Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:55:53

УДК 517.987+519.214

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев

Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Исследуются константы, связывающие эквивалентные друг другу степенную скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана и степенную (с тем же показателем степени) особенность в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. Эта же скорость сходимости оценена также по скорости убывания корреляционных коэффициентов. Получены константы аналогичных оценок степенной скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа. Все результаты работы имеют точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, спектральные меры, корреляционные коэффициенты, стационарные в широком смысле процессы.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм. Напомним, что *эндоморфизмом пространства* Ω называется отображение $T: \Omega \rightarrow \Omega$ такое, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. *Автоморфизмом пространства* Ω называют его п.в. взаимно однозначный эндоморфизм.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega).$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование п.в. предела

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$$

и справедливость равенства $\int f d\lambda = \int f^* d\lambda$. Скорость сходимости в этой теореме будем определять убыванием вероятностей ε -уклонений, т.е. убыванием для каждого $\varepsilon > 0$ мер множеств $\{\sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon\}$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через U_T изометрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$ (в случае, когда T – автоморфизм, этот оператор, более того, является унитарным). Статистическая

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8508.2010.1).

эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f,$$

равного f^* , причем f^* является ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T . Скорость сходимости в этой теореме есть скорость сходимости $\|A_n f - f^*\|_2^2$ к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Определим теперь корреляционные коэффициенты $b_k f$ и спектральную меру σ_f вектора f относительно нашей динамической системы. В случае, когда T – автоморфизм, полагают $b_k f = (U_T^k f, f)$ для всех целых k ; очевидно, при этом всегда $b_k f = \overline{b_{-k} f}$. В общем же случае эндоморфизма T оператор U_T^k для $k < 0$ может быть не определен; полагаем в этом случае $b_k f = (U_T^k f, f)$ при $k \geq 0$ и $b_k f = \overline{b_{-k} f}$ при $k < 0$. Как хорошо известно (см., например, [1; гл. 1, § 7]), в обоих случаях корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f , т.е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

для всех целых k (так что корреляционные коэффициенты являются ее коэффициентами Фурье в комплексной форме).

Спектральная теория динамических систем изучает свойства динамических систем, которые можно выразить через свойства мер σ_f (см. [1; гл. 1, § 7]). В этом смысле оценки скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана имеют спектральную природу, так как определяются через меры σ_f . Как было доказано в теореме 3 работы [2] (см. также [3; теорема 1]), степень сходимости в эргодической теореме фон Неймана эквивалентна наличию степенной же, с тем же показателем степени особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. В [2] и [3] рассматривался вопрос об асимптотике этих двух эквивалентных друг другу свойств в терминах “ O ” и “ o ” без вычисления связывающих их конкретных констант. Изучение этих и некоторых других аналогичных констант (констант оценок этой же скорости сходимости по скорости убывания корреляционных коэффициентов) было начато в [4]. В настоящей работе исследуются на точность и улучшаются оценки обеих теорем работы [4]. Кроме того, получены аналогичные константы оценок скорости сходимости для эргодической теоремы Биркгофа (в случае суммируемости с квадратом усредняемой функции). Все доказываемые оценки можно рассматривать как уточнения соответствующих им асимптотических результатов из [2]: асимптотические соотношения заменяются на неравенства с конкретными константами.

Пусть L_2^0 – подпространство функций с нулевым средним в L_2 . Заметим, что если $f \in L_2$, то $f - f^* \in L_2^0$. Поэтому и $A_n(f - f^*) \in L_2^0$. Поскольку дисперсия $DA_n(f - f^*) = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \|A_n f - f^*\|_2^2$ как раз и измеряет L_2 -норму отклонения $A_n f$ от предела (т.е. f^*), то поведение нормы этого отклонения совпадает с рассматриваемым в [2] поведением дисперсии эргодических средних. Как и в [2], это поведение полностью определяется (см. теорему 1 настоящей работы) особенностью спектральной меры σ_{f-f^*} в нуле или скоростью

убывания корреляционных коэффициентов (см. теорему 2). Переход же от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в нуле меры $\sigma_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов оператора U_T , отвечающих собственному значению, равному единице; по этой же причине верно равенство $\|f\|_2^2 = \|f - f^*\|_2^2 + \|f^*\|_2^2$).

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Заметим, что Φ_n отличается от $(n-1)$ -го ядра Фейера K_{n-1} лишь коэффициентом: $\Phi_n = 2K_{n-1}$. Отметим вытекающие из свойств ядер Фейера (см. [5; § 47]) равенства $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 2\pi$ и следующие стандартные неравенства:

$$\frac{1}{n} \Phi_n(x) \leq \frac{\pi^2}{n^2 x^2}, \quad \frac{\pi}{n} \leq |x| \leq \pi, \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \Phi_n(x) \leq 1, \quad |x| \leq \pi. \quad (2)$$

Как хорошо известно, для каждой $g \in L_2^0$ дисперсия $D A_n g = \|A_n g\|_2^2$ может быть точно посчитана через интеграл от $\Phi_n(x)$ по спектральной мере σ_g или выражена через корреляционные коэффициенты b_{kg} . Основные результаты этой работы получаются анализом асимптотик следующих двух формул, фактически использовавшихся еще Дж. фон Нейманом в [6] (вывод этих формул можно найти в [7; теорема 18.2.1]):

$$\|A_n g\|_2^2 = \int_{(-\pi; \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_g(x), \quad (3)$$

$$\|A_n g\|_2^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} (n - |k|) b_{kg}. \quad (4)$$

Основная масса ядра Фейера сосредотачивается в малой окрестности нуля, и чем больше n , тем уже можно выбирать такие окрестности. Поэтому неудивительно, что асимптотика $\|A_n g\|_2^2$ в точности соответствует асимптотике особенности меры σ_g в нуле (см. теорему 3 в [2], теорему 1 в [4] и уточняющую их теорему 1 ниже).

Как показывают формулы (3) и (4), и спектральная мера, и корреляционные коэффициенты дают полную информацию о нормах отклонений всех эргодических средних от предела. Конечно, вычисление спектральной меры или скорости убывания корреляций для реальных динамических систем – трудная задача. Оценивая скорости сходимости в эргодических теоремах по особенности в нуле спектральной меры или по скорости убывания корреляционных коэффициентов, мы просто сводим интересующую нас новую задачу к эквивалентно сложной задаче, зато хорошо знакомой, со всеми ее трудностями, и для ряда конкретных систем давно решенной. Например, экспоненциальное убывание корреляций – классический, из учебников, параметр хаоса в динамических системах, с хорошо развитой техникой его исследования (см., например, [8; § 1]).

Всюду далее $f \in L_2(\Omega)$. Как уже отмечалось, в этом случае $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$. Доказательства лемм 1 и 2 ниже получаются уточнением доказательств теоремы 3 в [2], леммы 1 и теоремы 1 в [4] (в доказательстве леммы 2 используется также позаимствованная из [9] упрощающая выкладка).

ЛЕММА 1. *При любом $a \in (0, \pi]$ для всех натуральных n справедливо неравенство*

$$\left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2 \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n} \right] \leq \|A_n f - f^*\|_2^2,$$

причем это неравенство неулучшаемо в том смысле, что константу в левой части нельзя увеличить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением (3) для $g = f - f^*$:

$$\int_{(-a/n, a/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \leq \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \|A_n f - f^*\|_2^2. \quad (5)$$

Так как

$$\frac{1}{n} \Phi_n(x) = \frac{\sin^2(nx/2)}{n^2 \sin^2(x/2)} \geq \left(\frac{\sin(nx/2)}{nx/2} \right)^2,$$

то доказываемое неравенство леммы 1 следует из (5) в силу очевидных соотношений

$$\min_{|x| \leq a/n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{nx/2} \right)^2 = \min_{|y| \leq a/2} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2.$$

Докажем его неулучшаемость. Для всех натуральных n и k положим $\lambda_{n,k} = \frac{ak}{1+nk}$. Очевидно, $0 < \lambda_{n,k} < \frac{a}{n}$. Для $g = f - f^*$ рассмотрим двупараметрическое семейство дискретных (одноточечных, сосредоточенных в точке $\lambda_{n,k}$ единичной окружности и принимающих в этой точке значение $\|g\|_2^2$) мер $\sigma_{\lambda_{n,k}}$. Для каждой такой меры найдутся автоморфизм $T_{n,k}$ и функция $g_{n,k} \in L_2^0(\Omega)$ такие, что мера $\sigma_{\lambda_{n,k}}$ будет спектральной, соответствующей им. В случае иррациональности отношения $a : \pi$ в качестве $T_{n,k}$ берется построенный в [1] (см. теорему 1 из § 2 гл. 12) автоморфизм с чисто точечным спектром, спектр которого – любая заданная счетная подгруппа единичной окружности S^1 . В нашем случае это построение применяется для циклической подгруппы, порожденной элементом $e^{i\lambda_{n,k}}$, в качестве $g_{n,k}$ берется собственная функция оператора $U_{T_{n,k}}$, отвечающая собственному числу $\lambda_{n,k}$. В случае рациональности отношения $a : \pi$ см. конструкцию простого примера 1 из § 2 гл. 1 в [2]. Так как $\lambda_{n,k} \neq 0$ при всех n и k , то $\sigma_{\lambda_{n,k}}\{0\} = 0$, т.е. $g_{n,k}^* \equiv 0$ и $g_{n,k} - g_{n,k}^* = g_{n,k}$. Предположим, что константа $\left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2$ в неравенстве леммы может быть улучшена на $\varepsilon > 0$. Тогда, используя “улучшенную” таким образом лемму 1 и представление (3) для каждой пары $(T_{n,k}, g_{n,k})$, получаем, что для всех натуральных n и k справедливы следующие неравенства:

$$\left(\varepsilon + \left(\frac{\sin(a/2)}{a/2} \right)^2 \right) \|g\|_2^2 \leq \frac{1}{n} \Phi_n(\lambda_{n,k}) \|g\|_2^2 = \frac{\sin^2(n\lambda_{n,k}/2)}{n^2 \sin^2(\lambda_{n,k}/2)} \|g\|_2^2.$$

С другой стороны, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n,k}/2 = a/(2n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(a/(2n)))^2 = (a/2)^2$. Значит, можно подобрать такие n и k , для которых последнее неравенство станет неверным. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. *Положим*

$$S_k = \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k} \right],$$

$$\sigma_k = S_k - S_{k+1} = \sigma_{f-f^*} \left\{ \left(-\frac{\pi}{k}, -\frac{\pi}{k+1} \right] \cup \left(\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k} \right] \right\}.$$

Для любого натурального n выполнено неравенство

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq S_n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \sigma_k = \frac{1}{n^2} \left(S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) S_k \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 2, как и первая часть теоремы 3 в [2], доказывается анализом асимптотики представления (3) для $g = f - f^*$:

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \int_{(-\pi/n, \pi/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) + \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x). \quad (6)$$

Оценим сначала первый интеграл в (6), используя неравенство (2):

$$\int_{(-\pi/n, \pi/n]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \leq \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{\pi}{n}; \frac{\pi}{n} \right] = S_n.$$

Теперь оценим второй интеграл в (6), используя неравенство (1):

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_{f-f^*}(x) &\leq \frac{1}{n^2} \int_{(-\pi, -\pi/n] \cup (\pi/n, \pi]} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(-\pi/k, -\pi/(k+1)] \cup (\pi/(k+1), \pi/k]} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x) \leq \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{\pi^2} \sigma_k \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \sigma_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)^2 S_k - (k+1)^2 S_{k+1}) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)^2 S_k - k^2 S_k) + S_1 - n^2 S_n \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) S_k - n^2 S_n \right). \end{aligned}$$

Складывая эти две оценки, получаем доказываемое неравенство леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из лемм 1 и 2, в обозначениях леммы 2 для всех n справедливы оценки

$$\frac{4}{\pi^2} S_n \leq \|A_n f - f^*\|_2^2 \leq S_n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \sigma_k.$$

Похожие неравенства, но в другой форме и с другими константами использовались ранее в работах В. Ф. Гапошкина (см., например, лемму 1 в [10]).

Следующая теорема дает константы, связывающие (эквивалентные друг другу) степенную сходимость в эргодической теореме фон Неймана и степенную же особенность в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы, т.е. уточняет асимптотическую теорему 3 из [2] и теорему 1 из [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in [0, 2)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т.е. если для некоторой константы $A > 0$ при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq A\delta^\alpha,$$

то скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ – степенная с тем же показателем степени, т.е. для всех n

$$\text{при } \alpha \in [0, 1): \quad \|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{-1-\alpha} \right);$$

$$\text{при } \alpha = 1: \quad \|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi \left(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2} \right);$$

$$\text{при } \alpha \in (1, 2): \quad \|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} + \left(4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \right) n^{-2} \right).$$

2) Если скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ степенная, т.е. если для некоторой константы $B > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha},$$

то спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле (с тем же показателем степени), т.е. для любого $\delta \in (0, \pi]$

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq C\delta^\alpha, \quad \text{где } C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B, & 0 \leq \alpha < 1, \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}} B, & 1 \leq \alpha < 2, \end{cases}$$

причем константа C неулучшаема в том смысле, что ее нельзя уменьшить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию первой части теоремы $S_k \leq A\pi^\alpha k^{-\alpha}$, то, подставляя это в неравенство леммы 2, приходим к следующему соотношению:

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq A\pi^\alpha \left(\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha} \right). \quad (7)$$

Далее будем разбирать отдельно три возможных случая, в зависимости от значений α , с целью оценки правой части (7).

Случай 1. Пусть $\alpha \in [0, 1)$. Положим

$$\Sigma_1^1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{n} < \int_{1/n}^1 x^{1-\alpha} dx = \frac{1}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} n^{\alpha-2}.$$

Тогда

$$2 \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} = 2n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{n} = 2n^{-\alpha} \Sigma_1^1 < \frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} - \frac{2}{2-\alpha} n^{-2}.$$

Положим, далее,

$$\Sigma_2^1 = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{-\alpha} \frac{1}{n} < \int_{1/n}^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} n^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha} &= n^{-(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-\alpha} \frac{1}{n} = n^{-(1+\alpha)} (\Sigma_2^1 + n^{\alpha-1} - n^{-1}) \\ &< \frac{1}{1-\alpha} n^{-1-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right) n^{-2} - n^{-2-\alpha}. \end{aligned}$$

Подставляя все эти оценки в (7), получаем

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{-1-\alpha} - \left(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2 \right) n^{-2} - n^{-2-\alpha} \right),$$

откуда немедленно следует доказываемое неравенство.

Случай 2. Пусть $\alpha = 1$. В этом случае, очевидно,

$$2 \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} = 2 \frac{1}{n^2} (n-1) = 2n^{-1} - 2n^{-2}.$$

Положим, далее,

$$\Sigma_2^2 = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \frac{1}{n} < \int_{1/n}^1 x^{-1} dx = \ln n.$$

Тогда

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (\Sigma_2^2 + 1 - n^{-1}) < n^{-2} + \frac{\ln n}{n^2} - n^{-3}$$

и остается подставить эти оценки в (7).

Случай 3. Пусть $\alpha \in (1, 2)$. Выкладки аналогичны выкладкам в случае 1, но с той лишь разницей, что функция $x^{1-\alpha}$ будет выпуклой на $(0, 1]$, а не вогнутой, как в случае 1.

Положим

$$\Sigma_1^3 = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{n} < \int_{1/n}^1 x^{1-\alpha} dx = \frac{1}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} n^{\alpha-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} &= 2n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{n} = 2n^{-\alpha} (\Sigma_1^3 - n^{-1} + n^{\alpha-2}) \\ &< \frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} + \left(2 - \frac{2}{2-\alpha}\right) n^{-2} - 2n^{-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Неравенство

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha} < \frac{1}{1-\alpha} n^{-1-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right) n^{-2} - n^{-2-\alpha}$$

доказывается дословно так же, как в случае 1, поскольку в обоих случаях функция $x^{-\alpha}$ выпукла на $(0, 1]$. Подставляя все эти оценки в (7), получаем

$$\begin{aligned} \|A_n f - f^*\|_2^2 &< A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{-\alpha} + \left(4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\right) n^{-2} \right. \\ &\quad \left. - \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) n^{-1-\alpha} - n^{-2-\alpha} \right), \end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Займемся доказательством второй части теоремы. Немного по-другому переписав утверждение леммы с учетом условия $\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha}$, для любого $a \in (0, \pi]$ получаем

$$\sigma_{f-f^*} \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n} \right] \leq \left(\frac{a/2}{\sin(a/2)} \right)^2 \|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \frac{a^{2-\alpha}}{4 \sin^2(a/2)} B \left(\frac{a}{n} \right)^\alpha.$$

Любое $\delta \in (0, \pi]$ можно представить в виде $\delta = a/n$, если брать $a \in [\pi/2, \pi]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] &= \sigma_{f-f^*} \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n} \right] \leq \frac{a^{2-\alpha}}{4 \sin^2(a/2)} B \left(\frac{a}{n} \right)^\alpha \leq B\delta^\alpha \max_{\pi/2 \leq a \leq \pi} \frac{a^{2-\alpha}}{4 \sin^2(a/2)} \\ &= B\delta^\alpha \max \left\{ \frac{(\pi/2)^{2-\alpha}}{4 \sin^2(\pi/4)}; \frac{\pi^{2-\alpha}}{4 \sin^2(\pi/2)} \right\} = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B\delta^\alpha, & 0 \leq \alpha < 1, \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}} B\delta^\alpha, & 1 \leq \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Последняя выкладка использует тот факт, что для $\alpha \in [0, 2)$ максимум функции $\varphi(a) = \frac{a^{2-\alpha}}{4 \sin^2(a/2)}$ по $a \in [\pi/2, \pi]$ достигается на краю интервала. Действительно, внутри рассматриваемого интервала

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= a^{1-\alpha} \frac{(2-\alpha) \sin(a/2) - a \cos(a/2)}{4 \sin^3(a/2)} \\ &= a^{1-\alpha} \frac{(2-\alpha) \operatorname{tg}(a/2) - a}{4 \operatorname{tg}(a/2)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2(a/2)}{\operatorname{tg}^2(a/2)}. \end{aligned}$$

Видим, что $\varphi'(a) = 0$ в рассматриваемом интервале тогда и только тогда, когда $(2 - \alpha) \operatorname{tg}(a/2) - a = 0$. Если нарисовать графики функций $\operatorname{tg}(x/2)$ и x/c для $c \in (0, 2]$, то в силу выпуклости $\operatorname{tg}(x/2)$ на $[0, \pi)$ будем иметь в зависимости от c либо одно, либо ни одного пересечения. Так как в окрестности π производная функции φ положительна, то возможны только два варианта: либо критическая точка (если она все же есть) является точкой минимума, либо не доставляет экстремума вообще. Следовательно, функция φ достигает своего максимума на краю рассматриваемого интервала.

Неулучшаемость константы является следствием неулучшаемости соответствующей константы в лемме 1. Теорема 1 доказана.

Для исчерпывающего решения рассматриваемого в теореме 1 вопроса об эквивалентности степенной скорости сходимости и степенной особенности в нуле спектральной меры остается разобрать случай $\alpha \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\alpha = 2$ аналог теоремы 1 не имеет места ни с какими константами (замечание 2 к теореме 3 в [2]), а скорости сходимости с $\alpha > 2$ при $f - f^* \not\equiv 0$ просто не бывает (см., например, следствие 5 в [11]).

Поэтому неудивительно, что константа из утверждения первой части теоремы 1 стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 2$.

Как известно (см. теорему 18.2.1 в [7]), в случае абсолютной непрерывности меры σ_{f-f^*} с непрерывной в нуле плотностью ρ справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = D A_n(f - f^*) = 2\pi\rho(0)n^{-1} + o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Как очевидное следствие теоремы 1, получаем следующий аналог этого утверждения, уточняющий асимптотическую теорему 4 из [2] и замечание 2 из [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_\infty(-\pi, \pi]$, то

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 < 2\pi\|\rho\|_\infty \left(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2} \right)$$

для любого натурального n .

Действительно, в этом случае

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = \int_{-\delta}^{\delta} \rho(x) dx \leq 2\delta\|\rho\|_\infty$$

для любого $\delta \in (0, \pi]$ и неравенство замечания 3 немедленно следует из теоремы 1.

Следующая лемма уточняет теорему 3 из [12] и теорему 18.2.1 из [7].

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \frac{1}{n} \|f - f^*\|_2^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)|$.
- 2) Если $\{b_k(f - f^*)\}_{k=0}^\infty \in l_p$ для некоторого $p \in [1, +\infty]$, то

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq 2\|\{b_k(f - f^*)\}\|_p n^{-1/p}.$$

- 3) Если ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*)$ сходится абсолютно, то мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью ρ ; при этом $\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) e^{ikx}$ для всех $x \in (-\pi, \pi]$ и, следовательно, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) = 2\pi\rho(0)$. Справедливо асимптотическое соотношение (8), причем для любого натурального n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} = -\frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} |k| b_k(f - f^*) - \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq n} b_k(f - f^*).$$

- 4) Если, более того, ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k b_k(f - f^*)$ сходится абсолютно, то, более того, плотность ρ меры σ_{f-f^*} непрерывно дифференцируема; при этом $\rho'(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i k b_k(f - f^*) e^{ikx}$ для всех $x \in (-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f - f^*) = 2\pi(\rho')^c(0),$$

где $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f - f^*) e^{ikx}$ — гармонически сопряженная функция к $\rho'(x)$ (см. [5; гл. VIII], [13; Т. 2, раздел 12.8]). Справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} + o(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем для любого натурального n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} = \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} (|k| - n) b_k(f - f^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением (4).

- 1) Так как $b_0(f - f^*) = \|f - f^*\|_2^2$ и для всех целых k выполнено

$$b_{-k}(f - f^*) = \overline{b_k(f - f^*)},$$

то из представления (4) для $g = f - f^*$ получаем

$$\begin{aligned} \|A_n f - f^*\|_2^2 &= \|A_n(f - f^*)\|_2^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} (n - |k|) |b_k f(f - f^*)| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{|k| < n} |b_k(f - f^*)| = \frac{1}{n} \|f - f^*\|_2^2 + \frac{1}{n} \sum_{|k|=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)| \\ &= \frac{1}{n} \|f - f^*\|_2^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f - f^*)|, \end{aligned}$$

что и требовалось.

- 2) Из представления (4) с учетом равенства $b_{-k}(f - f^*) = \overline{b_k(f - f^*)}$ получаем следующее неравенство:

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b_k(f - f^*)|.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b_k(f - f^*)| \leq \frac{2}{n} \|\{b_k(f - f^*)\}\|_p n^{1-1/p}.$$

3) Из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*)$ следует, что ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} b_k(f - f^*) e^{ikx}$ равномерно на $(-\pi, \pi]$ сходится к некоторой непрерывной функции $\rho(x)$. Эта функция и будет плотностью меры σ_{f-f^*} , поскольку ее коэффициенты Фурье совпадают с корреляционными коэффициентами меры σ_{f-f^*} , а спектральная мера однозначно определяется своими корреляционными коэффициентами (см., например, [14; гл. VI, § 1, замечание 2]). Так как рассматриваемый ряд Фурье в нуле сходится к $\rho(0)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) = 2\pi\rho(0). \quad (9)$$

Учитывая это обстоятельство, из представления (4) получаем следующую цепочку соотношений, завершающую доказательство этого пункта леммы:

$$\begin{aligned} \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} &= \frac{1}{n} \sum_{|k|<n} b_k - \frac{1}{n^2} \sum_{|k|<n} |k|b_k - \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k - \frac{1}{n} \sum_{|k|\geq n} b_k - \frac{1}{n^2} \sum_{|k|<n} |k|b_k - \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{|k|\geq n} b_k - \frac{1}{n^2} \sum_{|k|<n} |k|b_k. \end{aligned}$$

4) Из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kb_k(f - f^*)$ следует, что функция $\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) e^{ikx}$ непрерывно дифференцируема на $(-\pi, \pi]$ и $\rho'(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ikb_k(f - f^*) e^{ikx}$ всюду на $(-\pi, \pi]$. По определению (см. [5; гл. VIII], [13; т. 2, раздел 12.8]) сопряженная к ρ' функция $(\rho')^c$ представляется следующим образом:

$$(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-i \operatorname{sign} k) ikb_k(f - f^*) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f - f^*) e^{ikx}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kb_k(f - f^*)$ ряд

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f - f^*) e^{ikx}$$

сходится равномерно на $(-\pi, \pi]$. Следовательно, функция $(\rho')^c(x)$ корректно определена всюду на $(-\pi, \pi]$ (и непрерывна). Рассмотрев ее значение в нуле, получаем равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f - f^*) = 2\pi(\rho')^c(0). \quad (10)$$

Далее воспользуемся соотношениями (4), (9) и (10):

$$\begin{aligned}
 & \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k - \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq n} b_k - \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} |k|b_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k \\
 &= -\frac{1}{n} \sum_{|k| \geq n} b_k + \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} |k|b_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k \geq n} (|k| - n)b_k.
 \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В замечании 3 после теоремы 3 в [12] выписано также интегральное представление

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f - f^*) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x) + \rho(-x) - 2\rho(0)}{4 \sin^2(x/2)} dx$$

(в условиях и обозначениях п. 4) нашей леммы 3). Из этого представления следует, в частности, что оба коэффициента ($2\pi\rho(0)$ и $2\pi(\rho')^c(0)$) в асимптотическом соотношении п. 4) леммы 3 зануляются одновременно тогда и только тогда, когда $\rho \equiv 0$, т.е. когда $f - f^* \equiv 0$ п.в. (и сходимости $\|A_n f - f^*\|_2^2$ со скоростью $o(n^{-2})$ при $n \rightarrow \infty$ даже в условиях п. 4) леммы 3 не бывает – ср. с замечанием 2 выше и с замечанием 1 после теоремы 3 в [2]).

Как показывает теорема 1, степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением спектральной меры σ_{f-f^*} , а значит, поведением ее коэффициентов Фурье, т.е. корреляционных коэффициентов. Следующая теорема уточняет асимптотическую теорему 6 из [2] и теорему 2 из [4]. Обсуждение того, почему ее неравенства необратимы, т.е. почему здесь отсутствует критерий степенной скорости сходимости в терминах убывания корреляционных коэффициентов, имеется в [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. для некоторой константы $C > 0$ при всех натуральных n выполнено неравенство $|b_n(f - f^*)| \leq Cn^{-\gamma}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $0 \leq \gamma < 1$, то для всех n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + \frac{2C}{1-\gamma} n^{-\gamma}.$$

2) Если $\gamma = 1$, то для всех n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \leq \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + 2C \frac{\ln n + 1}{n}.$$

Если $\gamma > 1$, то мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью ρ ; при этом $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) = 2\pi\rho(0)$ и

$$2\pi\rho(0) = \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2C \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Справедливо асимптотическое соотношение (8), причем верны следующие утверждения.

3) Если $1 < \gamma < 2$, то для всех $n \geq 2$

$$| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} | < 2C \frac{1}{(\gamma-1)(2-\gamma)} \left(1 - \frac{1}{n}\right) n^{-\gamma}.$$

4) Если $\gamma = 2$, то для всех $n \geq 2$

$$| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} | < 2C \left(\ln n + 2 + \frac{1}{n(n-1)} \right) n^{-2}.$$

5) Если $\gamma > 2$, то, более того, плотность ρ меры σ_{f-f^*} непрерывно дифференцируема; при этом

$$2\pi(\rho')^c(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f-f^*), \quad |2\pi(\rho')^c(0)| \leq 2C \frac{\gamma-1}{\gamma-2}.$$

Справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} + o(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем для всех $n \geq 2$

$$| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} | < \frac{2C}{\gamma-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n^{-\gamma}.$$

6) Если, более того, корреляционные коэффициенты убывают экспоненциально, т.е. $|b_n(f-f^*)| \leq Ae^{-Bn}$ для некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$ при всех натуральных n (что эквивалентно аналитичности плотности ρ ; см., например, [5; гл. I, § 25]), то

$$2\pi\rho(0) = \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f-f^*) \leq \|f\|_2^2 + \frac{2A}{e^B - 1},$$

$$2\pi(\rho')^c(0) = \sum_{|k|=1}^{\infty} |k|b_k(f-f^*), \quad \text{т.е. } |2\pi(\rho')^c(0)| \leq \frac{2A}{(e^B - 1)(1 - e^{-B})},$$

и для всех n

$$| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} | \leq 2A \frac{e^B}{e^B - 1} \left(1 + \frac{1}{e^B - 1} \frac{1}{n}\right) \frac{e^{-Bn}}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конкретизируем оценки леммы 3 для рассматриваемых скоростей убывания корреляционных коэффициентов.

Докажем пп. 1), 2). Первые два утверждения теоремы 2 следуют из п. 1) леммы 3. Действительно, если $0 \leq \gamma \leq 1$, то

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f-f^*)| \leq \frac{2C}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\gamma} = \frac{2C}{n^\gamma} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-\gamma} \frac{1}{n}.$$

Остается заметить, что $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{-\gamma} \frac{1}{n}$ — это нижняя сумма Дарбу для

$$\int_0^{1-1/n} x^{-\gamma} dx < \int_0^1 x^{-\gamma} dx = \frac{1}{1-\gamma},$$

если $0 \leq \gamma < 1$, и это на $1 - \frac{1}{n}$ больше нижней суммы Дарбу для

$$\int_{1/n}^1 x^{-1} dx = \ln n,$$

если $\gamma = 1$.

Для оценки величины $2\pi\rho(0)$ в случае $\gamma > 1$ заметим, что в этом случае $\{b_k(f - f^*)\}_{k=0}^\infty \in l_1$ и мы находимся в условиях п. 3) леммы 3. Следовательно,

$$2\pi\rho(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2C \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}$ на единицу больше нижней суммы Дарбу для

$$\int_1^{\infty} x^{-\gamma} dx = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Докажем п. 3). При таких γ мы находимся в условиях п. 3) леммы 3, поэтому имеем

$$\begin{aligned} |\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}| &\leq \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq n} |b_k| + \frac{1}{n^2} \sum_{|k| < n} |k| |b_k| \\ &\leq \frac{2C}{n} \sum_{k \geq n} k^{-\gamma} + \frac{2C}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\gamma} \\ &< \frac{2C}{n} \int_{n-1}^{\infty} x^{-\gamma} dx + \frac{2C}{n^2} \left(1 + \int_1^n x^{1-\gamma} dx - n^{1-\gamma}\right) \\ &= 2C \left(\frac{1}{\gamma-1} (n-1)^{1-\gamma} n^{-1} + \frac{1}{2-\gamma} n^{-\gamma} - \left(\frac{1}{2-\gamma} - 1 \right) n^{-2} - n^{-1-\gamma} \right) \\ &< 2C \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2-\gamma} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2-\gamma} - 1 \right) - \frac{1}{n} \right) n^{-\gamma} \\ &= 2C \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2-\gamma} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) n^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Докажем п. 4). Действуем, как и в п. 3), а именно,

$$\begin{aligned} |\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}| &\leq \frac{2C}{n} \sum_{k \geq n} k^{-2} + \frac{2C}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \\ &< \frac{2C}{n} \int_{n-1}^{\infty} x^{-2} dx + \frac{2C}{n^2} \left(1 + \int_1^n x^{-1} dx - n^{-1}\right) \\ &= \frac{2C}{n^2} \left(\frac{n}{n-1} + 1 + \ln n - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Докажем п. 5). При $\gamma > 2$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k$ и $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kb_k$ и в силу п. 4) леммы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0) \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} (|k| - n)|b_k| \\ & \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} |k| |b_k| \leq \frac{2C}{n^2} \sum_{k \geq n} k^{1-\gamma} < \frac{2C}{n^2} \int_{n-1}^{\infty} x^{1-\gamma} dx \\ & = \frac{2C}{n^2} \frac{1}{\gamma-2} (n-1)^{2-\gamma} = \frac{2C}{\gamma-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Докажем п. 6). Суммирование геометрической прогрессии дает очевидное равенство $\sum_{k \geq n} e^{-Bk} = \frac{e^{-Bn}}{1-e^{-B}}$ для любого натурального n , откуда дифференцированием по параметру B получаем

$$\sum_{k \geq n} k e^{-Bk} = \frac{n e^{-Bn} - (n-1) e^{-B(n+1)}}{(1-e^{-B})^2}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае экспоненциального убывания $|b_k(f - f^*)|$ имеем

$$\begin{aligned} 2\pi\rho(0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f - f^*\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A e^{-kB} = \|f - f^*\|_2^2 + \frac{2A e^{-B}}{1 - e^{-B}}, \\ |2\pi(\rho')^c(0)| &= \left| \sum_{|k|=1}^{\infty} |k| b_k(f - f^*) \right| \leq 2A \sum_{k \geq 1} k e^{-Bk} \\ &= \frac{2A e^{-B}}{(1 - e^{-B})^2} = \frac{2A}{(e^B - 1)(1 - e^{-B})}, \end{aligned}$$

и в силу п. 4) леммы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0) \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} (|k| - n)|b_k| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \geq n} |k| |b_k| \\ & \leq \frac{2A}{n^2} \sum_{k \geq n} k e^{-Bk} = \frac{2A}{n} \left(\frac{e^{-Bn} - (n-1)e^{-B(n+1)}/n}{(1 - e^{-B})^2} \right) \\ & = 2A \frac{e^B}{e^B - 1} \left(1 + \frac{1}{e^B - 1} \frac{1}{n} \right) \frac{e^{-Bn}}{n}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Следующие две теоремы уточняют асимптотическую теорему 11 из [2]. Как показано в [2] (пример 1 после доказательства теоремы 11), оценка в теореме 3 ниже асимптотически (по n) неулущаема. С другой стороны (пример 2 там же), в условиях теоремы 3 возможна равномерная сходимость $A_n g$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ возможно зануление P_n^ε для всех достаточно больших n . Таким образом, неравенство теоремы 3 (см. также теорему 4), в отличие от неравенств теоремы 1, необратимо.

ТЕОРЕМА 3 (В. Ф. Гапошкин; см. [10]). Пусть $g \in L^0_2(\Omega)$ и для любого натурального n выполнено неравенство $\|A_n g\|_2^2 \leq B n^{-\alpha}$, где $B > 0$ – некоторая константа, а $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполнено неравенство

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| \geq \varepsilon \right\} < K \varepsilon^{-2} n^{-\alpha},$$

где K – некоторая константа, не зависящая от n и ε .

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 можно положить

$$K = 2^{5+2\alpha} \frac{(2^\alpha + 1)(2^{1-\alpha} + 1)}{(2^\alpha - 1)^3(2^{1-\alpha} - 1)^3} B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем в точности следовать работе Гапошкина [10], вычисляя по ходу его доказательства интересующие нас константы. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_n^* &= \sup_{k \geq n} |A_k g|, & \delta_m^* &= \max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} |A_k g|, \\ \Delta_m &= 2^{-m} \max_{2^m < n < 2^{m+1}} \left| \sum_{k=2^m+1}^n g \circ T^k \right|, \\ \Delta_{m,p,i} &= \sum_{k=2^m+(i-1)2^{m-p}+1}^{2^m+i2^{m-p}} g \circ T^k, \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq i \leq 2^p. \end{aligned}$$

Для любого $n \in (2^m, 2^{m+1})$, разлагая n в сумму различных степеней двойки (т.е. рассмотрев запись числа n в двоичной системе счисления), имеем при подходящем выборе индексов $i(p, n)$ следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=2^m+1}^n g \circ T^i \right| \leq \sum_{p=1}^m |\Delta_{m,p,i(p,n)}|.$$

Далее нам потребуется такое следствие из неравенства Коши:

$$\left| \sum_{p=1}^m a_p \right|^2 \leq \left(\sum_{p=1}^m p^2 |a_p|^2 \right) \sum_{p=1}^m \frac{1}{p^2} < \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=1}^m p^2 |a_p|^2.$$

Из предыдущих двух неравенств получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta_m\|_2^2 &= \left\| 2^{-m} \max_{2^m < n < 2^{m+1}} \left| \sum_{k=2^m+1}^n g \circ T^k \right| \right\|_2^2 \leq 2^{-2m} \left\| \sum_{p=1}^m |\Delta_{m,p,i(p,n)}| \right\|_2^2 \\ &< \frac{\pi^2}{6} \cdot 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 \|\Delta_{m,p,i(p,n)}\|_2^2 < 2 \cdot 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 \sum_{i=1}^{2^p} \|\Delta_{m,p,i}\|_2^2. \end{aligned}$$

В силу стационарности процесса $\{g \circ T^k\}_k$ (см., например, [14; гл. 5, 6]) имеем $\|\Delta_{m,p,i}\|_2^2 = 2^{2m-2p} \|A_{2^{m-p}} g\|_2^2$. Значит,

$$\|\Delta_m\|_2^2 < 2 \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} \|A_{2^{m-p}} g\|_2^2. \quad (11)$$

Так как для $n \in (2^m, 2^{m+1})$ выполнено

$$A_n g = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2^m} g \circ T^k + \sum_{k=2^m+1}^n g \circ T^k \right),$$

то получаем неравенство $\delta_m^* \leq |A_{2^m} g| + \Delta_m$, из которого выводим, что

$$\|\delta_m^*\|_2^2 \leq 2\|A_{2^m} g\|_2^2 + 2\|\Delta_m\|_2^2. \quad (12)$$

Неравенство

$$|A_{2^m} g| \leq 2^{-1} \left(2^{-m+1} \left(\left| \sum_{k=1}^{2^{m-1}} g \circ T^k \right| + \left| \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} g \circ T^k \right| \right) \right)$$

с учетом стационарности процесса $\{g \circ T^k\}_k$ дает соотношение

$$\|A_{2^m} g\|_2^2 \leq \|A_{2^{m-1}} g\|_2^2.$$

Поэтому первое слагаемое в правой части оценки (12) мажорируется суммой из неравенства (11). Значит, справедливо неравенство

$$\|\delta_m^*\|_2^2 < 8 \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} \|A_{2^{m-p}} g\|_2^2,$$

которое с учетом условия теоремы дает следующее соотношение:

$$\|\delta_m^*\|_2^2 < 8 \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} B 2^{(m-p)(-\alpha)} = \left(8B \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p(1-\alpha)} \right) 2^{-m\alpha}. \quad (13)$$

При любом $n \geq 2^m$ в силу уже использовавшегося следствия из неравенства Коши верна оценка

$$(S_n^*)^2 \leq (\delta_m^* + \delta_{m+1}^* + \dots)^2 < 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 (\delta_{m+k}^*)^2. \quad (14)$$

В силу (13) имеем

$$\|\delta_{m+k}^*\|_2^2 < \left(8B \sum_{p=1}^{m+k} p^2 2^{-p(1-\alpha)} \right) 2^{-(m+k)\alpha}.$$

Учитывая это при интегрировании (14), получаем

$$\begin{aligned} \|S_n^*\|_2^2 &< 16B \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \sum_{p=1}^{m+k} p^2 2^{-p(1-\alpha)} 2^{-(m+k)\alpha} \\ &= 2^{-m\alpha} 16B \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 2^{-k\alpha} \sum_{p=1}^{m+k} p^2 2^{-p(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{-m\alpha} 16B \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 2^{-k\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 2^{-p(1-\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-m\alpha} 16B \left(2^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-k\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 2^{-p(1-\alpha)} \right) \\
&= BC(\alpha) 2^\alpha 2^{-(m+1)\alpha} \leq BC(\alpha) 2^\alpha n^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы убедиться в том, что

$$C(\alpha) = 2^{5+\alpha} \frac{(2^\alpha + 1)(2^{1-\alpha} + 1)}{(2^\alpha - 1)^3 (2^{1-\alpha} - 1)^3},$$

заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

Действительно, дифференцируя равенство $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ и умножая результат на x , получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Продельвая эту операцию еще раз, получаем требуемое равенство, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
2^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-k\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 2^{-p(1-\alpha)} &= 2^\alpha \frac{(1+2^{-\alpha})2^{-\alpha}}{(1-2^{-\alpha})^3} \cdot \frac{(1+2^{\alpha-1})2^{\alpha-1}}{(1-2^{\alpha-1})^3} \\
&= 2^{1+\alpha} \frac{(2^\alpha + 1)(2^{1-\alpha} + 1)}{(2^\alpha - 1)^3 (2^{1-\alpha} - 1)^3}.
\end{aligned}$$

Остается воспользоваться неравенством Чебышёва, а именно,

$$P_n^\varepsilon = \lambda\{S_n^* \geq \varepsilon\} = \lambda\{(S_n^*)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{\|S_n^*\|_2^2}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 4 доказана.

Комбинируя все доказанные выше теоремы, приходим к теореме 5 о скоростях сходимости в эргодической теореме Биркгофа (для случая $f \in L_2(\Omega)$), уточняющей асимптотическую теорему 13 из [2]. Обсуждение причин того, почему ее неравенства необратимы, т.е. почему здесь невозможен спектральный критерий степенной скорости сходимости, аналогичный критерию теоремы 1 для эргодической теоремы фон Неймана, имеется в начале § 2 гл. 1 в [2] (см. также замечания 1 и 2 после формулировки теоремы 11 там же, показывающие невозможность получения нижней оценки скорости убывания P_n^ε по скорости убывания $\|A_n f - f^*\|_2^2$, т.е. по особенности в нуле спектральной меры σ_{f-f^*}).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т.е. если для некоторой константы $A > 0$ при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq A\delta^\alpha$, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных n

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\} < 2^{5+2\alpha} \frac{(2^\alpha + 1)(2^{1-\alpha} + 1)}{(2^\alpha - 1)^3(2^{1-\alpha} - 1)^3} A \pi^\alpha \left(\frac{2}{2 - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \varepsilon^{-2} n^{-\alpha}.$$

2) Если корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. если для некоторой константы $C > 0$ при всех натуральных n выполнено неравенство $|b_n(f - f^*)| \leq Cn^{-\alpha}$, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех n

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\} < 2^{5+2\alpha} \frac{(2^\alpha + 1)(2^{1-\alpha} + 1)}{(2^\alpha - 1)^3(2^{1-\alpha} - 1)^3} \left(\|f\|_2^2 + \frac{2C}{1 - \alpha} \right) \varepsilon^{-2} n^{-\alpha}.$$

Доказательство получается применением теоремы 4 к $g = f - f^*$ (в этом случае, очевидно, $\|A_n g\|_2^2 = \|A_n f - f^*\|_2^2$) с предварительной оценкой $\|A_n f - f^*\|_2^2$ через особенность в нуле меры σ_{f-f^*} или через скорость убывания $b_n(f - f^*)$ по теоремам 1 или 2 соответственно.

Заметим в заключение, что все результаты этой работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов. Более того, теоремы 1 и 2 являются, по существу, операторными: рассматриваемые в них характеристики скорости сходимости определяются исключительно спектральными свойствами соответствующего изометрического оператора. Рассматриваемая в теоремах 3–5 сходимость п.в. – более тонкая: как известно, стационарные в широком смысле процессы не всегда сходятся п.в. (см., например, [15]), в отличие от стационарных в узком смысле процессов (эргодическая теорема Биркгофа).

Список литературы

- [1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [2] А. Г. Качуровский, “Скорости сходимости в эргодических теоремах”, *УМН*, **51**:4 (1996), 73–124; англ. пер.: A. G. Kachurovskii, “The rate of convergence in ergodic theorems”, *Russian Math. Surveys*, **51**:4 (1996), 653–703.
- [3] А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко, “О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем”, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 25–32; англ. пер.: A. G. Kachurovskii, A. V. Reshetenko, “On the rate of convergence in von Neumann’s ergodic theorem with continuous time”, *Sb. Math.*, **201**:4 (2010), 493–500.
- [4] А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, “О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана”, *Матем. заметки*, **87**:5 (2010), 756–763; англ. пер.: A. G. Kachurovskii, V. V. Sedalishchev, “On the constants in the estimates of the rate of convergence in von Neumann’s ergodic theorem”, *Math. Notes*, **87**:5–6 (2010), 720–727.
- [5] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Macmillan, New York, 1964.

- [6] J. von Neumann, “Proof of the quasi-ergodic hypothesis”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **18**:1 (1932), 70–82.
- [7] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1971.
- [8] Я. Г. Синай, “Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 6. Стохастичность гладких динамических систем. Элементы теории КАМ”, *Динамические системы* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **2**, ВИНТИ, М., 1985, 115–122; англ. пер.: Ya. G. Sinai, *Dynamical systems II. Ergodic theory with applications to dynamical systems and statistical mechanics*, Encyclopaedia Math. Sci., **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [9] I. Assani, M. Lin, “On the one-sided ergodic Hilbert transform”, *Ergodic theory and related fields* (Chapel Hill, NC, USA, 2004–2006), Contemp. Math., **430**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 21–39.
- [10] В. Ф. Гапошкин, “О скорости убывания вероятностей ε -уклоновений средних стационарных процессов”, *Матем. заметки*, **64**:3 (1998), 366–372; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Decrease rate of the probabilities of ε -deviations for the means of stationary processes”, *Math. Notes*, **64**:3 (1998), 316–321.
- [11] В. Ф. Гапошкин, “Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:6 (1975), 1366–1392; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Convergence of series connected with stationary sequences”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:6 (1975), 1297–1321.
- [12] В. П. Леонов, “О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса”, *ТВП*, **6**:1 (1961), 93–101; англ. пер.: V. P. Leonov, “On the dispersion of time-dependent means of a stationary stochastic process”, *Theory Probab. Appl.*, **6** (1961), 87–93.
- [13] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 1, 2, Мир, М., 1985; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 1, 2, Grad. Texts in Math., **64**, **85**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979, 1982.
- [14] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [15] В. Ф. Гапошкин, “Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей”, *ТВП*, **22**:2 (1977), 295–319; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Criteria for the strong law of large numbers for some classes of second-order stationary processes and homogeneous random fields”, *Theory Probab. Appl.*, **22**:2 (1978), 286–310.

А. Г. Качуровский (A. G. Kachurovskii)
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 г. Новосибирск
E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
 20.03.2010 и 30.09.2010

В. В. Седалищев (V. V. Sedalishchev)
 Механико-математический факультет
 Новосибирского государственного университета
E-mail: vvs1988@yandex.ru