-\alpha)$ для $\alpha_i(a) \neq 0$ представляет собой линейную комбинацию простых корней как с положительными, так и с отрицательными целыми коэффициентами, поэтому по определению простых корней корнем не является. Отсюда $ad_e e_\alpha = ad_{\tilde{e}} e_\alpha$, где $\tilde{e}$ – естественная проекция e на $\mathfrak{g}^a$. В частности, для любого корня, для которого $\alpha(a) = 0$, выполнено $ad_e e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^a$.

Пусть теперь x – произвольный элемент из $\mathfrak{g}^{e_1}$. Запишем его разложение по градуировке $\mathfrak{g}_l$:

$$x_k + x_{k+1} + \dots$$

Предположим, что $k < 0$ и $x_k \neq 0$. Из того, что $[x, e_1] = 0$, получаем следующую систему соотношений на x_j :

$$[x_k, a] = 0, \quad [x_{j+1}, a] + [x_j, e] = 0, \quad j \geq k.$$

Из первого равенства вытекает, что $x_k \in \mathfrak{g}^a$. По приведенным выше рассуждениям $ad_e x_k \in \mathfrak{g}^a$. С другой стороны, $[x_{k+1}, a] \in \text{Im } ad_a$. Из равенства нулю их суммы немедленно получаем, что $ad_e x_k = 0$. В свою очередь, из свойства заданной градуировки (8) получаем, что $x_k = 0$. Отсюда получаем, что $x \in \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{h}$, т.е. в разложении x по градуировке $\mathfrak{g}_l$ нет слагаемых отрицательной высоты.

Легко видеть, что $ad_e: \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+ \rightarrow \mathfrak{g}^+$. Покажем, что это отображение сюръективно. Рассмотрим произвольный $x \in \mathfrak{g}_k$, где $k > 0$. Построим для него прообраз явно. По свойству градуировки (8) найдется такой y_{k-1} , что $ad_e y_{k-1} = x$. Теперь рассмотрим $ad_a y_{k-1}$. Если это нуль, то $[y_{k-1}, e + a] = x$, и прообраз x найден. Если, однако, это не нуль, то по тому же свойству градуировки найдется такой y_{k-2} , что $ad_e y_{k-2} = -ad_a y_{k-1}$. Если $ad_a y_{k-2} = 0$, то $[y_{k-1} + y_{k-2}, e + a] = x$, и прообраз снова найден. В противном случае продолжаем процесс построения. Он заведомо остановится, так как если мы добрались до $\mathfrak{g}_0$, то по построению выражение $ad_a y_0$ заведомо равно нулю и для $y = y_{k-1} + y_{k-2} + \dots$ выполнено $[y, e + a] = x$. Таким образом, $ad_e: \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+ \rightarrow \mathfrak{g}^+$ сюръективно.

Из сюръективности ad_a и ранее доказанного факта, что $\mathfrak{g}^{e+a} \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$, получаем, что $\dim \mathfrak{g}^{e+a} = \dim \mathfrak{h} = n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $a \in \mathfrak{h}$ – произвольный полупростой элемент и $I_1, \dots, I_n$ – произвольный набор базисных инвариантов. Определим функции f_{ij} как

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij}.$$

Дифференциалы df_{ij} для $j > 1$, взятые в точке e , лежат в $\mathfrak{g}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам известно, что f_{ij} коммутирует с $\mathfrak{g}^a$, в частности с $\mathfrak{h}$, т.е. он состоит из мономов высоты нуль.

Заметим теперь, что $\frac{\partial}{\partial e_\alpha}$ от монома высоты нуль, где высота α больше нуля либо нуль, либо содержит корень отрицательной высоты и, следовательно, в точке e обращается в нуль.

Теперь рассмотрим $\frac{\partial}{\partial h_{\alpha_i}}$ от монома. Если он содержит корневые векторы, то в силу нулевой высоты среди них есть как положительные, так и отрицательные, и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial h_{\alpha_i}}$ от данного монома в точке e равно нулю. Если моном состоит только из элементов h_{α_i} , то он равен нулю в точке e , так как его степень как минимум два.

Элемент $\tilde{e}$ (проекция e на $\mathfrak{g}^a$) – главный нильпотентный (а следовательно, регулярный) элемент в централизаторе $\mathfrak{g}^a$. Из леммы 7, равенства $\text{ind } \mathfrak{g}^a = \text{ind } \mathfrak{g}$ и критерия Болсинова для полноты наборов, полученных методом сдвига аргумента на сингулярных орбитах (см., например, [3], [18]), получаем, что $\text{sgrad } f_{ij}$ порождают пространство размерности $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{D}_a$, где $\mathfrak{D}_a$ – орбита, проходящая через точку a .

Векторы $\text{sgrad } f_{i1}$ лежат в $\mathfrak{g}_1 \cap \text{Im ad}_a^+$. Из леммы 8 получаем, что

$$\text{sgrad } f_{ij} \in \bigoplus_{l \geq 2} \mathfrak{g}_l.$$

Так как $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{D}_a = \dim \in \text{ad}_a^+$, то косые градиенты f_{ij} порождают все это пространство. Отсюда следует, что $\text{sgrad } f_{i1} = [d I_i(a), e]$ порождают пространство $\mathfrak{g}_1 \cap \text{Im ad}_a^+$, размерность которого в точности равна $\dim \mathfrak{z}(g^a)$. Получаем, что размерность пространства, порожденного косыми градиентами линейных функций, не меньше размерности центра централизатора. Таким образом, лемма 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для неполупростого элемента утверждение теоремы 2 вообще говоря, уже не является верным. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g}_2$ и определим элемент $e' = e_{\alpha_2} + e_{3\alpha_1 + \alpha_2}$. В представлении минимальной размерности он имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Централизатор в $\mathfrak{g}_2$ этого элемента будет имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v\sqrt{2} & -w\sqrt{2} & 0 & 0 \\ w\sqrt{2} & 0 & \beta & \gamma & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & -\beta & 0 & 0 \\ -v\sqrt{2} & 0 & -w & 0 & -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Поэтому порождающие централизатора e' можно указать явно:

$$e', \quad e_{3\alpha_1+2\alpha_2}, \quad e_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad e_{2\alpha_1+\alpha_2}.$$

Из правил коммутирования известно, что центр централизатора двумерен и порождается элементами e' и $e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$. При этом получаем, что дифференциалы инвариантов зависимы в точке тогда и только тогда, когда данный элемент сингулярен (см. [19]). Таким образом, они порождают пространство размерности не выше 1, а значит, центр централизатора строго больше пространства, порожденного дифференциалами.

В работе А. А. Тарасова [20] доказывается интересный факт: для полупростого регулярного a найдется аффинное пространство размерности N , ограничения на которое функций из набора $\mathcal{F}_a$ задают на нем глобальные координаты. В частности, дифференциалы этих функций всюду независимы на данном аффинном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из приведенных выше рассуждений вытекает, в частности, что образ отображения момента для $\mathcal{F}_a$ совпадает с $\mathbb{C}^N$.

Оказывается, аналогичный результат верен и для субрегулярного полупростого элемента. Пусть a – такой элемент, и всюду далее считаем, что в кольце инвариантов у нас фиксирован некоторый произвольный набор порождающих I_i . Рассмотрим разложение

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij}.$$

Известно, что дифференциалы функций f_{ij} в точке общего положения порождают пространство размерности $N - 1$ (например, это следует из равенства $\text{ind } \mathfrak{g}^a = \text{ind } \mathfrak{g}$ и теоремы Жордана–Кронеккера; см. [18]). Так как всего функций N , то из этого следует, что некоторые функции из нашего набора зависимы между собой, причем какие именно, выяснить достаточно легко. Из теоремы 2 следует, что линейные функции f_{i1} порождают центр $\mathfrak{g}^a$, который в нашем случае имеет размерность $n - 1$. Отсюда получаем, что среди линейных функций можно выбрать $n - 1$ независимых между собой, причем оставшаяся выражается через них с постоянными коэффициентами. Пусть без ограничения общности это функция f_{11} . Для оставшихся функций выполнена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Для $(i, j) \neq (1, 1)$ и $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d_i$ и любого заданного наперед набора чисел c_{ij} система

$$f_{ij}(x) = c_{ij}$$

относительно $x \in \mathfrak{g}$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции из f_{ij} , как уже говорилось выше, имеют высоту нуль. Определим аффинное пространство $T = e + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^a) + \mathfrak{g}^-$. Легко видеть, что пространство регулярных функций на этом пространстве благодаря форме Киллинга естественным образом отождествляется с полиномами от элементов $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^a) + \mathfrak{g}^+$. Напомним также, что на $\mathfrak{g}$ фиксирована градуировка, индуцируемая высотой корней.

ЛЕММА 9. Пусть f – однородный многочлен степени $d \geq 2$ высоты нуль. Тогда ограничение $\tilde{f}$ полинома f на T имеет вид

$$L(\mathfrak{g}_{-d+1}) + F(\mathfrak{g}_{-d+2}, \dots, \mathfrak{g}_0),$$

где L_{-d+1} – линейная функция на векторном пространстве $\mathfrak{g}_{-d+1}$, т.е. линейный полином от элементов $\mathfrak{g}_{d-1}$, а F – некоторая полиномиальная функция на $\bigoplus_{-d+2 \leq l \leq 0} \mathfrak{g}_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что f – однородный полином степени d . Для удобства считаем, что в него входят все возможные мономы степени d высоты нуль (т.е. коммутирующие с $\mathfrak{h}$), некоторые, быть может, просто с нулевыми коэффициентами.

Теперь рассмотрим произвольный моном степени d нулевой высоты $e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_k}^{n_k} m_{\mathfrak{h}}$, где

$$\deg m_{\mathfrak{h}} + \sum_{j=1}^k n_j = d.$$

Равенство нулю высоты дает уравнение

$$\sum_{j=1}^k n_j \operatorname{ht}(\beta_j) = 0.$$

Заметим, что, если ограничение этого монома на T не равно нулю, то $\operatorname{ht}(\beta_j) \geq -1$. Считаем без ограничения общности, что максимальную высоту имеет β_1 . Из первого равенства получаем $\sum_{i=1}^k n_i \leq d$. Добавим к неравенству второе равенство и получаем следующую цепочку:

$$d \geq \sum_{j=1}^k n_j (\operatorname{ht} \beta_j + 1) \geq n_1 (\beta_1 + 1) \geq \beta_1 + 1.$$

Пусть теперь в моном степени d входит β высоты $d - 1$. Из этого немедленно вытекает, что все неравенства в предыдущей цепочке превращаются в равенства, т.е. $m_{\mathfrak{h}}$ у такого монома отсутствует и помимо e_{β} в него входят только

корневые векторы, соответствующие корням высоты -1 . Из этого, в частности, получаем, что ограничение такого монома на T дает линейную функцию. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь $d\tilde{f}_{ij}$ – дифференциалы ограничений f_{ij} на T . Они по построению лежат в $g^+ \oplus \mathfrak{h}$ и получаются из df_{ij} проекцией на данное пространство вдоль g^- . Рассмотрим $e \in T$. В этой точке df_{ij} , $d\tilde{f}_{ij}$ и соответствующая линейная часть L из леммы 9 совпадают. При этом из леммы 8 немедленно вытекает, что эти линейные функции независимы между собой и порождают все пространство $g^+ \oplus \mathfrak{h}$.

Теперь рассмотрим произвольную точку z в $\mathbb{C}^{N-1}$. Сначала решаем линейную систему $f_{i1} = c_{i1}$. Затем рассмотрим квадратичную систему, т.е. $f_{i2} = c_{i2}$. Подставив сюда уже найденные h_r и перенося F из леммы 9 в правую часть, снова получаем линейную систему. Все полученные таким образом системы разрешимы, потому что соответствующие L оказываются линейно независимыми.

Таким образом, теорема 3 доказана.

§ 5. Бифуркационная диаграмма Σ и дискриминант спектральной кривой D_z для представления минимальной размерности алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$

Всюду в этом параграфе считаем, что в кольце инвариантов алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$ зафиксированы порождающие $I_1, \dots, I_n$, описанные в п. 2.2, причем $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Из этого вытекает, что I_1 – инвариант максимальной степени, т.е. в случае $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{g}_2$ он является определителем $\det X$ в представлении минимальной размерности и коэффициентом при μ для $\mathfrak{so}(2n+1)$. При записи функций, полученных методом сдвига аргумента, будем пользоваться обозначениями из п. 2.4.

Пусть a – регулярный (не обязательно полупростой) элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим разложение I_i в ряд

$$I_i(x + \lambda a) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x, a).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{g}$ обозначает одну из четырех изучаемых алгебр: $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$, ρ – представление $\mathfrak{g}$ минимальной размерности, элемент $a \in \mathfrak{g}$ регулярный (не обязательно полупростой), в кольце инвариантов $\mathfrak{g}$ фиксированы порождающие $I_1, \dots, I_n$ – некоторые непостоянные коэффициенты характеристического многочлена представления минимальной размерности, функция порядка $k(i, j)$ произвольна. Пусть D_z – дискриминант спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$, определенной по этим параметрам. Тогда для замыкания бифуркационной диаграммы $\bar{\Sigma}$ отображения момента F_a , также построенного по этим параметрам, выполнено включение

$$\overline{D_z} \subseteq \bar{\Sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $z \in D_z$ с координатами $z_1, \dots, z_N$ такова, что соответствующая спектральная кривая $R_z(\lambda, \mu)$ имеет особенность в точке (λ_0, μ_0) .

ЛЕММА 10. Для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдется такой $x_0 \in \mathfrak{g}$ – субрегулярный полупростой элемент, что для него выполнены свойства:

1) $\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=0}^{d_i-1} \lambda_0^j z_{k(i,j)} + I_i(a) \lambda_0^{d_i} - I_i(x_0) \right| < \varepsilon$, т.е. коэффициенты многочлена $R_z(\lambda_0, \mu)$ и характеристического многочлена для X_0 отличаются достаточно мало;

2) μ_0 для матрицы X_0 является собственным значением кратности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать это утверждение будем для каждой алгебры отдельно.

Алгебра $\mathfrak{sl}(n+1)$. Рассмотрим $R_z(\lambda, \mu) = 0$. Определим

$$X_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & -\mu_0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

где на неотмеченных местах стоят попарно различные числа, отличные от μ_0 и достаточно близкие к корням $R_z(\lambda_0, \mu) = 0$, т.е. выполнено условие 1) леммы.

Легко видеть, что $\alpha_1(x_0) = 0$, а остальные корни для данного элемента в нуль не обращаются (т.е. это действительно субрегулярный элемент). Условие 2) леммы выполняется по построению.

Алгебра $\mathfrak{sp}(2n)$. Здесь возможны два случая. Первый, когда μ_0 отлично от нуля. Тогда

$$X_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & & & & \\ & \mu_0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\mu_0 & \\ & & & & -\mu_0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где на неотмеченных местах снова стоят различные собственные значения, близкие к корням $R_z(\lambda_0, \mu)$. Для данного элемента $\alpha_1(x_0) = 0$.

Теперь, если $\mu_0 = 0$, то, рассуждая аналогично предыдущему случаю, в качестве X_0 можно взять

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такого элемента $\alpha_n(x_0) = 0$ и $\text{corank } X_0 = 2$.

Алгебра $\mathfrak{so}(2n+1)$. Если $\mu_0 \neq 0$, рассуждаем аналогично первому случаю для $\mathfrak{sp}(2n)$. Если μ_0 , то в качестве X_0 можно взять

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

На соответствующем x_0 в нуль обращается α_n .

Алгебра $\mathfrak{g}_2$. Если не все корни $R_z(\lambda_0, \mu) = 0$ равны нулю, то в качестве X_0 можно взять матрицу, у которой на диагонали стоят корни данного многочлена. Если все корни $R_z(\lambda_0, \mu) = 0$ равны нулю, то в качестве X_0 можно взять

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $c \neq 0$, $b = -2c$ и оба числа достаточно малы по модулю, чтобы обеспечить выполнение условия 1) леммы. Для данного элемента $\alpha_2(x_0) = 0$.

Рассмотрим теперь описанный в § 4 коммутативный набор Φ_{x_0} , получающийся сдвигом на x_0 , т.е.

$$I_i(x_0 + \lambda y) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j f_{ij}(x_0, y).$$

ЛЕММА 11. В полученном наборе Φ_{x_0} функция $f_{11}(x_0, y)$ линейно выражается через $f_{i1}(x_0, y)$, $i > 1$, с постоянными коэффициентами, зависящими только от x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{(0, \mu_0)} \det(X_0 + \lambda Y - \mu E).$$

Из леммы 10 имеем

$$\text{corank}(X - \mu_0 E) \geq 2,$$

а записанное выше выражение представляет собой линейную комбинацию миноров коразмерности 1. Поэтому вне зависимости от Y данное выражение обращается в нуль.

Для алгебр $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{g}_2$ в левой части этого неравенства $f_{11}(x_0, y) = \langle d I_1(x_0), y \rangle$ входит с постоянным коэффициентом, так как $I_1 = \det X$. Поэтому

данная функция выражается явно. Например, для $\mathfrak{sl}(n+1)$ это выражение имеет вид

$$-f_{n1}(x_0, y)\mu_0^{n-1} - \dots - f_{21}(x_0, y)\mu_0 = f_{11}(x_0, y).$$

Для алгебры $\mathfrak{so}(2n+1)$ в левую часть $f_{11}(x_0, y)$ входит с коэффициентом μ_0 . Рассмотрим два случая. Первый: $\mu_0 \neq 0$; тогда выражение можно поделить на μ_0 и выразить $f_{11}(x_0, y)$ аналогично предыдущему случаю. Вторым: $\mu_0 = 0$. В этом случае 0 имеет кратность 3 и $f_{11}(x_0, y) = 0$, что получится, если в формулу подставить $\mu_0 = 0$.

Благодаря доказанной лемме мы теперь можем применять разработанный в § 4 аппарат.

ЛЕММА 12. *Найдется такой субрегулярный $x_1 \in \mathfrak{g}$, что для него выполняются следующие свойства:*

- 1) для $i \geq 1, j \geq 1$ и $(i, j) \neq (1, 1)$ выполнены равенства

$$f_{ij}(x_1, a) = z_{k(i,j)};$$

- 2) $\sum_{i=1}^n |\sum_{j=0}^{d_i-1} \lambda_0^j z_{k(i,j)} + I_i(a)\lambda_0^{d_i} - I_i(x_0)| < \varepsilon$;
- 3) μ_0 является для X_1 собственным значением кратности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 11 получаем, что из набора Φ_{x_0} можно выкинуть f_{11} , а для полученного набора определить F_{x_0} из § 4. Рассмотрим следующую систему из $N-1$ уравнений относительно y :

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_0, y) &= z_{k(i,j)} \quad \text{при } i \geq 1, j \geq 1, (i, j) \neq (1, 1), \\ f_{id_i}(x_0, y) &= I_i(a). \end{aligned}$$

Теорема 3 утверждает, что подобная система разрешима для любых констант, стоящих справа. Следовательно, такой y существует.

Заметим, что, $f_{id_i}(x_0, y) = I_i(y)$. Из регулярности a и выполнения равенств $I_i(y) = I_i(a)$ получаем, что найдется такой $g \in G$, что $\text{Ad}_g y = a$. Из леммы 5 получаем, что $f_{ij}(x_0, y) = f_{ij}(\text{Ad}_g x_0, a)$. Положим $\text{Ad}_g x_0 = x_1$.

Субрегулярность x_1 и выполнение условия 1) леммы в этом случае следуют из построения данного элемента. Свойства 2) и 3) вытекают из свойств x_0 в лемме 10.

ЛЕММА 13. *Для x_1 выполняется равенство $f_{11}(x_1, a) = z_{k(1,1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим третье уравнение системы (7)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{(\lambda_0, \mu_0)} R_z(\lambda, \mu) = 0.$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 11, из данного уравнения получаем, что $z_{k(1,1)}$ выражается как линейная комбинация $z_{k(i,j)}$, $j > 0$, $I_i(a)$ и их степеней (случай g_2), взятых с коэффициентами, зависящими от λ_0, μ_0 .

Теперь воспользуемся тем свойством, что собственное значение μ_0 у элемента x_1 имеет кратность как минимум 2. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, получаем, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{(\mu_0, \lambda_0)} R(\lambda, \mu) = 0$$

в точке X_1 . Легко видеть, что f_{11} выражается из этого уравнения по той же формуле, что и $z_{k(1,1)}$. Так как по построению $f_{ij} = z_{k(i,j)}$ и формулы совпадают, получаем утверждение леммы.

Положим теперь $x_2 = x_1 - \lambda_0 a$. Мы показали, что в любой окрестности любой точки $z \in D_z$ найдется такой $z' = F_a(x_2)$, что прямая $x_2 + \lambda a$ содержит сингулярный элемент (в данном случае это $x_1 = x_2 + \lambda_0 a$). Отсюда по критерию Болсинова получаем, что dF_a в точке x_2 имеет ранг, меньший N , и $z' \in \Sigma$. Таким образом, $\bar{\Sigma}$ содержит D_z , а следовательно, и $\bar{D}_z$.

Теорема 4 доказана.

Следующая теорема – основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{g}$ обозначает одну из четырех изучаемых алгебр: $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g}_2$. Пусть ρ – представление $\mathfrak{g}$ минимальной размерности, элемент $a \in \mathfrak{g}$ регулярный (не обязательно полупростой), в кольце инвариантов $\mathfrak{g}$ фиксированы порождающие $I_1, \dots, I_n$ – некоторые непостоянные коэффициенты характеристического многочлена представления минимальной размерности, функция порядка $k(i, j)$ произвольна. Пусть D_z – дискриминант спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$, определенной по этим параметрам. Тогда для отображения момента F_a , также построенного по этим параметрам, выполнено

$$\bar{D}_z = \bar{\Sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 вытекает включение $\bar{D}_z \subseteq \bar{\Sigma}$. По предположению получаем включение $\Sigma \subseteq D_z$. Теорема доказана.

Оказывается, если отказаться от условия полупростоты элемента, то утверждение теоремы неверно: размерность центра централизатора субрегулярного нильпотентного элемента в $\mathfrak{g}_2$ равна 2, в то время как дифференциалы инвариантов порождают пространство размерности 1. Разумеется, интересно поставить вопрос об описании пространства, порождаемого дифференциалами инвариантов для произвольного элемента произвольной простой комплексной алгебры Ли, в случае произвольного элемента.

§ 6. Спектральная кривая $\mathfrak{so}(2n)$ в представлении минимальной размерности

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(2n)$ в представлении минимальной размерности. Зафиксируем регулярный a и инварианты $I_1, \dots, I_n$, описанные в п. 2.2, причем I_1 считаем равным Pf. Построим с его помощью коммутативный набор Φ_a и зададим отображение момента.

В случае, когда речь идет об алгебре $\mathfrak{so}(2n)$, рассуждения в доказательстве теоремы 4 не проходят. Дело в том, что уже на первом этапе (т.е. в лемме 10) можно получить диагональную матрицу X_0 , у которой нулевое собственное значение имеет кратность 2 (т.е. у спектральной кривой особенность в точке $(0, 0)$), а остальные собственные значения имеют кратность 1. Данная матрица в представлении минимальной размерности задает регулярный элемент, поэтому никакого вырождения отображения момента в этой точке может и не быть. Оказывается, для почти всех регулярных a включение из условия теоремы 4 неверно.

ТЕОРЕМА 6. Пусть a – регулярный элемент и $I_1(a) \neq 0$. Тогда дискриминант D_z спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что множество таких элементов непусто. Действительно, возьмем диагональную матрицу A из представления минимальной размерности $\mathfrak{so}(2n)$ (см. п. 2.2), элементы на диагонали которой различны и отличны от нуля. Для такого элемента пфаффиан $\text{Pf}(A) = I_1(a)$ не равен нулю.

Теперь рассмотрим спектральную кривую $R_z(\lambda, \mu) = 0$ в точке z (см. § 3):

$$\mu^{2n} + (I_n(a)\lambda^2 + z_{k(1,1)}\lambda + z_{k(1,0)})\mu^{2n-2} + \dots + (I_1(a)\lambda^n + \dots + z_{k(n,0)})^2.$$

Пусть λ_0 – корень уравнения $I_1(a)\lambda^n + \dots + z_{k(n,0)} = 0$ в точке z . Заметим, что $R_z(\lambda_0, 0) = 0$ и нуль имеет в этом уравнении кратность 2, поэтому $\frac{\partial}{\partial \mu} R_z(\lambda, \mu) = 0$.

Рассмотрим $\frac{\partial}{\partial \lambda} R_z(\lambda, \mu) = 0$. Легко видеть, что свободный член этого многочлена имеет вид

$$2(nI_1(a)\lambda^{n-1} + \dots + z_{k(n,1)})(I_1(a)\lambda^n + \dots + z_{k(n,0)}),$$

т.е. при $\lambda = \lambda_0$ он также обращается в нуль, и, следовательно, $\mu = 0$ является корнем данного уравнения при $\lambda = \lambda_0$. Отсюда получаем, что кривая $R_z(\lambda, \mu) = 0$ имеет в точке λ_0, μ особенность. Теорема доказана.

В диссертации Ю. А. Браилова предлагалось модифицировать уравнение спектральной кривой для $\mathfrak{so}(2n)$, в частности рассмотреть вместо исходной кривой кривую вида

$$R'_z(\lambda, \mu) = R_z(\lambda, \sqrt{\mu}) = 0.$$

В правой части стоит полином, так как μ входит в выражение для спектральной кривой только в четных степенях.

ТЕОРЕМА 7. Пусть D'_z – дискриминант спектральной кривой $R'_z(\lambda, \mu) = 0$, получающейся из спектральной кривой $R_z(\lambda, \mu) = 0$ подстановкой вместо μ корня $\sqrt{\mu}$. Тогда для бифуркационной диаграммы Σ отображения момента F_a для почти всех регулярных a выполнено строгое включение

$$\Sigma \subset D'_z \cap \text{Im } F_a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим главный нильпотентный элемент e в $\mathfrak{so}(2n)$. Известно, что для простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $\text{codim Sing } \mathfrak{g} = 3$, поэтому для почти всех регулярных a плоскость $e + \lambda a$ не содержит сингулярных элементов. Будем считать, что a именно такой.

Рассмотрим множество $M_0 \subset \mathfrak{g}$, задаваемое уравнениями $I_i(y) = 0$. Известно, что это объединение всех нильпотентных орбит (в простой комплексной алгебре Ли таких орбит конечное число; см., например, [21]), среди которых имеется ровно одна регулярная — O_e . Легко видеть, что образ M_0 лежит в плоскости P , задаваемой в $\mathbb{C}^N$ уравнениями $z_{k(i,0)} = 0$, $1 \geq i \geq n$. Доказательство теоремы вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 14. *В плоскости P есть регулярные значения отображения момента, т.е. не принадлежащие Σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что на нильпотентных орбитах за исключением O_e дифференциалы df_{ij} всюду зависимы. По лемме Сарда (см. [22]) их образы будут иметь в плоскости P меру нуль. Теперь рассмотрим образ O_e . Элемент a выбран таким образом, что для почти всех точек на этой орбите дифференциалы df_{ij} независимы и порождают изотропное пространство размерности N .

Пусть y — такая точка. Косые градиенты $\text{sgrad } f_{ij}$ в точке y образуют максимальное изотропное пространство относительно симплектической структуры на O_e . Из этого получаем, что проекции дифференциалов df_{ij} на $T_y^*O_e$ вдоль пространства, порожденного dI_i в точке y (образ df_{ij} при такой проекции совпадает с дифференциалом ограничения), порождают пространство размерности $N - n$, что совпадает с $\dim P$.

В окрестности y , таким образом, ограничение $F_a|_{M_0}$ задает отображение на целую окрестность в P , т.е. образ O_e имеет в P меру, отличную от нуля. По лемме Сарда почти все точки в образе — регулярные значения. Выберем такое значение $z \in P$, чтобы оно было регулярным для $F_a|_{M_0}$ и не попадало в образы других нильпотентных орбит (которые, как уже говорилось, имеют меру нуль). Прообраз этой точки лежит целиком в O_e и совпадает с прообразом $F_a^{-1}(z)$. При этом ограничения дифференциалов (а следовательно, и косые градиенты) f_{ij} , $j \geq 1$, независимы. Учитывая, что dI_i в точке e также независимы (см. [19]), получаем, что $\text{rk } dF_a$ во всех точках прообраза $F_a^{-1}(z)$ максимален, т.е. z — регулярное значение для отображения момент и, следовательно, не принадлежит Σ .

ЛЕММА 15. *Плоскость P лежит в D'_z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $z \in P$ кривая $R_z(\lambda, \mu) = 0$ имеет особую точку вида $(0, 0)$. При $\lambda = 0$ первые два уравнения системы (7) имеют вид $\mu^{2n} = 0$ и $2n\mu^{2n-1} = 0$ соответственно. Кроме того, свободный член в третьем уравнении имеет вид $2z_{k(1,0)}z_{k(1,1)}$, поэтому на P он равен нулю, а значит, $\mu = 0$ является корнем сразу всех трех уравнений, т.е. $(0, 0)$ — особая точка.

Теорема 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко видеть, что данное включение вовсе не гарантирует, что $\bar{\Sigma} \subset D'_z$. При этом, однако, данная теорема позволяет утверждать, что гипотеза, сформулированная в работе [9], которая говорит, что $\Sigma = D'_z$, для подправлений спектральной кривой для $\mathfrak{so}(2n)$ неверна.

В заключение статьи разберем строение бифуркационной диаграммы Σ и дискриминанта D'_z подправленной спектральной кривой для $\mathfrak{so}(4)$. Считаем, что для нее фиксировано представление минимальной размерности, в котором матрицы соответствующих операторов имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & b \\ a_3 & a_4 & -b & 0 \\ 0 & c & -a_1 & -a_3 \\ -c & 0 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix}.$$

Инварианты в этом случае имеют вид

$$I_1 = a_1^2 + a_4^2 + 2a_2a_3 - 2bc, \quad I_2 = a_2a_3 + bc - a_1a_4.$$

Рассмотрим $a \in \mathfrak{h}$ – регулярный элемент, для которого $a_1 = p_1$ и $a_4 = p_4$. Тогда коммутативный набор Φ_a , полученный методом сдвига аргумента на этот элемент, имеет вид

$$\begin{aligned} f_{10} &= a_1^2 + a_4^2 + 2a_2a_3 - 2bc, \\ f_{11} &= 2p_1a_1 + 2p_4a_4, \\ f_{20} &= a_2a_3 + bc - a_1a_4, \\ f_{21} &= -p_4a_1 - p_1a_4. \end{aligned}$$

Упорядочим набор следующим образом: $k(1, 0) = 2$, $k(1, 1) = 1$, $k(2, 0) = 3$ и $k(2, 1) = 4$.

ЛЕММА 16. Определим $a_1(z_1, z_4), a_2(z_1, z_4)$ по следующим формулам:

$$a_1(z_1, z_4) = -\frac{p_1}{2p_4^2 - 2p_1^2}z_1 + \frac{p_4}{2p_4^2 - 2p_1^2}z_2, \quad a_2(z_1, z_4) = -\frac{p_4}{p_4^2 - p_1^2}z_1 - \frac{p_1}{p_4^2 - p_1^2}z_2.$$

Тогда бифуркационная диаграмма Σ задается уравнением

$$(z_2 + 2z_3 - (a_1 - a_4)^2)(z_2 - 2z_3 - (a_1 + a_4)^2) = 0. \quad (12)$$

В частности, она замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем сначала множество сингулярных элементов $\mathfrak{so}(4)$. Так как $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ и множество сингулярных элементов в $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{sl}(2)$ состоит из одной точки, то $\text{Sing } \mathfrak{so}(4)$ – это элементы вида $(0, x)$ и $(y, 0)$, т.е. две трехмерные плоскости. Из описания системы корней для $\mathfrak{so}(2n)$ в п. 2.2 получаем что в представлении минимальной размерности они имеют вид $b = c = 0$, $a_1 + a_4 = 0$ и $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 - a_4 = 0$ и соответствуют $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{sl}(2)$, натянутым на e_{α_1} , $e_{-\alpha_1}$, h_{α_1} и e_{α_2} , $e_{-\alpha_2}$, h_{α_2} .

Из критерия Болсинова получаем, что множество точек, где вырождается отображение момента, – это цилиндр над множеством сингулярных элементов с образующей a . Заметим, что $\alpha_1(a) \neq 0$ и $\alpha_2(a) \neq 0$. Отсюда получаем, что h_{α_i} , a порождают всю картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$, и этот цилиндр задается уравнениями

$$P_1 : b = c = 0, \quad P_2 : a_3 = a_2 = 0.$$

В силу того, что p_1, p_4 одновременно не равны нулю, легко видеть, что a_1, a_4 выражаются через z_1, z_4 из уравнений $z_1 = f_{11}, z_4 = f_{21}$. Заметим, что определенные в условии леммы $a_1(z_1, z_4), a_4(z_1, z_4)$ – это в точности решения этой системы. Подставляя в описанное уравнение формулы для $z_2 = f_{10}, z_3 = f_{20}$ при $b = c = 0$ и $a_3 = a_2 = 0$, получим, что Σ лежит в множестве M , задаваемом системой уравнений (12), т.е. $\Sigma \subseteq M$.

Покажем, что выполнено обратное включение. Подставив $z_2 = f_{10}, z_3 = f_{20}$ в уравнение $z_2 + 2z_3 - (a_1 - a_4)^2 = 0$, получаем, что оно выполняется тогда и только тогда, когда $a_2 a_3 = 0$. Без ограничения общности пусть $x \in \mathfrak{so}(2n)$ удовлетворяет этому условию. Легко видеть, что в точке x' , у которой $a_2 = a_3 = 0$, а все остальные координаты совпадают с координатами x , значения интегралов f_{ij} совпадают со значениями интегралов в точке x . При этом x' – точка падения ранга отображения момента, так как лежит в P_2 . Аналогичным образом рассуждения проводятся для второго уравнения. Лемма доказана.

Учитывая теорему 7, а также данную лемму, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента F_a , задаваемого коммутативным набором Φ_a для регулярного полупростого a на $\mathfrak{so}(4)$, является алгебраическим множеством, в частности $\bar{\Sigma} = \Sigma$. При этом для дискриминанта D'_z выполнено строгое включение $\Sigma \subset D'_z$.*

Теперь получим явную формулу для дискриминанта D'_z . Обозначим

$$I_1(a) = c_1, \quad I_2(a) = c_2.$$

Спектральная кривая на $\mathbb{C}^4$ имеет вид

$$\mu^2 + (z_3 + \lambda z_4 + c_2 \lambda^2) \mu + (z_2 + \lambda z_1 + c_1 \lambda^2)^2 = 0.$$

Обозначим коэффициент при μ через $p(\lambda)$, а выражение под знаком возведения в квадрат в свободном члене – через $q(\lambda)$. Теперь рассмотрим

$$\text{Res}_\mu \left(R_z(\lambda, \mu), \frac{\partial}{\partial \mu} R_z(\lambda, \mu) \right) = p^2 - 4q^2$$

– хорошо известную формулу для дискриминанта квадратичного многочлена от одной переменной. В свою очередь, в качестве второго уравнения возьмем

$$\text{Res}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} R_z(\lambda, \mu), \frac{\partial}{\partial \mu} R_z(\lambda, \mu) \right) = 4q'q - p'p,$$

где производная берется по λ . Заметим, что это в точности $-\frac{1}{2}(p^2-4q^2)'$. Таким образом, D'_z задается одним уравнением: $p^2 - 4q^2 = (p - 2q)(p + 2q) = 0$.

Заметим, что наличие кратного корня равносильно тому, что либо $p \pm 2q$ имеют кратные корни, либо у них есть общий корень, что равносильно тому, что общий корень есть у p и q , т.е. равен нулю их результат. Без ограничения общности считаем, что $c_1 \neq 0$. Тогда уравнение спектральной кривой с точностью до умножения на ненулевую константу имеет вид

$$\begin{aligned} 0 = & ((z_4 - 2z_1)^2 - 4(c_2 - 2c_1)(z_3 - 2z_2)) \\ & \times ((z_4 + 2z_1)^2 - 4(c_2 + 2c_1)(z_3 + 2z_2)) \\ & \times (c_1(c_2z_2 - c_1z_3)^2 + z_1(c_2z_2 - c_1z_3)(c_1z_4 - c_2z_1) + z_2(c_1z_4 - c_2z_1)^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Автор благодарит А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко за плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] M. Audin, *Spinning tops. A course on integrable systems*, Cambridge Stud. Adv. Math., **51**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [3] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **21** (1983), 23–83; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Non-invariant symplectic group structures and Hamiltonian flows on symmetric spaces”, *Selecta Math. Soviet.*, **7**:4 (1988), 356–414.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 396–415; англ. пер.: A. S. Mišchenko, A. T. Fomenko, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 371–389.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **19** (1979), 3–94; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Integrability of Euler equations on semisimple Lie algebras”, *Selecta Math. Soviet.*, **2**:4 (1982), 207–291.
- [6] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 93–94; англ. пер.: S. V. Manakov, “Note on the integration of Euler’s equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body”, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:4 (1976), 328–329.
- [7] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Breach, New York, 1988.
- [8] Ю. А. Браилов, “Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 3–16; англ. пер.: Yu. A. Brailov, “Geometry of translations of invariants on semisimple Lie algebras”, *Sb. Math.*, **194**:11 (2003), 1585–1598.
- [9] Yu. A. Brailov, A. T. Fomenko, “Lie groups and integrable Hamiltonian systems”, *Recent advances in Lie theory* (Vigo, Spain, 2000), Res. Exp. Math., **25**, Heldermann, Lemgo, 2002, 45–76.

- [10] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: N. Jacobson, *Lie algebras*, Intersci. Publ., New York–London, 1962.
- [11] А. Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, 2-е изд., РХД, Ижевск, 1999; англ. пер. 1-го изд.: А. Т. Fomenko, *Differential geometry and topology*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York–London, 1987.
- [12] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Grad. Texts in Math., **9**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978.
- [13] J. F. Kurtzke, jr., “Centralizers of irregular elements in reductive algebraic groups”, *Pacific J. Math.*, **104**:1 (1983), 133–154.
- [14] D. Panyushev, A. Premet, O. Yakimova, “On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras”, *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 343–391.
- [15] А. В. Болсинов, “Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента”, *Докл. АН СССР*, **301**:5 (1988), 1037–1040; англ. пер.: A. V. Bolsinov, “A completeness criterion for a family of functions in involution constructed by the argument shift method”, *Soviet Math. Dokl.*, **38**:1 (1989), 161–165.
- [16] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4–5 (2009), 431–454.
- [17] A. G. Elashvili, V. G. Кас, “Classification of good gradings of simple Lie algebras”, *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 85–104.
- [18] А. В. Болсинов, К. М. Зуев, “Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 3–13; англ. пер.: A. V. Bolsinov, K. M. Zuev, “A formal Frobenius theorem and argument shift”, *Math. Notes*, **86**:1–2 (2009), 10–18.
- [19] B. Kostant, “Lie group representations on polynomial rings”, *Amer. J. Math.*, **85**:3 (1963), 327–404.
- [20] А. А. Тарасов, “Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли”, *УМН*, **57**:5 (2002), 165–166; англ. пер.: A. A. Tarasov, “The maximality of certain commutative subalgebras in the Poisson algebra of a semisimple Lie algebra”, *Russian Math. Surveys*, **57**:5 (2002), 1013–1014.
- [21] D. I. Panyushev, “The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **134**:1 (2003), 41–59.
- [22] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.

А. Ю. Коняев (A. Yu. Konayev)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: maodzund@bk.ru

Поступила в редакцию
 18.03.2010 и 16.06.2010