Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Ж. Г. Рахматуллина, Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 12, 23–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:13:21

УДК 517.53+517.537.7

А. М. Гайсин, Ж. Г. Рахматуллина

Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке

Изучается поведение суммы целого ряда Дирихле в терминах ее минимума модуля на системе вертикальных отрезков. Поставлена и решена более общая задача, связанная с гипотезой Поля о минимуме модуля целой функции с лакунами Фабри и ее росте на кривых, уходящих в бесконечность.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: ряды Дирихле, минимум модуля, лакуны Фейера.

§ 1. Введение

Одной из актуальных задач теории функций является проблема изучения поведения целой трансцендентной функции f в терминах ее минимума модуля.

В 1926 г. Поля доказал следующее утверждение: если $0 < \rho < 1$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует последовательность r_n , $0 < r_n \uparrow \infty$, такая, что

$$m(r, f) > [M(r, f)]^{\cos \pi \rho - \varepsilon}, \quad r = r_n,$$

где $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ (см. [1]).

Особый интерес представляет изучение целых трансцендентных функций, заданных лакунарными степенными рядами, поскольку наличие пропусков в таких рядах обеспечивает в определенном смысле правильное поведение их роста и убывания.

Пусть $\{p_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, а

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad z = x + iy, \quad (1.1)$$

– целая трансцендентная функция. В работе [2] Поля высказал следующее предположение: если функция $f(z)$ имеет конечный порядок и имеет лакуны Фабри, т.е.

$$n = o(p_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln m(r, f)}{\ln M(r, f)} = 1. \quad (1.3)$$

Справедливость этой гипотезы установлена Фуксом в [3]. Он показал, что если выполняется условие (1.2), а функция $f(z)$ имеет конечный порядок, то

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00572-а).

для любого $\varepsilon > 0$ при всех r вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой логарифмической плотности имеет место неравенство

$$\ln M(r, f) < (1 + \varepsilon) \ln m(r, f). \quad (1.4)$$

Хейман показал, что если функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок и выполняется условие (1.2), то оценка (1.4) имеет место вне некоторого множества нулевой нижней логарифмической плотности (см. [4]).

Наконец, в [5] найдены неупрощаемые условия на последовательность $\{p_n\}$, при которых в классе целых функций (1.1) конечного порядка (или конечного нижнего порядка) верна оценка (1.4). В работе [6] эти результаты полностью перенесены на целые ряды Дирихле с положительными показателями, где предложен новый подход к вышеуказанной задаче.

В случае, когда функция $f(z)$ имеет бесконечный нижний порядок, соответствующая задача представляет собой сложную проблему, связанную с тем же равенством (1.3).

При изучении асимптотических значений целых функций (1.1) естественно возникает и другая задача, тесно связанная с предыдущей. Она заключается в следующем: найти условия на последовательность $\{p_n\}$, при которых для всякой кривой γ , уходящей в бесконечность, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такая, что

$$\ln M(|\xi_n|, f) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)|, \quad \xi_n \rightarrow \infty.$$

Впервые эта задача была сформулирована в работе [2] и решена для одного класса целых функций f вида (1.1), имеющих конечный порядок. В случае, когда функция f имеет какое-либо более общее ограничение на рост, вышеуказанная задача является относительно простой и она достаточно полно исследована. Когда же функция f имеет произвольный рост, возникают существенные трудности, связанные с нерегулярным распределением точек последовательности $\{p_n\}$, поэтому сформулированная выше задача, как и предыдущая, в литературе иногда называется проблемой Полия. Обзор исследований, посвященных второй задаче, и ее решение представлены в [7].

Настоящая статья посвящена первой задаче об оценке типа (1.4) для функций произвольного роста.

Приведем краткий обзор основных результатов, полученных в этой области. Т. Ковари показал, что если $f(z)$ – целая функция вида (1.1) и $p_n > n(\ln n)^{2+\eta}$, $\eta > 0$, то оценка (1.4) имеет место вне некоторого множества конечной логарифмической меры (см. [8]).

В работе [4] Хейманом установлено, что если

$$\frac{n}{p_n} \ln p_n (\ln \ln p_n)^{2+\eta} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta > 0,$$

то

$$\ln M(r, f) = [1 + o(1)] \ln m(r, f), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности.

В [9] сформулирована теорема, где утверждается, что асимптотическое равенство (1.5) имеет место (при $r \rightarrow \infty$ вне некоторого исключительного множества нулевой логарифмической плотности), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ \ln p_n}{p_n} < \infty. \quad (1.6)$$

Наконец, в [10] доказана справедливость этого утверждения при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} \ln \frac{p_n}{n} < \infty. \quad (1.7)$$

Поскольку условие (1.7) слабее условия (1.6) (это показано в [10]), результат из [10] является наиболее общим для рядов (1.1) и содержит приведенные выше утверждения из работ [8], [4], [9].

Естественно возникает вопрос о точности условия (1.7). По этому поводу можно сказать следующее. Для выполнения условия (1.7) необходимо (но не достаточно) выполнение следующей пары условий (см. § 3, а также [10]):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (1.8)$$

где $c(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{q_n\}$,

$$q_n = -\ln |q'(p_n)|, \quad q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right).$$

Для любой последовательности $\{p_n\}$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty$, существует ряд (1.1), для которого $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow \infty$ (см. [11]). Для любой последовательности $\{p_n\}$, для которой интеграл б) из (1.8) расходится, существует ряд (1.1), для которого $d(f; \mathbb{R}_+) = 0$, где

$$d(f; \gamma) = \lim_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(r, f)},$$

γ – любая фиксированная кривая, уходящая произвольным образом в бесконечность (см. [7]).

Таким образом, каждое из условий а) и б) из (1.8) является необходимым для того, чтобы для любой функции f вида (1.1) выполнялось асимптотическое равенство (1.5).

В работе [7] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $d(f) = \inf_{\gamma} d(f; \gamma)$. Для того чтобы для любой целой функции f вида (1.1) имело место равенство $d(f) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия а) и б).

С учетом приведенной выше теоремы А из [7] теорему А из [10] (она в [10] носит лишь достаточный характер) можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА В. Для того чтобы для любой функции f вида (1.1) при $x \rightarrow \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой логарифмической плотности имело место равенство

$$\ln M(x, f) = (1 + o(1)) \ln |f(x)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялась пара условий а) и б).

Теорема В на самом деле верна для любого луча $l_\varphi = \{z : \arg z = \varphi, |\varphi| \leq \pi\}$. Следовательно, если ряд (1.7) расходится, но условия а) и б) выполнены, то $d(f; l_\varphi) = 1$ и поэтому принципиально нельзя построить пример функции, заданной рядом (1.1), для которой $d(f; l_\varphi) < 1$. Это наводит на мысль о том, что при условиях а) и б) обязательно должен иметь место некоторый аналог равенства (1.5), означающий более сильную регулярность роста, чем $d(f) = 1$. То, что это действительно так, показано в настоящей статье и, таким образом, получено существенное усиление соответствующей теоремы из [7]. Точно такая же задача может быть поставлена и для рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1.9)$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости. Здесь рассматривается именно этот более общий случай, специфика которого состоит прежде всего в том, что на распределение последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, показателей влияет не только рост считающей функции и накапливаемость точек Λ на отдельных участках, но и их взаимное расположение (сближаемость). Поскольку сумма ряда (1.9) в отличие от ряда (1.1) не является периодической на вертикальных прямых, в данном случае может идти речь только об оценках модуля функции F через ее минимум модуля на вертикальных отрезках (эти оценки аналогичны равенству (1.5)). При условиях (1.7) и б) из (1.8) в [10] такого рода оценки получены для вертикального отрезка фиксированной длины, уходящего в бесконечность в пределах некоторой горизонтальной полосы. В настоящей статье показано, что это не по существу: вертикальный отрезок может двигаться произвольно, даже сильно осциллируя.

В обсуждаемой задаче оценка тем лучше, чем длиннее отрезок. Поэтому представляет интерес вопрос о длине отрезка.

Цели настоящей статьи таковы:

1) показать, что если кроме пары условий (1.8) имеет место некоторое условие l -регулярности (оно зависит от F и потому слабее, чем (1.7)), то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma),$$

где $M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$, $m_F(\sigma)$ – минимум модуля функции F на любом вертикальном отрезке вида $I_{F, \gamma}(\sigma) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leq \sigma^\gamma\}$, где γ , $0 < \gamma < 1$, фиксировано;

2) показать, что если выполняется только пара условий (1.8), а $m_F(\sigma)$ – минимум модуля F на некотором измененном отрезке, получаемом из заданного вертикального отрезка постоянной длины незначительной деформацией, то сформулированное выше утверждение верно для любой функции F вида (1.9);

3) дать наглядное геометрическое описание основных характеристик распределения точек последовательности Λ , применяемых в подобных исследованиях.

§ 2. Обозначения и основные результаты

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность. Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ обозначим множество всех рядов Дирихле (1.9), абсолютно сходящихся во всей плоскости. Через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (1.9), т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_n \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

Положим

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|, \quad m_{I_h}(\sigma) = \min_{it \in I_h} |F(\sigma + it)|,$$

где I_h – произвольный отрезок мнимой оси длины $|I| = 2h$.

Введем также следующие обозначения:

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad q_n = -\ln |q'(\lambda_n)|, \quad c(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q_n. \quad (2.1)$$

Пусть $n(t)$ – считающая функция последовательности Λ : $n(t)$ есть число точек λ_n , не превосходящих t , т.е. $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$. Заметим, что эта функция неубывающая и непрерывная справа. Наряду с $n(t)$ обычно рассматривается и функция

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

Через $G = \{\omega\}$ будем обозначать семейства полуинтервалов ω вида $[a, b)$. Пусть длина $|\omega|$ каждого полуинтервала ω из G положительна и конечна. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, порождает целочисленную считающую меру

$$\mu_{\Lambda}(\omega) = \sum_{\lambda_j \in \omega} 1, \quad \omega \in G.$$

Пусть μ_M – аналогичная мера, порожденная последовательностью $M = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$. Тогда включение $\Lambda \subset M$ означает, что $\mu_{\Lambda}(\omega) \leq \mu_M(\omega)$ для любого $\omega \in G$.

Для характеристики исключительных множеств вещественной оси, вне которых будут получены оценки, будем пользоваться понятием ν -меры.

Пусть $\nu(x)$ – неубывающая абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функция. Она определяет ν -меру на $\mathbb{R}_+$ по следующему правилу:

$$\nu\text{-mes}(e) = \int_e \nu'(x) dx,$$

где e – произвольное борелевское множество из $\mathbb{R}_+$.

Верхней ν -плотностью измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ называется величина

$$\nu\text{-dens } E = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu\text{-mes } E_r}{\nu(r)}, \quad E_r = E \cap [0, r]. \quad (2.2)$$

Если $\nu(r) \equiv r$, то верхняя ν -плотность называется *верхней (линейной) плотностью* и обозначается $\overline{\text{dens}} E$ (или DE). В случае, когда $\nu(r) \equiv \ln r$, верхняя ν -плотность называется *верхней логарифмической плотностью* и обозначается $\ln\overline{\text{dens}} E$. Если в (2.2) знак $\overline{\lim}$ заменить знаком $\underline{\lim}$, получим определение нижней ν -плотности ($\nu\text{-dens } E$). Если $\nu\overline{\text{dens}} E = \nu\text{-dens } E$, то говорят, что множество E имеет ν -плотность ($\nu\text{-dens } E$).

В дальнейшем (если не оговорено противное) считаем, что все исключительные множества из $\mathbb{R}_+$ допускают покрытие отрезками вида $\Delta_n = [a_n, a'_n]$, $n \geq 1$, $a_n < a'_n$, $a_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (отрезки попарно не имеют общих внутренних точек), причем, говоря о мере исключительного множества, всегда будем иметь в виду меру множества $\bigcup_n \Delta_n$.

Для различных классов монотонных функций введем также следующие обозначения.

Пусть L – класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$ таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \rightarrow \infty \right\}.$$

Рассмотрим также множество

$$W_l = \left\{ w \in W : \int_1^\infty \frac{w_l(x)}{x^2} dx < \infty, \text{ где } w_l(x) = w(x) \ln^+ \frac{x}{w(x)} \right\},$$

$$a^+ = \max(a, 0).$$

Пусть $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (1.9), $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс, т.е. $\nu(\sigma) = \max\{n : |a_n|e^{\lambda_n \sigma} = \mu(\sigma)\}$. Если $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс, то соответствующий ему показатель $\lambda_\nu = \lambda_{\nu(\sigma)}$ называется *центральным показателем ряда* (1.9). В дальнейшем через $\Lambda(F)$ будем обозначать подпоследовательность Λ , состоящую из центральных показателей данного ряда:

$$\Lambda(F) = \{\lambda_k \in \Lambda : k = \nu(\sigma), \sigma \geq 0\}.$$

В [10] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА С. Пусть $n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\int_1^\infty \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (2.3)$$

где $c(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q_n$, $q_n = -\ln |q'(\lambda_n)|$. Если для последовательности Λ выполняется условие

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty, \quad (2.4)$$

то для любой функции $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, h), \quad (2.5)$$

где $\mu(\sigma, h) = \min_{|t| \leq h} |F(\sigma + it)|$, $0 < h < \infty$.

Условие (2.4) универсально в том смысле, что выполнение этого условия влечет за собой справедливость равенства (2.5) для всех функций из $\mathcal{D}(\Lambda)$.

В настоящей работе дано следующее простое геометрическое описание данного условия (см. §3): условие (2.4) равносильно существованию функции $w \in W_l$ такой, что для любого $\omega_j \in J$ выполнено неравенство

$$\mu_\Lambda(\omega_j) \leq w(|\omega_j|), \quad (2.6)$$

где $J = \{\omega_j\}$, $\omega_{-1} = [0, 1)$, $\omega_j = [2^j, 2^{j+1})$, $j \geq 0$. Удобно считать, что $\omega_j = \emptyset$ если $j < -1$.

В §3 приведен также ряд других предложений, эквивалентных (2.4).

Пусть Λ' – подпоследовательность Λ . Для любого $\lambda \in \Lambda'$ найдется полуинтервал $\omega_k \in J$, содержащий λ . Обозначим $\omega'_k = \omega_{k-1} \cup \omega_k \cup \omega_{k+1}$, $\lambda \in \omega_k$. Пусть $J' = \{\omega'_k\}_{\lambda \in \Lambda'}$. Ясно, что в системе J' каждый полуинтервал ω'_k может пересекаться с не более четырьмя полуинтервалами из J' .

Будем говорить, что Λ' является *l-регулярной подпоследовательностью последовательности* Λ , если существует функция $w \in W_l$ такая, что для любого полуинтервала $\omega'_k \in J'$ выполнено неравенство

$$\mu_\Lambda(\omega'_k) \leq w(|\omega'_k|). \quad (2.7)$$

Заметим, что в (2.6) $|\omega_j| = 2^j$. Поэтому при условии (2.6) последовательность Λ сама является *l-регулярной* (оценка (2.7), очевидно, будет выполняться для функции $3w(2x)$).

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, – такая последовательность, что

$$1) S_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad (2.8)$$

$$2) I(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 1, \quad (2.9)$$

где $\mu(\lambda_n; t)$ – число точек λ_k из $\Lambda_n = \Lambda \setminus \{\lambda_n\}$, принадлежащих отрезку $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$, а w – некоторая функция из W .

Если последовательность $\Lambda(F)$ центральных показателей ряда Дирихле (1.9) является *l-регулярной подпоследовательностью* Λ , то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_{I_h}(\sigma), \quad (2.10)$$

где $m_{I_h}(\sigma) = \min_{it \in I_h} |F(\sigma + it)|$, I_h – любой отрезок мнимой оси длины $2h$, $h = \sigma^\rho$, ρ – фиксированное число, $0 < \rho < 1$.

Учитывая, что при $S_\Lambda < \infty$ условие (2.9) равносильно сходимости интеграла (2.3) (см. лемму 3.4), а условие (2.4) означает *l-регулярность* последовательности Λ , получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполняется условие (2.9). Если сходится ряд (2.4), то для любой функции $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ справедливо асимптотическое равенство (2.10).

Отметим, что в условиях теоремы 2.1 ряд (2.4) не обязан сходиться (см. § 3). Поэтому следствие означает, что теорема 2.1 не только содержит теорему С, но и существенно усиливает и дополняет ее, поскольку, во-первых, в ней содержится информация о длине отрезка, о произволе его выбора; во-вторых, условие (2.4) заменено на более слабое, и оно сформулировано в простых геометрических терминах.

Содержательность теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения (см. § 5): для любой последовательности Λ и для всякой ее l -регулярной подпоследовательности Λ' существует функция $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, для которой при $\sigma \rightarrow \infty$, быть может, вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности справедливо соотношение (2.10).

Пусть теперь ряд (2.4) расходится, но условия (2.8), (2.9) выполнены. Тогда, как известно, $d(F; \gamma) = 1$ (см. [7]), где

$$d(F; \gamma) = \overline{\lim}_{\substack{s \in \gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M_F(\operatorname{Re} s)},$$

γ – любая кривая, уходящая в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \rightarrow \infty$, то $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$. Если $\Lambda(F)$ является l -регулярной, то согласно теореме 2.1 справедлива более сильная оценка (2.10). Возникает естественный вопрос: сохранится ли асимптотическое равенство (2.10), если отказаться от условия l -регулярности $\Lambda(F)$? Оказывается, как и следовало ожидать, при условиях (2.8), (2.9) имеет место некоторое утверждение, “промежуточное” между равенством (2.10) и равенством $d(F; \gamma) = 1$, а именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполняются условия (2.8), (2.9). Тогда существует множество $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры такое, что для любого вертикального отрезка $I_H = I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leq H\}$, $H = \operatorname{const}$, для всех $\sigma \geq \sigma_0$ вне E найдется измененный отрезок $I_H^* = I_H^*(\sigma)$, обладающий следующими свойствами при $\sigma \rightarrow \infty$:

- 1) $\operatorname{mes}(I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)) \rightarrow |I_H| = 2H$;
- 2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma)$ вне E , где $d(\sigma) = \max_{t \in I_H^*} |\operatorname{Re} t - \sigma|$;
- 3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma)$ вне E , где $m_F^*(\sigma) = \min_{t \in I_H^*} |F(t)|$.

Каждое из условий (2.8) и (2.9) необходимо для того, чтобы для любой функции $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ выполнялось равенство $d(F; \gamma) = 1$ (см. [7], [12]).

Необходимость условия (2.9) доказана в [7], а условия (2.8) – в [12]. В [12] показано, что для любой последовательности Λ , имеющей конечную верхнюю плотность и конечный индекс конденсации, и для которой ряд (2.8) расходится, существует функция $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, ограниченная на $\mathbb{R}_+$. Ранее подобный пример был построен М. А. Евграфовым в [13] при более жестких ограничениях на Λ .

Таким образом, в классе $\mathcal{D}(\Lambda)$, в котором каждая функция обладает свойством 3) (теорема 2.2), найдено дополнительное требование (это – l -регулярность $\Lambda(F) \subset \Lambda$), при котором имеет место требуемое соотношение регулярности поведения минимума модуля (2.10).

§ 3. Характеристики распределения последовательности Λ

Здесь и далее будут рассматриваться последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, удовлетворяющие условию лакунарности Фейера (2.8). Ясно, что в этом случае последовательность Λ имеет нулевую плотность. Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_q(r)}{r} = 0,$$

где $M_q(r) = \max_{|z|=r} |q(z)|$, q – целая функция (2.1), $n(r)$, $N(r)$ – величины, введенные в § 2 (см. [14; гл. I, § 1.10]).

Далее, при условии (2.8) функции $n(r)$, $N(r)$ и $\ln M_q(r)$ принадлежат одному классу сходимости (см. [14; гл. I, § 1.7; гл. I, § 1.10, лемма 1.4], [15; гл. I, § 1]):

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_q(r)}{r^2} dr < \infty, \quad \int_0^\infty \frac{n(r)}{r^2} dr = \int_0^\infty \frac{N(r)}{r^2} dr = S_\Lambda < \infty.$$

Имеет место следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 3.1. *Функция $\varphi(u) = u \ln \frac{a}{u}$, $a > 0$, возрастает при $0 < u < \frac{a}{e}$.*

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственно.

Пусть Λ – последовательность, удовлетворяющая условию (2.8).

ЛЕММА 3.2 (см. [16]). *Следующие условия эквивалентны:*

$$\text{а) } S_{\Lambda, l} = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty;$$

$$\text{б) } I_\Lambda(n) = \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^2} \ln \frac{t}{n(t)} dt < \infty;$$

$$\text{в) } I_\Lambda(N) = \int_0^\infty \frac{N(t)}{t^2} \ln \frac{t}{N(t)} dt < \infty;$$

$$\text{г) } I_\Lambda(w) = \int_1^\infty \frac{w(t)}{t^2} \ln \frac{t}{w(t)} dt < \infty, \quad w(t) = \ln M_q(t).$$

В настоящей статье наряду с W и W_l иногда будут использованы символы W_m и W_{lm} для обозначения классов монотонно возрастающих (не обязательно непрерывных) на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых конечны соответствующие интегралы (они те же, что и для классов W и W_l).

Полезным дополнением к лемме 3.2 является лемма 3.3.

ЛЕММА 3.3. *Верны следующие утверждения.*

1) *Функция w принадлежит W (или W_m) тогда и только тогда, когда функция $Aw(Bt) + C$ принадлежит W (или W_m). Здесь A, B, C – положительные конечные постоянные. Аналогичное утверждение справедливо и для класса W_l (или W_{lm}).*

2) *Функция $w \in L$ принадлежит классу W (или W_m) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{w(2^j)}{2^j} < \infty.$$

Аналогичное утверждение верно и для класса W_l (или W_{lm}).

3) Для любой функции $w \in L$ интегралы

$$J(w) = \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx, \quad J(N_w) = \int_1^\infty \frac{N_w(x)}{x^2} dx,$$

а также интегралы $I_l(w)$ и $I_l(N_w)$ сходятся или расходятся попарно одновременно. Здесь $I_l(\psi) = J(\psi_l)$, $\psi_l(x) = \psi(x) \ln^+ \frac{x}{\psi(x)}$, $\psi \in L$,

$$N_w(x) = \int_{\mu_1}^x \frac{w(t)}{t} dt, \quad \mu_1 = \min\{t : w(t) \geq 1\}.$$

4) Каждое из условий а)–г) леммы 3.2 эквивалентно следующему утверждению: существует функция $w \in W_l$ такая, что

$$\mu_\Lambda(\omega_j) \leq w(|\omega_j|), \quad j \geq -1,$$

где $\mu_\Lambda(\omega_j)$ – число точек $\lambda \in \Lambda$ из полуинтервала ω_j , где $\omega_{-1} = [0, 1)$, $\omega_j = [2^j, 2^{j+1})$ при $j \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) очевидны. При доказательстве утверждения 2) следует только учесть оценки

$$\frac{w(2^j)}{2^j} = 2w(2^j) \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{dt}{t^2} \leq 2 \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt \leq 2 \frac{w(2^{j+1})}{2^{j+1}}.$$

Утверждение 3) есть следствие леммы 3.2. Действительно, для любой функции $w \in L$ положим $\mu(t) = [w(t)]$, где $[a]$ – целая часть числа a . Тогда $\mu(t)$ – считающая функция последовательности $\{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, где μ_n – корень уравнения $w(t) = n$. Так как

$$|w(t) - \mu(t)| \leq 1, \quad |N_w(t) - N_\mu(t)| \leq \ln \frac{t}{\mu_1},$$

то утверждение 3) следует из леммы 3.2 и утверждения 1) леммы 3.3.

Наконец, докажем 4). Пусть, например, выполняется условие б) леммы 3.2, т.е. $I_\Lambda(n) < \infty$. Тогда найдется функция $w_1 \in L$ такая, что $n(t) \leq w_1(t) \leq n(t) + 1$. Поэтому $I_l(w_1) < \infty$. Положим $w(t) = w_1(2t)$. Тогда

$$\mu(\omega_j) \leq n(2^{j+1}) \leq w(2^j) = w(|\omega_j|), \quad |\omega_j| = 2^j.$$

Ясно, что эта оценка верна для всех $j \geq -1$. В силу леммы 3.1 и утверждения 1) леммы 3.3 заключаем, что $I_l(w) < \infty$, т.е. $w \in W_l$.

Обратно, пусть $\mu_\Lambda(\omega_j) \leq w(|\omega_j|)$, $j \geq -1$, $w \in W_l$. Тогда

$$n(2^m) = \sum_{j=1}^m \mu_\Lambda(\omega_j) \leq \sum_{j=1}^m w(2^j) \leq \int_1^{m+1} w(2^t) dt = \frac{1}{\ln 2} \int_2^{2^{m+1}} \frac{w(x)}{x} dx.$$

Следовательно, $n(2^m) \leq cN_w(2^{m+1})$, $c = \frac{1}{\ln 2}$. Значит, в силу леммы 3.1 имеем

$$n(2^m) \ln \frac{2^m}{n(2^m)} \leq cN_w(2^{m+1}) \ln \frac{2^{m+1}}{2cN_w(2^{m+1})}.$$

Так как $I_l(w) < \infty$, то с учетом утверждений 3), 2) получаем, что $I_\Lambda(n) < \infty$.

Лемма 3.3 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Введенное в § 2 понятие l -регулярности подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$ в случае $\Lambda' = \Lambda$ равносильно условиям а)–г) леммы 3.2 и утверждению 4) леммы 3.3. В общем случае l -регулярность Λ' есть более слабое требование, чем каждое из условий а)–г) и утверждение 4) леммы 3.3.

В теории рядов экспонент особую роль играет целая функция экспоненциального типа $q(z)$ (см. формулу (2.1)), свойства которой зависят не только от $n(r)$ и $N(r)$, но и от других величин распределения Λ , учитывающих как концентрацию, так и взаимное расположение (сближаемость) точек последовательности Λ . Одной из таких величин является так называемый индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\lambda_n)}{\lambda_n},$$

где $c = c(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{q_n\}$, где $q_n = -\ln |q'(\lambda_n)|$, т.е. $c(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q_n$. Ясно, что функция $c(t)$ непрерывна справа. В зависимости от того, к какому классу монотонных на $\mathbb{R}_+$ функций принадлежит эта функция, можно судить о степени концентрации, а также о скорости взаимной сближаемости точек $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что $c \in W_m$, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (3.1)$$

Оказывается, как показано в [10], это условие можно интерпретировать в более простых терминах.

ЛЕММА 3.4 (см. [10]). *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (2.8).*

Для того чтобы выполнялось условие (3.1), необходимо и достаточно, чтобы

$$I(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq \psi(\lambda_n), \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

где ψ – некоторая функция из W .

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если выполняется условие (3.2), то*

$$h_n \geq \lambda_n e^{-\psi(\lambda_n)}, \quad n \geq 1, \quad \text{где } h_n = \min_{j \neq n} |\lambda_n - \lambda_j|.$$

Примеры последовательностей Λ , для которых реализуются или не реализуются условия (2.8) и (3.1), приведены в [10]. Они показывают, насколько эффективна характеристика плотности распределения $I(\lambda_n)$ для проверки неочевидного условия (3.1).

Преимуществом характеристики $I(\lambda_n)$ является то, что она сформулирована в терминах считающей меры последовательности.

§ 4. Вспомогательные результаты, полученные методом Бореля–Неванлинны

Теоремами типа Бореля–Неванлинны называются утверждения следующего вида: для заданной функции $u \in L$ для всякого $\varepsilon > 0$ при всех $x \geq x_0$ вне

некоторого исключительного множества $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+$ малой ν -меры

$$u(x + h(x)) < u(x) + \varepsilon,$$

где $h = h(x)$ – некоторая положительная функция, как правило, стремящаяся к нулю при $x \rightarrow \infty$. Эта оценка позволяет оценить $u(x + h)$ через $u(x)$ сверху и поэтому находит широкое применение при изучении асимптотических свойств целых функций вида (1.1).

Теорема Бореля–Неванлинны приведена в [17]. Имеются различные варианты и модификации этой теоремы, которые значительно расширяют область ее применения (по этому поводу см., например, [8], [14], [18]–[20]). Здесь нам понадобится следующий вариант теоремы Бореля–Неванлинны.

ЛЕММА 4.1 (см. [20]). Пусть u, w – заданные на $\mathbb{R}_+$ положительные и непрерывные функции, u – неубывающая, w – возрастающая, причем $w \in W$. Если $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)},$$

то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры имеет место асимптотическая оценка

$$u(\sigma + ah(\sigma)) < u(\sigma) + o(1),$$

где $h = h(\sigma) = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, a – фиксированная постоянная, $1 \leq a < \infty$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda \uparrow \infty$, – последовательность, удовлетворяющая условию (2.8). Положим $w(x) = \ln M_q(ex)$, где q – произведение Вейерштрасса из § 2. Так как $w \in W$ (это следует из (2.8)), то существует функция w^* вида $w^*(x) = \beta(x)w(x)$, $1 \leq \beta(x) \uparrow \infty$, также принадлежащая W .

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения $w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$, где $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (4.1)$$

сходящегося во всей плоскости. Пусть $M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$, а

$$h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \quad (4.2)$$

В указанных обозначениях применение леммы 4.1 к функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln \ln \mu(\sigma)$ приводит к следующей лемме.

ЛЕММА 4.2 (см. [7], [20]). Для любого $a \geq 1$ существует множество $E \subset \mathbb{R}_+$ такое, что

1) $E \subset \bigcup_{i \geq 1} [\sigma_i, \sigma'_i]$, причем $\sigma'_i - \sigma_i \leq ah_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} h_i < \infty$, где $h_i = h(\sigma_i)$ – функция, заданная формулой (4.2);

2) При $\sigma \rightarrow \infty$ вне E верны следующие оценки:

а) $\ln \mu(\sigma) \leq \ln M_F(\sigma + ah) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma)$, $h = h(\sigma)$;

б) $R_{v(\sigma)} \equiv \sum_{\lambda_j > v(\sigma)} |a_j| e^{\lambda_j \sigma} \leq \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}$;

в) $\lambda_{\nu(\sigma)} = o(v(\sigma))$, где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда Дирихле (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) доказано в [20], оценки а) и б) – в [7]. Докажем оценку в). Для этого воспользуемся следующим известным представлением:

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt, \quad \sigma \geq \sigma_0.$$

(см. [15; гл. II, § 6, п. 2]). Согласно оценке а) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E

$$\ln \mu(\sigma + h) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad h = h(\sigma).$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E

$$\ln \mu(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma+h} \lambda_{\nu(t)} dt \leq (1 + o(1)) \left(\ln \mu(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt \right),$$

т.е.

$$\int_{\sigma}^{\sigma+h} \lambda_{\nu(t)} dt \leq o(1) \ln \mu(\sigma).$$

Но так как $w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$ ($v = v(\sigma)$), то $h \lambda_{\nu(\sigma)} \leq o(1) w^*(v)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E . Учитывая (4.2), отсюда получаем требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если вместо функции $h = h(\sigma)$ взять $h_{\gamma} = \sigma^{\gamma} h(\sigma)$, $0 < \gamma < 1$, то все утверждения лемм 4.1 и 4.2 будут справедливы вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ такого, что при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\frac{\text{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma} = O(\sigma^{\gamma-1}) = o(1).$$

Действительно, как видно из доказательства леммы 4.1 (см. [20], а также, например, [21]), $E \subset \bigcup_{i \geq 1} [\sigma_i, \sigma'_i]$, причем в данном случае $\sigma'_i - \sigma_i \leq a \sigma_i^{\gamma} h_i$, $h_i = h(\sigma_i)$.

Пусть $\sigma_n \leq \sigma < \sigma_{n+1}$. Тогда

$$\text{mes}(E \cap [0, \sigma]) \leq \sum_{i=1}^n (\sigma'_i - \sigma_i) \leq a \sigma^{\gamma} \sum_{i=1}^n h_i. \quad (4.3)$$

Функция $h = h(\sigma)$, как и в лемме 4.2, определяется формулой (4.2), где $v = v(\sigma)$ – решение уравнения $w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$. Поэтому сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ следует из п. 1) леммы 4.2. Таким образом, из (4.3) получаем, что

$$\text{mes}(E \cap [0, \sigma]) \leq \text{const } \sigma^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Отсюда и следует доказываемое утверждение.

ЛЕММА 4.3. Пусть $w \in W$, причем для любого τ , $0 < \tau < \frac{1}{2}$, $\frac{w(t)}{t^{1-\tau}} \uparrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Обозначим через $v = v(\sigma)$ решение уравнения

$$w(v) = 3 \ln \mu(\sigma),$$

где $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (4.1).

Тогда для любого фиксированного $\alpha > 0$, для любого γ , $0 < \gamma < 1$, существует $\beta > 1$ такое, что для всех $\sigma \geq \sigma_0$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры верна оценка

$$\left(\frac{w(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} \right)^\alpha \leq d \left(\frac{w(v)}{v} \right)^\beta \sigma^\gamma, \quad v = v(\sigma),$$

где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (4.1), $d = A^{\tau\alpha}$, $A \geq 1$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.2 при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества E конечной меры верна оценка $\lambda_\nu < v$, где $\nu = \nu(\sigma)$, $v = v(\sigma)$. Следовательно, для $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E$, выполнено

$$\frac{w(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} = \frac{w(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu^{1-\tau} \lambda_\nu^\tau} \leq \frac{w(v)}{v} \left(\frac{v}{\lambda_\nu} \right)^\tau, \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}.$$

Далее, при $\sigma \geq \sigma_0$ при некотором A , $1 \leq A < \infty$, имеем

$$w(v) = 3 \ln \mu(\sigma_0) + 3 \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt \leq A \sigma \lambda_\nu,$$

т.е.

$$\lambda_\nu \geq A^{-1} \frac{w(v)}{\sigma}, \quad \nu = \nu(\sigma), \quad v = v(\sigma).$$

Таким образом,

$$\frac{w(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} \leq \frac{w(v)}{v} \left(A \frac{v}{w(v)} \sigma \right)^\tau = \left(\frac{w(v)}{v} \right)^{1-\tau} A^\tau \sigma^\tau.$$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\left(\frac{w(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} \right)^\alpha \leq d \left(\frac{w(v)}{v} \right)^\beta \sigma^\gamma,$$

где α, β, γ – положительные постоянные, $\beta = \alpha(1 - \tau)$, $\gamma = \alpha\tau$, $d = A^{\tau\alpha}$.

Зафиксируем $\alpha > 0$. Так как $\beta = \frac{1-\tau}{\tau} \gamma$, то для любого γ , $0 < \gamma < 1$, найдется $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ такое, что $\beta > 1$.

Лемма доказана.

Отметим, что если $w \in W$ и $w(x) = x^{\rho(x)}$, где $\rho(x)$ – уточненный порядок, причем $\rho(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, то функция w обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ функция $\frac{w(x)}{x^{1-\delta}}$ возрастает, а функция $\frac{w(x)}{x^{1+\delta}}$ убывает при $x \geq x_0$. Иначе говоря, функция $\frac{w(x)}{x}$ является медленно меняющейся в смысле Зигмунда (см. [22]).

ЛЕММА 4.4 (см. [23]). Пусть $\alpha(r)$ – положительная, неубывающая и непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, принадлежащая классу сходимости, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Тогда существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}} = 1, \quad \int_1^\infty r^{\rho(r)-\rho-1} dr < \infty.$$

Приведем еще один результат, основанный на теореме типа Бореля–Неванлинны (см. [24], [25]), который в сочетании с леммой 4.2 будет использован в § 5.

Для этого введем следующий класс функций W_1 , состоящий из положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций p , для которых

$$\int_1^\infty \frac{dt}{p(t)} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 4.1 (см. [25]). *Если $p \in W_1$, то для всех $n \geq 1$ и всех $\sigma \geq 0$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры выполняется оценка*

$$|a_n|e^{\lambda_n \sigma} \leq \mu(\sigma) \exp\left(-\frac{(\lambda_n - \lambda_\nu)^2}{2p(\max[\lambda_n, \lambda_\nu])}\right).$$

Здесь $\mu(\sigma)$ – максимальный член, $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (4.1).

Приведем некоторые примеры функций из W_1 . Следуя [25], рассмотрим следующий подкласс класса W_1 :

$$W_2 = \left\{ p \in W_1 : \frac{t^2}{p(t)} \uparrow \infty, \frac{t^2}{p(t) \ln t} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty \right\}.$$

Ясно, что любая функция $p \in L$, совпадающая с функцией $q(t) = t \ln t \cdots (\ln_k t)^{1+\delta}$, $k \geq 1$, $\delta > 0$, при $t \geq t_k = \exp_k 1$, принадлежит W_2 и, следовательно, W_1 . Здесь $\ln_k t$ – k -я итерация логарифма: $\ln_1 t = \ln t, \dots, \ln_k t = \ln(\ln_{k-1} t)$, $k \geq 2$. Функция $\exp_k t$ определяется аналогично.

Для построения следующего примера нам потребуется лемма 4.5.

ЛЕММА 4.5 (см. [26]). *Пусть $0 < \mu_m \uparrow \infty$, $\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\mu_m} < \infty$. Тогда функция*

$$\psi(x) = 2 \sum_{m=1}^\infty \ln\left(1 + \frac{x^2}{\mu_m^2}\right),$$

определенная на $\mathbb{R}$, обладает следующими свойствами: ψ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$ и неограниченно возрастает на $\mathbb{R}_+$; $\frac{\psi(x)}{x^2}$ убывает и интегрируема на $[1, \infty)$.

Таким образом, если положить

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\psi(x)} & \text{при } 1 \leq x < \infty, \\ \frac{p(1)}{2}(x+1) & \text{при } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

то $p \in W_1$. Далее, $\frac{x^2}{p(x)} = \psi(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, причем, очевидно, при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{x^2}{p(x) \ln x} = \frac{\psi(x)}{\ln x} \rightarrow \infty.$$

Значит, $p \in W_2$.

Если в теореме 4.1 взять функцию p из класса W_2 , то получим следующую лемму.

ЛЕММА 4.6. Пусть при некотором $m \geq 1$

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} < \infty.$$

Если $p \in W_2$, то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры верна оценка

$$\sum_{|\lambda_\nu - \lambda_n| > \eta \lambda_\nu} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} \leq 2C_m \mu(\sigma) \exp \left[-(1 + o(1)) \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{\lambda_\nu^2}{p(\lambda_\nu)} \right], \quad (4.4)$$

где $\mu(\sigma)$ – максимальный член, $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (4.1), η – фиксированное число, $0 < \eta < 1$.

В литературе встречаются разные варианты этой леммы, в которых вместо $\eta \lambda_\nu$ берется весьма сложно устроенная функция $K(\lambda_\nu)$ (см., например, [25]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.6. В силу теоремы 4.1 достаточно оценить сумму

$$S_\nu = \sum_{|\lambda_n - \lambda_\nu| > \eta \lambda_\nu} \exp \left[-\frac{(\lambda_n - \lambda_\nu)^2}{2p(\max[\lambda_n, \lambda_\nu])} \right] = \sum_{\lambda_n < (1-\eta)\lambda_\nu} + \sum_{\lambda_n > (1+\eta)\lambda_\nu} = \sum_1 + \sum_2.$$

При $\sigma \rightarrow \infty$ вне E имеем

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{\lambda_n < (1-\eta)\lambda_\nu} \lambda_n^{-m} \exp \left[m \ln \lambda_n - \frac{(\lambda_n - \lambda_\nu)^2}{2p(\lambda_\nu)} \right] \\ &\leq C_m \exp \left[m \ln \lambda_\nu - \frac{\eta^2}{2} \frac{\lambda_\nu^2}{p(\lambda_\nu)} \right] = C_m \exp \left[-(1 + o(1)) \frac{\eta^2}{2} \frac{\lambda_\nu^2}{p(\lambda_\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Далее, так как $p \in W_2$, то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sum_2 &\leq \sum_{\lambda_n > (1+\eta)\lambda_\nu} \lambda_n^{-m} \exp \left[m \ln \lambda_n - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{\lambda_n^2}{p(\lambda_n)} \right] \\ &= \sum_{\lambda_n > (1+\eta)\lambda_\nu} \lambda_n^{-m} \exp \left[-(1 + o(1)) \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{\lambda_n^2}{p(\lambda_n)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь монотонностью функции $\frac{t^2}{p(t)}$, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E получаем, что

$$\sum_2 \leq C_m \exp \left[-(1 + o(1)) \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{\lambda_\nu^2}{p(\lambda_\nu)} \right]. \quad (4.6)$$

Следовательно, оценка (4.4) есть следствие оценок (4.5), (4.6).

§ 5. Оценка $M_F(\sigma)$ через минимум модуля на отрезке

5.1. Общая схема рассуждений и основные леммы. Асимптотическая оценка величины $M_F(\sigma)$ для суммы F ряда Дирихле (4.1) через максимум $|F|$ на вертикальном отрезке I определенной длины получена в [21]. При

этом длина $|I|$ отрезка I должна быть не меньше некоторой характеристики, близкой к аналогичным характеристикам, позволяющим определять радиус полноты системы экспонент $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве $C[a, b]$ (или $L^2[a, b]$) (по этому поводу см. [21], [27]–[29]).

Естественно ожидать, что при оценке $M_F(\sigma)$ через минимум модуля длина отрезка I в общей ситуации не может быть слишком большой. Как уже было отмечено выше, в этом случае чем больше $|I|$, тем лучше оценка.

Кратко опишем общую схему рассуждений и суть идеи, при помощи которой реализуются асимптотические оценки:

а) для любой кривой γ , уходящей в бесконечность должным образом, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такая, что при $\xi_n \rightarrow \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(\xi_n)|, \quad \sigma_n = \operatorname{Re} \xi_n;$$

б) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma),$$

где $m_F(\sigma) = \min_{it \in I} |F(\sigma + it)|$, $I = I(\sigma)$ – отрезок мнимой оси, вообще говоря, переменной длины.

Пусть Λ – последовательность, подчиненная естественным условиям (2.3), (2.8). На первом этапе находится отрезок ряда $F_v(s) = \sum_{\lambda_n \leq v} a_n e^{\lambda_n s}$, $v = v(\sigma)$, такой, что

$$|F(s) - F_v(s)| < 1 \quad (5.1)$$

для всех $\sigma \geq \sigma_0$ вне E , $\operatorname{mes} E < \infty$. На следующем шаге показывается, что вне E

$$M_F(\sigma) \leq e^{w(v)} \max_{|z - \alpha| \leq \delta} |F_v(z)|, \quad (5.2)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ – любое $\operatorname{Re} \alpha = \sigma$, $\delta = \frac{w^*(v)}{v}$; w , w^* – некоторые функции из W , $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \rightarrow \infty$, $w(v) \geq N(v) + c(v)$ (c – функция из (2.3)), $w(v) = o(\ln M_F(\sigma))$ при $\sigma \rightarrow \infty$ (см. [7]). В силу (5.1) оценка типа (5.2) верна и для F .

Утверждение а) получается из (5.2) путем применения теоремы о двух константах (при этом предполагается, что $\alpha \in \gamma$) и леммы 4.1 типа теоремы Бореля–Неванлинны (см. [7]).

Чтобы из (5.2) получить утверждение б), необходимо перейти к подобной оценке для круга $\{z : |z - \alpha| \leq \delta^2\}$. Поэтому поступаем следующим образом (см., например, [10]). Применяя теорему о двух константах и учитывая лемму 4.2 (утверждение а)), считаем, что оценка (5.2) имеет место для вертикального отрезка I длины 2δ (с центром в точке α) (см. [10]). Теперь задача сводится к замене отрезка I меньшим отрезком $J \subset I$, длина которого равна $2\delta^2$. Эта задача обычно решается при помощи следующей леммы П. Турана: если $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ и

$$p(t) = \sum_{j=1}^n b_j e^{it\mu_j},$$

то

$$\|p\|_I \leq \left(2e \frac{|I|}{|J|} \right)^n \|p\|_J \quad (5.3)$$

(см. [30]). Здесь I , J – отрезки мнимой оси, $J \subset I$, $\|p\|_I = \max_{it \in I} |p(t)|$.

Если I, J – прежние отрезки, то, учитывая оценку (5.3), переходим из отрезка J на круг $\{z : |z - \alpha| \leq \delta^2\}$.

Лемма Турана иногда заменяется другим утверждением (см. далее лемму 5.2).

Имеется и другой подход, основанный на применении известных формул А. Ф. Леонтьева для коэффициентов квазиполинома F_v (см. [31; гл. I, § 2, п. 1]). В этом случае вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$M_F(\sigma) \leq e^{w(v)} H_v(\delta^2) \max_{|z-\alpha| \leq \delta^2} |F_v(z)|, \quad (5.4)$$

где

$$H_v(\delta) = \int_0^\infty M(r, q_v) e^{-r\delta} dr, \quad q_v(z) = \prod_{\lambda_n \leq v} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

С учетом оценки $N(v) \leq w(v)$ из (5.4) получим, что

$$M_F(\sigma) \leq 2e^{3w(v)} \exp\left(\max_{r \geq 0} \varphi(r)\right) \max_{|z-\alpha| \leq \delta^2} |F_v(z)|,$$

где

$$\varphi(r) = n(v) \ln\left(1 + \frac{r^2}{v^2}\right) - r\delta^2.$$

Максимум функции φ достигается в точке $r_0 \leq \frac{2n(v)}{\delta^2}$. Поэтому

$$\varphi(r_0) \leq n(v) \ln\left(1 + 4 \frac{v^2}{n^2(v)}\right) = O\left(n(v) \ln \frac{v}{n(v)}\right), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$M_F(\sigma) \leq e^{3w(v) + An(v) \ln v / (n(v))} \max_{|z-\alpha| \leq \delta^2} |F_v(z)|.$$

С другой стороны, для $p = F_v$ первый сомножитель в (5.3) при $\sigma \rightarrow \infty$ тоже есть величина

$$\exp\left(O\left(n(v) \ln \frac{1}{\delta}\right)\right) \leq \exp\left(O\left(n(v) \ln \frac{v}{n(v)}\right)\right),$$

так как $\ln \frac{1}{\delta} \leq \ln \frac{v}{n(v)}$.

Для того чтобы для функции $n(t) \ln \frac{t}{n(t)}$ существовала мажоранта w из класса W , необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\lambda_1}^\infty \frac{n(t) \ln t / (n(t))}{t^2} dt < \infty. \quad (5.5)$$

Но тогда во всех случаях при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E , $\text{mes } E < \infty$, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leq \max_{|z-\alpha| \leq \delta^2} |F(z)| = |F(\xi)|.$$

Это – основная оценка, из которой тем же способом, что и в [10], можно получить требуемый результат, если для круга $D(\xi, 2\delta)$ к функции F применить следующую лемму.

ЛЕММА 5.1 (см. [6]). Пусть функция $g(z)$ аналитична и ограничена в круге $\{z : |z| < R\}$, $|g(0)| \geq 1$. Если $0 < r < 1 - N^{-1}$, $N > 1$, то существует не более чем счетное множество кружков

$$V_n = \{z : |z - z_n| \leq \rho_n\}, \quad \sum_n \rho_n \leq Rr^N(1 - r),$$

таких, что для всех z из круга $\{z : |z| \leq Rr\}$, но вне $\bigcup_n V_n$ справедлива оценка

$$\ln |g(z)| \geq \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln |g(0)| - 5NL, \quad (5.6)$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |g(0)|.$$

Приведенный краткий анализ показывает, что условие (5.5) (или эквивалентное требование (2.4)) является естественным и, скорее всего, оптимальным при рассмотрении задач типа б). Это подтверждается и теоремой 2.1, где условию (5.5) подчинена последовательность центральных показателей ряда, а также теоремой 2.2, где отказ от данного условия ведет к деформации отрезка I .

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится лемма 5.2.

ЛЕММА 5.2. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } g_k &= \int_0^1 \frac{\mu_\Lambda(\lambda_k; t)}{t} dt \leq w(\lambda_k), \quad k \geq 1; \\ \text{б) } G_k(b) &= \int_1^b \frac{\mu_\Lambda(\lambda_k; t)}{t} dt \leq \psi(b), \end{aligned}$$

где $\mu_\Lambda(\lambda_k; t)$ — число точек λ_n из $\Lambda_k = \Lambda \setminus \{\lambda_k\}$, принадлежащих отрезку $\{h : |h - \lambda_k| \leq t\}$, w, ψ — некоторые функции из L .

Через T_k обозначим множество, содержащее не более N точек из Λ_k , причём $T_k \subset [\lambda_k - b, \lambda_k + b]$.

Если $N \leq 2b$, $0 < l < \frac{\pi N}{b}$, то найдется функция $p \in L^1(\mathbb{R})$, равная нулю вне $(-l, l)$, такая, что:

$$1) \|p\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1; \quad 2) \sup_t |p(t)| \leq l^{-1}.$$

Пусть

$$P(u) = \int_{\mathbb{R}} p(t) e^{iut} dt$$

— преобразование Фурье функции $p(t)$. Тогда

$$3) P(\lambda - \lambda_k) = 0, \quad \lambda \in T_k; \quad 4) |P(0)|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi}{l}\right)^N e^{w(\lambda_k) + \psi(b)}, \quad k \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_k содержит m элементов из Λ_k , $1 \leq m \leq N$. Пусть $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\}$ – набор всевозможных разностей $\lambda - \lambda_k$, $\lambda \in T_k$. Ясно, что $\nu_j \in [-b, b]$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим произведение

$$\Pi_m(x) = \prod_{n=1}^m \sin a(x - \nu_n), \quad a = \frac{1}{2} l N^{-1}.$$

Убедимся в том, что справедливо представление

$$\Pi_m(x) = \sum_{|n| \leq m} c_n e^{anxi}, \quad \sum_{|n| \leq m} |c_n| \leq 1. \quad (5.7)$$

Будем рассуждать по индукции. Для $m = 1$ имеем

$$\Pi_1(x) = c_1 e^{axi} + c_{-1} e^{-axi}, \quad |c_1| + |c_{-1}| = 1.$$

Предположим, что

$$\Pi_{k-1}(x) = \sum_{|n| \leq k-1} c_n e^{anxi}, \quad \sum_{|n| \leq k-1} |c_n| \leq 1.$$

Имеем

$$\Pi_k(x) = \Pi_{k-1}(x) \left(\frac{e^{-\nu_k ai}}{2i} e^{axi} - \frac{e^{\nu_k ai}}{2i} e^{-axi} \right).$$

Если учесть сделанное выше предположение, то

$$\Pi_k(x) = \sum_{|n| \leq k-1} c'_n e^{anxi} (c' e^{axi} + c'' e^{-axi}),$$

$\sum_{|n| \leq k-1} |c'_n| \leq 1$, причем $|c'| = |c''| = \frac{1}{2}$. Отсюда видно, что

$$\Pi_k(x) = \sum_{|n| \leq k} c_n e^{anxi},$$

причем коэффициенты c_n , $|n| \leq k$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c_k &= c'_{k-1} c', & c_{k-1} &= c'_{k-2} c', & c_{-k} &= c'_{-(k-1)} c', & c_{-(k-1)} &= c'_{-(k-2)} c''; \\ c_n &= c'_{n-1} c' + c'_{n+1} c'', & |n| &\leq k-2. \end{aligned}$$

Так как $|c'| = |c''| = \frac{1}{2}$, то $\sum_{|n| \leq k} |c_n| \leq 1$.

Итак, представление (5.7) имеет место. Учитывая это, положим

$$P(x) = \frac{\sin lx/2}{lx/2} \Pi_m(x).$$

Тогда $P(x)$ есть преобразование Фурье для функции

$$p(t) = \sum_{|n| \leq m} c_n \delta_l(t - an).$$

Здесь

$$\delta_l(t) = \begin{cases} l^{-1}, & \text{если } |t| \leq \frac{1}{2}l, \\ 0, & \text{если } |t| > \frac{1}{2}l. \end{cases}$$

Значит, $\delta_l(t - an) = 0$ при $|t| \geq \frac{1}{2}l + an$. Так как $|n| \leq m \leq N$, $a = \frac{1}{2}lN^{-1}$, то $\delta_l(t - an) = 0$ при $|t| \geq l$. Таким образом, $p(t) = 0$ вне $(-l, l)$ и

$$1) \sup_t |p(t)| \leq l^{-1} \sum_{|n| \leq m} |c_n| \leq l^{-1};$$

$$2) \|p\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sum_{|n| \leq m} |c_n| \leq 1;$$

$$3) P(\nu_n) = 0, n = 1, 2, \dots, m.$$

Оценим $|P(0)|^{-1}$ сверху. Имеем

$$|P(0)|^{-1} = \prod_{n=1}^m \left| \sin \frac{1}{2} l N^{-1} \nu_n \right|^{-1}.$$

Так как $l \leq \frac{\pi N}{b}$, то

$$\left| \frac{1}{2} l N^{-1} \nu_n \right| \leq \frac{1}{2} l N^{-1} b \leq \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

Поэтому, используя неравенство $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, где $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, получим

$$|P(0)|^{-1} \leq \prod_{n=1}^m \frac{\pi}{2} \frac{2N}{l} \frac{1}{|\nu_n|} = \left(\frac{\pi N}{l} \right)^m \prod_{n=1}^m \frac{1}{|\nu_n|}.$$

Но

$$d_k = \ln \prod_{n=1}^m \frac{1}{|\nu_n|} = \sum_{n=1}^m \ln \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|} = \int_0^b \ln \frac{1}{t} d\mu_\Lambda(\lambda_k; t).$$

Интегрируя по частям и учитывая условия а), б) леммы, получаем, что

$$d_k = \mu_\Lambda(\lambda_k; b) \ln \frac{1}{b} + \int_0^b \frac{\mu_\Lambda(\lambda_k; t)}{t} dt \leq -m \ln \frac{N}{2} + w(\lambda_k) + \psi(b), \quad b \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Следовательно,

$$|P(0)|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi}{l} \right)^N e^{w(\lambda_n) + \psi(b)}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, то $g_k = 0$, $G_k(x) \leq 2x$. Тогда при $b = N/2$ имеем

$$d_k \leq -m \ln \frac{N}{2} + \int_0^{N/2} \frac{\mu(\lambda_k; t)}{t} dt \leq -m \ln \frac{N}{2} + N.$$

Следовательно, в этом случае

$$|P(0)|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi e}{l} \right)^N.$$

Заметим, что правая часть неравенства имеет сходство с аналогичной величиной в лемме Турана.

5.2. Доказательство теоремы 2.1. Проведем доказательство теоремы 2.1 в два этапа.

5.2.1. *Оценка функции через максимум на малом отрезке.* Пусть последовательность $\Lambda(F)$ центральных показателей ряда

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (5.8)$$

является l -регулярной подпоследовательностью Λ и выполнена пара условий (2.8), (2.9), т.е.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad 2) \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq \psi(\lambda_n), \quad n \geq 1, \quad (5.9)$$

где ψ – некоторая функция из W .

Пусть $G = \{\omega_j\}$, $\omega_{-1} = [0, 1)$, $\omega_j = [2^j, 2^{j+1})$, $j \geq 0$, $\omega_j = \emptyset$ при $j < -1$, так что $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{j \geq -1} \omega_j$, $|\omega_j| = 2^j$.

Через $\mathcal{R} = \{\omega_s\}_{s \in A}$ обозначим минимальную совокупность интервалов из G таких, что $\Lambda(F) \subset \bigcup_{s \in A} \omega_s$. Это означает, что для каждой точки λ из $\Lambda(F)$ найдется такое $s \in A$, что $\lambda \in \omega_s$ и $\Lambda(F) \cap \omega_s \neq \emptyset$ для любого $s \in A$.

Последовательность $\Lambda(F)$ является l -регулярной. Следовательно, найдется такая функция $q \in W_l$, что для любого $i \in A$ выполнено

$$\mu_{\Lambda}(\omega'_i) \leq q(|\omega_i|),$$

где $\omega'_i = \omega_{i-1} \cup \omega_i \cup \omega_{i+1}$. Далее, полуинтервал ω_i имеет вид $[2p, 4p)$. Так как $|\omega_i| = 2p$, то для любого $\lambda \in \omega_i$, $i \in A$, имеем

$$\mu_{\Lambda}(\omega'_i) \leq q(2p) \leq q(\lambda), \quad q \in W_l. \quad (5.10)$$

Положим

$$w_1(t) = \sqrt{t} + q(t) \ln^+ \frac{t}{q(t)} + \psi(t), \quad t \geq 0.$$

Существует функция $w(t) = \beta(t)w_1(t)$, $1 \leq \beta(t) \uparrow \infty$, принадлежащая W . Далее, согласно лемме 4.4 найдется уточненный порядок $\rho(t)$, $0 \leq t < \infty$, $\rho(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, такой, что

$$w(t) \leq t^{\rho(t)}, \quad \int_1^{\infty} t^{\rho(t)-2} dt < \infty.$$

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma), \quad (5.11)$$

где $w^*(t) = t^{\rho(t)}$, $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (5.8).

Из леммы 4.2 следует, что при всех $\sigma \geq x_0$ вне некоторого множества $E_1 \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры выполнено

$$\lambda_{\nu(\sigma)} < v(\sigma). \quad (5.12)$$

Рассмотрим теперь следующие отрезки ряда (5.8):

$$F_\nu(s) = \sum_{|\lambda_\nu - \lambda_n| \leq \eta \lambda_\nu} a_n e^{\lambda_n s}, \quad F_\nu^*(s) = \sum_{|\lambda_\nu - \lambda_n| > \eta \lambda_\nu} a_n e^{\lambda_n s}.$$

В лемме 4.6 положим $\eta = \frac{1}{2}$, $p(t) = \frac{t^2}{w^*(t)}$. Ясно, что $p \in W_2$. Из леммы 4.6 следует, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_2 \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$|F_\nu^*(s)| \leq M\mu(\sigma)e^{-(1+o(1))w^*(\lambda_\nu)/18}. \quad (5.13)$$

Оценим теперь функцию F_ν через ее максимум модуля на некотором вертикальном отрезке. Для этого в лемме 5.2 возьмем $b = \frac{1}{2}\lambda_\nu$, где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс. Тогда T_ν – совокупность точек Λ_ν из отрезка $\Delta_\nu = [\frac{\lambda_\nu}{2}, \frac{3}{2}\lambda_\nu]$. Далее, в силу (5.10) имеем $\mu_\Lambda(\Delta_\nu) \leq q(\lambda_\nu)$. Так как $w(\lambda_\nu) \leq w^*(\lambda_\nu) = o(\lambda_\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$, то $N_\nu \equiv \mu_\Lambda(\Delta_\nu) \leq N < 2b$ при $\nu \geq \nu_0$, где $N = [w^*(\lambda_\nu)]$, $b = \frac{1}{2}\lambda_\nu$, $[a]$ – целая часть a .

Теперь выберем параметр l из леммы 5.2 подходящим образом. Возьмем $l = \varepsilon_\nu^\alpha$, где $\varepsilon_\nu = \frac{w^*(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}$, $\alpha > 1$ (более точно α выберем позже).

Очевидно, $\varepsilon_\nu^\alpha = l < \varepsilon_\nu < \frac{\pi N}{b}$ при $\nu \geq \nu_1$, так как

$$\frac{N}{b} = \frac{2[w^*(\lambda_\nu)]}{\lambda_\nu}, \quad \varepsilon_\nu = \frac{w^*(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}.$$

Далее, из (5.9) следует, что при некотором $\beta_\nu \in [0, 1)$ верны следующие соотношения:

$$g_\nu = \int_0^1 \frac{\mu(\lambda_\nu; t)}{t} dt = \beta_\nu \psi(\lambda_\nu), \quad G_\nu(\lambda_\nu) = \int_1^{\lambda_\nu} \frac{\mu(\lambda_\nu; t)}{t} dt \leq (1 - \beta_\nu) \psi(\lambda_\nu).$$

Таким образом, все условия леммы 5.2 выполнены. Следовательно, существует $p \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $p(t) \equiv 0$ вне $(-l, l)$, $\|p\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1$, $\sup_t |p(t)| \leq l^{-1}$.

Преобразование Фурье $P = P(u)$ функции $p = p(t)$ согласно лемме 5.2 обладает следующими свойствами:

- 1) $P(\lambda - \lambda_\nu) = 0$, $\lambda \in T_\nu$;
- 2) $|P(0)|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{N_\nu} e^{\psi(\lambda_\nu)}$, $\nu \geq \nu_1$, $N_\nu = \mu_\Lambda(\Delta_\nu)$.

Пусть $h_\nu(t) = e^{-i\lambda_\nu t} p(t)$, $\nu \geq \nu_1$, а $H_\nu(x) = P(x - \lambda_\nu)$ – преобразование Фурье для $h_\nu(t)$. Тогда имеем

- 1) $h_\nu(t) \equiv 0$ вне $(-l, l)$;
 - 3) $H_\nu(\lambda_j) = 0$ для $\lambda_j \in T_\nu$;
 - 2) $\sup_t |h_\nu(t)| \leq l^{-1}$;
 - 4) $|H_\nu(\lambda_\nu)|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{N_\nu} e^{\psi(\lambda_\nu)}$.
- (5.14)

Здесь $N_\nu = \mu_\Lambda(\Delta_\nu)$, $l = \varepsilon_\nu^\alpha$, $\alpha > 1$, $\varepsilon_\nu = \frac{w^*(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}$, $\nu \geq \nu_1$.

Очевидно, что

$$a_\nu e^{\lambda_\nu(\sigma + it_0)} = \frac{1}{H_\nu(\lambda_\nu)} \int_{-l}^l F_\nu(\sigma + i(t + t_0)) h_\nu(t) dt, \quad (5.15)$$

где t_0 – произвольный вещественный параметр. Следовательно, учитывая (5.14), из (5.15) получаем, что

$$\mu(\sigma) \leq \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{N_\nu} e^{\psi(\lambda_\nu)} M_\nu(\sigma, I), \quad (5.16)$$

где $M_\nu(\sigma, I) = \max_{it \in I} |F_\nu(\sigma + it)|$, I – отрезок мнимой оси длины $|I| = 2l$ с серединой в точке it_0 .

Но

$$M_\nu(\sigma, I) \leq M(\sigma, I) + \sum_{|\lambda_\nu - \lambda_n| > \lambda_\nu/2} |a_n| e^{\lambda_n \sigma},$$

где $M(\sigma, I) = \max_{|t - t_0| \leq l} |F(\sigma + it)|$. Учитывая (5.13), для всех $\sigma \geq x_1$ вне E_2 получаем

$$M_\nu(\sigma, I) \leq M(\sigma, I) + M\mu(\sigma) e^{-w^*(\lambda_\nu)/20}. \quad (5.17)$$

Далее, так как

$$N_\nu \leq q(\lambda_\nu), \quad \varepsilon_\nu = \frac{w^*(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}, \quad l = \varepsilon_\nu^\alpha,$$

то, учитывая, что при больших ν верны неравенства

$$\frac{2\pi}{l} < \left(\frac{\lambda_\nu}{w(\lambda_\nu)}\right)^\alpha \leq \left(\frac{\lambda_\nu}{q(\lambda_\nu)}\right)^\alpha,$$

получаем, что при $\nu \geq \nu_2$ справедлива оценка

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^{N_\nu} \leq \exp\left(\alpha q(\lambda_\nu) \ln \frac{\lambda_\nu}{q(\lambda_\nu)}\right). \quad (5.18)$$

Таким образом, из (5.16) в силу (5.17), (5.18) и определения w_1 следует, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_2

$$\mu(\sigma) \leq e^{\alpha w_1(\lambda_\nu)} M(\sigma, I) + \mu(\sigma) \exp\left(\ln M + \alpha w_1(\lambda_\nu) - \frac{1}{20} w^*(\lambda_\nu)\right),$$

т.е.

$$\mu(\sigma) \leq e^{\alpha w_1(\lambda_\nu)} M(\sigma, I) + o(1)\mu(\sigma).$$

Таким образом, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_2 справедливо неравенство

$$(1 + o(1))\mu(\sigma) \leq e^{\alpha w_1(\lambda_\nu)} M(\sigma, I). \quad (5.19)$$

Учитывая (5.12) и то, что $v = v(\sigma)$ – корень уравнения (5.11), при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_3 = E_1 \cup E_2$ конечной меры из (5.19) получаем оценку

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq M(\sigma, I), \quad (5.20)$$

где I – отрезок мнимой оси длины $|I| = 2\varepsilon_\nu^\alpha$, $\varepsilon_\nu = \frac{w^*(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}$.

Дальнейшие рассуждения основаны на оценках (см. свойство а) п. 2) леммы 4.2) типа

$$\ln \mu(\sigma) \leq \ln M_F(\sigma + \delta) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad (5.21)$$

имеющих место при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_1 \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры. Но в (5.21) $\delta = \frac{w^*(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$. Поэтому сначала длину отрезка I , т.е. $2\varepsilon_\nu^\alpha$, оценим сверху через δ^β , $\beta > 1$. Для этого используем лемму 4.3. Так как $w(t) = t^{\rho(t)}$, то для любого $\tau > 0$ отношение $\frac{w^*(t)}{t^{1-\tau}}$ возрастает при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, $w^* \in W$. Следовательно, согласно лемме 4.3 для всех $\sigma \geq x_2$, но вне некоторого множества $E_4 \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры справедлива оценка

$$\varepsilon_\nu^\alpha \leq d\delta^\beta \sigma^\gamma, \quad 1 < d < \infty, \quad d = \text{const}, \quad (5.22)$$

где α, β, γ – положительные постоянные такие, что $\beta = \alpha(1-\tau)$, $\gamma = \alpha\tau$. Пусть γ – любое число из интервала $(0, 1)$. Положим $\tau = \frac{\gamma}{\gamma+2}$. Тогда $\alpha = \gamma + 2$, $\beta = 2$. Эти параметры, выбранные таким образом, зафиксируем и не будем менять до конца наших рассуждений.

Учитывая оценку (5.22), из (5.20) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_5 = E_3 \cup E_4$ конечной меры выполняется неравенство

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq M(\sigma, I_h), \quad (5.23)$$

где I_h – отрезок мнимой оси длины $2h$, $h = d\delta^2\sigma^\gamma$, $\delta = \frac{w^*(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$ (мы учли, что $\beta = 2$). Так как $0 < \gamma < 1$, то, учитывая замечание 4.1 к лемме 4.2, вместо (5.21) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_6 \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности получаем более сильные оценки, а именно,

$$\ln \mu(\sigma) \leq \ln M_F(\sigma + R) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad (5.24)$$

где $R = \sqrt{5}d\delta\sigma^\gamma$.

5.2.2. Оценка максимума через минимум. Множество $E_6 \subset \mathbb{R}_+$, вне которого верны основные оценки (5.23), (5.24), имеет нулевую плотность. Точнее, оно покрывается системой отрезков $[a_n, a'_n]$, $0 < a_n \uparrow \infty$, попарно не имеющих общих внутренних точек, объединение которых имеет нулевую плотность (в теоремах типа теоремы Бореля–Неванлинны именно так устроены исключительные множества). Множество

$$E_7 = \bigcup_{n \geq 1} \left(a_n - \frac{1}{n^2}, a'_n + \frac{1}{n^2} \right)$$

также имеет нулевую плотность, является открытым и содержит E_6 . Положим $D_a = \mathbb{R}_+ \setminus E_7$ (D_a называется асимптотическим множеством). Это множество замкнуто. Поэтому существует последовательность $\{\sigma_j\}$, $\sigma_j \in D_a$, $\sigma_j \uparrow \infty$, $\sigma_{j+1} \geq \sigma_j + h_j$, $j \geq 1$, причем

$$D_a \subset \bigcup_{j \geq 1} [\sigma_j, \sigma_j + h_j],$$

где $h_j = d\delta_j^2\sigma_j^\gamma$, $\delta_j = \frac{w^*(v_j)}{v_j}$, $v_j = v(\sigma_j)$, $j \geq 1$.

Рассмотрим теперь квадрат K_j со сторонами, параллельными осям координат и имеющими длины, равные $2h_j$. Пусть квадрат K_j такой, что вертикальный отрезок $d_h = \sigma_j + I_h$, $h = h_j$, делит его пополам. Через K'_j обозначим

левую, а через K_j'' – правую половину K_j . Так как $\delta_j \leq 1$ при $j \geq j_0$, то для всякой точки $\xi \in d_h$ круг

$$D(\xi, R_j) = \{z : |\xi - z| \leq R_j, R_j = \sqrt{5}h_j\delta_j^{-1}\}$$

содержит круг $D_j = \{z : |z - (\sigma_j + it_0)| \leq \sqrt{2}h_j\}$ (it_0 – середина отрезка I_h), описанный вокруг квадрата (см. рис. 1). Здесь $\sqrt{5}h_j$ – длины диагоналей K_j' и K_j'' .

Рис. 1

Если взять $r_j = \delta_j$, то круг $D(\xi, R_j r_j)$, очевидно, будет содержать описанный вокруг квадрата K_j круг D_j . Далее, в качестве ξ возьмем точку отрезка d_h , $h = h_j$, в которой достигается максимум:

$$M(\sigma_j, I_h) = \max_{it \in I_h} |F(\sigma_j + it)| = |F(\xi)|, \quad \xi \in d_h. \quad (5.25)$$

Из (5.23) видно, что $|F(\xi)| > 1$ при $\sigma \geq x_3$. Так как $\delta_j \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то можно считать, что $0 < r_j < 1 - \frac{1}{k}$ при $\sigma \geq x_3$ (k – фиксированное натуральное число, которое выберем позже). Таким образом, к функции $g(z) = F(z + \xi)$ можно применить лемму 5.1 (об оценке ограниченной аналитической функции снизу). Из леммы следует, что для всех z из круга $\{z : |z| \leq R_j r_j\}$, но вне исключительных кружков

$$V_n = \{z : |z - z_n| \leq \rho_n\}$$

таких, что

$$\sum_n \rho_n \leq R_j r_j^k, \quad (5.26)$$

выполняется оценка

$$\frac{R_j - |z|}{R_j + |z|} \ln |g(0)| - 5kL \leq \ln |g(z)|,$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(R_j e^{i\theta})| d\theta - \ln |g(0)|.$$

Значит, при $j \rightarrow \infty$ справедливо неравенство

$$\left(1 + o(1) - 5k \frac{L}{\ln |g(0)|}\right) \ln |g(0)| \leq \ln |g(z)|. \quad (5.27)$$

Но в силу (5.23)–(5.25) имеем

$$\frac{L}{\ln |g(0)|} \leq \frac{\ln M_F(\sigma_j + R_j)}{\ln |F(\xi)|} \leq \frac{\ln M_F(\sigma_j + R_j)}{(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma_j)} = 1 + o(1), \quad (5.28)$$

поскольку σ_j принадлежит асимптотическому множеству D_a . Так как $g(0) = F(\xi)$, то из (5.23)–(5.25), (5.27), (5.28) получаем, что для всех z из круга $\{z : |z| \leq R_j r_j\}$, но вне исключительных кружков V_n выполнено

$$\ln |g(z)| \geq (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma_j), \quad j \geq j_1. \quad (5.29)$$

Поскольку

$$K_j'' \subset K_j \subset D_j \subset D(\xi, R_j r_j)$$

(см. рис. 1), из (5.29) следует, что, в частности, для всех $z \in K_j''$, но вне некоторых исключительных кружков, общая сумма радиусов которых не больше $R_j r_j^k$ (см. (5.26)), выполнено

$$\ln |F(z)| \geq (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma_j), \quad j \geq j_1 \quad (5.30)$$

(левая половина K_j' квадрата K_j в данный момент нас не интересует).

Имеем $R_j r_j^k = \sqrt{5} h_j \delta_j^{k-1}$. Значит, общая сумма радиусов исключительных кружков оценивается так:

$$\sum_n \rho_n \leq \sqrt{5} \delta_j^{k-1} h_j. \quad (5.31)$$

Проекция прямоугольника K_j'' на вещественную ось есть отрезок $[\sigma_j, \sigma_j + h_j]$. Рассмотрим прямоугольник

$$P_j = \{z = x + iy : |\sigma_j - x| \leq h_j, \|y - t_0\| \leq H_j\},$$

где $H_j = H(\sigma_j)$, $H(\sigma) = \delta^{-m} \sigma^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, m – любое фиксированное натуральное число, $\delta = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}$. Его можно покрыть замкнутыми квадратами (попарно не имеющими внутренних точек) – сдвигами K_j в вертикальном направлении. В каждой из правых половин таких квадратов верна оценка (5.30), за исключением кружков с общей суммой диаметров, которая согласно (5.31)

не превосходит $2\sqrt{5}\delta_j^{k-1}h_j$. Пусть m_j – число квадратов, покрывающих P_j . Тогда при $j \geq j_2$ имеем

$$m_j = \frac{H_j}{h_j} + 1 < 2\frac{H_j}{h_j}, \quad h_j = d\delta_j^2\sigma_j^\gamma.$$

Отсюда $m_j \leq \frac{2}{d}\delta_j^{-2-m}$, $j \geq j_2$.

Оценка (5.30) справедлива для всех z из прямоугольника

$$P_j'' = \{z = x + iy : \sigma_j \leq x \leq \sigma_j + h_j, |y - t_0| \leq H_j\},$$

но вне исключительных кружков с общей суммой диаметров τ_j , которая оценивается так:

$$\tau_j \leq 2\sqrt{5}\delta_j^{k-1}m_jh_j \leq \frac{10}{d}\delta_j^{k-3-m}h_j, \quad j \geq j_2.$$

Теперь можем выбрать k . Возьмем $k = 4 + m$. Тогда

$$\tau_j \leq \frac{10}{d}\delta_j h_j, \quad j \geq j_2. \quad (5.32)$$

Пусть E_8 – проекции всех исключительных кружков множества

$$K'' = \bigcup_{j \geq 1} K_j''$$

на множество D_a . Так как $D_a \subset \bigcup_{j \geq 1} [\sigma_j, \sigma_j + h_j]$, а $\delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то из (5.32) следует, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_8 \cap [0, \sigma])}{\sigma} = 0.$$

Значит, множество $E = E_7 \cup E_8$ имеет нулевую плотность.

Таким образом, учитывая (5.24), из (5.30) окончательно получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E верна оценка

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_{I_H}(\sigma),$$

где I_H – любой отрезок мнимой оси длины $|I_H| = 2\delta^{-m}\sigma^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Так как $\delta = \delta(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то $|I_H| \geq 2\sigma^\gamma$ при $\sigma \geq \sigma'$ и все доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $p_n \in \mathbb{N}$, $0 < p_n \uparrow \infty$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad z = x + iy, \quad (5.33)$$

– целая трансцендентная функция, $P_f = \{p_\nu\}$ – последовательность центральных показателей ряда (5.33). Предположим, что последовательность $\{p_n\}$ удовлетворяет условиям (2.8), (2.9) теоремы 2.1.

Если P_f является l -регулярной, то при $x \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой логарифмической плотности справедлива оценка

$$\ln M(r, f) = (1 + o(1)) \ln m(r, f).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Пусть Λ' – любая l -регулярная подпоследовательность последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Кроме того, пусть Λ удовлетворяет паре условий (2.8) и (2.9). Тогда всегда имеется ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (5.34)$$

для которого при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_{I_H}(\sigma), \quad (5.35)$$

где I_H – произвольный отрезок мнимой оси длины $|I_H| = 2\sigma^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Действительно, на вещественной оси отметим точки λ_n , $n \geq 1$. Затем построим выпуклую линию L с вершинами (λ_ν, G_ν) , где $\lambda_\nu \in \Lambda'$, а $\{G_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – любая последовательность таких положительных чисел, что

$$\frac{G_{\nu+1} - G_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} \uparrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Положим

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_\nu}, & \text{если } k = \nu, \\ e^{-\varphi_\nu(\lambda_k)-1}, & \text{если } \nu < k < \nu + 1, \end{cases} \quad (5.36)$$

где $y = \varphi_\nu(t)$ – уравнение прямой, проходящей через вершины (λ_ν, G_ν) и $(\lambda_{\nu+1}, G_{\nu+1})$. Тогда линия L является выпуклым полигоном Ньютона для ряда (5.34), коэффициенты которого определены формулой (5.36) (см. [15]). Следовательно, для этого ряда последовательность его центральных показателей $\Lambda(F)$ совпадает с Λ' . Поэтому по доказанной теореме 2.1 при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества E нулевой плотности для ряда (5.34) должно выполняться асимптотическое равенство (5.35).

§ 6. Доказательство теоремы 2.2

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.2, сделаем одно замечание об исключительных кружках из леммы 5.1.

При $L = 0$ оценка (5.6) следует из неравенства Гарнака и она верна всюду в круге $\{z : |z| < R\}$ (см. [6]).

Пусть теперь $L > 0$. Оценка (5.6) справедлива в каждой так называемой “легкой” точке круга $\bar{D} = \{z : |z| \leq Rr\}$ (см. [6], [20]). Остальные точки круга $\bar{D}$ называются “тяжелыми”. С каждой тяжелой точкой z связан некоторый круг $K_z = \{\xi : |\xi - z| \leq \rho_z\}$ (см. [6], [32]). Как известно, из покрытия множества тяжелых точек кругами K_z ограниченного радиуса ρ_z можно выделить не более чем счетное подмножество кругов, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кругами (см. [33]). В круге $\bar{D}$ функция g имеет лишь конечное число нулей $a_1, a_2, \dots, a_n$. Очевидно, что все они являются тяжелыми точками.

Несколько увеличив радиусы исключительных кружков, можно считать, что оценка (5.6) верна вне объединения открытых кружков $V_n = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$

с общей суммой радиусов, которая оценивается так:

$$\sum_n \rho_n \leq Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N}, \quad N > 1.$$

Тогда для всех $z \in \overline{D}$ вне $V = \bigcup_n V_n$ тем более верна оценка

$$\varphi(z) > -6NL, \quad \varphi(z) = \ln |g(z)| - \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln |g(0)|. \quad (6.1)$$

Далее, выкидывая из $\overline{D}$ все открытые кружки из V , содержащие $a_1, a_2, \dots, a_n$ (таких кругов не более $6n$), получим замкнутое множество, которое обозначим через C . Пусть

$$B = \{z \in C : \varphi(z) \leq -6NL\}.$$

Множество B замкнуто и $B \subset V$. Следовательно, по лемме Гейне–Бореля существует конечное число кружков из V , покрывающих B . Значит, для любого z из $C \setminus B$ вне указанных кружков верна оценка (6.1). Таким образом, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Пусть выполнены условия леммы 5.1. Тогда имеется конечное число кружков $V_n = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$, $1 \leq n \leq m$, с общей суммой радиусов

$$\sum_{n=1}^m \rho_n \leq Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N}, \quad N \geq 1, \quad (6.2)$$

вне которых в круге $\{z : |z| \leq Rr\}$ верна оценка $\varphi(z) \geq -6NL$.

Теперь докажем теорему 2.2. Через $w = w(t)$ обозначим любую, но фиксированную функцию из класса W такую, что $\max(\sqrt{t}, N(et), c(t)) \leq w(t)$. Здесь $c(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln |q'(\lambda_n)|\}$, q – произведение Вейерштрасса (2.1). В силу условий (2.8), (2.9) (или (2.3)) такая функция w имеется. Найдется $w^* \in W$ вида $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $\beta \in L$, $1 \leq \beta(t)$. Как и в [10], через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения $w_1(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$, где $w_1(t) = \sqrt{\beta(t)}w(t)$, $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (5.8). Показано, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \ln M_F(\sigma + \delta^*) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma); \\ 2) \quad & M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leq \max_{|\xi - \alpha| \leq \delta} |F(\xi)|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где α – любое комплексное число

$$(\operatorname{Re} \alpha = \sigma), \quad \delta = \delta(v) = \frac{w_1(v)}{v}, \quad \delta^* = \delta^*(v) = \frac{w^*(v)}{v}, \quad v = v(\sigma)$$

(см. [10]).

Пусть $D_a = \mathbb{R}_+ \setminus E$. Тогда для $\sigma \in D_a$ и $\sigma \rightarrow \infty$ из (6.3), очевидно, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leq \max_{\xi \in K} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \quad (6.4)$$

где $\xi^* \in \partial K$, K – описанный вокруг круга $\overline{D}(\alpha, \delta) = \{\xi : |\xi - \alpha| \leq \delta\}$ квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Применим теперь лемму 6.1 к функции $g(z) = F(z + \xi^*)$, полагая

$$N = 4, \quad R = \delta^*, \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(v)}}.$$

Так как $Rr = 2\sqrt{2}\delta$ – длина диагонали квадрата K , то $K \subset \overline{D}(\xi^*, Rr)$. Если $r < 1 - \frac{1}{N}$, то согласно лемме 6.1 для всех z из круга $\overline{D}(\xi^*, Rr)$ вне конечного числа исключительных кружков V_n , радиусы которых удовлетворяют условию (6.2), при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \rightarrow \infty$ верна оценка

$$|F(\xi^*)| \leq |F(z)|^{1+o(1)} \leq M_F^{1+o(1)}(\sigma + \delta^*). \quad (6.5)$$

Количество исключительных кружков для каждого квадрата свое. Обозначим это число через $m(K)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{m(K)} \rho_n \leq Rr^4 \leq \frac{64\delta}{\beta^{3/2}(v)}. \quad (6.6)$$

Таким образом, из (6.4) и (6.5) получаем, что при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \rightarrow \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(z)|, \quad (6.7)$$

если $z \in K \setminus \bigcup_{n=1}^{m(K)} V_n$, где K – рассмотренный выше квадрат с центром в точке $\alpha = \sigma + it$.

Для любого $\sigma \in D_a$ рассмотрим прямоугольник

$$P = \{z = x + iy : |\sigma - x| \leq \delta, |y - t_0| \leq H\}, \quad H = \text{const.}$$

В [10] показано, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty,$$

то общая сумма диаметров исключительных кружков квадратов типа K , покрывающих P , есть величина $o(\delta)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Поэтому прямоугольник P содержит некоторый вертикальный отрезок I длины $|I| = 2H$, не пересекающийся с исключительным множеством. При выполнении условий теоремы 2.2, как видно из оценки (6.6), каждый квадрат K обладает таким свойством, но общая сумма диаметров кружков из P есть $O\left(\frac{1}{\beta^{3/2}(v)}\right)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. По этой причине P может и не содержать никакого вертикального отрезка длины $2H$, целиком свободного от точек исключительного множества (функция $\beta(v)$ может расти не так быстро). Поэтому поступим следующим образом.

Рассмотрим минимальное число квадратов типа K , не имеющих попарно общих внутренних точек и покрывающих P . Исключительное множество $e = \{e_i\}$ прямоугольника P состоит из исключительных кружков квадратов покрытия и их конечное число. Кружки e_i могут пересекаться и образовывать так называемые гроздья $d_K = \bigcup_{i=1}^{m_K} e_i$ – связные компоненты e .

Рис. 2

Пусть Π – проекция множеств d_K , имеющих непустое пересечение с отрезком $I_H(\sigma)$, на этот отрезок. Тогда $\Pi = \bigcup_{j=1}^n I_j$, где I_j – некоторые попарно не пересекающиеся отрезки, $I_j \subset I_H(\sigma)$, причем в силу (6.6) при $\sigma \geq \sigma_0$ выполнено

$$\sum_{j=1}^n |I_j| \leq 2 \sum_{j=1}^n \rho_j \leq \frac{\text{const}}{\beta^{3/2}(v)} \leq qH, \quad 0 < q < 1.$$

Измененный “отрезок” I_H^* строится следующим образом. Для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ находим наименьший прямоугольник P_j со стороной I_j , охватывающий соответствующие множества d_K . Участок I_j отрезка I_H заменим на ломаную $\gamma_j = \partial P_j \setminus I_j$. Если P_j примыкает к какой-то горизонтальной стороне P , то из γ_j исключаем и отрезок, целиком лежащий на этой стороне P . Прделав эту процедуру с каждым отрезком I_j , получим требуемый “отрезок” I_H^* (см. рис. 2).

Из непрерывности функции F следует справедливость оценки (6.7) и на границах гроздей d_K . Следовательно, оценка (6.7) имеет место на всем отрезке I_H^* и при $\sigma \in D_a$, $\sigma \rightarrow \infty$, верно равенство

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma),$$

где $m_F^*(\sigma) = \min_{t \in I_H^*(\sigma)} |F(t)|$.

Теорема 2.2 полностью доказана.

Список литературы

- [1] G. Pólya, “On the minimum modulus of integral functions of order less than unity”, *J. London Math. Soc.*, **1** (1926), 78–86.
- [2] G. Pólya, “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”, *Math. Z.*, **29:1** (1929), 549–640.

- [3] W. H. J. Fuchs, "Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series", *Illinois J. Math.*, **7** (1963), 661–667.
- [4] W. K. Hayman, "Angular value distribution of power series with gaps", *Proc. London Math. Soc.* (3), **24** (1972), 590–624.
- [5] O. B. Skaskiv, "On the Pólya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire function of finite order given by a lacunary power series", *Anal. Math.*, **16**:2 (1990), 143–157.
- [6] А. М. Гайсин, "Об одной гипотезе Поля", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:2 (1994), 73–92; англ. пер.: A. M. Gaisin, "On a conjecture of Pólya", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:2 (1995), 281–299.
- [7] А. М. Гайсин, "Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых", *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 55–82; англ. пер.: A. M. Gaisin, "Estimates of the growth and decrease on curves of an entire function of infinite order on curves", *Sb. Math.*, **194**:8 (2003), 1167–1194.
- [8] T. Kövari, "A gap-theorem for entire functions of infinite order", *Michigan Math. J.*, **12**:2 (1965), 133–140.
- [9] О. Б. Скасків, "Припущення Макінтайра про відсутність скінченних асимптотичних значень у цілої функції з лакунами Фейєра", *Вестн. Львівського університету. Сер. мех.-матем.*, **28** (1987), 80–81.
- [10] А. М. Гайсин, "Об одной теореме Хеймана", *Сиб. матем. журн.*, **39**:3 (1998), 501–516; англ. пер.: A. M. Gaisin, "On a theorem of Hayman", *Siberian Math. J.*, **39**:3 (1998), 431–445.
- [11] A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), 286–296.
- [12] Н. Н. Юсупова, *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста*, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Башкирский гос. ун-т, Уфа, 2009.
- [13] М. А. Евграфов, "Об одной теореме единственности для рядов Дирихле", *УМН*, **17**:3 (1962), 169–175.
- [14] У. Хейман, *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [15] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [16] I. Ciorănescu, L. Zsidó, "A minimum modulus theorem and applications to ultradifferential operators", *Ark. Mat.*, **17**:1–2 (1979), 153–166.
- [17] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [18] Ш. И. Стрелиц, *Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений*, Минтис, Вильнюс, 1972.
- [19] T. Murai, "The deficiency of entire functions with Fejér gaps", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33**:3 (1983), 39–58.
- [20] А. М. Гайсин, *Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент*, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, Ин-т матем. с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1994.
- [21] А. М. Гайсин, "Оценка ряда Дирихле, показатели которого – нули целой функции с нерегулярным поведением", *Матем. сб.*, **185**:2 (1994), 33–56; англ. пер.: A. M. Gaisin, "An estimate for a Dirichlet series whose exponents are zeros of an entire function with irregular behavior", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **81**:1 (1995), 163–183.
- [22] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [23] В. С. Бойчук, "О некоторых свойствах уточненного порядка", *Сиб. матем. журн.*, **20**:2 (1979), 229–236; англ. пер.: V. S. Boichuk, "Some properties of a refined order", *Siberian Math. J.*, **20**:2 (1979), 162–167.

- [24] М. Н. Шеремета, *Асимптотические свойства целых функций, заданных степенными рядами и рядами Дирихле*, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, Львовский гос. ун-т им. Ив. Франко, Львов, 1985.
- [25] М. Н. Шеремета, “Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле”, *Матем. сб.*, **110(152):1(9)** (1979), 102–116; англ. пер.: М. N. Šeremeta, “Analogues of Wiman’s theorem for Dirichlet series”, *Math. USSR-Sb.*, **38:1** (1981), 95–107.
- [26] T. I. Seidman, M. S. Gowda, “Norm dependence of the coefficient map on the window size”, *Math. Scand.*, **73:2** (1993), 177–189.
- [27] K. G. Binmore, “A density theorem with an application to gap power series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148:2** (1970), 367–384.
- [28] R. M. Redheffer, “Completeness of sets of complex exponentials”, *Advances in Math.*, **24:1** (1977), 1–62.
- [29] И. Ф. Красичков-Терновский, “Интерпретация теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты”, *Матем. сб.*, **180:3** (1989), 397–423; англ. пер.: I. F. Krasichkov-Ternovskii, “An interpretation of the Beurling–Malliavin theorem on the radius of completeness”, *Math. USSR-Sb.*, **66:2** (1990), 405–429.
- [30] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
- [31] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.
- [32] Н. В. Говоров, “Об оценке снизу функции, субгармонической в круге”, *Теория функций. функц. анализ и их прил.*, 1968, № 6, 130–150.
- [33] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

А. М. Гайсин (A. M. Gaisin)

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, г. Уфа
E-mail: gaisinam@mail.ru

Поступила в редакцию

12.04.2010 и 06.09.2011

Ж. Г. Рахматуллина (Zh. G. Rakhmatullina)

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: rakhzha@gmail.com