Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Мантуров, Четность и кобордизмы свободных узлов, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 2, 45–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 03:59:49

УДК 515.162.8+519.17

В. О. Мантуров

Четность и кобордизмы свободных узлов

Построен простой инвариант, доставляющий препятствие к срезанности для свободных узлов. Этот инвариант, в частности, является препятствием к срезанности для кривых, погруженных в двумерные поверхности. Кривая в ориентированной двумерной поверхности S_g называется срезанной (кобордантной нулю), если найдутся такое трехмерное многообразие M с краем S_g и такой образ гладкого собственного отображения двумерного диска в M , что образ края диска совпадает с кривой.

Рассматриваемая в работе задача о срезанности свободных узлов решена посредством недавно предложенного автором метода четности.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: узел, свободный узел, кобордизм, четность, поверхность.

§ 1. Введение

Кривые, погруженные в двумерные поверхности, допускают естественное понятие кобордантности: говорят, что две кривые γ и γ' , погруженные в замкнутые ориентированные двумерные поверхности S_g и $S_{g'}$ (необязательно связные, но для простоты обозначений мы ограничимся связным случаем), являются *кобордантными*, если найдется такое ориентированное трехмерное многообразие M , краем которого является несвязное объединение поверхностей S_g и $S_{g'}$, и такой гладко отображенный в M собственный цилиндр $C \subset M$ в общем положении, что $\partial C = C \cap \partial M$ и $C \cap S_g = \gamma$, $C \cap S_{g'} = \gamma'$ (см. рис. 1).

Если в этом определении “цилиндр” заменим на “ориентированную поверхность рода g с двумя компонентами края”, то получим определение *кобордизма рода g* .

В частности, будем говорить, что погруженная кривая $\gamma \in S_g$ является *нуль-кобордантной* (или *срезанной*), если найдутся такое ориентированное трехмерное многообразие M , $\partial M = S_g$, и такой диск D , собственным образом погруженный в M посредством отображения f , для которых $f(\partial D) = f(D) \cap \partial M = \gamma$.

Аналогично, будем говорить, что погруженная кривая $\gamma \subset S_g$ имеет *срезанный род, равный h* , если в приведенном выше определении вместо диска D использована ориентированная поверхность рода h с одной компонентой края.

Кобордантность очевидным образом является отношением эквивалентности.

Первые препятствия к срезанности для кривых были найдены С. Картером в [1]; затем эта проблема изучалась В.Г. Тураевым в [2], К. Орром (устное сообщение) и другими.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 14.740.11.0794), Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы”.

Рис. 1. Кобордизм между иммерсированными кривыми

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с погружениями общего положения кривых в двумерные поверхности, если не оговорено противное. Кривая находится в общем положении, если все ее особенности состоят из конечного числа точек самопересечения, при этом каждая точка самопересечения является двойной и трансверсальной.

Можно легко показать, что если кривые $\gamma, \gamma' \subset S_g$ гомотопны, то они являются кобордантными. Таким образом, уместно говорить о классах кобордантности для гомотопических классов кривых. Кроме того, если кривая γ в поверхности S_{g+1} не имеет общих точек с меридианом некоторой ручки, то можно считать, что эта же кривая γ лежит в поверхности S_g , полученной из S_{g+1} разрезанием вдоль полученной кривой (меридиана) и заклеиванием получившихся компонент края дисками. Очевидно, что пары (S_g, γ) и (S_{g+1}, γ) кобордантны.

Таким образом, имеет смысл говорить о классах кобордизма плоских виртуальных узлов (см. [3]), которые представляют собой классы эквивалентности пар (окружность, вложенная в ориентированную 2-поверхность) с точностью до изотопий кривых по поверхности и стабилизаций/дестабилизаций.

В работе [4] (полную версию см. в [5]) было положено начало всестороннему изучению свободных узлов; последние представляют собой классы эквивалентности оснащенных 4-графов по трем движениям Рейдемейстера. Здесь слово “оснащенный” означает, что у графа в каждой вершине указано, какие ребра являются (формально) противоположными, а движения Рейдемейстера соответствуют стандартным движениям Рейдемейстера для (виртуальных) узлов и хордовых (гауссовых) диаграмм (см. ниже). Свободные узлы представляют собой резкое упрощение плоских виртуальных узлов, так как они получаются из плоских виртуальных узлов “забыванием структуры поверхности”: свободный узел можно по-разному изобразить в виде кривой на поверхности (с сохранением структуры противоположности ребер в вершинах).

В работе [4] были построены первые примеры нетривиальных свободных узлов, а также были установлены разные свойства свободных узлов. Почти одновременно (с интервалом в несколько дней) Э. Гибсон в работе [6] построил

другие примеры нетривиальных свободных узлов. Ключевым понятием, используемым во многих построениях из [5], [4], [7], является понятие четности, которое позволяет решать многие проблемы в теории свободных узлов, строить новые инварианты виртуальных и свободных узлов, усиливать старые инварианты и строить функториальные отображения в теориях узлов, обладающих четностью.

Четностью называется (см. ниже) некоторое правило сопоставления каждому перекрестку узла числа ноль или числа один способом, естественным образом согласованным с движениями Рейдемейстера. В настоящей работе это понятие будет распространено с одномерных объектов (кривые с самопересечениями) на двумерные (диски с самопересечениями), что позволит построить инварианты кобордизмов свободных узлов. Эта проблема (существования несрезанных свободных узлов) стала актуальной после построения первых примеров нетривиальных свободных узлов. Точные определения срезанных свободных узлов и срезанного рода для свободных узлов см. далее (определение 6).

Неформально говоря, перед построением инварианта какого-либо топологического объекта нужно сначала посмотреть на его “строительные кирпичи” или “узловые точки” (подобно перекресткам диаграммы узла или точкам самопересечения кривой, регулярным образом погруженной в двумерную поверхность, или линиям самопересечения двумерной кривой, погруженной в трехмерное многообразие) и попытаться найти естественный (происходящий из глобальной топологии/комбинаторики) способ различить “четные” и “нечетные” узловые точки. После этого можно модифицировать существующие комбинаторные инварианты (или строить новые), учитывая соображения четности при рассмотрении узловых точек.

В контексте свободных узлов все вершины оснащенного четырехвалентного графа могут быть естественным образом разделены на два класса: “четные” и “нечетные”.

Ясно, что всякий инвариант свободных узлов порождает инвариант плоских виртуальных узлов (нужно просто взять композицию исходного инварианта с “забывающим” отображением из плоских виртуальных узлов в свободные узлы). При этом для свободных узлов можно естественным образом определить понятие кобордизма (см. ниже) таким образом, что если два плоских узла являются кобордантными, то соответствующие им свободные узлы будут тоже кобордантными.

С другой стороны, препятствия к срезанности (и инварианты кобордизмов) для плоских виртуальных узлов, построенные Картером, Орром и Тураевым, не могут быть непосредственно перенесены на свободные узлы, так как эти инварианты несут в себе гомологическую информацию о поверхности, в то время как свободные узлы не относятся ни к какой поверхности. В некотором смысле четность способна заменить гомологии в том случае, когда у рассматриваемого объекта нет “настоящих” гомологий. Взаимосвязи четности с гомологиями посвящен §3.

Понятие четности имеет и другие приложения в теории кобордизмов свободных узлов и иммерсированных кривых. В частности, если свободный узел, задаваемый оснащенный четырехвалентным графом γ , является срезанным,

то срезанным является и свободный узел, задаваемый графом γ' , полученным из графа γ “удалением нечетных перекрестков” (см. утверждение 6).

Целью настоящей работы является построение одного простого (на самом деле – целочисленного) инварианта свободных узлов, который доставляет препятствие к срезанности (нуль-кобордантности) свободных узлов.

Статья имеет следующую структуру. Сначала мы определяем свободные узлы, четность, гауссову четность и строим указанный выше инвариант. Затем мы доказываем его инвариантность относительно движений Рейдемейстера.

После этого для доказательства того, что он правильно себя ведет при кобордизмах, мы распространяем понятие четности со свободных узлов на затягивающие их диски. Это обобщение понятия четности достигается посредством рассмотрения двойных линий и гомологического подхода к определению того, какие двойные линии являются “четными”, а какие – “нечетными”, согласованного с гомологическим определением четности перекрестков свободного узла, эквивалентным изначальному.

Затем дается введение в теорию Морса для кобордизмов погруженных кривых и приводится набросок доказательства основной теоремы. Рассматривая функцию Морса на затягивающем диске и имея правильное гомологическое определение четности для двойных линий, мы можем продолжить определение введенного инварианта на каждое сечение функции Морса. После этого простые рассуждения из теории Морса и естественная “аддитивность” рассматриваемого инварианта при разбиениях приводят к противоречию с нетривиальностью значения инварианта на исходном свободном узле. Ключевым моментом здесь является распространение понятия четности с точек самопересечения кривой на двойные линии поверхности.

В конце работы приведен список возможных дальнейших направлений исследований, связанных с четностями и кобордизмами. В частности, подход, рассмотренный в настоящей работе, может быть использован также для построения препятствий к существованию затягивающих поверхностей произвольного рода, но обладающих особыми условиями. Кроме того, описаны различные трудности гомологического свойства при переходе от дисков к поверхностям произвольного рода.

С другой стороны, приведенное в настоящей работе понятие четности с очевидностью имеет многомерные аналоги и может быть использовано для изучения 2-узлов в четырехмерном пространстве и аналогичных объектов в высших размерностях. Последний параграф настоящей работы инициирует изучение проблем такого рода.

В работе [8] было введено родственное понятию кобордизма отношение эквивалентности, названное также *кобордизмом*: вместо топологического определения, использующего понятие затягивающего диска, мы имели дело с формальным комбинаторным определением, следуя работе Тураева. Согласно этому определению два свободных узла являются (комбинаторно) *кобордантными*, если один может быть продеформирован в другой посредством конечной цепочки движений из заданного списка. Эти движения включают в себя все движения Рейдемейстера, и каждое из них отвечает настоящему (топологическому) кобордизму.

1.1. Благодарности. Я начал изучать свободные узлы и их кобордизмы, прослушав доклад К. Оппа “Surface Knots and Iterated Intersection Pairings” на конференции в Гейдельберге в 2008 г, который произвел на меня очень сильное впечатление. Этот доклад был посвящен глубокой взаимосвязи между кобордизмами кривых, погруженных в двумерные поверхности, и кобордизмами узлов $K \subset S^3$. Препятствие к кобордантности (впервые открытое Картером и далее развитое Тураевым и Орром) было основано на гомологической информации, связанной с изучаемой парой (кривая, поверхность). Это привело меня к идее нахождения правильной “замены” для гомологических рассуждений в случае абстрактной кривой с самопересечениями, рассматриваемой вместо кривой, погруженной в поверхность.

Многочисленные обсуждения с К. Орром способствовали моему более правильному пониманию результатов в этой области, за что я ему глубоко признателен.

Я также благодарен Л. Х. Кауфману и Д. П. Илютко за плодотворные консультации.

1.2. Свободные узлы. Графом мы будем всегда называть конечный мультиграф (кратные ребра и петли допускаются). Далее *4-графом* мы будем называть следующее обобщение четырехвалентного графа: одномерный комплекс Γ , каждая связная компонента которого гомеоморфна либо окружности (клеточная структура таких компонент-окружностей не имеет значения), либо четырехвалентному графу; *вершиной 4-графа* мы будем называть вершину его компоненты, не гомеоморфной окружности, а *ребром* – либо ребро компоненты, не гомеоморфной окружности, либо компоненту-окружность целиком; ребра последнего вида будут называться *циклическими*.

Будем говорить, что 4-граф является *оснащенным*, если в каждой его вершине четыре исходящих полуребра разбиты на две пары. Назовем два полуребра, исходящих из одной вершины X , (формально) *противоположными*. Мы будем использовать термин “противоположные” также и по отношению к ребрам, содержащим противоположные полуребра, и говорить, что два ребра *противоположны в вершине X* .

Под *изоморфизмом* оснащенных 4-графов мы будем понимать гомеоморфизм, сохраняющий оснащение. Далее все оснащенные 4-графы рассматриваются с точностью до изоморфизма.

Обозначим через G_0 оснащенный 4-граф, гомеоморфный окружности.

Универсальной компонентой оснащенного 4-графа назовем либо его связную компоненту, гомеоморфную окружности, либо класс эквивалентности ребер его “графовой” компоненты относительно отношения эквивалентности, порожденного отношением противоположности.

Хордовой (или гауссовой) диаграммой назовем трехвалентный конечный граф, состоящий из одного выделенного цикла, проходящего через все вершины, и множества оставшихся ребер – *хорд*. Назовем этот цикл *окружностью* хордовой диаграммы. Будем говорить, что хордовая диаграмма *ориентирована*, если ориентированной является ее окружность. Ребра, принадлежащие окружности, будем называть *дугами хордовой диаграммы* (в отличие от хорд).

По хордовой диаграмме C соответствующий оснащенный 4-граф $G(C)$ с единственной уникарсальной компонентой строится следующим образом. Если множество хорд хордовой диаграммы пусто, то соответствующим 4-графом будет G_0 . В противном случае ребра графа находятся в однозначном соответствии с дугами хордовой диаграммы, а вершины – в однозначном соответствии с хордами хордовой диаграммы. Дуги, инцидентные одному и тому же концу хорды, соответствуют ребрам, которые являются формально противоположными в вершине, соответствующей этой хорде. Будем говорить, что две хорды a и b хордовой диаграммы C *зацеплены*, если концы хорды b принадлежат различным связным компонентам дополнения к концам хорды a в окружности S^1 хордовой диаграммы C . В этом случае будем писать $\langle a, b \rangle = 1$. В противном случае будем говорить, что хорды *не зацеплены* и будем писать $\langle a, b \rangle = 0$. По определению полагаем, что хорда не является зацепленной с самой собой.

Обратная процедура (построения хордовой диаграммы по оснащеному 4-графу с одной уникарсальной компонентой) очевидна. В этой ситуации всякий связный оснащенный граф с одной уникарсальной компонентой рассматривается как топологическое пространство, получаемое из окружности отождествлением некоторых пар точек (при этом противоположными в вершине X окружности будут те пары дуг, которые на окружности примыкают к одному и тому же из двух прообразов точки X). Рассматривая эту окружность как окружность хордовой диаграммы, у которой пары отождествленных точек соответствуют хордам, мы получаем хордовую диаграмму.

Для оснащенного 4-графа G с одной уникарсальной компонентой определим $\mathbb{Z}_2$ -спаривание вершин v_1, v_2 следующим образом: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle a(v_1), a(v_2) \rangle$, где $a(v_1), a(v_2)$ суть хорды, соответствующие вершинам v_1, v_2 .

Наша первая цель – изучить классы эквивалентности оснащенных 4-графов по некоторым соотношениям, соответствующим движениям Рейдемейстера на узлах (см. [5]).

Каждое из этих движений представляет собой преобразование фрагмента рассматриваемого 4-графа.

Обсудим теперь *графические обозначения*. На рисунках, изображающих движения на диаграммах, мы будем изображать только изменяющуюся часть; неподвижная часть изображаться не будет. В случае единственной уникарсальной компоненты, когда мы имеем дело со свободным узлом, такое движение может быть описано посредством хордовых диаграмм (гауссовых диаграмм); это движение преобразует несколько фрагментов – расположений концов хорд на дугах диаграммы; мы не будем изображать те хорды, которые не меняются, а дуги, на которых не лежат концы подвижных хорд, мы будем изображать пунктиром.

При изображении оснащенных графов на плоскости мы всегда будем предполагать, что порядок противоположности полуребер индуцирован из плоскости.

Первое движение Рейдемейстера представляет собой добавление/удаление петли (см. рис.2).

Второе движение Рейдемейстера – это добавление/удаление двуугольника, образованного двумя ребрами с двумя общими концевыми вершинами, которые

Рис. 2. Первое движение Рейдемейстера и его версия на хордовых диаграммах

являются соседними (не противоположными) в каждой из этих двух вершин (см. рис. 3).

Рис. 3. Второе движение Рейдемейстера и его версия на хордовых диаграммах

Третье движение Рейдемейстера изображено на рис. 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Свободным зацеплением* называется класс эквивалентности оснащенных 4-графов по движениям Рейдемейстера.

Очевидно, что число компонент оснащенного 4-графа не меняется при применении движения Рейдемейстера, поэтому имеет смысл говорить о числе компонент свободного зацепления.

Рис. 4. Третье движение Рейдемейстера на 4-графах и на хордовых диаграммах

Свободным узлом называется свободное зацепление с единственной уникарсальной компонентой. Свободные узлы можно рассматривать как классы эквивалентности хордовых диаграмм по движениям Рейдемейстера.

Тривиальным свободным узлом (соответственно *тривиальным зацеплением из n компонент*) назовем свободный узел (соответственно свободное зацепление из n компонент), задаваемое графом G_0 (соответственно графом, состоящим из n несвязных копий графа G_0).

Аналогично определяются *длинные свободные узлы*: единственную уникарсальную компоненту нужно разорвать и вытянуть концы на бесконечность. Движения Рейдемейстера можно применять лишь к конечным областям. Эквивалентно: у 4-графа с единственной уникарсальной компонентой можно пометить одно из ребер (скажем, вершиной, расположенной в середине этого ребра) и при определении эквивалентности разрешать только те движения Рейдемейстера, которые происходят в областях, не содержащих новую вершину. На хордовых диаграммах это соответствует метке, расположенной на одной из дуг. При этом в случае длинных узлов дуга, на которой расположена метка, должна находиться вне области применения Рейдемейстера.

1.3. Аксиоматика четности. Гауссова четность. Мы определим четность для свободных узлов и выявим ее ключевые свойства посредством набора аксиом, следуя [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Γ – оснащенный 4-граф, V – вершина графа Γ . *Четностью* назовем отображение, сопоставляющее парам (Γ, V) число $p(V)$ (также обозначаемое через $p_\Gamma(V)$), равное $0 \in \mathbb{Z}_2$ (в этом случае вершина V

будет называться *четной*) или $1 \in \mathbb{Z}_2$ (в этом случае вершина будет называться *нечетной*) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия (аксиомы).

- 1) Если оснащенный 4-граф K_2 получается из оснащенного 4-графа K_1 применением (уменьшающего) первого движения Рейдемейстера, то перекресток графа K_1 , участвующий в движении Рейдемейстера, является четным.
- 2) Если K_2 получается из оснащенного 4-графа K_1 вторым движением Рейдемейстера, то оба перекрестка, принимающих участие в этом движении, имеют одну и ту же четность.
- 3) Если K_2 получается из K_1 третьим движением Рейдемейстера, то имеется естественное взаимно однозначное соответствие между тройкой перекрестков оснащенного 4-графа K_1 , принимающих участие в движении Рейдемейстера, и аналогичной тройкой перекрестков оснащенного 4-графа K_2 , $((x, x'), (y, y'), (z, z'))$ (см. рис. 5). При этом требуется, чтобы

Рис. 5. Третье движение Рейдемейстера и соответствие перекрестков

- a) $p(x) = p(x')$, $p(y) = p(y')$, $p(z) = p(z')$;
- b) среди перекрестков x, y, z число нечетных перекрестков было бы четным (т.е. равнялось нулю или двум).
- 4) Для любого из движений Рейдемейстера $K_1 \rightarrow K_2$ имеется взаимно однозначное соответствие между “неподвижными перекрестками”. Требуется, чтобы четность любого неподвижного перекрестка на диаграмме K_1 совпадала с четностью соответствующего ему неподвижного перекрестка на диаграмме K_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественно, правило определения четности для изоморфных графов должно быть одинаковым. Так, например, если оснащенный 4-граф имеет симметрию (т.е. изоморфизм на себя, сохраняющий оснащение), то перекрестки, получающиеся друг из друга под действием этой симметрии, имеют одинаковую четность.

Для построения инварианта введем понятие уточненной четности, аналогичное понятию четности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Уточненной четностью* перекрестка назовем четность вместе с дополнительным правилом, сопоставляющим каждому нечетному перекрестку либо букву b , либо букву b' (в этих случаях мы говорим, что перекресток является *нечетным первого типа* или *нечетным второго типа* соответственно) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) если второе движение Рейдемейстера применяется к двум нечетным перекресткам, то эти два перекрестка имеют один и тот же тип (либо оба помечены символом b , либо оба помечены символом b');
- 2) если в третьем движении Рейдемейстера мы имеем два нечетных перекрестка, то при применении движения каждый из них меняет свой тип (b превращается в b' , а $b' -$ в b);
- 3) кроме того, при каждом из движений Рейдемейстера нечетные перекрестки, не принимающие участия в движении, своего типа не меняют.

Определим гауссову четность и гауссову уточненную четность на оснащенных 4-графах с единственной уникурсальной компонентой следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть D – хордовая диаграмма. Назовем хорду диаграммы D *четной (по Гауссу)*, если количество хорд, зацепленных с ней, четно, и *нечетной* в противном случае. Будем говорить, что нечетная хорда *имеет первый тип (по Гауссу)*, если она зацеплена с четным числом четных хорд; в противном случае будем говорить, что нечетная хорда *имеет второй тип (по Гауссу)*.

Для оснащенного 4-графа Γ , соответствующего хордовой диаграмме D , *гауссова четность* и *гауссова уточненная четность* для вершин определяются как гауссова четность и гауссова уточненная четность соответствующих хорд хордовой диаграммы.

Можно легко проверить, что гауссова четность и уточненная гауссова четность удовлетворяют аксиомам четности и уточненной четности.

Далее в настоящей работе для построения инварианта кобордизмов мы определим понятия гауссовой четности и гауссовой уточненной четности в других ситуациях. Сначала для двумерного диска с самопересечениями мы определим гауссову четность и уточненную четность для фрагментов двойных линий (линий самопересечения) этого диска, а затем для каждого регулярного сечения диска, которое представляет собой оснащенный 4-граф (быть может, с многими уникурсальными компонентами), определим четность и уточненную четность как четность и уточненную четность, индуцированные с двойных кривых.

Однако для нашей первой задачи (построения инварианта свободных узлов) достаточно иметь корректно определенную четность и уточненную четность для оснащенных 4-графов с одной уникурсальной компонентой.

1.4. Функториальное отображение f . Пусть K – оснащенный 4-граф. Пусть $f(K)$ – оснащенный 4-граф, получаемый из оснащенного 4-графа K посредством удаления нечетных перекрестков и отождествления концевых точек ребер, которые были противоположными.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение f является корректно определенным отображением на множестве всех свободных узлов. Для диаграммы свободных узлов K имеет место равенство $f(K) = K$ тогда и только тогда, когда все перекрестки оснащенного 4-графа K четные.*

Иными словами, эта теорема утверждает, что если два оснащенных четырехвалентных графа K и K' эквивалентны, то и их образы $f(K)$ и $f(K')$ также эквивалентны.

В случае гауссовой четности эта теорема была известна Тураеву. Однако она верна и в случае произвольной четности, при этом доказательство использует лишь аксиомы четности. Этот факт был замечен Гибсоном (соответствующие результаты не опубликованы). Подробнее см. [5].

Как будет показано далее, это отображение переводит срезанные свободные узлы в срезанные свободные узлы; кроме того, оно никогда не увеличивает срезанный род свободного узла.

§ 2. Инвариант свободных узлов

В настоящем параграфе мы построим инвариант свободных узлов, пользуясь исключительно четностью и уточненной четностью, и докажем его инвариантность при движениях Рейдемейстера. Далее мы докажем, что этот инвариант доставляет препятствие к срезанности для свободного узла. В настоящем параграфе под четностью и уточненной четностью будем понимать гауссову четность и гауссову уточненную четность.

Обобщение инварианта, который описан в этом параграфе, было предложено в работе [9]; для наших целей (построения препятствия к срезанности) нам будет достаточно той (слабой) версии инварианта, которая приведена ниже. Тем не менее, вопрос об использовании инварианта, построенного в [9] (в [9] была доказана его инвариантность относительно движений Рейдемейстера для свободных узлов) в качестве препятствия к срезанности, является важным. Он будет рассмотрен в одной из дальнейших публикаций автора.

Рассмотрим группу $G = \langle a, b, b' \mid a^2 = b^2 = b'^2 = e, ab = b'a \rangle$. Для слова γ в алфавите $\{a, b, b'\}$ обозначим через $[\gamma]$ соответствующий слову γ элемент группы G .

Построим сначала инвариант свободных длинных узлов (соответственно свободных узлов) со значениями в G (соответственно со значениями в множестве классов сопряженности группы G).

Пусть D – ориентированная хордовая диаграмма с отмеченной точкой X на окружности C , отличной от концов хорд. Далее будет показано, что для наших целей от ориентации хордовой диаграммы D можно избавиться.

Будем различать четные и нечетные хорды диаграммы D , а для нечетных хорд диаграммы D будем различать хорды первого типа и нечетные хорды второго типа.

Меченой хордовой диаграмме (D, X) сопоставим слово в алфавите из трех букв $\{a, b, b'\}$ следующим образом. Будем двигаться вдоль ориентации окружности хордовой диаграммы C , начиная с точки X . Каждый раз, когда мы проходим через конец хорды, будем записывать букву a , b или b' в зависимости от того, является хорда четной, нечетной первого типа или нечетной второго типа. Таким образом, каждой хорде будут соответствовать две одинаковые буквы в разных местах слова. Пройдя всю окружность до точки X , мы получим слово $\gamma(D, X)$; это слово задает некоторый элемент из G . Обозначим его также через $\gamma(D, X)$. Иногда в этом обозначении мы будем опускать ссылку на X , если из контекста ясно, о какой начальной точке идет речь.

ТЕОРЕМА 2. *Если две меченные хордовые диаграммы (D, X) и (D', X') порождают эквивалентные длинные свободные узлы, то $\gamma(D) = \gamma(D')$ в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть сначала D и D' отличаются одним первым движением Рейдемейстера (например, D' имеет на одну хорду больше). Тогда слово $\gamma(D')$ получается из слова $\gamma(D)$ добавлением пары подряд идущих букв-образующих $a \cdot a$; таким образом, соответствующие элементы группы G совпадают.

Аналогично, если D' получается из D посредством увеличивающего второго движения Рейдемейстера, то две новые хорды в D' имеют одинаковую четность (если они обе нечетные, то и одинаковый тип). Следовательно, этим хордам соответствует одна и та же буква-образующая (a , b или b'), которую мы обозначим через u . Таким образом, слово $\gamma(D', X')$ получается из слова $\gamma(D, X)$ добавлением подслова $u \cdot u$ в двух местах. Как и в случае первого движения Рейдемейстера, такое преобразование не меняет элемента из G .

Третье движение Рейдемейстера $D \rightarrow D'$ может иметь один из двух видов. В первом случае все три участвующие в этом движении хорды являются четными. Тогда слова $\gamma(D)$ и $\gamma(D')$ тождественно совпадают.

Во втором случае две из трех хорд, участвующих в движении Рейдемейстера, являются нечетными, а одна хорда – четная. Вспомним, что при третьем движении Рейдемейстера каждая из нечетных хорд, участвующих в нем, меняет свой тип.

Рассмотрим те три отрезка в словах $\gamma(D)$ и $\gamma(D')$, на которых расположены концы “подвижных” хорд. Для тех двух отрезков, которые содержат один конец нечетной хорды и один конец четной хорды, преобразование подслов-отрезков имеет один из следующих видов: $ab \longleftrightarrow b'a$ или $ba \longleftrightarrow ab'$. Оба соотношения представляют собой тождества в группе G .

Рассмотрим теперь тот отрезок, на котором расположены два конца нечетных хорд. Если эти два конца имеют один и тот же тип на диаграмме D , то на диаграмме D' они также будут иметь один и тот же тип. Таким образом, при переходе от $\gamma(D)$ к $\gamma(D')$ мы заменяем подслово $b \cdot b$ на $b' \cdot b'$ и наоборот. Так как оба подслова соответствуют тривиальному элементу группы G , то $\gamma(D) = \gamma(D')$ в G .

Наконец, если две нечетные хорды, участвующие в третьем движении Рейдемейстера, имеют различный тип на диаграмме D , то они будут иметь различный тип и на диаграмме D' . При этом при переходе от $\gamma(D)$ к $\gamma(D')$ соответствующий отрезок из двух букв меняться не будет: буквы b , b' на этом отрезке поменяют порядок дважды: один раз в связи с тем, что хорды меняют тип, а другой раз – в связи с тем, что концы хорд переставляются при третьем движении Рейдемейстера.

Таким образом, каждое из движений Рейдемейстера оставляет неизменным элемент группы G , соответствующий меченой хордовой диаграмме.

Из этой теоремы мгновенно вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Класс сопряженности элемента $[\gamma(D, X)]$ в группе G является инвариантом свободных узлов, т.е. он не зависит от выбора отмеченной точки X на диаграмме D свободного узла.*

Действительно, при перемещении отмеченной точки через конец некоторой хорды мы производим циклическую перестановку букв в слове, которая порождает сопряжение в группе G .

2.1. Граф Кэли для группы G . Граф Кэли группы G представляет собой вертикальную полосу на клетчатой бумаге, расположенную между прямыми $x = 0$ и $x = 1$. В качестве единицы группы мы выбираем начало координат $(0, 0)$. Умножение в группе на элемент a справа соответствует одному шагу в горизонтальном направлении, который меняет координату x с нуля на единицу или с единицы на нуль. Умножение на b соответствует одному шагу по вертикали вверх, если сумма двух координат точки является четной, и вниз, если она является нечетной. Умножение справа на b' , наоборот, соответствует одному шагу вниз, если сумма координат четная, и одному шагу вверх, если сумма координат нечетная (см. рис. 6).

Рис. 6. Граф Кэли группы

Каждой меченой хордовой диаграмме мы сопоставляем элемент группы G . Нетрудно проверить, что каждый такой элемент будет иметь координаты $(0, 4m)$. Более того, класс сопряженности элемента с координатами $(0, 4m)$ при $m \neq 0$ состоит из следующих двух элементов группы G : одного элемента с координатами $(0, 4m)$ и одного элемента с координатами $(0, -4m)$. Таким образом, для длинных свободных узлов мы получаем инвариант с целыми значениями, равный $l = 4m$. Обозначим этот инвариант для узла K через $l(K)$. В случае компактного узла K инвариантом является модуль $|l|$. Обозначим этот инвариант через $L(K)$.

Очевидно, что обращение ориентации хордовой диаграммы (это приводит и к обращению ориентации свободного узла) приводит к обращению порядка букв в соответствующем слове γ , что, в свою очередь, приводит к замене $(0, 4m) \rightarrow (0, -4m)$. Таким образом, мы приходим к двум важным следствиям.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для некоторого ориентированного свободного узла K имеет место $l(K) \neq 0$, то узел K необратим.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Инвариант $L(K)$ является инвариантом неориентированных свободных узлов.*

Далее мы будем задавать элементы группы G координатами на графе Кэли. Тот факт, что элемент группы G , соответствующий хордовой диаграмме, имеет координаты $(0, 4m)$ для некоторого целого m , доказывается следующим образом. Слово, соответствующее гауссовой диаграмме, имеет четное число вхождений буквы a , откуда следует равенство нулю первой координаты. Кроме того, общее число вхождений букв b и b' кратно четырем. Последнее, в свою очередь, следует из того факта, что число нечетных хорд на хордовой диаграмме четно, а каждая хорда имеет два конца, которые соответствуют шагам в одну и ту же сторону на графе Кэли. Кроме того, класс сопряженности (в группе G) элемента $(0, 4m)$ при $m \neq 0$ состоит из двух элементов: $(0, 4m)$ и $(0, -4m)$.

На рис. 7 изображен свободный узел K_1 , для которого $L(K_1) = 16$.

Рис. 7. Несрезанный свободный узел

На этом рисунке мы используем полужирные линии для изображения четных хорд. Соответствующее слово, задающее элемент из G (при подходящем выборе отмеченной точки), будет иметь вид $(b'a)^7 b'b(ab)^7 = (b'b)^{16}$.

2.2. Замечания об определении инварианта L для зацеплений. Заметим, что теорема 2 верна для любой четности, а не только для гауссовой, при этом доказательство в случае произвольной четности остается дословно тем же.

Для целей, связанных с кобордизмами, нам необходимо понять значение инварианта L не только при движениях Рейдемейстера, но и при перестройках Морса. Более того, сначала нужно определить этот инвариант для зацеплений из многих компонент, так как после перестройки Морса из узла может получиться зацепление.

Наша дальнейшая стратегия состоит в следующем. Предположим, что имеется кобордизм (см. определение 6) $\mathcal{D} \rightarrow D$, затягивающий оснащенный 4-граф γ . Мы определим четность и уточненную четность для этого кобордизма, т.е. укажем, какие двойные линии (линии на D , точки на которых имеют два прообраза на $\mathcal{D}$) являются четными, а какие – нечетными. Далее каждая нечетная двойная линия будет разделена на отрезки – нечетные первого типа

и нечетные второго типа. Эта четность будет определена таким образом, что четность (уточненная четность) любой двойной точки на γ будет совпадать с четностью (уточненной четностью) того 1-страта, к которому принадлежит эта точка. Кроме того, этот подход позволит нам определить понятия четности и уточненной четности для сечений общего положения рассматриваемого кобордизма. Такие сечения будут представлять собой оснащенный 4-граф, задающий некоторое свободное зацепление. Имея корректно определенные четность и уточненную четность, мы сможем задать значение инварианта L на каждой компоненте зацепления – рассматриваемого сечения. Как окажется, значения этих инвариантов (набор чисел) будут “хорошо себя вести” при перестройках Морса, из чего и будет следовать инвариантность.

Для свободного зацепления из одной компоненты (т.е. свободного узла) значение инварианта γ может быть описано одним числом L . В случае кобордизма каждое сечение представляет собой многокомпонентное свободное зацепление. Таким образом, нужно определить значение инварианта γ на соответствующем многокомпонентном зацеплении как набор классов сопряженности группы G (по одному на каждую компоненту). Естественно потребовать, чтобы каждый из этих элементов группы G (или соответствующий класс сопряженности) мог быть описан одним целым (соответственно целым неотрицательным) числом. В этом случае мы сможем каждой компоненте зацепления, появляющейся в сечении рассматриваемого кобордизма, сопоставить целое (целое неотрицательное) число.

Для этих целей нам необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) четность и уточненная четность корректно определены на сечениях и правильно себя ведут при перестройках Морса;
- 2) число точек пересечения каждой из уникарсальных компонент сечения с каждой из двойных линий является четным; более того, число точек пересечения этой уникарсальной компоненты сечения с нечетными двойными линиями является четным (это условие необходимо для того, чтобы элемент группы G , соответствующий этой уникарсальной компоненте, имел в своей записи четное число букв a и мог быть описан одной координатой);
- 3) значение первой координаты элемента группы g (которое в этом случае задает элемент L) правильно себя ведет при перестройках Морса.

То, что каждая компонента зацепления – несингулярного сечения – имеет четное общее число точек пересечения с двойными линиями, нужно и для того, чтобы четность была корректно определенной. Действительно, для определения гауссовой четности некоторого перекрестка нам нужно рассмотреть одну из двух “половинок” нашего свободного узла, получающихся разведением в этом перекрестке, и подсчитать количество пересечений на этой половине. В случае свободного узла это число не зависит от выбора половины, так как суммарное количество точек пересечения четно с учетом кратности: каждая двойная точка учитывается дважды.

В случае двухкомпонентного зацепления для перекрестка, образованного двумя ветвями одной и той же компоненты, определяемые таким образом четности двух половин могут быть различными в случае, если общее число перекрестков между двумя компонентами является нечетным.

Таким образом, для тех двухкомпонентных зацеплений, у которых количество точек пересечения между двумя компонентами является нечетным, не видно явного способа обобщения гауссовой четности.

Как мы далее увидим, все необходимые условия для естественного продолжения гауссовой четности будут естественным образом выполняться для тех многокомпонентных зацеплений, которые возникают в виде сечений дискового кобордизма.

Чтобы это сделать, нам понадобится дать более топологическое определение понятия гауссовой четности.

§ 3. Четность и гомологии

В настоящем параграфе мы переформулируем общее определение четности и уточненной четности в терминах гомологий (ср. с [10]). Эта переформулировка полезна для понимания способов определения четности для двойных линий некоторого кобордизма.

Рассмотрим оснащенный 4-граф Γ с одной уникурсальной компонентой. Группа гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ порождена “половинками”, соответствующими вершинам графа: для каждой вершины v мы имеем две “половинки” графа, $\Gamma_{v,1}$ и $\Gamma_{v,2}$, получаемые из Γ двумя разведениями этой вершины (см. рис. 8). Определив на множестве всех оснащенных 4-графов (возможно, снабженных

Рис. 8. Графы-разведения $\Gamma_{v,1}$ и $\Gamma_{v,2}$

некоторыми дополнительными структурами в вершинах) четность, мы можем на каждом из графов естественным образом определить следующий коомологический класс h (над $\mathbb{Z}_2$): для каждой из двух половинок $\Gamma_{v,1}$, $\Gamma_{v,2}$ положим $h(\Gamma_{v,1}) = h(\Gamma_{v,2}) = p(v)$, где $p(v)$ – четность вершины v . В силу того, что каждые две половинки в сумме дают цикл, соответствующий всему графу, мы получаем корректно определенный “характеристический” коомологический класс h из $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$, равный нулю на цикле, задаваемом всем графом Γ .

Заметим следующее. Каждому циклу $c \in H_1(\Gamma)$, рассмотренному как подграф графа Γ , можно сопоставить набор тех вершин графа Γ , которым цикл c

инцидентен ровно по двум ребрам, причем эти два ребра не являются противоположными. Обозначим множество всех таких ребер через $d(c)$.

Из очевидной проверки следует, что цикл c равен с точностью до Γ сумме $\sum_i \Gamma_{d_i,1}$, где d_i пробегают все множество $d(c)$.

Собирая воедино свойства этого кохомологического класса и вспоминая аксиоматику четности, приходим к следующим выводам.

- 1) Для каждого оснащенного 4-графа Γ имеем $h(\Gamma) = 0$.
- 2) Если оснащенный 4-граф Γ' получается из оснащенного 4-графа Γ применением первого движения Рейдемейстера, состоящего в добавлении петли, то всякому базису $\{\alpha_i\}$ группы $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ естественным образом соответствует базис группы $H_1(\Gamma', \mathbb{Z}_2)$, состоящий из одного элемента β , соответствующего петле, и набора элементов α'_i , находящихся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементом α_i . Двуугольник равен в H_1 сумме двух половинок одинаковой четности. В этом случае $h(\beta) = 0$ и $h(\alpha_i) = h(\alpha'_i)$ для всех i .
- 3) Пусть теперь граф Γ' получается из графа Γ применением второго увеличивающего движения Рейдемейстера. Тогда любому базису $\{\alpha_i\}$ группы $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ естественным образом соответствует базис группы $H_1(\Gamma', \mathbb{Z}_2)$, состоящий из одного “двуугольника” γ , элементов α'_i , находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами α_i (это взаимно однозначное соответствие устанавливается посредством сглаживания в двух перекрестках), и еще одного элемента δ (см. левую часть рис. 9). В этом

Рис. 9. Когомологические условия в случае движений Рейдемейстера

случае имеют место следующие равенства: $h(\alpha_i) = h(\alpha'_i)$, $h(\gamma) = 0$.

- 4) Пусть оснащенный 4-граф Γ' получается из оснащенного 4-графа Γ посредством третьего движения Рейдемейстера. Тогда существует граф Γ'' с единственной вершиной валентности шесть и остальными вершинами валентности четыре, получающийся из каждого графа Γ и Γ' посредством стягивания “малого” треугольника в точку. Это порождает естественные отображения $i: H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Gamma'', \mathbb{Z}_2)$ и $i': H_1(\Gamma', \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Gamma'', \mathbb{Z}_2)$, (см. правую часть рис. 9). В этом случае коцикл h равен нулю на малых треугольниках в графах Γ и Γ' и, кроме того, если для

некоторых циклов $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$, $a' \in H_1(\Gamma', \mathbb{Z}_2)$ имеет место $i(a) = i'(a')$, то $h(a) = h(a')$.

Равенство нулю коцикла на малых треугольниках следует из того, что каждый малый треугольник представляет в $H_1(\Gamma)$ элемент, равный (с точностью до прибавления класса, задаваемого всем графом Γ) сумме трех половинок, из которых число нечетных равно нулю или двум.

Таким образом, каждая четность для свободных узлов порождает некоторый “характеристический” класс $\mathbb{Z}_2$ -когомологий на множестве всех оснащенных 4-графов с одной уникурсальной компонентой и этот класс правильно ведет себя при движениях Рейдемейстера.

Обратное утверждение также верно. Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что задано правило, сопоставляющее каждому оснащенному 4-графу $\mathbb{Z}_2$ -когомологический класс, который является “характеристическим” в том смысле, что он удовлетворяет условиям 1)–4), описанным выше. Тогда этот класс происходит из некоторой четности.*

Действительно, достаточно определить нашу четность для каждой вершины как значение класса на соответствующей половинке. Независимость от выбора одной из двух половинок вытекает из условия равенства нулю когомологического класса на всем графе. Далее непосредственно проверяются аксиомы четности (они явно следуют из условий 1)–4)).

Эта точка зрения позволяет искать четности для классов узлов, лежащих в $\mathbb{Z}_2$ -гомологически нетривиальных многообразиях (подробнее см. [11]).

§ 4. Срезанный род и кобордизмы свободных узлов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть K – оснащенный 4-граф. Будем говорить, что K имеет срезанный род не более h , если найдутся поверхность $\mathcal{S}_h$ рода h с единственной компонентой края (окружностью) S , 2-комплекс D_h , содержащий K как подкомплекс, и непрерывное отображение $g: \mathcal{S}_h \rightarrow D_h$ такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $g(\partial \mathcal{S}_h) = K \subset D_h$; для любой вершины v графа K имеет место равенство $g^{-1}(v) = \{v_1, v_2\}$, а малая окрестность $U(v_1) \subset S$ отображается на пару противоположных ребер графа K в вершине v ;
- 2) отображение g является взаимно однозначным везде, за исключением отрезков $\Sigma = \{x \in D_h: \text{Card}(g^{-1}(x)) > 1\}$;
- 3) подмножество $\Sigma_3 = \{x \in D_h: \text{Card}(g^{-1}(x)) > 2\}$ является конечным и состоит из тех точек, которые имеют ровно три прообраза; более того, $\Sigma_3 \cap \partial D_h = \emptyset$;
- 4) “локальная трехмерность”: в комплексе D_h окрестности двойных точек, тройных точек и каспов имеют следующий вид:
 - а) окрестность каспа (точки, в которой отображение не является иммерсией) гомеоморфна зонтику Уитни;

- b) окрестность двойной точки из $\Sigma_2 \setminus \Sigma_3$, не являющейся вершиной узла K , гомеоморфна окрестности точки $(0, 0, 0)$ множества $\{x, y, z \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^3$;
- c) окрестность тройной точки гомеоморфна окрестности точки $(0, 0, 0)$ множества $\{x, y, z \mid xyz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$;
- d) окрестность вершины графа K в D_h гомеоморфна окрестности точки $(0, 0, 0)$ множества $\{x, y, z \mid xy = 0, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Поверхность $\mathcal{D}_h$ назовем *затягивающей поверхностью* рода h или *кобордизмом* рода h для K .

Иными словами, в определении мы требуем, чтобы свободный узел (оснащенный 4-граф K , представленный в виде образа окружности S) был затянут комплексом D_h – образом двумерной поверхности $\mathcal{D}_h$, край которой представляет собой одну окружность S , а особенности отображения $g: \mathcal{D}_h \rightarrow D_h$ являются особенностями общего положения (т.е. окрестность каждой особенности вложима в $\mathbb{R}^3$).

Аналогичным образом определяется кобордизм рода h для граф-зацепления (при этом у затягивающей поверхности будет несколько компонент края).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Далее под словом “кобордизм” мы всегда будем понимать кобордизм рода нуль, если не оговорено противное.

Замыкание $\bar{\Sigma}$ кроме точек из Σ содержит также каспы, т.е. такие точки $x \in D_h$, для которых $\text{Card}(g^{-1}(x)) = 1$ и для любой малой окрестности $U(x)$ точки x пересечение $U(x) \cap \Sigma$ представляет собой проколотый интервал. Обозначим через Ψ прообраз $g^{-1}(\bar{\Sigma}) \subset \mathcal{D}_h$. Пусть Σ_2 обозначает дополнение $\Sigma \setminus \Sigma_3$.

Образ $g(S) \cap D_h$ представляет собой исходный оснащенный 4-граф в D_h . Этот граф получается из $S = \partial \mathcal{D}_h$ посредством склейки двойных точек на окружности S . Оснащение (структура противоположных ребер) для этого графа получается из S : для точки x в $g(S) \cap \Sigma$ прообраз $g^{-1}(U(x) \cap g(S))$ состоит из двух ветвей окружности S , а образ каждой из этих ветвей относительно отображения g представляет собой две пары противоположных ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если K допускает кобордизм рода h и не допускает кобордизма рода $h - 1$, то будем говорить, что узел (оснащенный 4-граф) K имеет *срезанный род* h (обозначение: $sg(K) = h$).

Свободный узел срезанного рода нуль назовем *нуль-кобордантным* или *срезанным*.

Следующая лемма вытекает из определения свободного узла.

ЛЕММА 1. Если оснащенные 4-графы K, K' представляют эквивалентные свободные узлы, то K и K' являются кобордантными и, следовательно, $sg(K) = sg(K')$.

Действительно, на рис. 10 показано, что эквивалентность посредством каждого из трех движений Рейдемейстера влечет кобордантность. Так как кобордантность является отношением эквивалентности, то мы получаем требуемое. Первое движение Рейдемейстера соответствует прохождению через точку кас-

Рис. 10. Кобордизмы, соответствующие движениям Рейдемейстера

па. Третье движение Рейдемейстера соответствует прохождению через тройную точку. При втором движении Рейдемейстера особенности у поверхности нет, но сечение поверхности имеет точку касания.

Таким образом, имеет смысл говорить о срезанном роде для свободных узлов, а не только для оснащенных 4-графов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть K – плоский виртуальный узел, $|K|$ – соответствующий ему свободный узел. Тогда из определения следует, что срезанный род узла K не меньше срезанного рода узла $|K|$. В частности, если плоский узел K является срезанным, то срезанным является и свободный узел $|K|$.

ПРИМЕР 1. Первый простейший пример несрезанного плоского виртуального узла принадлежит Картеру (см. [1]). Этот узел изображен на рис. 11.

Рис. 11. Несрезанный плоский виртуальный узел Картера

Этот узел вложим в ориентируемую поверхность рода два. Ориентируем эту поверхность. На рис. 11 стрелки указывают взаимное расположение ветвей по часовой стрелке. А именно, ориентируем окружность хордовой диаграммы против часовой стрелки и ориентируем ее образ соответствующим образом. Если два сегмента кривой (a, b) имеют пересечение в двойной точке X , а касательные векторы к ним $v_{X,a}, v_{X,b}$ образуют положительный базис на поверхности

с двумя ручками, то соответствующая хорда на хордовой диаграмме снабжена стрелкой, направленной от прообраза отрезка a к прообразу отрезка b .

Заметим, что если две хорды могут быть удалены посредством второго уменьшающего движения Рейдемейстера, то при таких обозначениях для плоских виртуальных узлов их стрелки должны быть противонаправленными. Плоский виртуальный узел K , диаграмма которого изображена на рис. 11, нетривиален, более того, он не является и срезанным. Тем не менее, в категории свободных узлов узел $|K|$ тривиален, так как к двум “параллельным” хордам возможно применить второе уменьшающее движение Рейдемейстера (после чего оставшаяся хорда удаляется первым движением Рейдемейстера). Значит, $|K|$ тривиален и, следовательно, срезан.

Если свободный узел не является срезанным, то не является срезанным ни один из соответствующих ему свободных виртуальных узлов.

Проблема нахождения не кобордантных нулю (не срезанных) свободных узлов является довольно сложной.

В работе [8], следуя Тураеву, автор ввел другое определение “кобордизмов свободных узлов”. В этой работе два свободных узла называются *кобордантными*, если один из них может быть перестроен в другой посредством цепочки комбинаторных преобразований. Эти комбинаторные преобразования состоят из третьего движения Рейдемейстера и добавлений/удалений четных “симметричных конфигураций”. Преобразования последнего вида включают в себя в качестве частных случаев первое и второе движения Рейдемейстера и каждое из них представляет собой некоторый (топологический) кобордизм рода нуль. Таким образом, если два узла являются “комбинаторно” кобордантными в смысле работы [8], то они являются и топологически кобордантными. Взаимосвязь между топологическим и комбинаторным отношениями кобордантности будет рассмотрена в отдельной статье.

В работах Картера [1] и Тураева [2] были изучены топологические препятствия к срезанности свободных узлов (иммерсированных в двумерные поверхности кривых). Идея, использованная в этих работах, заключается в следующем: для погруженной кривой Γ рассматриваются гомологические классы “половинок” $\Gamma_{x,1}$ и их гомологические спаривания. Эти спаривания образуют целочисленную матрицу, а препятствие к кобордизмам формулируется в терминах свойств полученной матрицы. Такой подход совершенно неприемлем в случае свободных узлов: для данного свободного узла можно найти много разных двумерных поверхностей, в которые его представители (оснащенные четырехвалентные графы) вложимы с сохранением структуры противоположных полуребер в вершинах. Оказывается, что при переходе от одной поверхности к другой соответствующий индекс пересечения меняется даже по модулю $\mathbb{Z}_2$.

§ 5. Четность для кривых в двумерных поверхностях

Обратим теперь внимание на структуру кобордизма свободных узлов. Пусть задан кобордизм $g: \mathcal{D} \rightarrow D$ (рода нуль), затягивающий свободный узел (оснащенный 4-граф) $K = g(\partial\mathcal{D})$.

Положим $\Psi = g^{-1}(\bar{\Sigma})$. Тогда Ψ имеет естественную стратификацию (клеточное разбиение) на страты размерностей нуль и один. Страты размерности нуль суть двойные точки на крае, каспы, а также тройные точки; все остальные точки образуют страты размерности один. *Двойной линией* будем называть минимальное по включению объединение 1-стратов, обладающее следующими свойствами:

- 1) два 1-страта, подходящие к одному и тому же каспу с противоположных сторон, принадлежат одной и той же двойной линии;
- 2) два 1-страта, подходящие к одной и той же тройной точке с противоположных сторон, принадлежат одной и той же двойной линии (см. рис. 12).

Рис. 12. Двойные линии t, x, y, z , каспы и тройные точки

Пусть $x \in K \cap \Sigma$ – двойная точка на крае ∂D . Предположим, что $g^{-1}(x) = \{x_1, x_2\}$.

Вспомним определение гауссовой четности для оснащенных 4-графов. Рассмотрим двойную точку x , рассмотрим дугу (половину окружности) ι на K , соединяющую x с x и являющуюся образом дуги $\tilde{\iota}$ на окружности, и подсчитаем четность числа двойных точек на ι . Заметим, что здесь мы берем именно половину окружности, неважно которую, а не просто кривую на K , соединяющую точку x с точкой x . Дело в том, что если мы возьмем кривую на окружности $\partial \mathcal{D}$, соединяющую два прообраза x_1 и x_2 точки x , но локально (в окрестности этих прообразов) направленную внутрь разных “половинок”, то количество двойных точек на такой кривой будет на единицу больше, так как добавится один из прообразов точки x .

Рассмотрим теперь прообраз $\tilde{l} \subset S$, соединяющий точки x_1 и x_2 . Тогда определение четности $p(x)$ может быть переформулировано как четность числа $\text{Card}(\tilde{l} \cap \Sigma)$. Заметим, что эта линия $\tilde{l}$ принадлежит диску $\mathcal{D}$.

Если мы хотим обобщить определение четности на двойные линии и сделать его более топологическим (см. рис. 13), мы можем вместо пути, идущего по краю $\tilde{l} \in \partial\mathcal{D}$, рассмотреть произвольный путь $\eta \in \mathcal{D}$ общего положения, соединяющий x_1 с x_2 . Общность положения означает, что путь пересекает Σ только по Σ_2 , причем все пересечения трансверсальные. Кроме того, нам нужно переформулировать условие правильной направленности пути в окрестности начала и конца (см. далее). Сделав это, мы мгновенно получаем корректную определенность четности, так как любые два таких пути гомотопны в классе путей, имеющих фиксированные начальную и конечную точки и четность числа точек пересечения с множеством Σ останется неизменной.

Рис. 13. Геометрический способ определения четности

Требование на поведение кривой в окрестности точек x_1 и x_2 таково. Когда мы берем $\eta \subset \mathcal{D}$, окрестности $\eta \cap U(x_1)$ и $\eta \cap U(x_2)$ точек x_1 и x_2 принадлежат одной и той же половине окружности S (окружность делится на половины этими точками). В терминах $\mathcal{D}$ и D это переформулируется следующим образом.

Пусть $\zeta \subset D$ – 1-страт в D , подходящий к точке x . Ориентируем ζ произвольным образом и ориентируем два прообраза этого страта, $\zeta_1 \cap U(x_1)$ и $\zeta_2 \cap U(x_2)$, согласованным образом. Рассмотрим два вектора v_1 и v_2 , касательные к $\tilde{l}$ в x_1 и x_2 соответственно. Мы требуем, чтобы базисы $(\dot{\zeta}_1, v_1)$ и $(\dot{\zeta}_2, v_2)$ задавали две различные ориентации на $\mathcal{D}$. Ясно, что замена ориентации страта ζ (и соответствующая ей одновременная замена ориентаций в окрестностях точек x_1 и x_2) не изменит определенной здесь четности числа $\text{Card}(\eta \cap \Sigma_2)$.

Таким образом, это дает нам новый способ определения четности перекрестка x . Будем рассматривать этот способ как определение четности для любой двойной точки из Σ_2 .

Действительно, пусть x – точка на двойной линии из Σ_2 . Подсчитав число точек пересечения кривой, соединяющей x_1 и x_2 указанным выше способом, с двойными линиями, получим число $p(x)$. Назовем его *гауссовой четностью точки x* .

Следующее утверждение легко вытекает из определения гауссовой четности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Гауссова четность постоянна вдоль двойных линий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для пар точек, которые принадлежат одному 1-страту. Это утверждение также очевидно для точек из разных 1-стратов, подходящих с двух сторон к одному каспу. При прохождении через тройную точку четность не меняется по следующим причинам (см. рис. 14). Мы

Рис. 14. Поведение четности и уточненной четности при прохождении через тройную точку

видим, что кривая, соединяющая два прообраза точки A , “параллельна” кривой, соединяющей два прообраза точки B , везде, за исключением двух малых областей (параллельность означает, что локально эти две кривые ограничивают полосу, не содержащую особых точек). Внутри этих двух малых областей имеем два различия между этими циклами, которые соответствуют точкам пересечения p и q с двойными линиями. Таким образом, четность точек A и B одна и та же.

Это позволяет дать следующее определение гауссовой четности для двойной линии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть γ – двойная линия на кобордизме. Выберем произвольную точку x из $\gamma \cap \Sigma_2$ и рассмотрим два ее прообраза x_1 и x_2 на $\mathcal{D}$.

Соединим x_1 с x_2 путем общего положения $\tilde{\eta}$, поведение которого в окрестностях $U(x_1)$ и $U(x_2)$ согласовано (см. выше). Тогда *гауссова четность* двойной линии, содержащей x , определяется как четность числа точек пересечения $\tilde{\eta}$ и Ψ .

Это позволяет нам определить множество Ψ_{even} , состоящее из замыкания множества всех точек из Ψ , лежащих на четных двойных линиях, и Ψ_{odd} — замыкание множества точек на нечетных двойных линиях.

Из определения гауссовой четности для двойных линий легко вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Из трех двойных линий, пересекающихся в одной точке, количество нечетных двойных линий четно (равно нулю или двум).*

Перейдем теперь к определению уточненной гауссовой четности. Рассмотрим нечетную двойную линию γ , выберем на ней произвольную точку x общего положения и рассмотрим два прообраза x_1 и x_2 точки x . Соединим точки x_1 и x_2 путем общего положения $\delta \in \mathcal{D}$ и вычислим количество точек общего положения между δ и Ψ_{even} . Если это число является четным, будем говорить, что 1-страт, содержащий точку x , имеет *первый тип*; в противном случае будем говорить, что он имеет *второй тип*.

Заметим, что здесь не нужно требовать какой-либо согласованности (сонаправленности) начального и конечного отрезков пути: при малом “шевелении” пути в окрестности его начала (конца) может измениться лишь количество точек его пересечения с нечетными двойными линиями, в то время как мы интересуемся его пересечением с четными двойными линиями.

Из приведенного выше определения вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Уточненная гауссова четность является постоянной вдоль 1-стратов, принадлежащих Ψ . Она не меняется при прохождении через точку каспа (с одного страта на другой страт той же двойной линии) и она изменяется с первого типа на второй и со второго типа на первый при прохождении через тройную точку с одного страта двойной линии на другой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о постоянности типа вдоль 1-стратов очевидно. Рассмотрим теперь рис. 14. Предположим, что двойные линии γ и δ нечетные, а двойная линия ϵ четная. Рассмотрим точки A и B . Две соответствующие им линии (линия, соединяющая два прообраза точки A и линия, соединяющая два прообраза точки B) являются “параллельными” везде, за исключением двух областей, содержащих точки p и q . Так как при определении типа нечетной двойной линии мы учитываем пересечения с четными двойными линиями, то оказывается, что точка q считается, а точка p не считается. Тем самым доказано, что тип меняется на единицу при прохождении через тройную точку.

Определив гауссову четность для двойных линий и уточненную гауссову четность для стратов, мы можем построить инвариант L для любого сечения кобордизма D .

Доказанные выше свойства четности на двойных линиях и относительной четности на стратах гарантируют корректную определенность этого инварианта и его неизменность при движениях Рейдемейстера.

§ 6. Срезанность свободных узлов. Основная теорема

Оказывается, что инвариант L свободных узлов доставляет препятствие к срезанности (см. теорему 4).

Перед формулировкой и доказательством основной теоремы сделаем несколько утверждений, относящихся к срезанности. Согласно лемме 1 срезанный род корректно определен для свободных узлов.

Следующее утверждение тривиально следует из рис. 10.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Если оснащенный 4-граф K' эквивалентен оснащеному 4-графу K (посредством движений Рейдемейстера), то срезанный род узла K' равен срезанному роду узла K . В частности, если K является срезанным, то таковым является и K' .*

Таким образом, имеет смысл говорить о кобордизмах свободных узлов, а не только о кобордизмах оснащенных 4-графов.

В качестве следствия мы получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Если оснащенный 4-граф K вложим в S^2 или T^2 , то K является срезанным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякий оснащенный 4-граф на сфере эквивалентен (даже как плоский виртуальный узел) тривиальному свободному узлу. Всякий оснащенный 4-граф на торе гомотопен либо тривиальному узлу (без перекрестков), либо некоторому узлу, лежащему в цилиндре (дополнению в торе до некоторой кривой). В последнем случае этот свободный узел эквивалентен узлу, лежащему на сфере (так как цилиндр является подмногообразием сферы) и, следовательно, тривиален.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Пусть K – свободный узел, а $f(K)$ – свободный узел, полученный из K удалением нечетных перекрестков. Тогда если узел K является срезанным, то срезанным является и $f(K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякий кобордизм (рода нуль) для узла K порождает кобордизм рода нуль для узла $f(K)$, полученный разведением всех нечетных двойных линий: две точки из Σ_2 , склеиваемые при старом кобордизме, останутся склеенными при новом кобордизме тогда и только тогда, когда у старого кобордизма двойная линия является четной. Отметим, что это правило склейки согласовано с тройными точками, так как если в каждой тройной точке имеется две четные двойные линии, то третья двойная линия также является четной.

Обозначим полученный кобордизм для $f(K)$ через $f(D)$.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4 (основная теорема). *Если для свободного узла K имеет место $L(K) \neq 0$, то K не является срезанным.*

Из этой теоремы в качестве следствия получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть γ – кривая, погруженная в ориентированную замкнутую двумерную поверхность S_g . Пусть для свободного узла Γ , задаваемого кривой γ , имеет место $L(\Gamma) \neq 0$. Тогда плоский виртуальный узел, соответствующий кривой γ , не является срезанным.

Действительно, диск, гладко отображенный в трехмерное многообразие, является затягивающим диском. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Проблема нахождения препятствий к тому, чтобы кривая γ в поверхности S_g была затягиваема диском, собственным образом гладко отображенным в трехмерное многообразие M с краем S_g , изучалась Картером в [1], Тураевым в [2] и др. Были построены некоторые топологические препятствия, основанные на структуре первой группы гомологий поверхности S_g .

В настоящей статье мы изучаем более сложный случай: вместо кривых на двумерных поверхностях рассматриваются оснащенные четырехвалентные графы, а вместо затягивающих дисков в трехмерных многообразиях – “абстрактные” затягивающие диски. В этом случае невозможно определить “группу гомологий”, так как оснащенный 4-граф можно считать вложенным в разные поверхности, у которых будут разные группы гомологий.

С этой точки зрения четность в некотором смысле “заменяет” группы гомологий.

6.1. Построение функции Морса и графа Роба. Доказательство основной теоремы состоит из нескольких шагов.

Сначала мы примем следующее соглашение об обозначениях: через g будем обозначать отображение $\mathcal{D} \rightarrow D$, соответствующее кобордизму, а через f будем обозначать как функцию Морса на диске с самопересечениями $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (см. определение ниже), так и композиционное отображение $f \circ g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, представляющее собой функцию Морса на диске $\mathcal{D}$.

Предположим, что свободный узел K (задаваемый оснаственным 4-графом) допускает кобордизм $g: \mathcal{D} \rightarrow D$ (рода нуль).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функцией Морса на D назовем такую функцию Морса $f: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$, что условие $g(x) = g(y)$ всегда влечет равенство $f(x) = f(y)$, все тройные точки и точки каспов на $\mathcal{D}$ лежат на некритических уровнях функции f и $f^{-1}(0) = K$, $f^{-1}(1) = \emptyset$. Мы будем использовать одно и то же обозначение f как для функции, определенной на $\mathcal{D}$, так и для функции, определенной на D .

Неособым значением функции f назовем некритическое значение X функции f (на $\mathcal{D}$) такое, что множество $f^{-1}(X) \subset \mathcal{D}$ не содержит каспов и тройных точек. Функцию Морса на D назовем *простой*, если каждый ее особый уровень содержит либо ровно одну критическую точку, либо ровно одну тройную точку, либо ровно один касп.

Далее будем считать, что функция Морса на D является простой, а уровень нуль является неособым. Ясно, что такие функции Морса всюду плотны в классе всех функций Морса. Каждая функция Морса имеет особые уровни двух

типов: соответствующие перестройкам Морса (седла, максимумы и минимумы), а также уровни, соответствующие движениям Рейдемейстера. Обозначим особые уровни этой функции Морса f (обоих типов) через $c_1 < \dots < c_k$ и выберем неособые уровни a_i : $0 = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < \dots < a_k < c_k < a_{k+1} = 1$.

Построим теперь граф Риб Γ_f (молекулу) для функции Морса f следующим образом. Все вершины этого графа будут иметь валентность один или три. Вершины валентности один (кроме одной) будут соответствовать минимумам и максимумам функции f . Вершины валентности три будут соответствовать седловым точкам (заметим, что каждое седло состоит в перестройке либо одной окружности в две, либо двух в одну, так как поверхность – диск – является ориентируемой). Каждое ребро графа Риб будет соответствовать цилиндру $S^1 \times I \subset \mathcal{D}$, который непрерывно отображается функцией f на это ребро (отрезок) между двумя вершинами (критическими точками). Этот цилиндр не содержит морсовских критических точек внутри (хотя, быть может, содержит особые точки, соответствующие перестройкам Рейдемейстера). Одна вершина валентности один будет соответствовать уровню нуль (некритическому), на котором находится окружность $S = \partial \mathcal{D}$ (см. рис. 15).

Рис. 15. Граф Риб Γ_f и перестройки окружностей

Так как этот граф представляет собой граф Риб Γ_f функции Морса на диске $\mathcal{D}$, граф Γ_f представляет собой дерево.

Теперь мы сопоставим каждому ребру графа Риб неотрицательную целочисленную метку. Метка на ребре, исходящем из нулевого уровня функции Морса, будет совпадать с $L(K)$.

Для каждого неособого уровня c функции f прообраз $K_c = f^{-1}(c) \subset D$ представляет собой оснащенный 4-граф, задающий свободное зацепление. При прохождении через особую точку “Рейдемейстера” этот граф подвергается соответствующему движению Рейдемейстера. При прохождении через морсовскую

особую точку граф претерпевает перестройку Морса. Каждый перекресток графа K_c принадлежит некоторой двойной линии. Определим *четность перекрестка* как гауссову четность соответствующей двойной линии. Аналогичным образом мы определим *уточненную четность перекрестка* как уточненную четность того 1-страта, которому он принадлежит.

Легко видеть, что если сечение функции Морса представляет собой свободный узел (является оснащенным 4-графом с единственной уникальной компонентой), то четность и уточненная четность на этой компоненте совпадают с гауссовыми четностью и уточненной четностью, определяемыми стандартным образом посредством гауссовых диаграмм.

Выберем неособый уровень c , рассмотрим свободное зацепление K_c и ориентируем его компоненты произвольным образом (как мы далее увидим, выбор ориентации несущественен); каждая уникальная компонента $K_{c,j}$ свободного зацепления K_c задает класс сопряженности $\delta(K_{c,j})$ элемента $\gamma(K_{c,j})$ в группе G таким же образом, как и свободный узел. Пусть $\delta(K_c)$ – неупорядоченный набор всех классов $\delta(K_{c,j})$ для всех j (с повторениями).

Из утверждений 1 и 3 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Четность и уточненная четность, определенные на множестве всех особых уровней K_c , удовлетворяют всем аксиомам четности и уточненной четности при тех движениях Рейдемейстера, которые возникают при переходе от одного особого уровня к другому внутри кобордизма D .*

Таким образом, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *При изменении параметра c вдоль отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$, на котором с уровнем K_c происходят лишь перестройки Рейдемейстера, но не перестройки Морса, мы имеем совпадение неупорядоченных множеств с повторениями $\delta(K_a) = \delta(K_b)$, если ориентации компонент зацеплений K_a и K_b согласованы: эти множества представляют собой классы сопряженности элементов из G .*

Более того, $\delta(K_0)$ представляет собой класс сопряженности элемента $\gamma(K)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теперь рассмотрим δ как набор неотрицательных целых чисел с повторениями, а также “забудем” об ориентациях компонент зацеплений K_c . Для этого нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Пусть c – неособый уровень функции f , а $K_{c,1}, \dots, K_{c,n}$ – уникальные компоненты свободного зацепления $K_c = f^{-1}(c) \subset D$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняются следующие условия:*

- 1) *общее число точек пересечения $K_{c,i}$ и $K_{c,j}$, $j \neq i$, является четным;*
- 2) *Число нечетных точек пересечения $K_{c,i}$ и $K_{c,j}$, $j \neq i$ (т.е. точек пересечения, лежащих на нечетных двойных линиях), является четным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство вытекает из того факта, что прообраз оснащенного 4-графа $K_{c,i}$ в диске $\mathcal{D}$ представляет собой окружность, а число точек пересечения замкнутой кривой с множеством Ψ (или с множеством Ψ_{even}) в $\mathcal{D}$ в общем положении состоит из четного числа точек.

Из леммы 4 следует, что $\gamma(K_{c,i})$ для неособого значения c задает элемент с координатами $(0, 2k)$ на графе Кэли группы G (для некоторого целого k).

Пусть $L_c = \{l_{c,1}, \dots, l_{c,m}\}$ – неупорядоченный набор целых чисел с повторениями, полученный из $\delta(K, c)$ заменой классов сопряженности элементов из G на абсолютные значения их второй координаты. Так как обращение ориентации заменяет координаты элемента группы G с $(0, 2k)$ на $(0, -2k)$, то ориентация оставляет неизменным неупорядоченный набор модулей чисел (о котором говорится в лемме 4), соответствующих компонентам зацепления.

Каждое число $l_{c,i} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ отвечает некоторой компоненте свободного зацепления K_c и не меняется при движениях Рейдемейстера при изменении c (при условии, что c не проходит через морсовские особые точки). Сопоставим это число ребру графа Γ_f .

Проанализируем теперь поведение этих меток $l_{c,i}$ в вершинах графа Γ_f .

ЛЕММА 5. Пусть $K_{c-\varepsilon}$ и $K_{c+\varepsilon}$ отличаются одной морсовской перестройкой на уровне c .

Тогда:

- 1) если перестройка соответствует появлению окружности, то множество $l_{c+\varepsilon}$ получается из множества $l_{c-\varepsilon}$ добавлением одного элемента нуль;
- 2) в случае исчезновения окружности $l_{c+\varepsilon}$ получается из $l_{c-\varepsilon}$ удалением одного нуля;
- 3) в случае, когда две окружности сливаются в одну, множество $l_{c+\varepsilon}$ получается из множества $l_{c-\varepsilon}$ применением следующей операции: все элементы, кроме двух (равных m и n), остаются неизменными, а вместо двух элементов появляется один элемент, равный некоторому $k = \pm n \pm m$.
- 4) операция разбиения одной окружности на две обратна операции слияния двух окружностей в одну: при этой операции один элемент k преобразуется в два элемента m, n такие, что $\pm m \pm n = k$, а остальные элементы остаются неизменными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения очевидны: на тривиальной окружности нет двойных точек. Таким образом, соответствующий ей элемент из G равен единице, а его координаты равны $(0, 0)$ и соответствующая метка нулевая.

Последние два утверждения вытекают из следующего соображения. Если окружность C с отмеченной точкой X разбивается на две окружности посредством перестройки Морса, которая происходит в окрестности точки X и окрестности некоторой другой точки Y на окружности, то соответствующее слово $w \in G$ разбивается в произведение двух слов: $w = w_X w_Y w_X$.

Оставшаяся часть доказательства вытекает из правил умножения в группе G : для элементов $u, v \in G$, имеющих координаты (u_1, u_2) и (v_1, v_2) соответственно, произведение $u \cdot v$ имеет координаты $(\pm u_1 \pm v_1, \pm u_2 \pm v_2)$.

Доказанная лемма следующим образом приводит к доказательству основной теоремы. Все вершины графа Γ_f валентности один, кроме одной (соответствующей исходному узлу K), имеют метку нуль. В каждой вершине валентности

три сумма трех меток со знаками $\pm$ равна нулю. Таким образом, учитывая, что граф Рибо является деревом, получаем, что $L(K) = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим свободный узел K_1 , изображенный на рис. 7. Согласно теореме 4 он не является срезанным. Таким образом, ни один из плоских виртуальных узлов K , которому соответствует свободный узел K_1 , также не является срезанным.

§ 7. Дальнейшее обсуждение

Методы, использованные для доказательства того, что инвариант L доставляет препятствие к срезанности, не обобщаются непосредственно для получения нижних оценок на срезанный род свободных узлов. Для этого имеются следующие причины. Во-первых, при определении четности и уточненной четности двойных линий на $\mathcal{S}$ мы выбираем произвольную кривую, соединяющую два прообраза точки на двойной кривой. Мы утверждаем, что любые две кривые, соединяющие два таких прообраза (и правильно ведущие себя в окрестности концов), являются гомотопными. Это верно в случае кобордизма рода нуль, но в случае поверхности D_h произвольного рода h это, вообще говоря, неверно.

Таким образом, чтобы определить четность для двойных линий, нам нужно наложить некоторые ограничения на затягивающую поверхность: нужно потребовать, чтобы класс когомологий, двойственный графу Ψ , был $\mathbb{Z}_2$ -гомологически тривиальным. Важность свойства четновалентных графов быть $\mathbb{Z}_2$ -гомологически тривиальными тесно связана с *атомами* (подробнее см. [7]).

Другая проблема состоит в том, что граф Рибо произвольной функции Морса (не обязательно соответствующей диску) не обязательно является деревом. Рассмотрим рис. 16.

Рис. 16. Граф Рибо, соответствующий кобордизму рода один

Стартуя со свободного узла K , у которого, например, $L(K) = 8$, мы (в принципе) можем разбить его перестройкой Морса на свободное двухкомпонентное зацепление, состоящее из двух свободных узлов K_1 и K_2 , у которых $L(K_i) = 4$, а затем другой перестройкой Морса перестроить это тривиальное зацепление

в тривиальный узел. Инвариант L не является препятствием к этому, так как числа 4 и -4 в сумме дают нуль.

В работе [9] построено усиление G_m группы G , описанной в настоящей работе (в обозначениях [9] группа G есть G_1), и построены инварианты свободных узлов со значениями в классах сопряженности элементов из G_m . Основная идея этих построений заключается в дальнейшем разделении четных хорд на хорды разных видов, что приводит к уточнению образующих и соотношений в группе. Эти построения тесно связаны с итерированными четностями и отображением f , удаляющим нечетные перекрестки. Похоже, что все инварианты, связанные с группами G_m , также доставляют препятствие к срезанности узла. Более того, в работе [12] построены инварианты виртуальных узлов, в которых помимо четности хорд учитывается структура проход/переход. Исследованию связи этих инвариантов с кобордантностью будет посвящена отдельная работа.

Список литературы

- [1] J. S. Carter, “Closed curves that never extend to proper maps of disks”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113**:2 (1991), 879–888.
- [2] V. Turaev, “Cobordisms of words”, *Commun. Contemp. Math.*, **10**, suppl. 1 (2008), 927–972.
- [3] V. G. Turaev, *Virtual open strings and their cobordisms*, arXiv:math.GT/0311185.
- [4] V. O. Manturov, *On free knots*, arXiv:abs/0901.2214.
- [5] В. О. Мантуров, “Четность в теории узлов”, *Матем. сб.*, **201**:5 (2010), 65–110; англ. пер.: V. O. Manturov, “Parity in knot theory”, *Sb. Math.*, **201**:5 (2010), 693–733.
- [6] A. Gibson, “Homotopy invariants of Gauss words”, *Math. Ann.*, **349**:4 (2011), 871–887.
- [7] V. O. Manturov, *On free knots and links*, arXiv:abs/0902.0127.
- [8] Д. П. Илютко, В. О. Мантуров, “Кобордизмы свободных узлов”, *Докл. РАН*, **429**:4 (2009), 439–441; англ. пер.: D. P. Il'yutko, V. O. Manturov, “Cobordisms of free knots”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 844–846.
- [9] V. O. Manturov, O. V. Manturov, “Free knots and groups”, *J. Knot Theory Ramifications*, **19**:2 (2010), 181–186.
- [10] V. O. Manturov, “Free knots and parity”, *Introductory lectures on knot theory* (Trieste, Italy, 2009), World Scientific, Hackensack, NJ, 2011, 321–345.
- [11] D. Yu. Krylov, V. O. Manturov, *Parity and relative parity in knot theory*, arXiv:abs/1101.0128.
- [12] В. О. Мантуров, “Свободные узлы, группы и инварианты конечного порядка”, *Тр. ММО*, **72**, УРСС, М., 2011, 207–222.

В. О. Мантуров (V. O. Manturov)

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: vomanturov@yandex.ru

Поступила в редакцию

08.04.2010 и 25.09.2010