Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Елагин, Когомологическая теория спуска для морфизма стеков и для эквивариантных производных категорий, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 31–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 07:19:35

УДК 512.73

А. Д. Елагин

Когомологическая теория спуска для морфизма стеков и для эквивариантных производных категорий

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых для морфизма $X \rightarrow S$ алгебраических многообразий (или, в более общем случае, стеков) производная категория S восстанавливается методами теории спуска по производной категории X . Показано, что в случае действия линейно редуктивной алгебраической группы G на схеме X из этого результата следует эквивалентность производной категории G -эквивариантных пучков на X и категории объектов в производной категории пучков на X с заданным на них действием G .

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: производные категории, теория спуска, алгебраическое многообразие.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что пучки на многообразии можно определять локально. А именно, пусть $S = \bigcup U_i$ – покрытие многообразия S открытыми подмножествами. Задание пучка на S равносильно заданию семейства пучков F_i на U_i и изоморфизмов склейки $\varphi_{ij}: F_i|_{U_i \cap U_j} \rightarrow F_j|_{U_i \cap U_j}$, удовлетворяющих условию коцикла: на пересечениях $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполнено $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$. Можно задавать пучки и при помощи покрытий более широкого класса. Пусть $p: X \rightarrow S$ – накрытие (например, накрытие топологических пространств или конечный плоский морфизм схем), p_i и p_{ij} – проекции расслоенных произведений $X \times_S X$ и $X \times_S X \times_S X$ на сомножители. Тогда задание пучка на базе S равносильно заданию пучка F на X вместе с изоморфизмом склейки пучков $\theta: p_1^* F \rightarrow p_2^* F$ на $X \times_S X$, удовлетворяющим условию коцикла: изоморфизмы $p_{13}^* \theta$ и $p_{23}^* \theta \circ p_{12}^* \theta$ на $X \times_S X \times_S X$ равны.

Заметим, что первое утверждение про открытое покрытие – по сути, частный случай второго для $X = \bigsqcup U_i$.

Возникает естественный вопрос: будут ли верны подобные утверждения, если заменить пучки на объекты производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии?

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00242-а, № 10-01-93110-НЦНИЛ-а, № 10-01-93113-НЦНИЛ-а), гранта Президента РФ МД-2712.2009.1, а также Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”, Научного фонда ГУ-ВШЭ “Управление поддержки академических исследований” (грант № 10-09-0015), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4713.2010.1).

Предположим, что на алгебраическом многообразии X действует алгебраическая группа G . *Эquivariantным пучком на X* называется пучок F , снабженный действием группы (в случае конечной группы оно задается изоморфизмами $\theta_g: F \rightarrow g^*F$ для каждого $g \in G$, согласованными в том смысле, что $g^*\theta_h \circ \theta_g = \theta_{hg}$ для каждой пары $g, h \in G$). Эquivariantные относительно заданного действия квазикогерентные пучки на многообразии образуют абелеву категорию $\mathrm{qcoh}^G(X)$. Если $\mathcal{F}^\bullet$ – объект соответствующей производной категории $\mathcal{D}^G(X) = \mathcal{D}(\mathrm{qcoh}^G(X))$, то имеется действие G на комплексе $F^\bullet$, полученном из $\mathcal{F}^\bullet$ забыванием группового действия (для конечной группы оно определяется аналогично: как согласованные изоморфизмы $\theta_g: F^\bullet \rightarrow g^*F^\bullet$ в категории $\mathcal{D}(X)$). Верно ли обратное, т.е. что задание действия алгебраической группы G на комплексе $F^\bullet \in \mathcal{D}(X)$ определяет объект в категории $\mathcal{D}^G(X)$?

В настоящей работе даны ответы на эти два вопроса. Заметим, что второй вопрос, по сути, является частным случаем первого, при этом роль накрывающего пространства играет многообразие X , а роль базы – стек $X//G$, факторстек X по действию группы G . Отсюда возникает необходимость работать в категории стеков, а не схем.

Правильная постановка задачи – вопрос об эквивалентности соответствующих категорий, а именно, производной категории пучков на базе и некоторой категории спуска, связанной с производной категорией пучков на накрывающем многообразии. Классический способ определять категорию спуска был описан выше: ее объект – это объект F в $\mathcal{D}(X)$ вместе с данными склейки, имеющими вид изоморфизма $p_1^*F \rightarrow p_2^*F$ на $X \times_S X$, удовлетворяющего условию коцикла. Ответ получен в следующей теореме (теорема 7.3).

ТЕОРЕМА. *Для плоского морфизма стеков $p: X \rightarrow S$ неограниченная производная категория $\mathcal{D}(S)$ эквивалентна категории спуска $\mathcal{D}(X)/p$, связанной с p , тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{O}_S$ отщепляется прямым слагаемым при естественном отображении $\mathcal{O}_S \rightarrow R p_* \mathcal{O}_X$.*

Для сравнения эquivariantной и обычной производных категорий получаем такое следствие (теорема 9.6).

СЛЕДСТВИЕ. *Для действия линейно редуктивной группы G (т.е. группы, представления которой полупросты) на схеме X производная категория эquivariantных пучков $\mathcal{D}^G(X)$ эквивалентна категории спуска $\mathcal{D}(X)^G$, образованной объектами $\mathcal{D}(X)$ с заданным действием G .*

Для доказательства мы используем другой способ задания данных спуска, происходящий из теории комонад. *Комонадная категория спуска* – это категория комодулей над комонадой на категории $\mathcal{D}(X)$, связанной с парой сопряженных функторов p^* и p_* между неограниченными производными категориями $\mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{D}(S)$. В работе показано, что две категории спуска эквивалентны для плоского морфизма p (предложение 4.2). Это дает возможность использовать более удобный язык теории комонад. С его помощью проводится доказательство теоремы 7.3, основанное на классической теореме Бека.

Работа имеет следующую структуру. Параграфы 2–6 носят, в основном, справочный характер. В § 2 собраны сведения, касающиеся косимплициальных категорий и связанных с ними категорий спуска. В § 3 изложена в соответствии с работой Барра и Уэллса [1] теория, относящаяся к комонадам: определения, теорема сравнения и критерий того, что функтор сравнения является эквивалентностью. Новой здесь является спецификация этого критерия для случая триангулированных категорий. В § 4 показана эквивалентность двух способов определения данных спуска – классического и через комодули над комонадой. В § 5 даны определения и утверждения, касающиеся подкатегорий в категориях спуска, необходимые для работы с ограниченными производными категориями и категориями совершенных комплексов. В § 6 приведены сведения о производных категориях пучков на стеках. Параграф 7 – центральный в работе, в нем на основе результатов § 3 получен критерий того, когда производная категория базы восстанавливается по производной категории накрывающего пространства как категория спуска. В § 8 изучается свойство SCDT; показано, что им обладают конечные плоские, а также гладкие проективные морфизмы в характеристике нуль. В § 9 результаты о спуске для стеков применяются к частному случаю: сравнению производной категории когерентных пучков и производной категории эквивариантных когерентных пучков.

Автор благодарит Д. О. Орлова за постоянное внимание к настоящей работе и многочисленные советы, А. Г. Кузнецова – за полезные обсуждения, поддержку и ценные замечания. Также автор благодарен университету г. Киото (Япония) за приглашение принять участие в зимней школе по алгебраической геометрии в январе 2009 года, во время посещения которой была написана основная часть этой работы, и за проявленное гостеприимство.

§ 2. Косимплициальные конструкции

Пусть Δ_0 – это категория, объекты которой – множества вида $[1, \dots, n]$, $n \in \mathbb{N}$, и пустое множество, а морфизмы – неубывающие отображения между ними. Пусть $\Delta \subset \Delta_0$ – полная подкатегория, состоящая из непустых множеств.

По определению *косимплициальный объект некоторой категории $\mathcal{C}$* (например, косимплициальное множество, косимплициальная схема) – это функтор из Δ в $\mathcal{C}$. Если в качестве $\mathcal{C}$ взять 2-категорию категорий $\mathbf{Cats}$, то получим определение косимплициальной категории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем *косимплициальной категорией* ковариантный 2-функтор из Δ в 2-категорию $\mathbf{Cats}$ категорий и функторов, а *аугментированной косимплициальной категорией* – ковариантный 2-функтор $\Delta_0 \rightarrow \mathbf{Cats}$. Иными словами, косимплициальная категория $\mathcal{C}_\bullet$ (соответственно аугментированная косимплициальная категория $\mathcal{C}_\bullet$) состоит из следующих данных:

- 1) набора категорий $\mathcal{C}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (соответственно $k = -1, 0, 1, 2, \dots$), соответствующих элементам Δ (соответственно Δ_0), причем $\mathcal{C}_k$ отвечает множеству $[1, \dots, k+1]$;

- 2) набора функторов $P_f^*: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}_n$, соответствующих морфизмам в Δ (в Δ_0), т.е. монотонным отображениям $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$;
- 3) набора изоморфизмов функторов $\epsilon_{f,g}: P_f^* P_g^* \rightarrow P_{fg}^*$, соответствующих парам отображений f, g , для которых имеет смысл композиция $f \circ g$.

Изоморфизмы 3) должны подчиняться условию коцикла: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_f^* P_g^* P_h^* & \xrightarrow{\epsilon_{f,g}} & P_{fg}^* P_h^* \\ \downarrow \epsilon_{g,h} & & \downarrow \epsilon_{fg,h} \\ P_f^* P_{gh}^* & \xrightarrow{\epsilon_{f,gh}} & P_{fgh}^* \end{array}$$

коммутативна для любой тройки отображений f, g, h , для которых имеет смысл композиция $f \circ g \circ h$.

Симплициальная и аугментированная симплициальная категории определяются как контравариантные 2-функторы $\Delta \rightarrow \text{Cats}$ и $\Delta_0 \rightarrow \text{Cats}$.

Пусть $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_f^*]$ – аугментированная косимплициальная категория. Категория $\mathcal{C}_{-1}$ и определенные на ней функторы P_f^* называются *аугментацией*. Косимплициальная категория $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_f^*]$, полученная отбрасыванием аугментации от $\mathcal{C}_\bullet$, обозначается через $\text{Sk}_{\geq 0}(\mathcal{C}_\bullet)$.

Пользуясь терминологией из [2; 19.1], можно сказать, что симплициальная категория – это предстек на категории Δ .

ПРИМЕР 2.2. Пусть дан морфизм схем $X \rightarrow S$. Тогда схемы $S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \dots$ и морфизмы

$$p_f: \underbrace{X \times_S X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}} \rightarrow \underbrace{X \times_S X \times \dots \times X}_{m \text{ раз}}$$

между ними, определенные правилом

$$p_f(x_1, \dots, x_n) = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(m)})$$

для $f \in \text{Hom}_{\Delta_0}([1, \dots, m], [1, \dots, n])$, образуют аугментированную симплициальную схему. Категории пучков на этих схемах и функторы обратного образа между ними являются важным примером аугментированной косимплициальной категории.

Категории $\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$ полезно представлять себе как категории пучков, связанные с $S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \dots$. Мы будем использовать естественные обозначения для функторов P_f^* , напоминающие о функторах обратного образа между категориями пучков. Например, функтор $P_f^*: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ для отображения $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2, 3]$ такого, что $f(1) = 1, f(2) = 3$, будет обозначаться через P_{13}^* . Его удобно представлять себе как обратный образ при проекции $p_{13}: X \times_S X \times_S X \rightarrow X \times_S X$. Функтор $P_f^*: \mathcal{C}_{-1} \rightarrow \mathcal{C}_0$, соответствующий единственному отображению $\emptyset \rightarrow [1]$, мы будем обозначать через P^* . Он играет роль функтора обратного образа при морфизме $p: X \rightarrow S$. Мы будем обозначать через D^* функтор $P_f^*: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ для единственного отображения

$f: [1, 2] \rightarrow [1]$. Этот функтор полезно представлять себе как обратный образ при диагональном вложении $d: X \rightarrow X \times_S X$.

Для любой косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_\bullet^*]$ определена категория спуска, которая обозначается через $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (классическая категория спуска; см. [2; 19.3]). Объекты $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ – это пары (F, θ) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}_0$, а θ – изоморфизм $P_1^* F \rightarrow P_2^* F$, подчиняющийся условию коцикла, которое состоит в коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & P_{13}^* P_1^* F & \xrightarrow{P_{13}^* \theta} & P_{13}^* P_2^* F & \\
 & \sim \swarrow & & \searrow \sim & \\
 P_{12}^* P_1^* F & & & & P_{23}^* P_2^* F \\
 & \searrow P_{12}^* \theta & & P_{23}^* \theta \nearrow & \\
 & P_{12}^* P_2^* F & \xrightarrow{\sim} & P_{23}^* P_1^* F &
 \end{array}$$

В этой диаграмме отрезками со знаком $\sim$ обозначены изоморфизмы функторов, входящие в определение косимплициальной категории. Морфизмы в $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это морфизмы $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_0}(F_1, F_2)$ такие, что $P_2^* f \circ \theta_1 = \theta_2 \circ P_1^* f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Отождествляя канонически изоморфные объекты, условие коцикла обычно записывают в виде

$$P_{23}^* \theta \circ P_{12}^* \theta = P_{13}^* \theta.$$

Категория $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ имеет другое, эквивалентное описание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Объект категории $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ – это семейство объектов $F_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и семейство изоморфизмов $\varphi_f: P_f^* F_m \xrightarrow{\sim} F_n$ для каждого морфизма $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ в Δ , удовлетворяющих равенствам $\varphi_{gf} = \varphi_g \circ P_g^* \varphi_f$ для каждой пары (f, g) , для которой композиция определена. Морфизмы в $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ из $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ в $(F'_\bullet, \varphi'_\bullet)$ – это семейства морфизмов $\rho_i: F_i \rightarrow F'_i$, согласованные с $\varphi_\bullet$ и $\varphi'_\bullet$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Определения 2.3 и 2.5 эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства читателя приведем набросок доказательства этого предложения.

Пусть дан объект категории из определения 2.5, состоящий из семейств $F_\bullet = (F_i)$ и $\varphi_\bullet = (\varphi_f)$. Сопоставим ему объект категории из определения 2.3: положим $F = F_0$, а $\theta: P_1^* F \rightarrow P_2^* F$ возьмем равным композиции

$$\varphi_{i_2}^{-1} \varphi_{i_1}: P_{i_1}^* F_0 \xrightarrow{\varphi_{i_1}} F_1 \xrightarrow{\varphi_{i_2}^{-1}} P_{i_2}^* F_0.$$

Здесь i_1 и i_2 обозначают два морфизма $[1] \rightarrow [1, 2]$ в Δ , $i_1(1) = 1$, $i_2(1) = 2$. Условие согласованности для φ_f влечет условие коцикла для θ . Обратно,

пусть дан объект (F, θ) категории из определения 2.3. Сопоставим ему объект категории из определения 2.3. Пусть $f_i: [1] \rightarrow [1, \dots, i+1]$ – функция, переводящая 1 в 1. Положим $F_i = P_{f_i}^* F$, а изоморфизм φ_f для морфизма $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ определим следующим образом. Пусть $f(1) = r$, а $g: [1, 2] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ – отображение такое, что $g(1) = 1$, $g(2) = r$. Возьмем φ_f равным композиции изоморфизмов

$$\begin{aligned} P_f^* F_m &= P_f^* P_{f_m}^* F \xrightarrow{\epsilon_{f, f_m}} P_{ff_m}^* F = P_{gi_2}^* F \\ &\xrightarrow{\epsilon_{g, i_2}^{-1}} P_g^* P_{i_2}^* F \xrightarrow{P_g^* \theta^{-1}} P_g^* P_{i_1}^* F \xrightarrow{\epsilon_{g, i_1}} P_{gi_1}^* F = P_{f_n}^* F = F_n. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что из условия коцикла для θ следует условие согласованности для φ_f .

Категория $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, построенная по косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet$, обладает естественными функторами забывания $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow \mathcal{C}_k$. Оказывается, что эти функторы дополняют $\mathcal{C}_\bullet$ до аугментированной косимплициальной категории. Положим $\mathcal{C}_{-1} = \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, для морфизма $f: \emptyset \rightarrow [1, \dots, n+1]$ определим функтор $P_f^*: \mathcal{C}_{-1} \rightarrow \mathcal{C}_n$ как забывание $(F_\bullet, \varphi_\bullet) \mapsto F_n$ на объектах, $\rho_\bullet \mapsto \rho_n$ на морфизмах (здесь мы пользуемся определением 2.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. 1) Категории $\mathcal{C}_{-1} = \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$ и функторы P_f^* между ними образуют аугментированную косимплициальную категорию $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$.

2) Категория $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ обладает универсальным свойством: для любого дополнения $\mathcal{C}_\bullet$ до аугментированной косимплициальной категории $\tilde{\mathcal{C}}'_\bullet = [\mathcal{C}'_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_f^*]$ существует единственный с точностью до изоморфизма функтор $\Phi: \mathcal{C}'_{-1} \rightarrow \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet) = \mathcal{C}_{-1}$, продолжающийся набором тождественных функторов до функтора $\tilde{\mathcal{C}}'_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ между аугментированными косимплициальными категориями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Утверждение 2) можно рассматривать как аналог теоремы сравнения 3.6 для категории комодулей над комонадой (см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для пары морфизмов

$$f: \emptyset \rightarrow [1, \dots, m+1], \quad g: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$$

определим изоморфизм функторов $\epsilon_{g, f}: P_g^* P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{gf}^*$ на объекте $(F_\bullet, \varphi_\bullet) \in \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ как

$$P_g^* P_f^* ((F_\bullet, \varphi_\bullet)) = P_g^* F_m \xrightarrow{\varphi_g} F_n = P_{gf}^* ((F_\bullet, \varphi_\bullet)).$$

Условие согласованности для φ влечет условие коцикла для “новых” ϵ .

2) Пусть H – объект категории $\mathcal{C}'_{-1}$. Определим функтор Φ на объекте H как пару $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$, где

$$F_k = P_{f_k}^* H \in \tilde{\mathcal{C}}'_k = \mathcal{C}_k$$

для (единственного) отображения $f_k: \emptyset \rightarrow [1, \dots, k+1]$, а φ_f для $f: [1, \dots, m+1] \rightarrow [1, \dots, n+1]$ определим как

$$P_f^* F_m = P_f^* P_{f_m}^* H = P_f^* P_{f_m}^* H \xrightarrow{\epsilon_{f, f_m}} P_{ff_m}^* H = P_{f_n}^* H = F_n.$$

На морфизме $u: H_1 \rightarrow H_2$ положим Φ равным $\rho_\bullet$, где $\rho_k: P_{f_k}^* H_1 \rightarrow P_{f_k}^* H_2$ есть $P_{f_k}^* u$. Очевидно, что функтор Φ обладает требуемыми свойствами.

Нас будут интересовать аугментированные косимплициальные категории

$$[\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, P_\bullet^*],$$

удовлетворяющие двум дополнительным условиям.

УСЛОВИЕ 1. Все функторы $P_f^*: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}_n$ имеют правые сопряженные функторы $P_{f*}: \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_m$.

Можно проверить (см. [3; 3.6]), что функторы $P_\bullet^*$ будут образовывать аугментированную симплициальную категорию

$$[\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_\bullet^*].$$

Эти функторы полезно представлять себе как функторы прямого образа между категориями пучков.

Рассмотрим коммутативный квадрат в категории Δ_0 и соответствующий квадрат категорий и функторов:

$$\begin{array}{ccc} [1, \dots, m+n-r+1] & \xleftarrow{f'} & [1, \dots, n+1] \\ \uparrow g' & & \uparrow g \\ [1, \dots, m+1] & \xleftarrow{f} & [1, \dots, r+1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{m+n-r} & \xrightleftharpoons[P_{f'*}]{P_{f'}^*} & \mathcal{C}_n \\ P_{g'*} \updownarrow P_{g'}^* & & P_{g*} \updownarrow P_g^* \\ \mathcal{C}_m & \xrightleftharpoons[P_{f*}]{P_f^*} & \mathcal{C}_r \end{array}$$

Если отображения f и f' (или g и g') инъективны и $[1, \dots, m+n-r+1] = \text{Im } f' \cup \text{Im } g'$, мы будем называть такие квадраты *точными декартовыми*. С любым квадратом связаны два естественных морфизма замены базы:

$$P_g^* P_{f*} \rightarrow P_{f'*} P_{g'}^*, \quad P_f^* P_{g*} \rightarrow P_{g'*} P_{f'}^*. \quad (2.1)$$

Например, морфизм $P_g^* P_{f*} \rightarrow P_{f'*} P_{g'}^*$ может быть определен как композиция

$$P_g^* P_{f*} \xrightarrow{\eta} P_g^* P_{f*} P_{g'*} P_{g'}^* \xrightarrow{\sim} P_g^* P_{g*} P_{f'*} P_{g'}^* \xrightarrow{\varepsilon} P_{f'*} P_{g'}^*$$

или как композиция

$$P_g^* P_{f*} \xrightarrow{\eta} P_{f'*} P_{f'}^* P_{g'}^* P_{g*} \xrightarrow{\sim} P_{f'*} P_{g'}^* P_{f'}^* P_{f*} \xrightarrow{\varepsilon} P_{f'*} P_{g'}^*,$$

где η и ε обозначают канонические морфизмы сопряжения. Несложная проверка показывает, что эти два способа равнозначны.

Второе условие является аксиоматизацией теоремы о плоской замене базы.

УСЛОВИЕ 2. Морфизмы замены базы (2.1) являются изоморфизмами для любых точных декартовых квадратов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – косимплициальная категория, а $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ – полученная из нее добавлением $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ аугментированная косимплициальная категория. Если $\mathcal{C}_\bullet$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ также им удовлетворяет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 1 состоит в существовании правых сопряженных у функторов P_f^* в категории $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ для всех морфизмов f в Δ_0 . Для морфизмов f , лежащих в Δ , сопряженный функтор существует по предположению, необходимо рассмотреть морфизмы вида $f: \emptyset \rightarrow [1, \dots, n]$. Раскладывая f в композицию, видим, что достаточно проверить существование сопряженного функтора к функтору забывания $P^*: \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow \mathcal{C}_0$.

Определим функтор $P_*: \mathcal{C}_0 \rightarrow \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ следующим образом. Пусть $F \in \mathcal{C}_0$. Положим

$$P_*F = (P_{2*}P_1^*F, \theta_F).$$

Здесь $\theta_F: P_1^*P_2^*P_1^*F \rightarrow P_2^*P_{2*}P_1^*F$ определяется как композиция

$$P_1^*P_{2*}P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_{23*}P_{12}^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_{23*}P_{13}^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_2^*P_{2*}P_1^*F,$$

где два крайних изоморфизма – замена базы, а средний изоморфизм – из определения косимплициальной категории. На морфизмах полагаем $P_*f = P_{2*}P_1^*f$. Проверку того, что θ_F удовлетворяет условию коцикла, мы предоставляем читателю.

Чтобы проверить, что функторы P^* и P_* сопряжены, построим морфизмы функторов

$$\eta: \text{Id}_{\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)} \rightarrow P_*P^*, \quad \varepsilon: P^*P_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}_0}.$$

Определим η на объекте $(F, \theta) \in \text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ как композицию

$$\eta_{(F, \theta)}: F \xrightarrow{\eta_F} P_{2*}P_2^*F \xrightarrow{P_2^*\theta^{-1}} P_{2*}P_1^*F.$$

Нетрудно показать, что морфизм $\eta_{(F, \theta)}$ согласован с θ и θ_F и действительно является морфизмом в $\text{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$.

Определим ε на объекте $F \in \mathcal{C}_0$ следующим образом:

$$\varepsilon_F: P_{2*}P_1^*F \xrightarrow{\eta} P_{2*}D_*D^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} \text{Id}_* \text{Id}^*F = F.$$

Из данных выше определений морфизмов η и ε и свойств косимплициальных категорий следует, что композиции функторов

$$P_* \xrightarrow{\eta P_*} P_*P^*P_* \xrightarrow{P_*\varepsilon} P_*, \quad P^* \xrightarrow{P^*\eta} P^*P_*P^* \xrightarrow{\varepsilon P^*} P^*$$

тождественны. Отсюда вытекает, что функторы P^* и P_* сопряжены.

Условие 2 состоит в том, что для точных декартовых квадратов в Δ_0 должна быть выполнена формула замены базы. Для квадратов, лежащих в Δ , она выполнена по предположению, поэтому достаточно рассмотреть квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} [1, \dots, m+n] & \xleftarrow{f'} & [1, \dots, n] \\ \uparrow g' & & \uparrow g \\ [1, \dots, m] & \xleftarrow{f} & \emptyset \end{array}$$

Раскладывая f и g в композицию, сводим проверку к случаю квадрата

$$\begin{array}{ccc} [1, 2] & \xleftarrow{i_2} & [1] \\ \uparrow i_1 & & \uparrow g \\ [1] & \xleftarrow{f} & \emptyset \end{array}$$

т.е. к доказательству того, что естественные морфизмы

$$P^*P_* \rightarrow P_{2*}P_1^*, \quad P^*P_* \rightarrow P_{1*}P_2^*$$

в $\mathcal{C}_0$ суть изоморфизмы. В этом случае рассуждение несложно и опирается на определения. Предложение 2.9 доказано.

§ 3. Комонады и комодули

Напомним некоторые факты из теории комонад. Подробности можно найти в работах Барра–Уэллса [1; гл. 3] и Маклейна [4; гл. 6].

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает произвольную категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Комонада* $T = (T, \varepsilon, \delta)$ (также используется название *стандартная конструкция*) на категории $\mathcal{C}$ состоит из функтора $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ и естественных преобразований функторов $\varepsilon: T \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ и $\delta: T \rightarrow T^2 = TT$ таких, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T^2 \\ \downarrow \delta & \searrow & \downarrow T\varepsilon \\ T^2 & \xrightarrow{\varepsilon T} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T^2 \\ \downarrow \delta & & \downarrow T\delta \\ T^2 & \xrightarrow{\delta T} & T^3 \end{array}$$

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим пару сопряженных функторов $P^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ (левый) и $P_*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ (правый). Пусть $\eta: \text{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow P_*P^*$ и $\varepsilon: P^*P_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ – канонические морфизмы сопряжения. Определим тройку (T, ε, δ) , положив $T = P^*P_*$ и взяв $\varepsilon: P^*P_* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$, $\delta = P^*\eta P_*: P^*P_* \rightarrow P^*P_*P^*P_*$. Тогда $T = (T, \varepsilon, \delta)$ образует комонаду на категории $\mathcal{C}$.

На самом деле любая комонада может быть получена из пары сопряженных функторов описанным выше способом. Это следует из изложенной ниже конструкции, принадлежащей Эйленбергу и Муру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$. *Комодулем* над T (или T -*коалгеброй*) называется пара (F, h) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}$, а $h: F \rightarrow TF$ – морфизм, удовлетворяющий двум условиям: композиция

$$F \xrightarrow{h} TF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

равна тождественному морфизму, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & TF \\ \downarrow h & & \downarrow Th \\ TF & \xrightarrow{\delta F} & T^2F \end{array}$$

коммутативна. *Морфизмом* между комодулями (F_1, h_1) и (F_2, h_2) называется по определению морфизм $f: F_1 \rightarrow F_2$ в категории $\mathcal{C}$, для которого коммутирует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{f} & F_2 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ TF_1 & \xrightarrow{Tf} & TF_2 \end{array}$$

Комодули над заданной комонадой T на $\mathcal{C}$ образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{C}_T$. Определим функтор $Q_*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$, положив

$$Q_*F = (TF, \delta F), \quad Q_*f = Tf,$$

определим $Q^*: \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$ как функтор забывания: $(F, h) \mapsto F$. Тогда функторы (Q^*, Q_*) образуют сопряженную пару и она порождает комонаду T конструкцией из примера 3.2.

Категория $\mathcal{C}_T$ наследует многие свойства $\mathcal{C}$. Несложно убедиться в справедливости следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{C}$ – аддитивная категория и функтор T аддитивен, то категория $\mathcal{C}_T$ также аддитивна. Если $\mathcal{C}$ абелева, а T точен слева, то $\mathcal{C}_T$ также абелева.

Напротив, совершенно неясно, будет ли триангулированной категория $\mathcal{C}_T$, построенная по комонаде $T = (T, \varepsilon, \delta)$, если функтор T точен на триангулированной категории $\mathcal{C}$. Естественно попытаться определить триангулированную структуру на $\mathcal{C}_T$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Определим функтор сдвига на $\mathcal{C}_T$ равенствами

$$(F, h)[1] = (F[1], h[1]), \quad f[1] = f[1].$$

Назовем *выделенными* в $\mathcal{C}_T$ те треугольники $(F', h') \rightarrow (F, h) \rightarrow (F'', h'') \rightarrow (F', h')[1]$, для которых $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1]$ является выделенным треугольником в $\mathcal{C}$.

К сожалению, операция взятия конуса в $\mathcal{C}$ не функториальна, поэтому без дополнительных предположений нельзя проверить, что любой морфизм в $\mathcal{C}_T$ дополняется до выделенного треугольника. Однако в некоторых случаях получается, что данное выше определение действительно вводит триангулированную структуру на $\mathcal{C}_T$; если это так, то мы просто будем говорить, что категория $\mathcal{C}_T$ триангулированная (имея при этом в виду, что триангулированная структура такая, как была определена выше). Позже (предложение 3.13) мы увидим, что $\mathcal{C}_T$ является триангулированной при некоторых условиях: фактически, будет показано, что $\mathcal{C}_T$ эквивалентна (как абстрактная категория) некоторой триангулированной категории.

Следующее утверждение показывает, что конструкция Эйленберга–Мура дает конечный объект среди всех сопряженных пар, определяющих одну и ту же комонаду.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6 (теорема сравнения; см. [1; 3.2.3], [4; 6.3]). Пусть комонада $T = (T, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{C}$ определена парой сопряженных функторов $P^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, $P_*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Тогда существует единственный (с точностью до изоморфизма) функтор (называемый функтором сравнения) $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_T$, для которого диаграмма категорий

является коммутативной, т.е. коммутируют внешний и внутренний треугольники:

$$\Phi P_* \cong Q_*, \quad Q^* \Phi \cong P^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_T$ как функтор, сопоставляющий объекту $H \in \text{Ob } \mathcal{B}$ пару (P^*H, h) , в которой $h: P^*H \rightarrow P_*P^*H$ есть P^* от канонического морфизма $\eta: H \rightarrow P_*P^*H$, и сопоставляющий морфизму f морфизм P^*f . Несложная проверка показывает, что Φ – требуемый функтор и что любой функтор, делающий диаграмму коммутативной, изоморфен Φ .

Для нас будут важны критерии того, что функтор сравнения является строго полным или является эквивалентностью. Перед формулировкой этих критериев мы напомним понятия уравнивателя и расщепленного уравнивателя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Уравниателем (equalizer) пары морфизмов $d_1: F_1 \rightarrow F_2$, $d_2: F_1 \rightarrow F_2$ называется морфизм $d: F \rightarrow F_1$ такой, что:

- 1) $d_1d = d_2d$;
- 2) для любого морфизма $d': F' \rightarrow F_1$, для которого $d_1d' = d_2d'$, существует единственный морфизм $f: F' \rightarrow F$ такой, что $df = d'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. *Расщепленным уравниателем* (contractible equalizer) пары морфизмов $d_1, d_2: F_1 \rightarrow F_2$ называется морфизм $d: F \rightarrow F_1$, снабженный морфизмами s и t :

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{d} & F_1 & \xrightleftharpoons[d_2]{d_1} & F_2 \\ & \searrow s & \swarrow t & & \\ & & & & \end{array}$$

так что выполнены равенства

$$d_1 d = d_2 d, \quad s d = \text{Id}, \quad t d_1 = \text{Id}, \quad t d_2 = d s.$$

Отметим, что любой расщепленный уравниатель является уравниателем и любой уравниатель является мономорфизмом. Также отметим, что расщепленные уравниатели сохраняются любыми функторами.

Морфизм $f: H' \rightarrow H$ в категории $\mathcal{B}$ называется *расщепимым вложением* или, коротко, *отщепляется*, если для него найдется обратный слева морфизм $f': f' f = \text{Id}_{H'}$. Если категория $\mathcal{B}$ аддитивна, то говорят также, что f есть *вложение прямого слагаемого*.

Напомним, что функтор Φ называется *консервативным*, если для любого морфизма f такого, что $\Phi(f)$ – изоморфизм, f также является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 3.9 (Бек; см. [1; 3.14], [4; 6.7]). 1) *Функтор Φ строго полон тогда и только тогда, когда для любого $H \in \text{Ob } \mathcal{B}$ естественный морфизм $\eta H: H \rightarrow P_* P^* H$ является уравниателем (некоторой пары).*

2) *Функтор Φ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда P^* консервативен и для любой пары $d_1, d_2: H_1 \rightarrow H_2$ морфизмов в $\mathcal{B}$, для которой у пары $P^* d_1, P^* d_2: P^* H_1 \rightarrow P^* H_2$ существует расщепленный уравниатель $f: F \rightarrow P^* H_1$, найдется уравниатель $d: H \rightarrow H_1$ у пары (d_1, d_2) , для которого $P^* d \cong f$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.10. 1) *Если категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ абелевы, то функтор сравнения Φ строго полон тогда и только тогда, когда морфизм $\eta H: H \rightarrow P_* P^* H$ инъективен для всех объектов H в $\mathcal{B}$. Пусть, кроме того, функтор P^* точен. Тогда строгая полнота функтора Φ равносильна тому, что Φ – эквивалентность, и равносильна тому, что $P^* H \neq 0$ для всех $H \neq 0 \in \mathcal{B}$.*

2) *Если категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ триангулированные, то функтор сравнения Φ строго полон тогда и только тогда, когда морфизм $\eta H: H \rightarrow P_* P^* H$ – расщепимое вложение для всех объектов H в $\mathcal{B}$.*

Отметим, что сопряженные функторы между аддитивными категориями автоматически являются аддитивными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3.10. Заметим, что в аддитивной категории уравниатель пары морфизмов (f_1, f_2) – это то же самое, что ядро их разности $f_1 - f_2$. Поэтому в аддитивной категории “являться уравниателем” все равно, что “являться ядром”.

1) В абелевой категории “быть ядром” значит “быть инъективным”. Докажем вторую часть утверждения. Если морфизм $H \rightarrow P_*P^*H$ инъективен, то, очевидно, что если $H \neq 0$, то $P^*H \neq 0$. Обратно, если $P^*H \neq 0$ для всех ненулевых H и $\ker(H \rightarrow P_*P^*H) \neq 0$, то $\ker(P^*H \rightarrow P^*P_*P^*H) \neq 0$. Но морфизм $P^*H \rightarrow P^*P_*P^*H$ является расщепимым вложением. Таким образом, мы приходим к противоречию. Для того чтобы показать, что Φ – эквивалентность при указанных условиях, проверим условия из теоремы 3.9. Действительно, в абелевой категории уравниатели всегда существуют и они сохраняются точными функторами. Консервативность функтора P^* следует из его точности и того, что $P^*H \neq 0$ при $H \neq 0$.

2) В триангулированных категориях ядра – это в точности расщепимые вложения, отсюда и следует нужное утверждение.

Напомним, что категория $\mathcal{B}$ называется *карубиево замкнутой*, если любой проектор в $\mathcal{B}$ расщепляется, т.е. для любого объекта H в $\mathcal{B}$ и морфизма $f: H \rightarrow H$ такого, что $f^2 = f$, существуют объект H' , называемый *образом* f , и морфизмы $\sigma: H' \rightarrow H$ и $\rho: H \rightarrow H'$, для которых $\rho\sigma = \text{Id}_{H'}$, $\sigma\rho = f$.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть (P^*, P_*) – пара сопряженных функторов между категориями $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Предположим, что $\mathcal{B}$ карубиево замкнута. Если естественный морфизм функторов $\eta: \text{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow P_*P^*$ расщепляется, то функтор сравнения является эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть морфизм функторов $\eta: \text{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow P_*P^*$ расщепляется. Тогда для любого объекта H в $\mathcal{B}$ определен проектор $\pi: P_*P^*H \rightarrow P_*P^*H$, образ которого есть H , и этот проектор естественно зависит от H (т.е. π является морфизмом функторов $P_*P^* \rightarrow P_*P^*$). Проверим два условия из теоремы Бека. Во-первых, P^* консервативен: если для некоторого морфизма f в $\mathcal{B}$ морфизм P^*f – изоморфизм, то P_*P^*f – также изоморфизм, а значит, и f – изоморфизм. Во-вторых, предположим, что P^* от некоторой пары морфизмов (f_1, f_2) в $\mathcal{B}$ имеет расщепленный уравниатель. Тогда P_*P^* от этой пары также имеет расщепленный уравниатель. Переходя к образам проекторов π при помощи следующей леммы, мы получаем, что (f_1, f_2) также имеет расщепленный уравниатель и он сохраняется функтором P^* согласно замечанию, сделанному после определения 3.8.

ЛЕММА 3.12. Пусть $f_1, f_2: H_1 \rightarrow H_2$ – два морфизма в карубиево замкнутой категории $\mathcal{B}$, согласованные с проекторами $\pi_1: H_1 \rightarrow H_1, \pi_2: H_2 \rightarrow H_2$. Тогда существование расщепленного уравниателя для пары (f_1, f_2) влечет существование расщепленного уравниателя для пары соответствующих морфизмов на образах проекторов π_1 и π_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению существуют объекты H'_1 и H'_2 в $\mathcal{B}$ (образы π_1 и π_2) и морфизмы $\sigma_i: H'_i \rightarrow H_i, \rho_i: H_i \rightarrow H'_i$ (вложения образов и проекции на них), для которых $\rho_i\sigma_i = \text{Id}_{H'_i}, \sigma_i\rho_i = \pi_i, i = 1, 2$. Морфизмы f_1, f_2

индуцируют морфизмы $f'_1 = \rho_2 f_1 \sigma_1$ и $f'_2 = \rho_2 f_2 \sigma_1$ из H'_1 в H'_2 . Пусть

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{f} & H_1 & \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} & H_2 \\ & \searrow s & \swarrow t & & \end{array}$$

– диаграмма, связанная с расщепленным уравнителем для (f_1, f_2) . Рассмотрим морфизм $\pi_1 f: H \rightarrow H_1$. Мы видим, что $f_1(\pi_1 f) = \pi_2 f_1 f = \pi_2 f_2 f = f_2(\pi_1 f)$. Значит по определению уравнителя найдется морфизм $\pi: H \rightarrow H$ такой, что $f\pi = \pi_1 f$. Этот морфизм π является проектором. Действительно, $f\pi^2 = \pi_1 f\pi = \pi_1^2 f = \pi_1 f = f\pi$, и так как f – мономорфизм, то $\pi^2 = \pi$. По предположению существуют объект H' (образ π) и морфизмы $\sigma: H' \rightarrow H$, $\rho: H \rightarrow H'$ такие, что $\rho\sigma = \text{Id}_{H'}$, $\sigma\rho = \pi$. Определим $f': H' \rightarrow H'_1$ как $\rho_1 f\sigma$.

Пусть $s: H_1 \rightarrow H$ и $t: H_2 \rightarrow H_1$ – морфизмы из определения расщепленного уравнителя. Положим $s' = \rho\sigma_1$ и $t' = \rho_1 t\sigma_2$. Несложные вычисления показывают, что f' , s' и t' удовлетворяют определению расщепленного уравнителя для пары (f'_1, f'_2) .

Приведем пример достаточных условий, при которых комодули над комонадой на триангулированной категории образуют триангулированную категорию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Пусть (P^*, P_*) – пара сопряженных точных функторов между триангулированными категориями $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Пусть T – комонада на $\mathcal{C}$, связанная с этой парой. Предположим, что категория $\mathcal{B}$ карубиево замкнута и что естественный морфизм функторов $\eta: \text{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow P_* P^*$ расщепляется. Тогда категория $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ – триангулированная в смысле определения 3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3.11 функтор сравнения $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ является эквивалентностью. По теореме сравнения $P^* \cong Q^* \Phi$, где $Q^*: \mathcal{C}_{\mathsf{T}} \rightarrow \mathcal{C}$ – функтор забывания. Нам необходимо проверить, что треугольник $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1]$ выделенный в $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда P^* от этого треугольника – выделенный треугольник в $\mathcal{C}$. Утверждение про “только тогда” выполнено в силу того, что функтор P^* – точный. Чтобы проверить утверждение про “тогда”, предположим, что $P^*(F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1])$ – выделенный треугольник. Тогда $P_* P^*(F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1])$ – также выделенный треугольник и $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow F'[1]$ – тоже, как прямое слагаемое выделенного треугольника (см. [5; предложение 1.2.3]).

§ 4. Два способа задания данных спуска

Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – аугментированная косимплициальная категория, удовлетворяющая условию 1 из § 2. Для нее определены две категории данных спуска. Первая категория – это категория $\text{Kern}(\text{Sk}_{\geq 0}(\mathcal{C}_\bullet))$, введенная в § 2. Ее определение не использует аугментации и не требует наличия сопряженных функторов к $P_\bullet^*$. Вторая категория, напротив, определяется, только исходя из категорий $\mathcal{C}_{-1}$ и $\mathcal{C}_0$ и функторов между ними. Это – категория комодулей над комонадой T

на $\mathcal{C}_0$, связанной с сопряженной парой (P^*, P_*) . Мы напоминаем определение (см. определение 3.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (комонадная категория спуска). Объекты $\mathcal{C}_{\bullet T}$ – это пары (F, h) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}_0$, а $h: F \rightarrow P^* P_* F$ – морфизм, для которого композиция $F \xrightarrow{h} P^* P_* F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ тождественна, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & P^* P_* F \\ \downarrow h & & \downarrow P^* P_* h \\ P^* P_* F & \xrightarrow{P^* \eta P_* F} & P^* P_* P^* P_* F \end{array}$$

коммутативна. Морфизмы из (F_1, h_1) в (F_2, h_2) в категории $\mathcal{C}_{\bullet T}$ – это морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$ в $\mathcal{C}_0$ такие, что $h_2 \circ f = P^* P_* f \circ h_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда категории $\mathcal{C}_{\bullet T}$ и $\text{Kern}(\text{Sk}_{\geq 0}(\mathcal{C}_{\bullet}))$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объекты категории $\text{Kern}(\text{Sk}_{\geq 0}(\mathcal{C}_{\bullet}))$ – это пары (F, θ) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}_0$, а $\theta: P_1^* F \rightarrow P_2^* F$ – морфизм (удовлетворяющий некоторым условиям). Объекты $\mathcal{C}_{\bullet T}$ – это также пары (F, h) , где $F \in \text{Ob } \mathcal{C}_0$ и $h: F \rightarrow P^* P_* F$ – морфизм (удовлетворяющий некоторым другим условиям). В силу сопряженности для $F \in \mathcal{C}_0$ имеем

$$\text{Hom}(P_1^* F, P_2^* F) = \text{Hom}(F, P_{1*} P_2^* F) = \text{Hom}(F, P^* P_* F).$$

Очевидно, отображение $F_1 \rightarrow F_2$ согласовано с $\theta: P_1^* F_i \rightarrow P_2^* F_i$ тогда и только тогда, когда оно согласовано с $h: F_i \rightarrow P^* P_* F_i$. Все, что нужно сделать, – это проверить, что условия на h из определения комодуля над комонадой

(C1) композиция $F \xrightarrow{h} P^* P_* F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ тождественна,

(C2) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & P^* P_* F \\ \downarrow h & & \downarrow P^* P_* h \\ P^* P_* F & \xrightarrow{P^* \eta P_* F} & P^* P_* P^* P_* F \end{array}$$

коммутативна,

равносильны следующим условиям:

(C1') θ является изоморфизмом,

(C2') (условие коцикла на θ) морфизмы $P_{13}^* \theta$ и $P_{23}^* \theta \circ P_{12}^* \theta$ из $P_{13}^* P_1^* F$ в $P_{23}^* P_2^* F$ равны.

Покажем сначала, что (C2) эквивалентно (C2'). Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P_{13}^* P_1^* F, P_{23}^* P_2^* F) &= \text{Hom}(F, P_{1*} P_{13*} P_{23}^* P_2^* F) = \text{Hom}(F, P_{1*} P_{12*} P_{23}^* P_2^* F) \\ &= \text{Hom}(F, P_{1*} P_2^* P_{1*} P_2^* F) = \text{Hom}(F, P^* P_* P^* P_* F). \end{aligned}$$

При этом отождествлении морфизм

$$P_{13}^* \theta \in \text{Hom}(P_{12}^* P_1^* F, P_{23}^* P_2^* F)$$

соответствует морфизму

$$P^*\eta P_*F \circ h \in \text{Hom}(F, P^*P_*P^*P_*F)$$

и морфизм

$$P_{23}^*\theta \circ P_{12}^*\theta \in \text{Hom}(P_{12}^*P_1^*F, P_{23}^*P_2^*F)$$

соответствует морфизму

$$P^*P_*h \circ h \in \text{Hom}(F, P^*P_*P^*P_*F).$$

Теперь проверим, что из $(C1') + (C2')$ следует $(C1)$. Во-первых, заметим, что композиция $f: F \xrightarrow{h} P^*P_*F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ равна обратному образу $D^*\theta: F = D^*P_1^*F \rightarrow D^*P_2^*F = F$. Так как θ – изоморфизм, то f также является изоморфизмом. Далее, из условия коцикла для θ следует, что $f^2 = f$. Следовательно, $f = \text{Id}$. Остается показать, что из $(C1) + (C2)$ следует $(C1')$. Напомним, что морфизм θ , отвечающий данному h по сопряженности, есть следующая композиция:

$$\theta: P_1^*F \xrightarrow{P_1^*h} P_1^*P^*P_*F \xrightarrow{\sim} P_2^*P^*P_*F \xrightarrow{P_2^*\varepsilon} P_2^*F.$$

Несложно проверить, что отображение

$$\theta': P_2^*F \xrightarrow{P_2^*h} P_2^*P^*P_*F \xrightarrow{\sim} P_1^*P^*P_*F \xrightarrow{P_1^*\varepsilon} P_1^*F$$

обратно к θ . Следовательно, θ – изоморфизм.

Предложение 4.2 показывает, что категория $\mathcal{C}_{\bullet, \mathsf{T}}$ не зависит от аугментации, а зависит только от косимплициальной части $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_f^*]$. В действительности, сама комонада T тоже не зависит от аугментации.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Со всякой косимплициальной категорией $\mathcal{C}_{\bullet} = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P_{\bullet}^*]$, для которой выполнены условия 1 и 2, связана комонада T на категории $\mathcal{C}_0$. Она совпадает с комонадой из определения 4.1 для любого дополнения $\mathcal{C}_{\bullet}$ до аугментированной косимплициальной категории, удовлетворяющей условиям 1 и 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mathcal{C}}_{\bullet}$ – аугментированная косимплициальная категория, для которой выполнены условия 1 и 2 и которая совпадает с $\mathcal{C}_{\bullet}$ при отбрасывании аугментации. (Например, в качестве $\tilde{\mathcal{C}}_{\bullet}$ можно взять категорию, построенную в предложении 2.9.) Определим комонаду, применив определение 4.1 к $\tilde{\mathcal{C}}_{\bullet}$. Мы видим, что функтор $T = P^*P_* = P_{2*}P_1^*$ не зависит от аугментации. Несложно проверить, что естественные преобразования функторов $T = P^*P_* \rightarrow \text{Id}$, $T = P^*P_* \rightarrow P^*P_*P^*P_* = TT$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_{2*}P_1^* &\xrightarrow{\eta} P_{2*}D_*D^*P_1^* \xrightarrow{\sim} \text{Id} \circ \text{Id} = \text{Id}, \\ P_{2*}P_1^* &\xrightarrow{\eta} P_{2*}P_{13*}P_{13}^*P_1^* \xrightarrow{\sim} P_{2*}P_{23*}P_{12}^*P_1^* \xrightarrow{\sim} P_{2*}P_1^*P_{2*}P_1^* \end{aligned}$$

соответственно, и также от нее не зависят.

§ 5. Ограничение на подкатегории

В этом параграфе изложены факты, относящиеся к подкатегориям в категориях спуска.

Предположим, что имеется косимплициальная подкатегория

$$\mathcal{C}'_{\bullet} = [\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1, \dots, P^*_{\bullet}] \quad \text{в} \quad [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, P^*_{\bullet}].$$

Это означает, что задана подкатегория $\mathcal{C}'_i$ в каждой категории $\mathcal{C}_i$ и они согласованы с функторами $P^*_{\bullet}$, т.е. $P^*_f \mathcal{C}'_m \subset \mathcal{C}'_n$ (и не обязательно согласованы с сопряженными функторами $P_{\bullet*}$, если те существуют). В этом случае можно рассмотреть классическую категорию спуска $\text{Kern}(\mathcal{C}'_{\bullet})$. Это – подкатегория в $\text{Kern}(\mathcal{C}_{\bullet})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим, что категория $\text{Kern}(\mathcal{C}'_{\bullet})$ в действительности не зависит от $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \dots$. Она однозначно определена, как только задана подкатегория $\mathcal{C}'_0 \subset \mathcal{C}_0$: можно взять $\mathcal{C}'_k = \mathcal{C}_k$ при $k > 0$.

Предположим, что T – комонада на категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегория. Определим категорию $\mathcal{C}'_T$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Объекты $\mathcal{C}'_T$ – это пары (F, h) из $\text{Ob } \mathcal{C}_T$ такие, что $F \in \text{Ob } \mathcal{C}'$. Морфизмы в $\mathcal{C}'_T$ – это морфизмы в $\mathcal{C}_T$, которые при этом лежат в $\mathcal{C}'$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'_T}((F_1, h_1), (F_2, h_2)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}((F_1, h_1), (F_2, h_2)) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F_1, F_2).$$

Очевидно, что $\mathcal{C}'_T$ – подкатегория в $\mathcal{C}_T$ и эта подкатегория полна, если $\mathcal{C}'$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}$.

Необходимость данного определения вызвана таким обстоятельством: во многих важных примерах функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ достаточно “большой” и не сохраняет “маленькие” подкатегории в $\mathcal{C}$. Поэтому определение 3.3 не позволяет рассмотреть категорию “маленьких” объектов с данными спуска. Типичный пример здесь – следующая ситуация: $p: X \rightarrow S$ – не собственный морфизм схем, $\mathcal{C} = \text{qcoh}(X)$, $\mathcal{C}' = \text{coh}(X)$ и $T = p^*p_*$.

Имеет место следующее предложение – естественный аналог предложения 3.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $T = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$.

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ аддитивны и T – аддитивный функтор, то категория $\mathcal{C}'_T$ также аддитивна.

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ абелевы и T – точный слева аддитивный функтор, то категория $\mathcal{C}'_T$ также абелева.

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ триангулированные, функтор T точен и $\mathcal{C}_T$ – триангулированная категория в смысле определения 3.5, то $\mathcal{C}'_T \subset \mathcal{C}_T$ – триангулированная подкатегория.

Пусть $\mathcal{C}_{\bullet}$ – аугментированная косимплициальная категория, для которой выполнены условия 1 и 2 из § 2, а $\mathcal{C}'_{\bullet} \subset \mathcal{C}_{\bullet}$ – косимплициальная подкатегория (возможно, без аугментации). В этой ситуации определены две категории

спуска, связанные с подкатегорией $\mathcal{C}'_\bullet$, – это категория $\text{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$ и категория $\mathcal{C}'_{\bullet, \top} = \mathcal{C}'_{0, \top}$, определенная выше. Справедливо несложное следствие предложения 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *В сделанных предположениях категории $\text{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$ и $\mathcal{C}'_{\bullet, \top}$ эквивалентны.*

Пусть (P^*, P_*) – пара сопряженных функторов на категориях $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, а $\top$ – определенная ими комонада на $\mathcal{C}$. Если P^* переводит некоторую подкатегорию $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ в $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, можно рассмотреть ограничение функтора сравнения

$$\Phi|_{\mathcal{B}'}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{C}'_{\top}.$$

В частности, в качестве $\mathcal{B}'$ можно взять прообраз $(P^*)^{-1}(\mathcal{C}')$: это подкатегория в $\mathcal{B}$, объекты/морфизмы которой суть в точности те объекты/морфизмы в $\mathcal{B}$, которые переводятся функтором P^* в объекты/морфизмы, лежащие в $\mathcal{C}'$.

ЛЕММА 5.5. *Если функтор сравнения $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_{\top}$ является эквивалентностью и $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегория, то ограничение Φ на $\mathcal{B}' = (P^*)^{-1}(\mathcal{C}')$ является эквивалентностью $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{C}'_{\top}$.*

Доказательство леммы очевидно.

§ 6. Когерентные пучки на схемах и стеках и их производные категории

Стандартные предположения, в которых работают с когерентными и квазикогерентными пучками на схемах, – это предположения о квазикомпактности и квазиотделимости схемы. Напомним (см. [6; 1.1, 1.2]), схема квазикомпактна, если ее можно покрыть конечным числом открытых аффинных подсхем; схема квазиотделима, если пересечение любых двух ее аффинных подмножеств покрывается конечным числом аффинных подмножеств. Например, квазикомпактной и квазиотделимой будет любая нётерова схема, в частности, любая квазипроективная схема. Все появляющиеся в дальнейшем схемы будут считаться квазикомпактными и квазиотделимыми.

В этом параграфе мы приведем обзор сведений о когерентных и квазикогерентных пучках на стеках и производных категориях пучков на стеках. Читатель, интересующийся более полным изложением этого материала, найдет его в статьях Ломона и Море-Байи [7], Ласло и Олссона [8] и Аринкина и Безрукавникова [9]. Все рассматриваемые стеки считаются алгебраическими стеками конечного типа над полем. В частности, всякий стек X нётеров, квазикомпактен и квазиотделим и может быть покрыт схемой конечного типа над полем. Говоря о пучках на X , мы имеем в виду пучки $\mathcal{O}_X$ -модулей в гладкой топологии (см. [7; 6.1]).

Итак, мы принимаем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ($\dagger$). Всякий рассматриваемый стек считается алгебраическим стеком конечного типа над произвольным полем k либо же квазикомпактной квазиотделимой схемой.

Пусть X – стек. В категории $\mathcal{O}_X\text{--Mod}$ пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей на X достаточно много инъективных объектов. Через $\mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$ обозначается неограниченная производная категория от абелевой категории $\mathcal{O}_X\text{--Mod}$, она содержит все прямые суммы. Через $\mathrm{qcoh}(X)$ и $\mathrm{coh}(X)$ обозначают категории квазикогерентных и когерентных пучков на X . Пусть $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ – полная подкатегория в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$, образованная комплексами с квазикогерентными пучками когомологий, она также замкнута относительно прямых сумм. Пусть $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X) \subset \mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ – полная подкатегория, состоящая из комплексов, пучки когомологий которых когерентны и почти все равны нулю. Аналогично определяются и другие версии производной категории. Согласно [9; утверждение 2.5] можно рассматривать гладко-эталную топологию на X вместо гладкой, а в случае схемы – топологию Зариского, это не изменит (квази)когерентные категории $\mathrm{qcoh}(X)$, $\mathrm{coh}(X)$, $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ и т.д.

Предположим, что стеки X и Y удовлетворяют предположению (†), а $f: X \rightarrow Y$ – морфизм. Тогда определен морфизм окольцованных гладких сайтов $(X_{\mathrm{lis}}, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y_{\mathrm{lis}}, \mathcal{O}_Y)$. Корректно определены функторы

$$f^*: \mathcal{O}_Y\text{--Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{--Mod}, \quad f_*: \mathcal{O}_X\text{--Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{--Mod},$$

f^* сопряжен слева к f_* . Функтор f^* переводит квазикогерентные пучки в квазикогерентные (см. [7; 6.8]) и когерентные пучки – в когерентные. Далее, если f квазикompактен и квазиотделим, то f_* от квазикогерентного пучка также будет квазикогерентным пучком, но для когерентных пучков это, вообще говоря, неверно.

Следуя Спалтенштейну [10], можно определить производные функторы прямого и обратного образа на неограниченных производных категориях. Согласно [8; предложение 2.1.4] любой комплекс F в $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ обладает K -инъективной резольвентой. Применяя к ней функтор f_* почленно, получаем объект категории $\mathcal{D}(\mathcal{O}_Y\text{--Mod})$. Тем самым определен функтор $Rf_*: \mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}_Y\text{--Mod})$. Если морфизм f квазикompактен и квазиотделим и $F \in \mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}^+(X)$, то из [7; 6.8] следует, что $Rf_*F \in \mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}^+(Y)$. Если, кроме того, морфизм f представим, то функтор Rf_* имеет конечную когомологическую размерность. Значит, из [8; лемма 2.1.10] вытекает, что функтор Rf_* переводит $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ в $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(Y)$.

Производный функтор обратного образа

$$Lf^*: \mathcal{D}(\mathcal{O}_Y\text{--Mod}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$$

на неограниченных производных категориях определяется при помощи K -плоских резольвент. Он переводит $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(Y)$ в $\mathcal{D}_{\mathrm{qcoh}}(X)$ и $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^-(Y)$ в $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^-(X)$ (см. [7; 6.8, 8.7]). Производные функторы прямого и обратного образов на неограниченных производных категориях на стеках удовлетворяют всем ожидаемым свойствам: они сопряжены друг другу, $R(fg)_* \cong Rf_*Rg_*$ и аналогичное верно для обратного образа, имеют место формулы проекции и плоской замены базы. Для представимых морфизмов эти функторы коммутируют с произвольными прямыми суммами.

Если стек X квазикомпактен и полуотделим (т.е. морфизм диагонали $X \rightarrow X \times X$ аффинный), то категория $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}^+(X)$ эквивалентна $\mathcal{D}^+(\text{qcoh}(X))$ – ограниченной слева производной категории от абелевой категории $\text{qcoh}(X)$ и аналогично $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$ эквивалентна $\mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$ (см. [9; утверждение 2.7, следствие 2.11]). Если при этом X – схема, то имеется эквивалентность и для неограниченной производной категории: $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X) \cong \mathcal{D}(\text{qcoh}(X))$ (см. [11; следствие 5.5]). В дальнейшем мы будем работать, в основном, с “большой” категорией $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X)$ и в нётеровом случае с “маленькой” категорией $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$. Обозначим

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X).$$

Совершенным комплексом на стеке или схеме X называется комплекс, локально квазиизоморфный ограниченному комплексу из векторных расслоений, т.е. такой $F \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$, что для некоторого покрытия $f: U \rightarrow X$ схемой обратный образ f^*F квазиизоморфен ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного ранга. Полная подкатегория в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$, образованная совершенными комплексами, обозначается через $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$. Очевидно, $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \subset \mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X)$; для нётерова стека $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \subset \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$. Отметим, что функтор обратного образа $Lf^*: \mathcal{D}(\mathcal{O}_Y\text{--Mod}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}_X\text{--Mod})$ переводит совершенные комплексы в совершенные комплексы.

Если X – схема, то согласно [12; теорема 3.1.1] категория совершенных комплексов на X – это в точности категория компактных объектов в $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X)$. Она порождает категорию $\mathcal{D}_{\text{qcoh}}(X)$. А для гладкой схемы над полем категория совершенных комплексов совпадает с ограниченной производной категорией когерентных пучков.

Напомним, морфизм стеков называется *строго плоским*, если он плоский и сюръективный. Можно дать определение, эквивалентное данному: плоский морфизм $f: X \rightarrow S$ строго плоский, если и только если $H = 0$ для любого пучка H на S такого, что $f^*H = 0$. Также верно то, что f – строго плоский морфизм тогда и только тогда, когда f плоский и функтор обратного образа f^* консервативен.

§ 7. Производная теория спуска для стеков

В этом параграфе мы применим результаты теории комонад к изучению когомологического спуска для производных категорий пучков на схемах и стеках. Мы работаем в категории стеков для того, чтобы одновременно покрыть случаи спуска для схем и для эквивариантных производных категорий.

Напомним сделанное предположение (†): все стеки считаются алгебраическими стеками конечного типа над полем либо квазикомпактными квазиотделимыми схемами. Всякий раз, когда речь заходит о когерентных пучках, дополнительно предполагается, что стек нётеров.

Пусть X и S – стеки, $p: X \rightarrow S$ – плоский представимый морфизм. Рассмотрим аугментированный симплициальный стек

$$(X \rightarrow S)_\bullet = [S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \dots, p_\bullet].$$

Расслоенные произведения $X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \dots$ удовлетворяют предположению (†). Абелевы категории квазикогерентных пучков на $S, X, X \times_S X, \dots$ и функторы обратного образа между ними образуют аугментированную косимплициальную категорию

$$[\mathrm{qcoh}(S), \mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X \times_S X), \dots, p_\bullet^*]. \quad (7.1)$$

Эта категория удовлетворяет условиям 1 и 2 из § 2: для функторов $p_\bullet^*$ существуют сопряженные справа функторы $p_{\bullet*}$ и имеет место плоская замена базы. Рассмотрим также аугментированную косимплициальную подкатегорию в (7.1), образованную категориями когерентных пучков:

$$[\mathrm{coh}(S), \mathrm{coh}(X), \mathrm{coh}(X \times_S X), \mathrm{coh}(X \times_S X \times_S X), \dots, p_\bullet^*]. \quad (7.2)$$

Отметим, что эта категория не удовлетворяет условию 1 из § 2, потому что функторы прямого образа не сохраняют когерентные пучки. Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathrm{qcoh}(X)/p &= \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X), \dots]), \\ \mathrm{coh}(X)/p &= \mathrm{Kern}([\mathrm{coh}(X), \mathrm{coh}(X \times_S X), \dots]) \end{aligned}$$

категории спуска, связанные с (7.1), (7.2) соответственно (см. определение 2.3).

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть стеки X и S удовлетворяют предположению (†), а $p: X \rightarrow S$ – плоский представимый морфизм. Тогда категория $\mathrm{qcoh}(X)/p$ эквивалентна категории $\mathrm{qcoh}(S)$ квазикогерентных пучков на S тогда и только тогда, когда морфизм p строго плоский. Для нётеровых стеков S и X эти условия равносильны наличию эквивалентности между категориями $\mathrm{coh}(X)/p$ и $\mathrm{coh}(S)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. В случае схем этот результат хорошо известен (см., например, [13; предложение 2.22]). Мы приводим доказательство лишь для того, чтобы показать, каким образом он вытекает из следствия 3.10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathrm{qcoh}(X)_{T_p}$ категорию спуска, связанную с комонадой $T_p = (p^*p_*, \varepsilon, \delta)$ на $\mathrm{qcoh}(X)$ (см. определение 4.1). Категория (7.1) удовлетворяет условиям 1 и 2 из § 2. Следовательно, в силу предложения 4.2 категории $\mathrm{qcoh}(X)/p$ и $\mathrm{qcoh}(X)_{T_p}$ эквивалентны. Применим следствие 3.10, 1). Функтор p^* точен. Следовательно, функтор сравнения $\Phi: \mathrm{qcoh}(S) \rightarrow \mathrm{qcoh}(X)_{T_p}$ является эквивалентностью, если и только если $H = 0$ для любого $H \in \mathrm{qcoh}(S)$ такого, что $p^*H = 0$. Последнее условие равносильно строгой плоскости p .

Теперь в предположениях нётеровости S и X покажем, что функтор сравнения является эквивалентностью для категорий coh тогда и только тогда, когда он является эквивалентностью для категорий qcoh . Обозначим через $\mathrm{coh}(X)_{T_p}$ подкатегорию в $\mathrm{qcoh}(X)_{T_p}$, отвечающую подкатегории $\mathrm{coh}(X) \subset \mathrm{qcoh}(X)$ (см. определение 5.2). Согласно следствию 5.4 категории $\mathrm{coh}(X)/p$ и $\mathrm{coh}(X)_{T_p}$ эквивалентны.

Предположим, что функтор $\Phi: \text{qcoh}(S) \rightarrow \text{qcoh}(X)_{T_p}$ – эквивалентность. Проверим, что ограничение Φ будет эквивалентностью между строго полными подкатегориями $\text{coh}(S) \subset \text{qcoh}(S)$ и $\text{coh}(X)_{T_p} \subset \text{qcoh}(X)_{T_p}$. Лемма 5.5 утверждает, что ограничение Φ дает эквивалентность между $(p^*)^{-1}(\text{coh}(X))$ и $\text{coh}(X)_{T_p}$. Следовательно, нужно проверить, что для $H \in \text{qcoh}(S)$ пучок p^*H когерентен тогда и только тогда, когда H когерентен. Это – лемма 7.5.

Докажем обратное утверждение. Допустим, что функтор сравнения

$$\Phi|_{\text{coh}(S)}: \text{coh}(S) \rightarrow \text{coh}(X)_{T_p}$$

– эквивалентность. Покажем, что функтор $\Phi: \text{qcoh}(S) \rightarrow \text{qcoh}(X)_{T_p}$ – также эквивалентность. Заметим, что для любого пучка $H \in \text{coh}(S)$ морфизм $H \xrightarrow{\eta_H} p_*p^*H$ инъективен. Действительно, рассмотрим его ядро $K = \ker(H \rightarrow p_*p^*H)$. Морфизм $p^*\eta_H: p^*H \rightarrow p^*p_*p^*H$ – расщепимое вложение, обратным является канонический морфизм сопряжения $\varepsilon p^*H: p^*p_*p^*H \rightarrow p^*H$. Имеем $p^*K = 0$. Значит, $\Phi(K) = 0$. Но пучок K когерентен на S . Следовательно, $K = 0$. Согласно формуле проекции $p_*p^*H \cong H \otimes p_*\mathcal{O}_X$. Мы видим, что морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow p_*\mathcal{O}_X$ остается инъективным после тензорного домножения на любой когерентный пучок $H \in \text{coh}(S)$. Это значит, что $\text{Tor}_1(p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S, H) = 0$ для всех $H \in \text{coh}(S)$. Отсюда следует, что $p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S$ – плоский $\mathcal{O}_S$ -модуль, и поэтому морфизм $H \rightarrow p_*p^*H$ инъективен и для всех $H \in \text{qcoh}(S)$. Теперь применим следствие 3.10, 1) и получим, что Φ – эквивалентность $\text{qcoh}(S) \rightarrow \text{qcoh}(X)_{T_p}$.

Более интересен аналог теоремы 7.1 для производных категорий.

Рассмотрим аугментированную косимплициальную категорию

$$[\mathcal{D}(S), \mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \dots, Lp_\bullet^*], \quad (7.3)$$

образованную неограниченными производными категориями квазикогерентных пучков на стеках $S, X, X \times_S X, \dots$. Обозначим через

$$\mathcal{D}(X)/p = \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \dots, Lp_\bullet^*])$$

классическую категорию спуска (см. определение 2.3). Косимплициальная категория (7.3) удовлетворяет условиям 1 и 2 из § 2: функторы $Lp_\bullet^*$ имеют правые сопряженные функторы $Rp_{\bullet*}$, выполнена формула замены базы. Рассмотрим также классические категории спуска $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)/p$ и $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)/p$ (см. определение 2.3 и замечание 5.1), связанные с (7.3) и подкатегориями $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$ и $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)$ в $\mathcal{D}(X)$.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть стеки X и S удовлетворяют предположению (†), а $p: X \rightarrow S$ – плоский представимый морфизм. Тогда функтор сравнения $\mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)/p$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда естественный морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ в категории $\mathcal{D}(S)$ есть вложение прямого слагаемого. При выполнении этого условия функторы сравнения $\mathcal{D}^{\text{perf}}(S) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)/p$ и (в случае, если S и X нётеровы) $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)/p$ являются эквивалентностями.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Отметим, что расщепление морфизма $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ не является необходимым для эквивалентности категорий $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)/p$ (см. пример 8.9 ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ категорию комодулей над комонадой $T_p = (p^*Rp_*, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{D}(X)$ (см. определение 4.1). Согласно предложению 4.2 категории спуска $\mathcal{D}(X)/p$ и $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ эквивалентны. Воспользуемся результатами теории комонад.

Если функтор сравнения $\Phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p}$ – эквивалентность, то он строго полон и в силу следствия 3.10, 2) отображение $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*p^*\mathcal{O}_S = Rp_*\mathcal{O}_X$ является расщепимым вложением. Обратное утверждение вытекает из следствия 3.11. Действительно, категория $\mathcal{D}(S)$ карубиево замкнута. Согласно формуле проекции для $H \in \mathcal{D}(S)$ естественный морфизм $H \rightarrow Rp_*p^*H = H \otimes^L Rp_*\mathcal{O}_X$ имеет вид

$$H \otimes^L (\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X).$$

Поэтому морфизм функторов $\text{Id} \rightarrow Rp_*p^*$ расщепляется при условии, что морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ расщепляется.

Предположим теперь, что

$$\Phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p}$$

является эквивалентностью. Обозначим через $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)_{T_p}$ и $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_p}$ комонадные категории спуска, связанные с подкатегориями $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X) \subset \mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X) \subset \mathcal{D}(X)$. Как и раньше, из следствия 5.4 получаем, что

$$\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)/p \cong \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)_{T_p}, \quad \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)/p \cong \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)_{T_p}.$$

Нам нужно показать, что ограничение Φ дает эквивалентность между строго полными подкатегориями $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(S) \subset \mathcal{D}(S)$ и $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)_{T_p} \subset \mathcal{D}(X)_{T_p}$. Согласно лемме 5.5 ограничение Φ дает эквивалентность между $(p^*)^{-1}(\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X))$ и $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)_{T_p}$. Следовательно, нужно проверить, что для $H \in \mathcal{D}(S)$ комплекс p^*H лежит в $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$, если и только если H лежит в $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(S)$. Это следует из леммы 7.5 и точности функтора p^* .

При аналогичных рассуждениях для категорий совершенных комплексов нам потребуется соотношение $(p^*)^{-1}(\mathcal{D}^{\text{perf}}(X)) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(S)$. Очевидно, что обратный образ совершенного комплекса – совершенный комплекс. Проверим, что и обратное верно. При этом достаточно рассмотреть случай схем.

Выберем покрытие $f: U \rightarrow S$ стека S схемой. Морфизм p представим. Следовательно, отображение $f': U' = U \times_S X \rightarrow X$ также является покрытием схемой. По определению объект $H \in \mathcal{D}(S)$ – совершенный комплекс на S тогда и только тогда, когда f^*H – совершенный комплекс на U , аналогичное верно и для $f': U' \rightarrow X$. Совершенные комплексы на схеме U – это в точности компактные объекты в категории $\mathcal{D}(U)$ (см. [12; 3.1.1]), то же верно для U' . Итак, нам нужно проверить, что для морфизма схем $p': U' \rightarrow U$ объект $H \in \mathcal{D}(U)$ компактен при условии, что объект p'^*H компактен в $\mathcal{D}(U')$.

Допустим, что $H \in \mathcal{D}(U)$ и p'^*H компактен в $\mathcal{D}(U')$. Пусть (F_α) – произвольное семейство объектов $\mathcal{D}(U)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus \mathrm{Hom}(H, F_\alpha) & \longrightarrow & \bigoplus \mathrm{Hom}(H, Rp'_*p'^*F_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}\left(H, \bigoplus F_\alpha\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(H, Rp'_*p'^*\left(\bigoplus F_\alpha\right)\right) \end{array} \quad (7.4)$$

Заметим, что пучок $\mathcal{O}_U$ – прямое слагаемое в $Rp'_*\mathcal{O}_{U'}$ (см. предложение 8.3). Значит, функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(U)}$ – прямое слагаемое в $Rp'_*p'^*$. Следовательно, левый столбец в (7.4) – прямое слагаемое правого столбца. Покажем, что морфизм в правом столбце – изоморфизм. Имеем

$$\begin{aligned} \bigoplus \mathrm{Hom}(H, Rp'_*p'^*F_\alpha) &= \bigoplus \mathrm{Hom}(p'^*H, p'^*F_\alpha) = \mathrm{Hom}\left(p'^*H, \bigoplus p'^*F_\alpha\right) \\ &= \mathrm{Hom}\left(p'^*H, p'^*\left(\bigoplus F_\alpha\right)\right) = \mathrm{Hom}\left(H, Rp'_*p'^*\left(\bigoplus F_\alpha\right)\right). \end{aligned}$$

Следовательно, левый столбец (7.4) также является изоморфизмом и H является компактным объектом в $\mathcal{D}(U)$.

ЛЕММА 7.5. Пусть X, S и p такие, как в теореме 7.3. Предположим, что функтор $\Phi: \mathrm{qcoh}(S) \rightarrow \mathrm{qcoh}(X)_{T_p}$ – эквивалентность. Если H – квазикогерентный пучок на S и пучок p^*H когерентен, то и H также когерентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [7; предложение 15.4] пучок H есть объединение своих когерентных подпучков. Допустим, что H не когерентен. Тогда можно выбрать строго возрастающую последовательность $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3 \rightarrow \dots$ когерентных подпучков в H . Так как Φ – эквивалентность, то последовательность p^*H_i подпучков в p^*H также строго монотонна. Но стек X нётеров, а пучок p^*H когерентен. Получаем противоречие.

§ 8. Морфизмы, обладающие свойством SCDT

Пусть $p: X \rightarrow S$ – плоский морфизм. Как показывает теорема 7.3, расщепимость морфизма $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ является критерием того, что производная категория S восстанавливается по производной категории X . В связи с этим указанное свойство представляет определенный интерес.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Будем говорить, что для морфизма схем или стеков $p: X \rightarrow S$ выполнено свойство SCDT, если p – плоский и естественное отображение $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ является вложением прямого слагаемого в производной категории пучков $\mathcal{O}_S$ -модулей (SCDT обозначает “strictly cohomological descent type”).

В этом параграфе приведены некоторые факты о морфизмах, обладающих свойством SCDT, а также достаточные условия для его выполнения. Напомним, что функтор Ψ называется *строгим*, если для любой пары объектов A, B

индуцированное функтором отображение

$$\mathrm{Hom}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Psi(A), \Psi(B))$$

инъективно.

ЛЕММА 8.2. Пусть стеки X и S удовлетворяют предположению $(\dagger)$, а $p: X \rightarrow S$ – плоский морфизм. Для p выполнено свойство $SCDT$ тогда и только тогда, когда функтор $p^*: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ строгий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что p обладает свойством $SCDT$. Согласно формуле проекции функтор $\mathrm{Id}: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ является прямым слагаемым функтора Rp_*p^* . Следовательно, Rp_*p^* не обнуляет морфизмы, а значит, и p^* тоже не обнуляет морфизмы.

Допустим, что p^* строг. Рассмотрим выделенный треугольник

$$\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X \rightarrow K \xrightarrow{f} \mathcal{O}_S[1].$$

Проверим, что $f = 0$. Применяя p^* к этому треугольнику, получаем $p^*\mathcal{O}_S \rightarrow p^*Rp_*p^*\mathcal{O}_S \rightarrow p^*K \xrightarrow{p^*f} p^*\mathcal{O}_S[1]$. Из свойств сопряженности p^* и Rp_* следует, что последний треугольник расщепим. Значит, $p^*f = 0$. Так как p^* строг, то $f = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть стеки S, S', X, Y удовлетворяют предположению $(\dagger)$.

- 1) Если морфизмы $q: Y \rightarrow X$ и $p: X \rightarrow S$ обладают свойством $SCDT$, то им обладает и $p \circ q$. Если p плоский и $p \circ q$ обладает свойством $SCDT$, то и p им обладает. Если q обладает свойством $SCDT$ и $p \circ q$ плоский, то и p плоский.
- 2) Свойство $SCDT$ сохраняется при замене базы: если морфизм $p: X \rightarrow S$ удовлетворяет свойству $SCDT$, а $s: S' \rightarrow S$ – замена базы, то и морфизм $p': X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ удовлетворяет свойству $SCDT$.
- 3) Если, кроме того, морфизм замены базы обладает свойством $SCDT$, то p и p' одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют свойству $SCDT$.
- 4) Пусть $k \subset K$ – расширение полей. Тогда морфизм $p: X \rightarrow S$ стеков над k обладает свойством $SCDT$, если и только если им обладает морфизм $p': X \times_k K \rightarrow S \times_k K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение в 1) элементарно. Докажем второе утверждение в 1). Известно, что композиция естественных морфизмов

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\eta_p} Rp_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{Rp_*\eta_q} Rp_*Rq_*\mathcal{O}_Y$$

расщепима. Пусть $\sigma: Rp_*Rq_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_S$ – расщепляющий морфизм. Тогда расщеплением η_p служит $\sigma \circ Rq_*\eta_q$. Докажем третье утверждение в 1), проверим точность функтора $p^*: \mathrm{qcoh}(S) \rightarrow \mathrm{qcoh}(X)$. Пусть $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3$ – точная

последовательность квазикогерентных пучков на S , а F – когомология последовательности $p^*H_1 \rightarrow p^*H_2 \rightarrow p^*H_3$ в среднем члене. Так как функторы q^* и $(p \circ q)^*$ точны, то $q^*F = 0$. Так как q обладает свойством SCDT, то и $F = 0$.

Утверждение 2) следует из формулы плоской замены базы (см. [14; 2.4]): $Rp'_*\mathcal{O}_{X'} = s^*Rp_*\mathcal{O}_X$. Утверждение 3) следует из 1) и 2), а 4) следует из 3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. *Конечный плоский морфизм $p: X \rightarrow S$ квазикомпактных квазиотделимых схем над полем характеристики нуль обладает свойством SCDT.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как морфизм p – аффинный, то $Rp_*\mathcal{O}_X = p_*\mathcal{O}_X$ (нет высших прямых образов). Обозначим через C фактор $p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S$. Нам нужно проверить тривиальность расширения $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow p_*\mathcal{O}_X \rightarrow C \rightarrow 0$. Домножая тензорно это расширение на $p_*\mathcal{O}_X$, мы получаем тривиальное расширение, так как морфизм $p_*\mathcal{O}_X \rightarrow p_*\mathcal{O}_X \otimes p_*\mathcal{O}_X$ – расщепимое вложение (расщепление определяется умножением). Морфизм p – плоский конечный. Значит, пучок $E = p_*\mathcal{O}_X$ является векторным расслоением на S . Тензорное умножение на E индуцирует отображение

$$\sigma: \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{O}_S) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(C \otimes E, \mathcal{O}_S \otimes E) = \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{E}\operatorname{nd}(E)).$$

Покажем, что σ – мономорфизм. Действительно, левое обратное к σ отображение задается взятием следа $\mathcal{E}\operatorname{nd}(E) \rightarrow \mathcal{O}_S$:

$$\operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{E}\operatorname{nd}(E)) \xrightarrow{\frac{1}{r(E)} \operatorname{Tr}} \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{O}_S).$$

Говорят, что морфизм $p: X \rightarrow S$ имеет квазисечение, если найдется подсхема $Y \subset X$ такая, что ограничение $p|_Y$ является конечным морфизмом $Y \rightarrow S$. Если подсхему Y можно выбрать плоской над S , то говорят, что p имеет плоское квазисечение.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. *Допустим, что плоский морфизм $p: X \rightarrow S$ квазикомпактных квазиотделимых схем имеет плоское квазисечение. Тогда для p выполнено свойство SCDT.*

Доказательство следует из предложения 8.4 и предложения 8.3, 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. *Пусть $p: X \rightarrow S$ – гладкий проективный морфизм гладких схем над полем характеристики нуль. Тогда p обладает свойством SCDT.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результату Делиня [15; теорема 6.1] комплекс $Rp_*\mathcal{O}_X$ есть прямая сумма своих когомологий. Следовательно, $p_*\mathcal{O}_X$ (прямой образ в категории пучков) отщепляется прямым слагаемым от $Rp_*\mathcal{O}_X$. При этом $p_*\mathcal{O}_X$ является векторным расслоением согласно [15; теорема 5.5]. Рассуждение из доказательства предложения 8.4 показывает, что $\mathcal{O}_S$ отщепляется прямым слагаемым от $p_*\mathcal{O}_X$, а значит, и от $Rp_*\mathcal{O}_X$.

Теперь приведем пример плоского аффинного (и даже локально тривиального) морфизма гладких многообразий над полем, который не обладает свойством SCDT, и производная категория спуска не эквивалентна категории базы.

ПРИМЕР 8.7. Пусть V – векторное пространство над полем k . Пусть X – группа $GL(V)$, $P \subset X$ – параболическая подгруппа. Рассмотрим $S = X/P$ – однородное пространство. Это гладкое проективное многообразие. Обозначим через d его размерность, а через p – факторизацию $X \rightarrow S$. Выберем линейные расслоения $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_S$ и $\mathcal{L}_2 = \omega_S$ так, чтобы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(S)}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2[d]) = \mathrm{Ext}^d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \neq 0.$$

Применяя функтор сравнения, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p}(\Phi(\mathcal{L}_1), \Phi(\mathcal{L}_2[d])) &\subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)}(p^*\mathcal{L}_1, p^*\mathcal{L}_2[d]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[d]) = 0, \end{aligned}$$

так как X аффинно и $\mathrm{Pic} X = 0$. Видно, что функтор сравнения $\Phi: \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p$ не является строго полным.

Следующий пример показывает, что объекты производной категории нельзя определять локально в топологии Зариского.

ПРИМЕР 8.8. Пусть S – схема, $S = \bigcup U_i$ – покрытие S аффинными схемами, $X = \bigsqcup U_i$, $p: X \rightarrow S$ – естественное отображение, а

$$\Phi: \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p$$

– функтор сравнения. Тогда для любого когерентного пучка F на S и $k > 0$ получим

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X)/p}(\Phi(\mathcal{O}_S), \Phi(F[k])) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X)}(\mathcal{O}_X, p^*F[k]) = H^k(X, \oplus F|_{U_i}) = 0.$$

С другой стороны, если схема S не является аффинной, то для некоторого когерентного пучка F и $k > 0$ выполнено

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(S)}(\mathcal{O}_S, F[k]) = H^k(S, F) \neq 0.$$

В этом случае функтор Φ не будет эквивалентностью и морфизм p не будет обладать свойством SCDT.

Сейчас мы покажем, что функтор сравнения может быть эквивалентностью для ограниченной производной категории для морфизма $p: X \rightarrow S$, не обладающего свойством SCDT.

ПРИМЕР 8.9. Пусть $S = \mathbb{A}^1$ – аффинная прямая над алгебраически замкнутым полем k , а $P_1, P_2 \in \mathbb{A}^1$ – две различные точки. Пусть $X = (\mathbb{A}^1 \setminus P_1) \sqcup (\mathbb{A}^1 \setminus P_2)$ – несвязное объединение двух проколотых прямых, а $p: X \rightarrow S$ – естественное отображение. Мы утверждаем, что функтор сравнения

$$\Phi: \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p$$

является эквивалентностью, в то время как морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*\mathcal{O}_X$ не расщепим и функтор сравнения

$$\mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)/p$$

– не эквивалентность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Когомологическая размерность категории $\mathrm{coh}(\mathbb{A}^1)$ равна единице, поэтому всякий объект $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathbb{A}^1)$ квазиизоморфен прямой сумме своих пучков когомологий. Далее, всякий когерентный пучок на $\mathbb{A}^1$ есть прямая сумма неразложимых пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ или $\mathcal{O}_{rP}$, $P \in \mathbb{A}^1$, где $\mathcal{O}_{rP}$ обозначает структурный пучок r -кратной точки P . Введем следующие обозначения:

$$U_1 = \mathbb{A}^1 \setminus P_1, \quad U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus P_2, \quad U_{12} = U_1 \cap U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{P_1, P_2\}.$$

Чтобы убедиться в строгой полноте Φ , проверим, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathbb{A}^1)}(H_1, H_2[k]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p}(\Phi(H_1), \Phi(H_2[k])) \quad (8.1)$$

для неразложимых пучков H_1 и H_2 и всех k . При $H_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ и $k = 0$ это выполнено в силу того, что функтор сравнения является строго полным для абелевых категорий (см. теорему 7.1). Для $H_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ и $k \neq 0$ левая и правая части (8.1) равны нулю. Пусть $H_1 = \mathcal{O}_{rP}$ и $P \neq P_1, P_2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathbb{A}^1)}(\mathcal{O}_{rP}, H_2[k]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(U_{12})}(\mathcal{O}_{rP}, H_2[k]|_{U_{12}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X')/p'}(\Phi'(\mathcal{O}_{rP}), \Phi'(H_2[k]|_{U_{12}})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p}(\Phi(\mathcal{O}_{rP}), \Phi(H_2[k])), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $X' = U_{12} \sqcup U_{12}$, морфизм $p': X' \rightarrow U_{12}$ – естественное отображение и $\Phi': \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(U_{12}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X')/p'$ – функтор сравнения. Среднее равенство в (8.2) выполнено в силу того, что p' обладает свойством SCDT. Наконец, если $H_1 = \mathcal{O}_{rP}$ и $P = P_1$ или $P = P_2$, то (8.1) справедливо по тривиальным причинам.

Докажем теперь, что Φ существенно сюръективен. В самом деле, объект категории

$$\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)/p = \mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(U_1 \sqcup U_2)/p$$

– это объект производной категории $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$ вместе с данными склейки. Любой объект F в $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$ имеет вид $F = F_1 \oplus F_2$, где слагаемые

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_1}[k_i] \right) \oplus \left(\bigoplus_{i: Q_i \neq P_1} \mathcal{O}_{r_i Q_i}[l_i] \right), \\ F_2 &= \left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_2}[k'_i] \right) \oplus \left(\bigoplus_{i: Q'_i \neq P_2} \mathcal{O}_{r'_i Q'_i}[l'_i] \right) \end{aligned}$$

– сдвиги пучков с носителями на $U_1 \subset X$ и $U_2 \subset X$ соответственно, а все суммы конечны. Данные склейки – это изоморфизм

$$\theta: F_1|_{U_{12}} \xrightarrow{\sim} F_2|_{U_{12}}.$$

Из существования такого изоморфизма следует, что суммы

$$\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_{12}}[k_i] \right) \oplus \left(\bigoplus_{i: Q_i \neq P_1, P_2} \mathcal{O}_{r_i Q_i}[l_i] \right),$$

$$\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_{12}}[k'_i] \right) \oplus \left(\bigoplus_{i: Q'_i \neq P_1, P_2} \mathcal{O}_{r'_i Q'_i}[l'_i] \right)$$

совпадают, т.е. F_1 и F_2 совпадают вне точек P_1 и P_2 и, следовательно, найдется объект $H \in \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{A}^1)$, для которого $\Phi(H) = (F, \theta)$.

С другой стороны, легко видеть, что естественный морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_* \mathcal{O}_X$ не расщепим. Действительно,

$$\text{Hom}(Rp_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) = \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) = \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \setminus P_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \setminus P_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}) = 0.$$

§ 9. Производная теория спуска для эквивариантных пучков

В этом параграфе X обозначает схему конечного типа над k (где k – произвольное поле), а под алгебраической группой G мы понимаем групповую схему конечного типа над k .

Пусть алгебраическая группа G действует на схеме X . Обозначим через $a: G \times X \rightarrow X$ морфизм действия, а через $\mu: G \times G \rightarrow G$ – структурный морфизм группы. Также через p_i и p_{jk} будем обозначать проекции $G \times X$ и $G \times G \times X$ на соответствующие сомножители.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Напомним, что G -эквивариантным пучком на X называется пучок F на X вместе с изоморфизмом $\theta: p_2^* F \rightarrow a^* F$ пучков на $G \times X$, для которого на $G \times G \times X$ выполнено следующее условие:

$$(1 \times a)^* \theta \circ p_{23}^* \theta = (\mu \times 1)^* \theta.$$

Морфизмы эквивариантных пучков из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$, согласованные с θ , т.е. такие, что $\theta_2 \circ p_2^* f = a^* f \circ \theta_1$.

В важном частном случае конечных групп определение принимает следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. G -эквивариантным пучком на X называется пучок F на X вместе с фиксированными изоморфизмами $\theta_g: F \rightarrow g^* F$ для каждого $g \in G$ такими, что $\theta_{gh} = h^*(\theta_g) \circ \theta_h$ для всякой пары $g, h \in G$. Морфизмом G -эквивариантных пучков из $(F_1, \theta_{1,g})$ в $(F_2, \theta_{2,g})$ называется морфизм пучков $f: F_1 \rightarrow F_2$ такой, что для всякого $g \in G$ выполнено $\theta_{2,g} \circ f = g^* f \circ \theta_{1,g}$.

Абелеву категорию G -эквивариантных квазикогерентных (соответственно когерентных) пучков на X обозначим через $\text{qcoh}^G(X)$ (соответственно через $\text{coh}^G(X)$). Рассмотрим неограниченную производную категорию всех

G -эквивариантных $\mathcal{O}_X$ -модулей. Ее полную подкатегорию, состоящую из комплексов с G -эквивариантными квазикогерентными пучками когомологий, обозначим через $\mathcal{D}^G(X)$. Полную подкатегорию в $\mathcal{D}^G(X)$, образованную комплексами, пучки когомологий которых когерентны и почти все равны нулю, обозначим через $\mathcal{D}_{\text{coh}}^{b,G}(X)$. Далее, G -эквивариантным совершенным комплексом на X называется объект категории $\mathcal{D}^G(X)$, который становится совершенным комплексом на X при забывании эквивариантной структуры. Категорию совершенных G -эквивариантных комплексов на X обозначим через $\mathcal{D}^{\text{perf},G}(X)$.

Можно смотреть на определение эквивариантного пучка несколько иначе. Рассмотрим симплициальную схему

$$(X/G)_{\bullet} = [X_0, X_1, X_2, \dots, p_{\bullet}] = [X, G \times X, G \times G \times X, \dots, p_{\bullet}], \quad (9.1)$$

где морфизмы $p_{\bullet}$ определены следующим образом. Для монотонного отображения $f: [1, \dots, m] \rightarrow [1, \dots, n]$ морфизм схем

$$p_f: \underbrace{G \times \dots \times G \times X}_{n \text{ раз}} \rightarrow \underbrace{G \times \dots \times G \times X}_{m \text{ раз}}$$

задан по правилу

$$(g_n, \dots, g_2, x_1) \mapsto (g_{f(m)} \cdots g_{f(m-1)+1}, \dots, g_{f(2)} \cdots g_{f(1)+1}, g_{f(1)} \cdots g_2 x_1).$$

Для маленьких значений $n = m \pm 1$ и строго монотонных f морфизмы $p_{\bullet}$ имеют вид

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{1 \times a} & & & \\ & \xleftarrow{p_1 \times e \times p_2} & & \xrightarrow{a} & \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times 1} & G \times X & \xleftarrow{e \times 1} & X \\ & \xleftarrow{e \times 1} & & \xrightarrow{p_2} & \\ & \xrightarrow{p_{23}} & & & \end{array}$$

Рассмотрим категорию спуска

$$\text{Kern}([\text{qcoh}(X), \text{qcoh}(G \times X), \text{qcoh}(G \times G \times X), \dots, p_{\bullet}^*]), \quad (9.2)$$

связанную с косимплициальной категорией, образованной категориями пучков на схемах $X_i = G^i \times X$ и функторами обратного образа между ними. Сравнивая определения 2.3 и 9.1, видим, что категория (9.2) эквивалентна категории G -эквивариантных квазикогерентных пучков на X (см. также [16; 6.1.2b]).

В § 7 со всяким морфизмом стеков $p: X \rightarrow S$ был связан аугментированный симплициальный стек, образованный расслоенными произведениями

$$(X \rightarrow S)_{\bullet} = [S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \dots, p_{\bullet}].$$

Оказывается, что косимплициальная схема (9.1) имеет такой же вид, если в качестве p взять накрытие схемой X факторстека $X//G$ – фактора схемы X по действию группы G . Определения и простейшие свойства стека $X//G$ можно найти в [7; 1.3.2 и 4.14.1.1]. В предположениях этого параграфа он будет алгебраическим стеком конечного типа над k . Морфизм p строго плоский, согласно

теореме 7.1 квазикогерентные пучки на стеке $X//G$ можно определять локально с помощью покрытия p (см. также [7; 6.23]). Получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{qcoh}(X//G) &= \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_{X//G} X), \\ &\quad \mathrm{qcoh}(X \times_{X//G} X \times_{X//G} X), \dots, p_{\bullet}^*]) \\ &= \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(G \times X), \\ &\quad \mathrm{qcoh}(G \times G \times X), \dots, p_{\bullet}^*]) = \mathrm{qcoh}^G(X). \end{aligned}$$

Иными словами, пучки на $X//G$ – это G -эквивариантные пучки на X . Это позволяет использовать язык стеков для изучения эквивариантных пучков. Отметим, что категории $\mathcal{D}^G(X)$, $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^{b,G}(X)$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ совпадают с соответствующими производными категориями пучков на стеке $X//G$. Отметим также, что в случае, когда схема X (и, следовательно, стек $X//G$; см. [9; лемма 2.1]) полуотделима, категория $\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^{b,G}(X)$ эквивалентна ограниченной производной категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ эквивариантных когерентных пучков на X .

Нас интересует вопрос о том, когда объекты производной категории эквивариантных пучков можно определять посредством действия группы на объекты обычной производной категории пучков. Другими словами, когда категория $\mathcal{D}^G(X)$ эквивалентна категории спуска Kern , связанной с косимплициальной категорией

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \dots, Lp_{\bullet}^*]. \quad (9.3)$$

Как было отмечено, категория (9.3) имеет вид

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \dots, Lp_{\bullet}^*]$$

для морфизма стеков $X \rightarrow S = X//G$, что позволяет использовать результаты § 7. Ниже мы даем ответ на этот вопрос.

Нам понадобится рассматривать бесконечномерные представления алгебраических групп. Напомним соответствующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Пусть G – алгебраическая группа над полем k . *Рациональное линейное представление* G над k может быть определено любым из следующих способов (см. [17; гл. 1, § 1]):

- 1) как индуктивный предел конечномерных линейных представлений G над k ;
- 2) как объект категории спуска (см. определения 2.3 и 4.1) для морфизма стеков $p: \mathrm{Spec} k \rightarrow (\mathrm{Spec} k)//G$;
- 3) как G -эквивариантный пучок на $\mathrm{Spec} k$;
- 4) как комодуль над коалгеброй $k[G]$ (этот способ годится только для аффинных групповых схем).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Алгебраическая группа G над k называется *линейно редуктивной* (см. [17; определение 1.4]), если категория конечномерных представлений (или, что равносильно, всех рациональных представлений) G над k полупроста.

Обозначим категорию всех рациональных (соответственно конечномерных) линейных представлений G через $\text{Rep}(G)$ (соответственно через $\text{rep}(G)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. Пусть G – групповая схема конечного типа над k . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) группа G линейно редуктивна;
- 2) естественный гомоморфизм $k \rightarrow k[G]$ есть вложение прямого слагаемого в категории $\text{Rep}(G)$;
- 3) функтор сравнения Φ между производными категориями $\mathcal{D}^b(\text{rep}(G))$ и $\mathcal{D}^b(k\text{-mod})/p$ является эквивалентностью.

Если групповая схема G , кроме того, аффинная и гладкая над k , то условия 1)–3) эквивалентны следующему условию:

- 4) при $\text{char } k = l > 0$ связная компонента единицы $G_0 \subset G$ является диагонализированным тором $(\mathbb{G}_m)^r$ и порядок конечной группы G/G_0 взаимно прост с l ; при $\text{char } k = 0$ групповая схема G редуктивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из 1) следует 2) по определению.

Докажем, что из 1) следует 3). Это вытекает из теоремы 7.3, примененной к морфизму стеков $p: X \rightarrow S$, где $X = \text{Spec } k$, $S = (\text{Spec } k) // G$, p – канонический морфизм. Действительно, пучок $p_* \mathcal{O}_X = H^0(Rp_* \mathcal{O}_X)$ отщепляется прямым слагаемым от комплекса $Rp_* \mathcal{O}_X$ в силу полупростоты категории $\text{qcoh}(S)$. А гомоморфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$ – это естественный гомоморфизм представлений $k \rightarrow k[G]$, который расщепим согласно условию 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Пусть $f: U \rightarrow V$ – вложение представлений группы G . Покажем, что f имеет левое обратное. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \eta_U \downarrow & & \downarrow \eta_V \\ p_* p^* U & \xrightarrow{p_* p^* f} & p_* p^* V \end{array}$$

квазикогерентных пучков на S (т.е. представлений G). По формуле проекции морфизм η_U имеет вид $U \otimes (\mathcal{O}_S \rightarrow p_* \mathcal{O}_X)$ и по предположению расщепляется. Морфизм $p^* f$ – это вложение векторных пространств, он расщепим. Значит, и морфизм $p_* p^* f$ расщепим. Следовательно, композиция $\eta_V \circ f$ расщепима. Поэтому f также расщепим.

Докажем, что из 3) следует 1). По существу, нужно проверить, что

$$\text{Ext}_{\text{rep}(G)}^1(V, V') = 0$$

для любых $V, V' \in \text{rep}(G)$. По предположению о функторе сравнения имеем

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\text{rep}(G)}^1(V, V') &= \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\text{rep}(G))}(V, V'[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\text{-mod})/p}(\Phi(V), \Phi(V'[1])) \subset \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\text{-mod})}(V, V'[1]) = 0. \end{aligned}$$

Равносильность условий 1) и 4) – результат М. Нагаты (см. [18]).

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(X)^G &= \text{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \dots, Lp_\bullet^*]), \\ \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^G &= \text{Kern}([\mathcal{D}^{\text{perf}}(X), \mathcal{D}^{\text{perf}}(G \times X), \dots, Lp_\bullet^*]), \\ \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)^G &= \text{Kern}([\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X), \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(G \times X), \dots, Lp_\bullet^*]).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть G – групповая схема конечного типа над полем k , действующая на схеме X конечного типа над k . Предположим, что G линейно редуктивна. Тогда имеют место эквивалентности

$$\mathcal{D}^G(X) \cong \mathcal{D}(X)^G, \quad \mathcal{D}^{\text{perf},G}(X) \cong \mathcal{D}^{\text{perf}}(X)^G, \quad \mathcal{D}_{\text{coh}}^{b,G}(X) \cong \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)^G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения следуют из теоремы 7.3, примененной к морфизму стеков $X \xrightarrow{p} X//G$. Чтобы проверить, что морфизм p обладает свойством SCDT, рассмотрим расслоенный квадрат стеков:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & pt \\ \downarrow p & & \downarrow t \\ X//G & \longrightarrow & pt//G \end{array}$$

Морфизм $\mathcal{O}_{pt//G} \rightarrow Rt_*t^*\mathcal{O}_{pt//G}$ есть канонический гомоморфизм представлений $k \rightarrow k[G]$ группы G . Он расщепим, так как G линейно редуктивна. Значит, t обладает свойством SCDT. Согласно предложению 8.3, 2) морфизм p тоже им обладает.

СЛЕДСТВИЕ 9.7. Эквивалентности категорий из предыдущей теоремы имеют место, если G – редуктивная группа над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль или если G – конечная группа и характеристика поля k не делит порядок G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При указанных условиях группа G линейно редуктивна (см. предложение 9.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.8. Если группа G конечна, то по определению объекты категории спуска $\mathcal{D}(X)^G$ – это объекты $F \in \mathcal{D}(X)$, оснащенные изоморфизмами $\theta_g: F \xrightarrow{\sim} g^*F$ для каждого $g \in G$ такими, что $g^*\theta_h \circ \theta_g = \theta_{hg}$. Иначе говоря, объект $\mathcal{D}(X)^G$ – это объект $\mathcal{D}(X)$ вместе с действием группы G на нем.

Для группы G , не являющейся линейно редуктивной, утверждение теоремы 9.6 может не быть верным.

ПРИМЕР 9.9. Пусть V – векторное пространство, $X = GL(V)$, а $G = P$ – параболическая подгруппа в $GL(V)$, действующая на X сдвигами. Действие G на X свободно, и мы имеем эквивалентность

$$\mathcal{D}_{\text{coh}}^{b,G}(X) \cong \mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X)) \cong \mathcal{D}^b(\text{coh}(S)) \cong \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(S)$$

с производной категорией фактора – однородного пространства $S = GL(V)/P$. Таким образом, мы находимся в ситуации примера 8.7 и функтор сравнения не является эквивалентностью.

Список литературы

- [1] M. Barr, Ch. Wells, “Toposes, triples and theories”, *Repr. Theory Appl. Categ.*, **12** (2005), 1–288.
- [2] M. Kashiwara, P. Shapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren Math. Wiss., **332**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] J. Lipman, “Notes on derived functors and Grothendieck duality”, *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, Lecture Notes in Math., **1960**, Springer-Verlag, New York, 2009, 1–259.
- [4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004; пер. с англ.: S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] A. Neeman, *Triangulated categories*, Ann. of Math. Stud., **148**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.
- [6] A. Grothendieck, “Éléments de géometrie algébrique. IV: Étude locale des schemas et des morphismes de schemas”, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **20**:1 (1964), 5–251.
- [7] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **39**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] Y. Laszlo, M. Olsson, “The six operations for sheaves on Artin stacks. I. Finite coefficients”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **107**:1 (2008), 109–168.
- [9] D. Arinkin, R. Bezrukavnikov, “Perverse coherent sheaves”, *Mosc. Math. J.*, **10**:1 (2010), 3–29.
- [10] N. Spaltenstein, “Resolutions of unbounded complexes”, *Compositio Math.*, **65**:2 (1988), 121–154.
- [11] M. Bökstedt, A. Neeman, “Homotopy limits in triangulated categories”, *Compositio Math.*, **86**:2 (1993), 209–234.
- [12] A. I. Bondal, M. Van den Bergh, “Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry”, *Mosc. Math. J.*, **3**:1 (2003), 1–36.
- [13] Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [14] A. Kuznetsov, *Base change for semiorthogonal decompositions*, arXiv: abs/0711.1734.
- [15] P. Deligne, “Théoreme de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **35**:1 (1968), 107–126.
- [16] P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
- [17] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, **34**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [18] M. Nagata, “Complete reducibility of rational representations of a matrix group”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1961), 87–99.

А. Д. Елагин (A. D. Elagin)

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва;

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,

Высшая школа экономики, г. Москва

E-mail: alexelagin@rambler.ru

Поступила в редакцию

27.04.2010 и 06.10.2010