Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Горшков, Стабилизация полулинейного параболического уравнения, заданного во внешности ограниченной области, посредством управления с границы, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 10, 49–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:42:14

УДК 517.956.4

А. В. Горшков

**Стабилизация полулинейного параболического
уравнения, заданного во внешности ограниченной
области, посредством управления с границы**

В работе исследуется задача стабилизации полулинейного уравнения, заданного во внешности ограниченной области. Невозможность экспоненциальной стабилизации вида $e^{-\sigma t}$ решения параболического уравнения, заданного в неограниченной области, ни при каком управлении на границе приводит к постановке задачи степенной стабилизации за счет управления на границе. Для заданного начального условия и параметра скорости стабилизации $k > 0$ доказана возможность выбора такого граничного управления, что решение стремится к нулю со степенной скоростью $1/t^k$.

Библиография: 27 названий.

Введение

В настоящей работе изучается задача стабилизации параболического уравнения во внешности ограниченной области. А именно пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей класса C^∞ . В области $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus B$ рассматривается полулинейное параболическое уравнение

$$\partial_t y(t, x) - \Delta y(t, x) - |y|^{\gamma-1} y = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

с начальным и граничным условиями

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad (2)$$

$$y|_{x \in \partial\Omega} = u(t, x). \quad (3)$$

Здесь $u(t, x)$ является управлением.

Для заданного $k > 0$ ищется такое управление $u(t, x)$, чтобы решение $y(t, x)$ полученной краевой задачи (1)–(3) удовлетворяло следующей оценке:

$$\|y(t, \cdot)\| \leq \frac{C}{t^k}.$$

В последние десятилетия активно исследовались задачи о точной нуль-управляемости и стабилизации в ограниченных областях. Постановка задачи и первые результаты, касающиеся точной управляемости (в частности, точной нуль-управляемости), были получены А. Г. Бутковским [1], Ю. В. Егоровым [2], [3], Л. И. Гальчуком [4].

Задача о точной управляемости заключается в поиске такого управления (управления с границы или управления с распределенными параметрами), что за конечное время T система переходит из начального состояния $y_0(x)$ в заданное финальное состояние $\hat{y}(x)$:

$$y|_{t=T} = \hat{y}(x). \quad (4)$$

Если финальное состояние $\hat{y}(x)$ тождественно равно нулю, то приведенная выше задача называется *задачей о точной нуль-управляемости*.

Исследования задач о точной управляемости для параболических уравнений были продолжены Д. Расселом, Г. Фатторини (см. [5], [6]). Для гиперболических систем результаты о точной управляемости получены в работах И. Лазиешки, Р. Триджиани [7], [8]. Во всех этих работах область, в которой рассматривались дифференциальные уравнения, была ограниченной. Задача о точной управляемости для абстрактных систем, заданных в бесконечномерных банаховых пространствах, изучалась Р. Триджиани [9]. Для более широких классов параболических уравнений и системы Навье–Стокса точная управляемость в ограниченных областях доказана в работах А. В. Фурсикова [10] и А. В. Фурсикова, О. Ю. Эмануилова (см. [11], [12] и приведенный там список литературы).

Исследование задачи о точной управляемости систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, проходило параллельно с исследованием задачи о стабилизации в ограниченных областях. Последняя является родственной к задаче нуль-управляемости в том смысле, что также ищется управляющее воздействие, переводящее начальное состояние системы в нулевое финальное, но только не за конечное время T , а за бесконечное. При этом обычно налагаются некоторые дополнительные условия типа *робастности*. Здесь следует отметить работы Л. Лазиешки [13], А. В. Фурсикова [14], [15]. Приводимый нами обзор не претендует на полноту охвата всех имеющихся на сегодняшний день работ по управляемости и стабилизации.

Более подробное рассмотрение полученных к середине 70-х годов результатов, связанных с этой областью, можно найти в работе Д. Рассела [16] и к концу 90-х — в работе А. В. Фурсикова и О. Ю. Эмануилова [12], а также в приведенном там списке литературы.

Для случая граничного управления интерес представляет не просто возможность стабилизации при $t \rightarrow \infty$, которая, например, для уравнения теплопроводности реализуется уже при граничном управлении равном нулю, а сама скорость этой стабилизации. В ограниченных областях таковой является экспоненциальная скорость вида

$$\|y(t, \cdot)\| \leq e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0,$$

как это показано в работах Л. Лазиешки [13] и А. В. Фурсикова [14], [15].

Однако случай неограниченной области имеет две существенные особенности, сильно отличающие его от случая ограниченной области:

1. *Отсутствие точной нуль-управляемости.* Подтверждением этому служит тот факт, что уже для уравнения теплопроводности, заданного на полупространстве, выполнение условия (4) с нулевым финальным состоянием $\hat{y} \equiv 0$ невозможно ни при каком управлении с границы (см., например, работу Г. Серегина, В. Сверака [17]). Этот факт мотивирует исследование задачи стабилизации вместо задачи

о точной нуль-управляемости с границы, когда рассматриваемая область определения становится неограниченной.

2. *Отсутствие экспоненциальной стабилизации.* В §1 этой работы для уравнения теплопроводности, определенного на полуограниченном стержне, приведен пример начального условия, при котором экспоненциальная скорость стабилизации при $t \rightarrow \infty$ посредством управления с границы невозможна. Максимально возможной здесь является степенная скорость вида $1/t^k$, где $k > 0$. Причем скорость степенной стабилизации существенно зависит от выбираемого граничного управления в том смысле, что не существует единой управляющей функции $u(t)$ такой, что решение стабилизируется к нулю быстрее функции $1/t^k$ с любым $k > 0$.

Последний результат представлен в работе автора [18], в которой исследована задача стабилизации с границы одномерного уравнения теплопроводности, определенного на полуограниченном стержне $\mathbb{R}_+$. Для заданного параметра скорости стабилизации $k > 0$ доказана возможность выбора такого граничного управления, что решение стабилизируется к нулю при $t \rightarrow \infty$ со степенной скоростью $1/t^k$.

В настоящей работе получены результаты степенной стабилизации при $t \rightarrow \infty$ в многомерном случае для нелинейного параболического уравнения, определенного во внешности ограниченной области с управлением на ее границе. Используя методику, разработанную и примененную А. В. Фурсиковым при решении задачи стабилизации решений параболических уравнений и системы Навье–Стокса в ограниченной области (см. [14], [15]), мы сведем решение задачи стабилизации к решению задачи Коши со специальным начальным условием, принадлежащим устойчивому инвариантному многообразию M_- .

Основным преимуществом используемого метода решения задачи стабилизации является тот факт, что получаемое с его помощью управление является *управлением с обратной связью*. Это дает возможность наряду с теоретическими результатами о существовании управления получать численные решения задачи. Подробно вопросы, связанные с управлением с обратной связью, рассмотрены в работах А. В. Фурсикова [15], [19], в которых исследуется задача стабилизации решений системы Навье–Стокса в ограниченных областях.

При решении задачи о стабилизации в настоящей работе использован ряд методов исследования задачи Коши для параболических уравнений и системы Навье–Стокса, которые представлены в следующих работах. В работах К. Уэйна [20] и Дж. Экмманна, К. Уэйна [21] исследована задача Коши для нелинейного параболического уравнения и смежные с ней вопросы устойчивости и асимптотики поведения решения при $t \rightarrow \infty$. С помощью специального пространственно-временного преобразования нелинейное уравнение сводилось к уравнению, линейная часть которого обладала более удобной спектральной структурой. В соболевских пространствах с весом H_m^r , точное определение которых будет дано ниже, посредством такого преобразования отделялась дискретная часть спектра от непрерывной и строились инвариантные многообразия как линейной, так и нелинейной задач. В работе Т. Галлай, К. Уэйна [22] с помощью этого же преобразования исследована асимптотика поведения решения системы Навье–Стокса. Эта конструкция используется нами при решении задачи Коши, поэтому она будет подробно описана в нашей статье.

При исследовании задачи стабилизации мы ограничимся рассмотрением нели-

нейности специального вида $|y|^{\gamma-1}y$ (условия на γ будут приведены ниже). Это обусловлено тем, что упоминаемое выше преобразование сводит нашу автономную систему снова к автономной. Этот факт значительно упростит наше исследование и сделает вывод результата о стабилизации более прозрачным, потому что неавтономность системы необходимо влечет более сложную геометрическую структуру получаемых инвариантных многообразий.

Статья состоит из шести параграфов. В § 1 для уравнения теплопроводности, заданного на полупрямой $\mathbb{R}_+$, приводится пример начального условия, при котором экспоненциальная стабилизация невозможна ни при каком граничном управлении. В последующих параграфах доказывается локальное существование степенной стабилизации для решения полулинейного параболического уравнения, определенного во внешности ограниченной области. А именно в § 2 приводится постановка задачи степенной стабилизации и формулируется основной результат. В § 3 исследуется линеаризованная задача Коши и спектр инфинитезимального оператора разрешающей полугруппы. В § 4 доказывается существование решения нелинейной задачи Коши и соответствующей разрешающей полугруппы. В § 5 на основе спектральной теории, описанной в § 3, строятся многообразия, инвариантные относительно полученной полугруппы, определенные в достаточно малой окрестности нуля. В заключительном § 6 строится продолжение начального условия внутрь ограниченной области, обеспечивающее попадание полученной функции на инвариантное многообразие M_- .

Автор выражает благодарность А. В. Фурсикову за ценные замечания при подготовке статьи.

§ 1. Пример отсутствия экспоненциальной стабилизации

В этом параграфе мы приведем пример одной краевой задачи для уравнения теплопроводности, определенного на полупрямой, для которого экспоненциальная стабилизация невозможна ни при каком граничном управлении.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\partial_t y(t, x) - \partial_{xx}^2 y(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = Q, \quad (5)$$

с начальным условием

$$y|_{t=0} = y_0(x) \quad (6)$$

и граничным условием

$$y|_{x=0} = u(t), \quad (7)$$

где $u(t)$ является управлением.

Определим следующие соболевские пространства, в которых мы будем рассматривать уравнение теплопроводности:

$$\begin{aligned} H^{1,2}(Q) &= \{y(t, x) : \|y\|_{H^{1,2}(Q)}^2 = \|y\|_{L_2(Q)}^2 + \|\partial_t y\|_{L_2(Q)}^2 + \|\partial_x y\|_{L_2(Q)}^2 \\ &\quad + \|\partial_{xx} y\|_{L_2(Q)}^2 < \infty\}, \\ H^1(\mathbb{R}_+) &= \{y_0(x) \in L_2(\mathbb{R}_+) : \|y_0\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2 = \|y_0\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\partial_x y_0\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \infty\} \end{aligned}$$

и $H^{3/4}(\mathbb{R}_+)$ – пространство функций $u(t)$, квадратично суммируемых вместе с дробной производной порядка $3/4$. Выбор $H^{3/4}(\mathbb{R}_+)$ в качестве пространства управлений обусловлен тем фактом, что оно является пространством следов для пространства $H^{1,2}(Q)$ (определения пространств Соболева с дробным показателем и свойства их следов на границе см. в [23], [24]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Мы будем говорить, что уравнение (5), дополненное начальным условием (6) из пространства $H^1(\mathbb{R}_+)$, *не обладает свойством экспоненциальной стабилизируемости в пространстве $H^{1,2}(Q)$* , если ни при каком $\alpha > 0$ не существует ни одной управляющей функции $u(t) \in H^{3/4}(\mathbb{R}_+)$ такой, чтобы решение $y(t, x) \in H^{1,2}(Q)$ краевой задачи (5)–(7) при всех $x \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяло условию стабилизации:

$$\int_0^\infty |e^{\alpha t} y(t, x)|^2 dt < \infty. \quad (8)$$

В этом условии под значением функции $y(t, x)$ при фиксированном x понимается значение ее следа.

Положим начальное условие равным следующей функции:

$$y_0(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Уравнение (5) с начальной функцией (9) не обладает свойством экспоненциальной стабилизируемости в пространстве $H^{1,2}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададимся произвольным $\alpha > 0$. Мы докажем, что ни при каком граничном условии $u(t)$ решение задачи (5)–(7) с начальным условием (9) не удовлетворяет условию стабилизации (8) на множестве $x \in \Xi \subset \mathbb{R}_+$ ненулевой меры.

Предположим противное. Рассмотрим преобразование Лапласа

$$\hat{y}(\tau, x) = \int_0^\infty e^{-\tau t} y(t, x) dt, \quad (10)$$

сводящее задачу (5), (6) к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром τ :

$$\partial_{xx}^2 \hat{y}(\tau, x) - \tau \hat{y}(\tau, x) = -y_0(x). \quad (11)$$

Для функций $y(t, x)$ из пространства $H^{1,2}(Q)$ преобразование Лапласа $\hat{y}(\tau, x)$ при почти всех x является аналитической функцией в комплексной области $D = \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \tau > 0\}$. Более того, в предположении (8) функция $\hat{y}(\tau, x)$ при почти всех x должна быть аналитична в большей области $\bar{D} = \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \tau > -\alpha\}$.

Решение уравнения (11) дается явной формулой:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\tau, x) = & \hat{u}(\tau) e^{-\sqrt{\tau} x} - \frac{e^{-\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz \\ & + \frac{e^{-\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^x e^{\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz + \frac{e^{\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_x^\infty e^{-\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь функция $\hat{u}(\tau)$ – преобразование Лапласа управления $u(t)$. Функция $\sqrt{\tau}$ является ветвящейся с порядком ветвления равным двум. При совершении одного оборота вокруг нуля функция $\sqrt{\tau}$ переходит в функцию $-\sqrt{\tau}$. Поэтому все члены, входящие в правую часть формулы (12), также являются ветвящимися функциями с порядком ветвления равным двум. А в предположении экспоненциальной стабилизации функция $\hat{u}$ должна быть аналитична в области $\tilde{D}$ и, в частности, в окрестности нуля. Для этого необходимо, чтобы формула (12) была инвариантна относительно замены $\sqrt{\tau}$ на $-\sqrt{\tau}$. Иными словами, должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \hat{u}(\tau)e^{-\sqrt{\tau}x} - \frac{e^{-\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz + \frac{e^{-\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^x e^{\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz \\ + \frac{e^{\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_x^\infty e^{-\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz = \hat{u}(\tau)e^{\sqrt{\tau}x} + \frac{e^{\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\infty e^{\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz \\ - \frac{e^{\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^x e^{-\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz - \frac{e^{-\sqrt{\tau}x}}{2\sqrt{\tau}} \int_x^\infty e^{\sqrt{\tau}z} y_0(z) dz. \end{aligned}$$

Отсюда находим функцию $\hat{u}(\tau)$:

$$\hat{u}(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\tau}z} - e^{\sqrt{\tau}z}}{2\sqrt{\tau}} y_0(z) dz.$$

Подставляя полученное выражение для функции $\hat{u}(\tau)$ в формулу (12), получаем следующее представление для $\hat{y}(\tau, x)$:

$$\hat{y}(\tau, x) = \int_x^\infty \frac{e^{\sqrt{\tau}(x-z)} - e^{-\sqrt{\tau}(x-z)}}{2\sqrt{\tau}} y_0(z) dz. \quad (13)$$

Подставляя (9) в (13) и производя элементарные вычисления, получаем следующее представление для функции $\hat{y}(\tau, x)$:

$$\hat{y}(\tau, x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(x-1)^2 + \frac{2}{\tau^2} - \frac{1}{\tau^2}e^{-\sqrt{\tau}(1-x)} - \frac{1}{\tau^2}e^{\sqrt{\tau}(1-x)}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Как нетрудно видеть, функция $\hat{y}(i\xi, x)$, определяемая формулой (14), является экспоненциально растущей при $\xi \rightarrow \infty$, $x \in (0, 1)$. С другой стороны, из самого определения преобразования Лапласа (10) следует, что функция $\hat{y}(i\xi, x)$ является преобразованием Фурье функции $y(t, x)$, принадлежащей пространству $H^{1,2}(Q)$. Поэтому $\hat{y}(i\xi, x)$ должна быть квадратично интегрируема по ξ при почти всех x . Полученное противоречие доказывает теорему.

Невозможность экспоненциальной стабилизации приводит нас к постановке задачи степенной стабилизации.

§ 2. Постановка задачи степенной стабилизации

Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная односвязная область с гладкой границей класса C^∞ . В области $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus B$ рассматривается полулинейное параболическое уравнение вида

$$\partial_t y(t, x) - \Delta y(t, x) - |y|^{\gamma-1} y = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (15)$$

с начальным и граничным условиями

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad (16)$$

$$y|_{x \in \partial\Omega} = u(t, x). \quad (17)$$

Здесь $u(t, x)$ является управлением.¹

На γ будем налагать следующее ограничение:

$$\gamma > \max\left(1 + \frac{2}{d}, 2 + \frac{d}{2}\right). \quad (18)$$

Нашу задачу мы будем рассматривать в следующих соболевских пространствах:

$$H^r(\Omega) = \left\{ f(x) : \|f(x)\|_{H^r(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \|\partial^\alpha f(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 < \infty \right\},$$

$$H_m^r(\Omega) = \left\{ f(x) : \|f(x)\|_{H_m^r(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \|(1 + |x|^2)^{m/2} \partial^\alpha f(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 < \infty \right\},$$

$$H^{r-1/2}(\partial\Omega) = \{\gamma_{\partial\Omega} f(x) : f \in H^r(\Omega)\},$$

где $m \geq 0$, $r \geq 0$ – некоторые целые числа, а $\gamma_{\partial\Omega}$ обозначает оператор сужения функций из пространства $H^r(\Omega)$ на границу $\partial\Omega$ (более подробно определения соболевских пространств и операторы сужения рассмотрены в книгах Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса [23] и А. В. Фурсикова [24]). Здесь и далее символ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ обозначает мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ – оператор дифференцирования. Аналогичным образом определяются пространства $H^r(\mathbb{R}^d)$, $H_m^r(\mathbb{R}^d)$, которые будут использоваться наряду с введенными $H^r(\Omega)$, $H_m^r(\Omega)$. В тех случаях, когда из контекста изложения будет понятна рассматриваемая область определения, мы будем пользоваться сокращенными обозначениями H^r , H_m^r .

Далее, обозначим

$$\begin{aligned} L_2(0, \infty; H^r(\Omega)) &= \left\{ y(t, x) : \|y\|_{L_2(0, \infty; H^r(\Omega))}^2 = \int_0^\infty \|y(t, \cdot)\|_{H^r(\Omega)}^2 dt < \infty \right\}, \\ L_2(0, \infty; H^{r-1/2}(\partial\Omega)) &= \left\{ u(t, x) : \|u\|_{L_2(0, \infty; H^{r-1/2}(\partial\Omega))}^2 = \int_0^\infty \|u(t, \cdot)\|_{H^{r-1/2}(\partial\Omega)}^2 dt < \infty \right\}. \end{aligned}$$

¹ Отметим, что все получаемые в работе результаты являются локальными, и поэтому выбор знака, стоящего перед нелинейным членом $|y|^{\gamma-1}y$, не является существенным.

Также в работе будут использоваться пространство $C([0, \infty); H^r(\Omega))$ как пространство непрерывных отображений $y(t, \cdot)$ из $[0, \infty)$ в $H^r(\Omega)$ и пространство $C([0, \infty); H^{r-1/2}(\partial\Omega))$ непрерывных отображений $u(t, \cdot)$ из $[0, \infty)$ в $H^{r-1/2}(\partial\Omega)$. Аналогичным образом определяются $L_2(0, \infty; H_m^r(\Omega))$ и $C([0, \infty); H_m^r(\Omega))$.

Мы будем решать следующую задачу стабилизации. Пусть заданы параметр скорости стабилизации $k > 0$ и начальное условие $y_0(x) \in H_m^r(\Omega)$. Нужно найти управление $u(t, x')$, $x' \in \partial\Omega$, $t > 0$, такое, что решение $y(t, x)$ уравнения (15) с начальным и граничным условиями (16), (17) при достаточно больших $t > 0$ удовлетворяло бы условию степенной стабилизации:

$$\|y(t, \cdot)\|_{H^r(\Omega)} \leq \frac{C}{t^k} \|y_0(\cdot)\|_{H_m^r(\Omega)}. \quad (19)$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любых $k > 0$, целых r , $d/2 < r < \gamma$, $m > m_0$, где $m_0 = m_0(k)$ достаточно велико, и произвольного начального условия $y_0(x) \in H_m^r(\Omega)$ с достаточно малой нормой $\|y_0(\cdot)\|_{H_m^r(\Omega)}$ существует решение*

$$\begin{aligned} y(t, x) &\in L_2(0, \infty; H^r(\Omega)) \cap C([0, \infty); H^r(\Omega)), \\ u(t, x') &\in L_2(0, \infty; H^{r-1/2}(\partial\Omega)) \cap C([0, \infty); H^{r-1/2}(\partial\Omega)) \end{aligned}$$

задачи стабилизации (15)–(17), (19).

При доказательстве теоремы 2.1 мы будем использовать метод, разработанный А. В. Фурсиковым при исследовании задач стабилизации параболических уравнений и системы Навье–Стокса [14], [15], [19]. Он основан на специальном продолжении начального условия $y_0(x)$ внутрь области B , которое мы обозначим через $z_0(x)$. Способ построения такого продолжения будет описан ниже.

Далее рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t z(t, x) - \Delta z(t, x) - |z|^{\gamma-1} z = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (20)$$

с этим начальным условием $z_0(x)$:

$$z|_{t=0} = z_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (21)$$

Мы будем искать такое продолжение $z_0(x)$, чтобы решение $z(t, x)$ задачи Коши (20), (21) стремилось к нулю с заданной скоростью $1/t^k$. Далее, ограничив полученное решение задачи Коши на область Ω , мы получим искомое решение задачи стабилизации $y(t, x)$ с управлением $u(t, x') = z(t, x')|_{x' \in \partial\Omega}$.

Основным средством исследования задачи Коши (20), (21) будет замена переменных, использованная в работах К. Уэйна и Дж. Экманна [20], [21] для получения асимптотик поведения решения параболического уравнения при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\sqrt{t+1}}, \\ \tau &= \ln(t+1). \end{aligned} \quad (22)$$

С введением новой функции $\widehat{z}(\tau, \xi)$, определяемой формулой

$$z(t, x) = \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \widehat{z}\left(\ln(t+1), \frac{x}{\sqrt{t+1}}\right),$$

замена (22) сводит уравнение (20) к уравнению

$$\frac{\partial \widehat{z}(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \Delta \widehat{z} + \frac{1}{2}(\xi, \nabla) \widehat{z} + \frac{1}{\gamma-1} \widehat{z} + |\widehat{z}|^{\gamma-1} \widehat{z} \quad (23)$$

с тем же начальным условием

$$\widehat{z}|_{\tau=0} = z_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (24)$$

Обозначим линейный оператор, стоящий в правой части (23), через $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \Delta + \frac{1}{2}(\xi, \nabla) + \frac{1}{\gamma-1}.$$

Дальнейшее исследование будет опираться на свойства оператора $\mathcal{L}$ и порождаемой им полугруппы $e^{\tau \mathcal{L}}$.

В §3 рассматривается линеаризованная задача Коши и спектр оператора $\mathcal{L}$. Локальная теорема существования и единственности нелинейной задачи Коши (23), (24) и основные свойства разрешающей полугруппы S^τ изучены в §4. В §5 устанавливается локальное существование инвариантного относительно действия полугруппы S^τ многообразия M_- , обладающего свойством “экспоненциального стягивания к нулю” в τ -представлении, что соответствует степенной сходимости в t -представлении. Доказательство основной теоремы 2.1 завершается построением в §6 продолжения $z_0(x)$ начального условия $y_0(x)$ таким образом, чтобы оно принадлежало инвариантному многообразию M_- .

§3. Линейная задача Коши. Спектр оператора $\mathcal{L}$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{z}}{\partial \tau} &= \mathcal{L} \widehat{z}, \\ \widehat{z}|_{t=0} &= z_0(\xi). \end{aligned} \quad (25)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1 (о спектре оператора $\mathcal{L}$). *Для заданных целых неотрицательных m, r спектр оператора $\mathcal{L}$, определенного на пространстве $H_m^r(\mathbb{R}^d)$, задается соотношением*

$$\sigma(\mathcal{L}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{d}{4} - \frac{m}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right\} \cup \left\{ -\frac{l}{2} - \frac{d}{2} + \frac{1}{\gamma-1} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Для целых неотрицательных $l < m - d/2$ значение

$$\lambda_l = -\frac{l}{2} - \frac{d}{2} + \frac{1}{\gamma-1}$$

является изолированным собственным значением кратности C_{d+l-1}^l .

Рис. 1

Для доказательства теоремы вместо оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим оператор Λ , являющийся сдвигом оператора $\mathcal{L}$ на величину $d/2 - 1/(\gamma - 1)$:

$$\Lambda = \Delta + \frac{1}{2}(\xi, \nabla) + \frac{d}{2}.$$

Теорема 3.1 вытекает из следующей теоремы о спектре оператора Λ :

ТЕОРЕМА 3.2. *Для заданных целых неотрицательных m, r спектр оператора Λ , заданного на пространстве $H_m^r(\mathbb{R}^d)$, определяется соотношением*

$$\sigma(\Lambda) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{d}{4} - \frac{m}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{l}{2} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Для целых неотрицательных $l < m - d/2$ значение $\lambda_l = -l/2$ является изолированным собственным значением кратности C_{d+l-1}^l (см. рис. 1).

Обозначим через F преобразование Фурье функции $f \in H_m^r$:

$$(Ff)(p) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{-ip\xi} d\xi.$$

При этом преобразовании оператор Λ перейдет в оператор $F\Lambda$:

$$(F\Lambda f)(p) = -\left(|p|^2 + \frac{1}{2} p \cdot \nabla_p\right)(Ff)(p).$$

Отметим, что пространство H_m^r при действии преобразования F переходит в пространство H_r^m . Действительно, при преобразовании Фурье дифференцирование порядка r переходит в умножение на моном соответствующей степени, а весовая функция порядка m , наоборот, переходит в соответствующий дифференциальный оператор. Тем самым, параметр r гладкости функций, входящих в H_m^r , выступает как параметр веса, а уже m определяет гладкость функций.

Введем функции Эрмита

$$\psi_\alpha(\xi) = (\partial_\xi^\alpha \psi_0)(\xi), \quad \psi_0(\xi) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-|\xi|^2/4}.$$

Преобразование Фурье функций Эрмита определяется формулой

$$(F\psi_\alpha)(p) = (ip)^\alpha e^{-|p|^2}.$$

ЛЕММА 3.1. Для произвольного целого неотрицательного l функции Эрмита $\psi_\alpha(\xi)$ при $|\alpha| = l$ являются собственными функциями оператора $F\Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью прямых вычислений покажем, что функции $(F\psi_\alpha)(p)$ являются собственными функциями оператора $F\Lambda$:

$$\begin{aligned}
(F\Lambda)(F\psi_\alpha)(p) &= -\left(|p|^2 + \frac{1}{2}p \cdot \nabla_p\right)(ip)^\alpha e^{-|p|^2} \\
&= -|p|^2(ip)^\alpha e^{-|p|^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d p_k \frac{\partial}{\partial p_k} (ip)^\alpha e^{-|p|^2} \\
&= -|p|^2(ip)^\alpha e^{-|p|^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d p_k \prod_{j=1, j \neq k}^d (ip_j)^{\alpha_j} i\alpha_k (ip_k)^{\alpha_k-1} e^{-|p|^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d p_k (ip)^\alpha (-2p_k) e^{-|p|^2} \\
&= -|p|^2(ip)^\alpha e^{-|p|^2} - \frac{1}{2} (ip)^\alpha e^{-|p|^2} \sum_{k=1}^d \alpha_k + |p|^2 (ip)^\alpha e^{-|p|^2} \\
&= -\frac{|\alpha|}{2} (F\psi_\alpha)(p).
\end{aligned}$$

Введем функции

$$\psi_{-2\lambda} = |p|^{-2\lambda} e^{-|p|^2}.$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $\operatorname{Re} \lambda < d/4 - m/2$. Тогда $\psi_{-2\lambda}$ являются собственными функциями оператора $F\Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично выкладкам, проводимым при доказательстве леммы 3.1, можно показать, что выполняется равенство $(F\Lambda)\psi_{-2\lambda} = \lambda\psi_{-2\lambda}$. Для завершения доказательства леммы необходимо доказать принадлежность функций $\psi_{-2\lambda}$ пространству H_r^m при $\operatorname{Re} \lambda < d/4 - m/2$. Функции $\psi_{-2\lambda}$ являются экспоненциально убывающими на бесконечности функциями с единственной особенностью в нуле. Поэтому принадлежность $\psi_{-2\lambda}$ пространству H_r^m эквивалентна квадратичной интегрируемости особенности в нуле m -й производной функций $\psi_{-2\lambda}$:

$$\psi_{-2\lambda} \in H_r^m \Leftrightarrow |p|^{-2\lambda-m} \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < \frac{d}{4} - \frac{m}{2}.$$

Ввиду замкнутости спектра отсюда следует включение полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq d/4 - m/2\}$ в непрерывную часть спектра Λ .

Возьмем $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n < m$, и определим операторы проектирования P_-^n, P_+^n в пространстве $H_m^r(\mathbb{R}^d)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_+^n(f) &= \sum_{|\alpha| \leq n} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_\alpha(\xi') f(\xi') d\xi' \right) \psi_\alpha(\xi), \\
P_-^n(f) &= (I - P_+^n)(f).
\end{aligned}$$

Здесь P_α обозначают полиномы Эрмита степени $|\alpha|$:

$$P_\alpha(\xi) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{|\xi|^2/4} \partial_\xi^\alpha e^{-|\xi|^2/4} = e^{|\xi|^2/4} \psi_\alpha(\xi).$$

Нетрудно видеть, что

$$P_+^n f = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \xi^\alpha d\xi = 0, \quad |\alpha| \leq n. \quad (26)$$

Действительно, ввиду линейной независимости функций Эрмита $\psi_\alpha(\xi)$ условие $P_+^n f = 0$ эквивалентно ортогональности функции $f(\xi)$ всем полиномам Эрмита $P_\alpha(\xi)$ степени $|\alpha| \leq n$, что, в свою очередь, влечет

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \xi^\alpha d\xi = 0, \quad |\alpha| \leq n.$$

Для целых отрицательных n положим $P_+^n = 0$, $P_-^n = I$.

ЛЕММА 3.3. *Спектр оператора Λ представим в виде объединения спектров операторов ΛP_+^n и ΛP_-^n :*

$$\sigma(\Lambda) = \sigma(\Lambda P_+^n) \cup \sigma(\Lambda P_-^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить включения

$$\Lambda P_+^n H_m^r \subset P_+^n H_m^r, \quad \Lambda P_-^n H_m^r \subset P_-^n H_m^r. \quad (27)$$

Функции Эрмита $\psi_\alpha(\xi)$, на которые проецирует оператор P_+^n , являются собственными функциями оператора Λ . Отсюда следует справедливость первого включения в (27).

Покажем, что если для функции f выполняются условия ортогональности (26), то те же условия выполняются и для функции Λf . Обозначим через Λ^* оператор, сопряженный Λ . Очевидно, $\Lambda^* \xi^\alpha$ является многочленом степени $|\alpha|$. Поэтому выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda f(\xi) \xi^\alpha d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \Lambda^* \xi^\alpha d\xi = 0, \quad |\alpha| \leq n.$$

Отсюда следует последнее включение в (27).

Леммы 3.1, 3.2 устанавливают включение

$$\sigma(\Lambda) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{d}{4} - \frac{m}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{l}{2} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}. \quad (28)$$

Возьмем $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию

$$n + \frac{d}{2} < m \leq n + 1 + \frac{d}{2}.$$

Спектр оператора ΛP_+^n состоит из конечного числа собственных значений оператора Λ :

$$\sigma(\Lambda P_+^n) = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{n}{2} \right\}. \quad (29)$$

Для спектра оператора ΛP_-^n из предыдущей леммы с учетом (28) следует включение

$$\sigma(\Lambda P_-^n) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{d}{4} - \frac{m}{2} \right\}. \quad (30)$$

Пусть $e^{\tau \mathcal{L}} : H_m^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow H_m^r(\mathbb{R}^d)$ – разрешающая полугруппа задачи Коши (25), ставящая в соответствие функции $z_0(\xi) \in H_m^r(\mathbb{R}^d)$ решение задачи Коши (25) в момент времени τ .

Полугруппа $e^{\tau \mathcal{L}}$ дается следующей формулой, которая выводится из известной формулы Пуассона для уравнения теплопроводности после замены (22):

$$e^{\tau \mathcal{L}} f(\xi) = \frac{e^{\frac{\tau}{\gamma-1}}}{(4\pi a(\tau))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi-\xi'|^2}{4a(\tau)}} f(\xi' e^{\frac{\tau}{2}}) d\xi', \quad (31)$$

где $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$.

ЛЕММА 3.4 (об оценке полугруппы $e^{\tau \Lambda}$ в пространстве $H_m^0(\mathbb{R}^d)$).

1. Для произвольных целых $m \geq 0$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1\}$, связанных соотношением $n + d/2 < m \leq n + 1 + d/2$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка (с некоторой константой C , не зависящей от f):

$$\|\partial^\alpha e^{\tau \Lambda} P_-^n f\|_{H_m^0} \leq \frac{C}{a(\tau)^{\frac{|\alpha|}{2}}} e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|f\|_{H_m^0}. \quad (32)$$

2. Для произвольных целых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1\}$, $m > n + 1 + d/2$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ выполняется следующая оценка (с некоторой константой C , не зависящей от f):

$$\|\partial^\alpha e^{\tau \Lambda} P_-^n f\|_{H_m^0} \leq \frac{C}{a(\tau)^{\frac{|\alpha|}{2}}} e^{-\frac{n+1}{2}\tau} \|f\|_{H_m^0}. \quad (33)$$

Доказательство см. в [22].

СЛЕДСТВИЕ 3.1 (об оценке полугруппы $e^{\tau \Lambda}$ в пространстве $H_m^r(\mathbb{R}^d)$).

1. Для произвольных целых $m \geq 0$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1\}$, связанных соотношением $n + d/2 < m \leq n + 1 + d/2$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка (с некоторой константой C , не зависящей от f):

$$\|e^{\tau \Lambda} P_-^n f\|_{H_m^r} \leq C e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|f\|_{H_m^r}. \quad (34)$$

2. Для произвольных целых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1\}$, $m > n + 1 + d/2$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется следующая оценка (с некоторой константой C , не зависящей от f):

$$\|e^{\tau \Lambda} P_-^n f\|_{H_m^r} \leq C e^{-\frac{n+1}{2}\tau} \|f\|_{H_m^r}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau \in [0, 1]$. Так как для функции $P_-^n f$ выполнены условия ортогональности (26), то они же выполняются и для функции $\partial_\xi^\beta (P_-^n f)$. Отсюда следует включение $\partial_\xi^\beta (P_-^n f) \in P_-^n H_m^r$.

Домножим на $e^{\left(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)\tau}$ и продифференцируем по ξ обе части (31). После интегрирования по частям, положив в (32) $\alpha = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\beta e^{\tau\Lambda} P_-^n f(\xi)\|_{H_m^0} &= \left\| \frac{e^{\frac{d\tau}{2}}}{(4\pi a(\tau))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi-\xi'|^2}{4a(\tau)}} \partial_{\xi'}^\beta (P_-^n f(\xi' e^{\frac{\tau}{2}})) d\xi' \right\|_{H_m^0} \\ &= \left\| \frac{e^{\frac{d\tau}{2}}}{(4\pi a(\tau))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi-\xi'|^2}{4a(\tau)}} e^{|\beta|\frac{\tau}{2}} \partial_{\xi'}^\beta (P_-^n f)(\xi' e^{\frac{\tau}{2}}) d\xi' \right\|_{H_m^0} \\ &= \|e^{\tau(\Lambda + \frac{|\beta|}{2})} \partial_\xi^\beta (P_-^n f)\|_{H_m^0} \leq e^{\frac{\tau}{2}} \|e^{\tau\Lambda} P_-^n \partial_\xi^\beta (P_-^n f)\|_{H_m^0} \\ &\leq C e^{\frac{\tau}{2}} e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|P_-^n f\|_{H_m^r} \leq C e^{\frac{\tau}{2}} e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|f\|_{H_m^r}, \\ &\quad |\beta| \leq r. \end{aligned}$$

Для $\tau > 1$ из (32) следует оценка

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\beta e^{\tau\Lambda} P_-^n f\|_{H_m^0} &\leq \frac{C}{a(\tau)^{\frac{|\beta|}{2}}} e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|f\|_{H_m^0} \leq \frac{C}{(1-e^{-1})^{\frac{\tau}{2}}} e^{\frac{\tau}{2}(\frac{d}{2}-m+\varepsilon)} \|f\|_{H_m^r}, \\ &\quad |\beta| \leq r. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует оценка (34) с константой $\max(Ce^{\frac{\tau}{2}}, C(1-e^{-1})^{-\frac{\tau}{2}})$.

Оценка (35) выводится аналогичным образом из соответствующей оценки (33).

СЛЕДСТВИЕ 3.2 (об оценке полугруппы $e^{\tau\mathcal{L}}$). Для произвольных $s > 0$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют достаточно большие натуральные $n = n(s)$ и $m = m(s)$ такие, что выполнена следующая оценка (с некоторой константой C , не зависящей от f):

$$\|e^{\tau\mathcal{L}} P_-^n f\|_{H_m^r} \leq C e^{-s\tau} \|f\|_{H_m^r}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим обе части неравенства (35) на $e^{-\tau(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})}$:

$$\|e^{\tau\mathcal{L}} P_-^n f\|_{H_m^r} \leq C e^{-\left(\frac{n+1}{2} + \frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)\tau} \|f\|_{H_m^r}. \quad (37)$$

Выбрав n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$s \leq \frac{n+1}{2} + \frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1},$$

и m , удовлетворяющее условию следствия 3.1, мы получаем искомую оценку.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для произвольных целых $r \geq 0$, $m > d/2$ и $f \in H_m^r$ справедлива оценка

$$\|e^{\tau\mathcal{L}} f\|_{H_m^r} \leq C e^{-\tau(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})} \|f\|_{H_m^r}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в условиях следствия 3.1 $n = -1$ и домножим обе части неравенства (35) на $e^{-\tau(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})}$. Тогда, так как $P_-^n = I$ при $n < 0$, получим:

$$\|e^{\tau\mathcal{L}} f\|_{H_m^r} \leq C e^{-\tau(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})} \|f\|_{H_m^r}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из следствия 3.3 следует, что при условии $\gamma > 1 + 2/d$, следующим из (18), решение линейной задачи Коши (25) стремится к нулю с экспоненциальной (в τ -представлении) скоростью сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Из следствия 3.1 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ полугруппа $e^{\frac{\tau}{2}(-\frac{d}{2} + m - \varepsilon)} e^{\tau\Lambda}$ является равномерно ограниченной полугруппой в пространстве $P_-^n H_m^r$. Тогда из теоремы Хилле–Иосида о резольvente производящего оператора следует $\sigma(\Lambda P_-^n) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq d/4 - m/2\} \cup \{0\}$ (см., например, [25]). Это включение вместе с (30) дает равенство

$$\sigma(\Lambda P_-^n) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{d}{4} - \frac{m}{2} \right\} \cup \{0\}.$$

Утверждения теоремы 3.2 следуют из леммы 3.3 с учетом (29) и последнего равенства. Теорема 3.2, а следовательно, и теорема 3.1 доказаны.

Итак, спектр оператора $\mathcal{L}$ обладает тем свойством, что за счет выбора достаточно большого значения m мы можем отодвинуть непрерывную часть спектра сколь угодно далеко влево от начала координат, выделяя все большее количество собственных значений дискретной части спектра (см. рис. 1). Эта особенность позволит нам в §5 построить инвариантные многообразия для нелинейного уравнения (23).

§4. Существование и единственность решения нелинейной задачи Коши. Полугруппа S^τ

В этом параграфе мы докажем локальное существование и единственность решения $\hat{z}(\tau, \xi)$ задачи Коши (23), (24) на всей временной оси $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Схематично, процесс доказательства будет состоять в следующем. Зафиксируем некоторый момент времени $T > 0$, достаточно малый параметр $\varepsilon > 0$ и разобьем временную ось $\mathbb{R}_+$ на отрезки $\{\mathcal{R}_i\}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=0}^{\mathbb{N}} \mathcal{R}_i,$$

где $\mathcal{R}_0 = [0, T]$, $\mathcal{R}_1 = [T - \varepsilon, 2T]$, $\mathcal{R}_2 = [2T - \varepsilon, 3T]$, $\dots$, $\mathcal{R}_k = [kT - \varepsilon, (k+1)T]$, $k \in \mathbb{N}$.

После этого докажем существование решения $\hat{z}(\tau, \xi)$ задачи Коши на интервале $\tau \in [0, T]$. Решая новую задачу Коши на интервале $\mathcal{R}_1$ с начальным условием $\hat{z}(T - \varepsilon, \xi)$, полученным на предыдущем этапе, мы получаем продолжение решения на следующий отрезок $\mathcal{R}_1$. Итеративно продолжая этот процесс на последующие

отрезки $\mathcal{R}_i$, мы получим искомое решение задачи Коши. Ввиду наложенности отрезков $\mathcal{R}_i$ полученная функция $\hat{z}(\tau, \xi)$ будет решением задачи Коши на всей временной оси $\mathbb{R}_+$.

Существование решения $\hat{z}(\tau, \xi)$ на отрезке $[0, T]$ выводится из теоремы о неявной функции. Для применимости этой теоремы мы введем следующие пространства, в которых будем рассматривать нашу задачу.

Пусть T — некоторый фиксированный момент времени. Определим пространство

$$L_2(H_m^r) = L_2(H_m^r(\mathbb{R}^d)) = L_2(0, T; H_m^r(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T]; H_m^r(\mathbb{R}^d)),$$

$$\|\cdot\|_{L_2(H_m^r)} = \max(\|\cdot\|_{L_2(0, T; H_m^r(\mathbb{R}^d))}, \|\cdot\|_{L_\infty(0, T; H_m^r(\mathbb{R}^d))}).$$

ЛЕММА 4.1. Пусть заданы целые r , $d/2 < r < \gamma$, и $m > 0$. Отображение $F(\hat{z}) = |\hat{z}|^{\gamma-1}\hat{z} : L_2(H_m^r) \rightarrow L_2(H_m^r)$ является отображением класса C^2 , т.е. дважды непрерывно дифференцируемо на пространстве $L_2(H_m^r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что F отображает $L_2(H_m^r)$ в $L_2(H_m^r)$. При $r > d/2$ из теоремы вложения Соболева следует неравенство

$$\|\hat{z}(\tau, \cdot)\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{C} \|\hat{z}(\tau, \cdot)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)}$$

с некоторой константой $\tilde{C} > 0$. Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \|(1 + |\xi|^2)^{m/2} |\partial^\alpha(\hat{z}(\tau, \cdot)^{\gamma-1} \hat{z}(\tau, \cdot))|\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \|\hat{z}(\tau, \cdot)^{\gamma-|\beta|}\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} \|\hat{z}(\tau, \cdot)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_1 \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (1 + \|\hat{z}(\tau, \cdot)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)}^{\gamma-|\beta|}) \|\hat{z}(\tau, \cdot)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad |\alpha| \leq r. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что производная $F'(\hat{z}) = \gamma|\hat{z}|^{\gamma-1}$ в точке $\hat{z}$ также отображает $L_2(H_m^r)$ в $L_2(H_m^r)$. Из условия (18) на γ непосредственно вытекает, что $\gamma > 2$. Это, в свою очередь, влечет существование непрерывной второй производной F'' у функции F .

Уравнению (23) сопоставим уравнение в вариациях

$$\partial_\tau \hat{z} = \mathcal{L} \hat{z} + h, \quad h \in L_2(H_m^r), \quad (\tau, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \quad (39)$$

с некоторым начальным условием

$$\hat{z}|_{\tau=0} = z_0(x). \quad (40)$$

Введем оператор $Q : L_2(H_m^r(\mathbb{R}^d)) \times H_m^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(H_m^r(\mathbb{R}^d))$, $Q(h, z_0) = \hat{z}(\tau, \xi)$, сопоставляющий начальному условию z_0 и правой части h решение уравнения в вариациях (39).

Определим норму на пространстве $L_2(H_m^r) \times H_m^r$ стандартным образом:

$$\|(h, z_0)\|_{L_2(H_m^r) \times H_m^r}^2 = \|h\|_{L_2(H_m^r)}^2 + \|z_0\|_{H_m^r}^2.$$

ЛЕММА 4.2. Для любых целых r , $d/2 < r < \gamma$, $m > d/2$, $h \in L_2(H_m^r)$, $z_0 \in H_m^r$ существует и единственно решение $\hat{z} \in L_2(H_m^r)$ задачи Коши (39), (40) и соответствующий разрешающий оператор $Q: L_2(H_m^r) \times H_m^r \rightarrow L_2(H_m^r)$, $Q(h, z_0) = \hat{z}$, ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор $Q(h, z_0)$ в виде

$$Q(h, z_0) = Q(0, z_0) + Q(h, 0). \quad (41)$$

Непрерывность первого слагаемого в (41) вытекает из следствия 3.3:

$$\|Q(0, z_0)\|_{L_2(H_m^r)} \leq C_1 \left(\int_0^T e^{-2\tau(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})} d\tau \right)^{1/2} \|z_0\|_{H_m^r} \leq C_2 \|z_0\|_{H_m^r}.$$

Докажем непрерывность второго слагаемого. Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|Q(h, 0)(\tau, \cdot)\|_{H_m^r} &= \left\| \int_0^\tau e^{\mathcal{L}(\tau-\tau')} h(\tau', \cdot) d\tau' \right\|_{H_m^r} \\ &\leq \int_0^\tau \|e^{\mathcal{L}(\tau-\tau')} h(\tau', \cdot)\|_{H_m^r} d\tau' \\ &\leq \int_0^\tau C e^{-\tau'(\frac{d}{2} - \frac{1}{\gamma-1})} \|h(\tau', \cdot)\|_{H_m^r} d\tau' \leq C_3 \|h\|_{L_2(H_m^r)} \end{aligned}$$

с некоторой константой C_3 . Отсюда получаем, что с некоторой константой $C_4 = C_4(T)$ выполнена оценка

$$\|Q(h, 0)\|_{L_2(H_m^r)} \leq C_4 \|h\|_{L_2(H_m^r)}.$$

ЛЕММА 4.3. Для любых целых r , $d/2 < r < \gamma$, $m > d/2$ и любого начального условия $z_0 \in H_m^r(\mathbb{R}^d)$ из некоторой окрестности нуля V_0 существует единственное решение $\hat{z}(\tau, \xi) \in L_2(H_m^r)$ задачи (23), (24), непрерывно зависящее от начального условия z_0 . Причем отображение $S: z_0 \rightarrow \hat{z}$ является отображением класса C^2 . Более того, справедливо следующее соотношение:

$$S'(0)z_0 = Q(0, z_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях предыдущей леммы уравнение (23) эквивалентно следующему:

$$\hat{z} = Q(0, z_0) + Q(|\hat{z}|^{\gamma-1} \hat{z}, 0). \quad (42)$$

Введем оператор $\Phi(\hat{z}, z_0): L_2(H_m^r) \times H_m^r \rightarrow L_2(H_m^r)$ как

$$\Phi(\hat{z}, z_0) = Q(0, z_0) + Q(|\hat{z}|^{\gamma-1} \hat{z}, 0) - \hat{z}.$$

Тогда уравнение (42) эквивалентно уравнению

$$\Phi(\hat{z}, z_0) = 0. \quad (43)$$

Очевидно, что $\Phi(0, 0) = 0$. Более того, $\Phi(\widehat{z}, z_0)$ является отображением класса C^2 . Действительно, $Q(0, z_0)$ линейно и непрерывно по z_0 в силу леммы 4.2. По леммам 4.1, 4.2 отображение $Q(|\widehat{z}|^{\gamma-1}\widehat{z}, 0)$ является отображением класса C^2 , а следовательно, и $\Phi(\widehat{z}, z_0)$ является отображением класса C^2 .

Далее, дифференциал $\Phi'_{\widehat{z}}(0, 0)$ совпадает с оператором $-I$, а следовательно, обратим. По теореме о неявной функции уравнение (43) имеет единственное решение в некоторой достаточно малой окрестности нуля V_0 в топологии пространства $L_2(H_r^m) \times H_m^r$ и отображение $S: z_0 \rightarrow \widehat{z}$, сопоставляющее начальному условию z_0 решение $\widehat{z}$, является отображением класса C^2 . Тогда по правилу дифференцирования неявной функции дифференциал $S'(0)z_0$ удовлетворяет уравнению в вариациях (39) с $h = 0$, т.е. $S'(0)z_0 = Q(0, z_0)$.

Обозначим через γ_τ оператор сужения функций из $L_2(H_m^r)$ на пространство H_m^r :

$$\gamma_\tau \widehat{z}(\cdot, \cdot) = \widehat{z}(\tau, \cdot).$$

Оператор γ_τ определен и непрерывен в $L_2(H_m^r)$ ввиду того, что по определению $L_2(H_m^r) \subset C([0, T]; H_m^r)$.

Сопоставим уравнению (23) полугруппу $\{S^\tau\}_{\tau \in [0, T]}: H_m^r \rightarrow H_m^r$ по формуле $S^\tau z_0 = \gamma_\tau S(z_0)$, где S – разрешающий оператор, построенный в предыдущей лемме. Эта полугруппа определена в достаточно малой окрестности нуля $V_0 \subset H_m^r$.

ЛЕММА 4.4. *Полугруппа $\{S^\tau\}_{\tau \in [0, T]}$ является отображением класса C^2 , и ее производная определяется следующей формулой:*

$$(S^\tau)'_{z_0}(0) = e^{\tau \mathcal{L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор S является отображением класса C^2 , то оператор S^τ как суперпозиция оператора S и непрерывного линейного оператора γ_τ также будет отображением класса C^2 . Из определения оператора Q следует, что

$$\gamma_\tau Q(0, z_0) = e^{\tau \mathcal{L}} z_0, \quad (44)$$

где $e^{\tau \mathcal{L}}$ – разрешающий оператор задачи Коши (25).

Тогда

$$(S^\tau)'_{z_0} = \gamma_\tau S'(z_0) = \gamma_\tau Q(0, z_0) = e^{\tau \mathcal{L}} z_0.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любых целых r , $d/2 < r < \gamma$, $m > d/2$ и произвольного начального условия $z_0 \in H_m^r(\mathbb{R}^d)$ из некоторой окрестности нуля V_0 существует единственное решение $\widehat{z}(\tau, \xi) \in L_2(0, \infty; H_m^r) \cap C([0, \infty); H_m^r)$ задачи (23), (24), непрерывно зависящее от начального условия z_0 .*

При этом соответствующая разрешающая полугруппа $\{S^\tau\}_{\tau > 0}: H_m^r \rightarrow H_m^r$ является отображением класса C^2 и ее производная в нуле находится из соотношения

$$S'(0)z_0 = Q(0, z_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь следствием 3.3, зададимся моментом времени T таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\|e^{T\mathcal{L}} z_0\|_{H_m^r} \leq \frac{1}{4} \|z_0\|_{H_m^r}$$

для всех $z_0 \in H_m^r$.

Пусть $\hat{z}(\tau, \xi)$ – решение задачи Коши (23), (24), определенное для $\tau \in [0, T]$. Из (42) следуют оценки:

$$\begin{aligned} \|S^T z_0\|_{H_m^r} &= \|\hat{z}(T, \cdot)\|_{H_m^r} \leq \|\gamma_T Q(0, z_0)\|_{H_m^r} + \|\gamma_T Q(|\hat{z}|^{\gamma-1} \hat{z}, 0)\|_{H_m^r} \\ &\leq \left(\frac{1}{4} + \tilde{C} \|\hat{z}\|_{L_2(H_m^r)}^{\gamma-1} \right) \|z_0\|_{H_m^r}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались непрерывностью операторов γ_T , Q и S . Тогда при z_0 из достаточно малой окрестности нуля V_0 ввиду непрерывной зависимости решения от начальных данных будет выполнено

$$\|S^T z_0\|_{H_m^r} \leq \frac{1}{2} \|z_0\|_{H_m^r},$$

т. е. значение решения $\hat{z}(\tau, \xi)$ в момент времени T будет снова принадлежать окрестности V_0 . Это решение будет принадлежать пространству $L_2(0, T; H_m^r(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T]; H_m^r(\mathbb{R}^d))$.

Зададимся малым $\varepsilon > 0$. Решая задачу Коши на отрезке $\mathcal{R}_1 = [T - \varepsilon, 2T]$ с начальным условием $z(T - \varepsilon, \cdot)$, которое будет принадлежать окрестности V_0 при малых ε , мы получаем продолжение решения $z(\tau, \xi)$ на отрезок $[T, 2T]$. Аналогичным образом, решая задачу Коши на отрезке $\mathcal{R}_2 = [2T - \varepsilon, 3T]$ с начальным условием, полученным на предыдущем этапе, мы получаем продолжение решения на отрезок $[2T, 3T]$. Повторяя этот процесс, мы получаем решение $\hat{z}(\tau, \xi)$, определенное на всей временной оси, принадлежащее пространству $L_2(0, \infty; H_m^r) \cap C([0, \infty); H_m^r)$.

§ 5. Инвариантные многообразия

В этом параграфе мы докажем существование инвариантных относительно действия полугруппы $\{S^\tau\}_{\tau \geq 0}$ многообразий. Основой этого построения послужат инвариантные подпространства линейной полугруппы $e^{\tau\mathcal{L}}$. Как мы увидим, полученные многообразия будут касательными в нуле к соответствующим инвариантным подпространствам линейной полугруппы $e^{\tau\mathcal{L}}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть заданы целые $r \geq 0$, $0 \leq n < m$. Подпространства $E_+^n = P_+^n H_m^r$ и $E_-^n = P_-^n H_m^r$ инвариантны относительно действия полугруппы $e^{\tau\mathcal{L}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, E_+^n является линейной оболочкой собственных векторов оператора $\mathcal{L}$ и, следовательно, инвариантно относительно действия порождаемой им полугруппы. Докажем инвариантность E_-^n .

Для любой функции $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ из условия ортогональности

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \xi^\alpha d\xi = 0, \quad |\alpha| \leq n,$$

следует, что свертка $g * f$ удовлетворяет тому же условию ортогональности:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (g * f)(\xi) \xi^\alpha d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi') \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi - \xi') \xi^\alpha d\xi d\xi' = 0, \quad |\alpha| \leq n.$$

Так как действие полугруппы $e^{\tau \mathcal{L}}$ на вектор $f \in E_-^n$ в силу (31) есть свертка ядра

$$\frac{e^{\frac{\tau}{\gamma-1}}}{(4\pi a(\tau))^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a(\tau)}}$$

с функцией $f(\xi e^{\frac{\tau}{2}})$, будет выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\tau \mathcal{L}} f(\xi) \xi^\alpha d\xi = 0, \quad |\alpha| \leq n,$$

откуда следует, что $e^{\tau \mathcal{L}} f \in E_-^n$.

Теперь перейдем к построению инвариантных многообразий для нелинейной полугруппы $\{S^\tau\}_{\tau \geq 0}$. Дальнейшее исследование предварим основными фактами из теории инвариантных многообразий полугрупп (более подробное рассмотрение можно найти в книге А. В. Бабина, М. И. Вишика [26]).

Пусть E – некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, $\mathcal{L}(E, E)$ – пространство линейных непрерывных отображений из E в E с операторной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, E)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Полугруппа линейных ограниченных операторов

$$\{L^\tau\}_{\tau \in [0, \infty)}: E \rightarrow E$$

называется *почти устойчивой*, если выполнены условия:

- 1) L^τ ограничены в E по норме при $0 \leq \tau < \infty$ константой C ;
- 2) $\langle L^\tau u, \varphi \rangle$ непрерывно по τ для любых $u \in E$, $\varphi \in \Phi^*$, где Φ^* – всюду плотное множество E^* ;
- 3) существует $\rho_0 \subset (0, 1)$ такое, что вне круга $|\zeta| \leq \rho_0$ имеется лишь конечное множество $\sigma_+ = \zeta_1, \dots, \zeta_N$ точек спектра оператора $L_\tau|_{\tau=1}$;
- 4) инвариантное подпространство оператора $L_\tau|_{\tau=1}$, соответствующее σ_+ , конечномерно.

Пусть задана полугруппа нелинейных операторов $S^\tau: E \rightarrow E$, $S^\tau(0) = 0$, и пусть оператор $S = S^\tau|_{\tau=1}$ допускает следующее представление:

$$Su = Lu + D(u),$$

где L – линейный оператор, D – малый по норме нелинейный оператор. Пусть L обладает двумя инвариантными подпространствами E_+ и E_- , $E_+ \cap E_- = \{0\}$,

$E = E_+ + E_-$, $LE_+ \subset E_+$, $LE_- \subset E_-$, $\dim E_+ < \infty$. Проекции элемента u на подпространства E_+ и E_- обозначим через u_+ и u_- , а операторы проектирования через P_+ и P_- соответственно:

$$P_+ u = u_+, \quad P_- u = u_-, \quad P_+ + P_- = I.$$

Норму элемента $u = u_+ + u_-$ переопределим как $\|u\| = \max(\|u_+\|, \|u_-\|)$, эта норма в силу теоремы Банаха будет эквивалентна исходной.

Сужение оператора L на подпространства E_+ и E_- обозначим через L_+ и L_- соответственно.

Укажем условия на операторы L_+ , L_- и D , которые будем предполагать выполненными.

УСЛОВИЕ 5.1 (об отделимости спектров операторов L_- и L_+). Существует константа $\rho > 0$ и числа $\varepsilon_+ > 0$, $\varepsilon_- > 0$ такие, что

$$\|L_-\|_{\mathcal{L}(E, E)} \leq \rho(1 - \varepsilon_-), \quad \|L_+^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E)} \leq \rho^{-1}(1 - \varepsilon_+).$$

Смысл этого условия заключается в отделимости спектров операторов L_- и L_+ окружностью $|\zeta| = \rho$.

УСЛОВИЕ 5.2 (о гладкости нелинейного члена). Существует достаточно малое ν такое, что выполнено

$$D(0) = 0, \quad D'(0) = 0, \quad \|D'(u)\|_{\mathcal{L}(E, E)} \leq \nu, \quad u \in E. \quad (45)$$

УСЛОВИЕ 5.3 (о гёльдеровости оператора D с показателем μ , $0 < \mu \leq 1$).

$$\begin{aligned} \|D'\|_\mu &\leq C_0, \\ \|D'\|_\mu &= \sup_{0 \leq \|w-v\| \leq 1} \frac{\|D'(w) - D'(v)\|_{\mathcal{L}(E, E)}}{\|w - v\|_E^\mu}. \end{aligned} \quad (46)$$

Если отображение D удовлетворяет условию 5.3, то будем говорить, что D является отображением класса $C^{1+\mu}$.

Мы будем искать инвариантные многообразия M_+ и M_- , касательные в нуле к пространствам E_+ и E_- , в виде графиков функций $g_+ : V_0 \subset E_+ \rightarrow E_-$ и $g_- : V'_0 \subset E_- \rightarrow E_+$ соответственно:

$$\begin{aligned} M_+ &= \{u \in E : u = u_+ + g_+(u_+), \quad u_+ \in V_0\}, \\ M_- &= \{u \in E : u = u_- + g_-(u_-), \quad u_- \in V'_0\}, \end{aligned}$$

где V_0 и V'_0 — достаточно малые окрестности нуля в топологии подпространств E_+ и E_- (см. рис. 2). Здесь функции g_+ , g_- рассматриваются в классе функций $C^{1+\mu}$, удовлетворяющих условиям:

$$g_\pm(0) = 0, \quad g'_\pm(0) = 0, \quad \|g'_\pm(u)\|_\mu \leq q, \quad u \in E,$$

с некоторым $q > 0$.

Рис. 2

ТЕОРЕМА 5.1 (о существовании инвариантного многообразия). Пусть $S^\tau : E \rightarrow E$, $S^\tau(0) = 0$, — полугруппа класса $C^{1+\mu}$, и пусть выполнены все наложенные выше условия на операторы $S = S^\tau|_{\tau=1}$, L , L_+ , L_- , D . Кроме того, пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что при $0 \leq t \leq \varepsilon$ операторы $D^\tau = S^\tau - (S^\tau)'(0)$ удовлетворяют условию 5.2, где ν не зависит от τ . Предполагается также, что $(S^\tau)'(0)$ образуют почти устойчивую полугруппу с $\rho_0 < \rho$, где ρ — такое же, как и в условии 5.1, и пусть выполнена оценка

$$\|S^\tau u\|_E \leq C\|u\|_E, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (47)$$

Тогда при достаточно малом ν существуют и единственны функции $g_\pm$ класса $C^{1+\mu}$ такие, что многообразия M_+ и M_- инвариантны относительно S^τ : $S^\tau M_\pm \subset M_\pm$. Причем эти многообразия являются касательными в нуле к подпространствам E_+ и E_- соответственно, т.е. $g'_\pm(0) = 0$.

При этом для $u \in M_-$ справедлива следующая оценка:

$$\|S^\tau u\|_E \leq C\rho^\tau \|u\|_E, \quad \tau > 0, \quad u \in M_-.$$

Доказательство см. в [26].

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi = 1$ при $|x| \leq 1/2$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$ и $0 \leq \varphi \leq 1$, $0 \leq |\varphi'| \leq 1$. Положим

$$\Psi_\varepsilon(\widehat{z}) = \varphi\left(\frac{\|\widehat{z}\|_{H_m^r}^3}{\varepsilon}\right).$$

Вместо уравнения (23) рассмотрим уравнение с нелинейностью вида $F_\varepsilon(\widehat{z}) = |\widehat{z}|^{\gamma-1}\widehat{z}\Psi_\varepsilon(\widehat{z})$:

$$\frac{\partial \widehat{z}(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \Delta \widehat{z} + \frac{1}{2}(\xi, \nabla) \widehat{z} + \frac{1}{\gamma-1} \widehat{z} + |\widehat{z}|^{\gamma-1} \widehat{z} \Psi_\varepsilon(\widehat{z}). \quad (48)$$

ЛЕММА 5.2. *Отображение $F_\varepsilon(\widehat{z}) = |\widehat{z}|^{\gamma-1}\widehat{z}\Psi_\varepsilon(\widehat{z}) : H_m^r \rightarrow H_m^r$ является отображением класса C^2 , и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|F'_\varepsilon(\widehat{z})\|_{\mathcal{L}(H_m^r, H_m^r)} \leq C\varepsilon,$$

где C не зависит от $\widehat{z}$ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы о том, что F_ε является отображением класса C^2 , непосредственно следует из леммы 4.1. Действительно, поскольку отображения $\|\hat{z}\|_{H_m^r}^3$, φ и $|\hat{z}|^{\gamma-1}\hat{z}$ являются отображениями класса C^2 , то и F_ε будет принадлежать тому же классу.

Оценим норму производной оператора F_ε . Заметим, что $F_\varepsilon(\hat{z}) = 0$ для $\hat{z}$ такого, что $\|\hat{z}\|_{H_m^r} > \sqrt[3]{\varepsilon}$. Поэтому будем предполагать, что $\|\hat{z}\|_{H_m^r} \leq \sqrt[3]{\varepsilon}$. Аналогично оценкам, приводимым при доказательстве леммы 4.1, используя свойства функции φ , с учетом того, что

$$\Psi_\varepsilon(\hat{z}) \leq 1, \quad |\Psi'_\varepsilon(\hat{z})| \leq \frac{C_0}{\varepsilon} \|\hat{z}\|_{H_m^r}^2,$$

для достаточно малых ε можно получить оценки

$$\begin{aligned} \|F'_\varepsilon(\hat{z})\|_{\mathcal{L}(H_m^r, H_m^r)} &\leq C_1 \|\hat{z}\|^{\gamma-1}_{H_m^r} + C_2 \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{z}\|^{\gamma-1}_{H_m^r} \cdot \|\hat{z}\|_{H_m^r}^2 \\ &\leq C_3 \|\hat{z}\|_{H_m^r} + C_4 \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{z}\|_{H_m^r}^4 \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что теорема 4.1 остается верной и в том случае, когда мы рассматриваем уравнение (48) вместо уравнения (23). Также соответствующая разрешающая полугруппа $\{S_\varepsilon^\tau\}_{\tau>0}$ принадлежит классу C^2 , и очевидно, что в достаточно малой окрестности нуля полугруппа $\{S_\varepsilon^\tau\}_{\tau>0}$ совпадает с полугруппой $\{S^\tau\}_{\tau>0}$.

Зададимся некоторым $s > 0$, не являющимся точкой спектра оператора $-\mathcal{L}$, и возьмем достаточно большие m и n , как в условиях следствия 3.2, $r \in \mathbb{N}$, $d/2 < r < \gamma$. Проверим выполнение условий теоремы 5.1 в пространстве $E = H_m^r(\mathbb{R}^d)$.

В нашем случае $\{S_\varepsilon^\tau\}_{\tau>0}$ — разрешающая полугруппа уравнения (48), $S_\varepsilon = S_\varepsilon^\tau|_{\tau=1}$, $L = e^{\mathcal{L}}$, $L_+ = LP_+^n$, $L_- = LP_-^n$, $E_+ = E_+^n \equiv P_+^n E$, $E_- = E_-^n \equiv P_-^n E$, $\rho = e^{-s}$.

Выполнение условия 5.1 обеспечивается следствием 3.2, если вместо параметра s взять параметр $s + \sigma$, где $\sigma > 0$ достаточно мало.

Нелинейный член D_ε в нашем случае определим как

$$D_\varepsilon(z_0) = S_\varepsilon(z_0) - S'_\varepsilon(0)z_0 = S_\varepsilon(z_0) - e^{\mathcal{L}}z_0.$$

Из теоремы 4.1 следует, что D_ε является отображением класса C^2 , а следовательно, и класса $C^{1+\mu}$ с любым $\mu \in (0, 1]$.

Докажем выполнение условия 5.2. Равенство $D_\varepsilon(0) = D'_\varepsilon(0) = 0$ следует непосредственно из определения нелинейного члена D_ε .

ЛЕММА 5.3. Семейство операторов $D_\varepsilon^\tau = S_\varepsilon^\tau - (S_\varepsilon^\tau)'(0)$, $0 \leq \tau \leq \delta$, $\delta > 0$, удовлетворяет оценке

$$\|(D_\varepsilon^\tau(z_0))'\|_{\mathcal{L}(E, E)} \leq C(\varepsilon),$$

где $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо представление

$$S_\varepsilon^\tau z_0 = (S_\varepsilon^\tau)'(0)z_0 + \gamma_\tau Q(|\hat{z}|^{\gamma-1}\hat{z}\Psi_\varepsilon(\hat{z}), 0) = e^{\tau\mathcal{L}}z_0 + \gamma_\tau Q(|\hat{z}|^{\gamma-1}\hat{z}\Psi_\varepsilon(\hat{z}), 0),$$

где в прежних обозначениях Q – разрешающий оператор уравнения в вариациях (39), γ_τ – оператор сужения. Тогда ввиду непрерывности операторов γ_τ , Q и непрерывной зависимости решения от начальных данных из леммы 5.2 следует следующая оценка с некоторой функцией $C(\varepsilon)$, стремящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \|(D_\varepsilon^\tau(z_0))'\|_{\mathcal{L}(E,E)} &= \|(\gamma_\tau Q(|\hat{z}|^{\gamma-1}\hat{z}\Psi_\varepsilon(\hat{z}), 0))'\|_{\mathcal{L}(E,E)} \\ &= \|(\gamma_\tau Q(F_\varepsilon(\hat{z}), 0))'\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq C(\varepsilon). \end{aligned}$$

В частности, утверждение леммы справедливо и для оператора $D_\varepsilon = D_\varepsilon^\tau|_{\tau=1}$. Отсюда получаем выполнение условия 5.2. Условие 5.3 следует из принадлежности полугруппы $\{S_\varepsilon^\tau\}_{\tau>0}$ классу C^2 .

Свойство почти устойчивости полугруппы $(S_\varepsilon^\tau)'(0)$ и оценка (47) следуют из теоремы 3.1 и следствия 3.3.

Итак, ввиду того что полугруппы (S_ε^τ) и (S^τ) совпадают в достаточно малой окрестности нуля, из теоремы 5.1 следует

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть заданы $s > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $d/2 < r < \gamma$. Тогда для достаточно больших целых чисел $n = n(s)$, $m = m(s)$ в некоторой окрестности $\mathcal{W}_0$ нуля в пространстве $H_m^r(\mathbb{R}^d)$ существуют инвариантные относительно полугруппы S^τ многообразия M_+^s , M_-^s вида

$$\begin{aligned} M_+^s &= \{y \in H_m^r : y = y_+ + g_+(y_+), y_+ \in V_0 \equiv \mathcal{W}_0 \cap E_+^n \subset E_+^n\}, \\ M_-^s &= \{y \in H_m^r : y = y_- + g_-(y_-), y_- \in V_0' \equiv \mathcal{W}_0 \cap E_-^n \subset E_-^n\}, \end{aligned}$$

где $g_\pm$ – отображения из $E_\pm^n$ в $E_\pm^n$ класса $C^{1+\mu}$, $0 < \mu \leq 1$, определенные в окрестностях V_0 и V_0' соответственно и удовлетворяющие условиям $g(0) = g'(0) = 0$.

При этом для элементов $z_0 \in M_-(s)$ верна следующая оценка:

$$\|S^\tau z_0\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{-s\tau} \|z_0\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)}. \quad (49)$$

§ 6. Доказательство стабилизации полулинейного уравнения

Итак, мы построили инвариантное многообразие M_-^s такое, что решение нелинейной задачи Коши с начальным условием, лежащим на этом многообразии, стабилизируется к нулю как $e^{-s\tau}$ в τ -представлении или, возвращаясь к исходным переменным (x, t) , как $1/t^s$. Для доказательства теоремы 2.1 нам необходимо построить оператор продолжения начальных условий, определенных на Ω , на пространство $\mathbb{R}^d$ таким образом, чтобы продолженное решение лежало на инвариантном многообразии.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть r , m и s – такие же, как в теореме 5.2. Тогда существует оператор R_s , продолжающий функции из Ω в $\mathbb{R}^d$, который непрерывно отображает некоторую достаточно малую окрестность нуля $\mathcal{V}_0 \subset H_m^r(\Omega)$ в $M_-^s \subset H_m^r(\mathbb{R}^d)$:

$$\|R_s(y_0(\cdot))\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \leq C \|y_0(\cdot)\|_{H_m^r(\Omega)}, \quad y_0 \in \mathcal{V}_0. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный непрерывный оператор продолжения

$$G: H_m^r(\Omega) \rightarrow H_m^r(\mathbb{R}^d),$$

который существует вследствие гладкости границы $\partial\Omega$ (см., например, [27]).

Оператор R_s будем искать в следующем виде:

$$R_s y_0(x) = G y_0(x) + \chi(x) \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha \psi_\alpha, \quad (51)$$

где n – такое же, как и в теореме 5.2, $\chi(x)$ – произвольная неотрицательная функция класса $C_0^\infty(B)$ с носителем ненулевой меры, $\{c_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$ – неизвестные коэффициенты, которые будут определены ниже, $\{\psi_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$ – функции Эрмита.

Обозначим $z_0(x) = R_s y_0(x)$. Включение $z_0 \in M_-^s$ эквивалентно следующему уравнению:

$$P_+^n z_0 = g_-(P_-^n z_0). \quad (52)$$

Базисом конечномерного подпространства E_+^n являются функции Эрмита $\{\psi_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$, поэтому справедливо следующее представление:

$$g_-(f) = \sum_{|\alpha| \leq n} \psi_\alpha g_\alpha(f). \quad (53)$$

Из (52), (53) получаем уравнение

$$\sum_{|\alpha| \leq n} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_\alpha(\xi') z_0(\xi') d\xi' \right) \psi_\alpha(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} g_\alpha(P_-^n z_0) \psi_\alpha(\xi).$$

В силу линейной независимости функций $\psi_\alpha(\xi)$ из предыдущего равенства выводим систему:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_\alpha(\xi') z_0(\xi') d\xi' = g_\alpha(P_-^n z_0), \quad |\alpha| \leq n. \quad (54)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \|a_{\alpha\beta}\|_{|\alpha| \leq n, |\beta| \leq n}, & a_{\alpha\beta} &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(\xi') P_\alpha(\xi') \psi_\beta(\xi') d\xi', \\ \vec{e} &= \{e_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}, & e_\alpha &= \int_{\mathbb{R}^d} P_\alpha(\xi') G y_0(\xi') d\xi', \\ \vec{c} &= \{c_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}, & \vec{g} &= \{g_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}, \quad \vec{\psi} = \{\psi_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}. \end{aligned}$$

В векторной форме система (54) после подстановки $z_0 = R_s y_0(x)$, определенного в (51), записывается в следующем виде:

$$\vec{e} + A\vec{c} = \vec{g}(G y_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, \vec{e} + A\vec{c})). \quad (55)$$

Размерность e системы (55) определяется количеством мультииндексов α , для которых $|\alpha| \leq n$:

$$e = C_{n+d-1}^n.$$

Докажем положительную определенность матрицы A . Напомним, что P_α определяется как $P_\alpha = e^{|\xi|^2/4} \psi_\alpha(\xi)$. Для произвольного вектора $\eta = \{\eta_\alpha\}_{|\alpha| \leq n} \in \mathbb{R}^e$ будем иметь:

$$(A\eta, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq e, |\beta| \leq e} a_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{|\alpha| \leq e} \sqrt{\chi(\xi')} \cdot \sqrt{\frac{e^{|\xi'|^2}}{4}} \cdot \psi_\alpha \eta_\alpha \right|^2 dx \geq 0,$$

причем ввиду линейной независимости функций Эрмита равенство нулю достигается только в случае нулевого вектора η . Следовательно, определена обратная матрица A^{-1} .

Введем оператор $H: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^e$ с помощью соотношения

$$H(\vec{c}) = A^{-1} \vec{g}(Gy_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, \vec{c}) - (\vec{\psi}, A\vec{c})) - A^{-1} \vec{c},$$

сводящий нашу систему к уравнению

$$H(\vec{c}) = \vec{c}.$$

В силу теоремы о среднем с учетом непрерывности $\vec{g}'$ в окрестности нуля и условия $\vec{g}'(0) = 0$ отображение H является сжимающим при малых $\|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^d}$, $\|\vec{c}_1\|_{\mathbb{R}^d}$, $\|\vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^d}$, $\|Gy_0(x)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)}$:

$$\begin{aligned} \|H(\vec{c}_1) - H(\vec{c}_2)\|_{\mathbb{R}^e} &\leq C_0 \sup_{\beta \in [0,1]} \|A^{-1} \vec{g}'(Gy_0 - (\vec{\psi}, \vec{c}) \\ &\quad + \chi(\beta \vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, A(\beta \vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2)))\|_{\mathbb{R}^e} \\ &\quad \times \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^e} \leq C_1(y_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^e}, \end{aligned}$$

где $C_1(y_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \leq C_2(\|y_0\|_{H_m^r(\Omega)} + \|\vec{c}_1\|_{\mathbb{R}^e} + \|\vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^e})$.

Поэтому из принципа сжимающих отображений следует разрешимость уравнения (55), а следовательно, и существование оператора R_s , продолжающего начальные функции $y_0(x)$ на инвариантное многообразие M_-^s .

Из непрерывности оператора G и непрерывной зависимости коэффициентов $\{c_\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$ от функции y_0 следует непрерывность оператора R_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Зададимся произвольным $k > d/4$. Положим

$$s = k - \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{d}{4}.$$

Пусть $z(t, x)$ – решение задачи Коши (20), (21) с начальным условием $z_0(\cdot) = R_s y_0(\cdot)$, лежащим на инвариантном многообразии M_-^s .

В силу того что весовая функция $(1 + |\xi|^2)^{m/2}$ при замене (22) стремится к единице при $t \rightarrow \infty$, для решения $z(t, x)$ при каждом t дальнейшие оценки будем проводить в пространстве $H^r(\mathbb{R}^d)$.

Обозначим через Γ_Ω , $\gamma_{\partial\Omega}$ операторы, которые сужают функции, определенные в пространстве $\mathbb{R}^d$, на области Ω , $\partial\Omega$ соответственно:

$$\begin{aligned} \Gamma_\Omega: H^r(\mathbb{R}^d) &\rightarrow H^r(\Omega), & \Gamma_\Omega f(x) &:= f(x)|_{x \in \Omega}, \\ \gamma_{\partial\Omega}: H^r(\mathbb{R}^d) &\rightarrow H^{r-1/2}(\partial\Omega), & \gamma_{\partial\Omega} f(x') &:= f(x')|_{x' \in \partial\Omega}. \end{aligned}$$

Искомое решение (y, u) задачи стабилизации (15)–(17), (19) дается следующей формулой:

$$(y(t, \cdot), u(t, \cdot)) = (\Gamma_\Omega z(t, \cdot), \gamma_{\partial\Omega} z(t, \cdot)).$$

Докажем выполнение условия стабилизации (19). Из теорем 4.1, 6.1 с учетом (22), (49), (50) и свойства непрерывности операторов Γ , $\gamma_{\partial\Omega}$ мы имеем оценки:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\partial_x^\alpha y(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha z(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \partial_x^\alpha \widehat{z} \left(\ln(t+1), \frac{x}{\sqrt{t+1}} \right) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1} - \frac{d}{4} + \frac{|\alpha|}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_\xi^\alpha \widehat{z}(\ln(t+1), \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1} - \frac{d}{4} + \frac{|\alpha|}{2}}} \|\widehat{z}(\ln(t+1), \cdot)\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{C}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1} - \frac{d}{4} + \frac{|\alpha|}{2} + s}} \|R_s y_0\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{C}{(t+1)^{\frac{1}{\gamma-1} - \frac{d}{4} + s}} \|R_s y_0\|_{H_m^r(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C'}{(t+1)^k} \|y_0\|_{H_m^r(\Omega)}, \end{aligned}$$

откуда следует искомая оценка для решения $y(t, x)$:

$$\|y(t, \cdot)\|_{H^r(\Omega)} \leq \frac{C}{(t+1)^k} \|y_0(\cdot)\|_{H_m^r(\Omega)}.$$

И, окончательно, для управления u имеем следующую оценку:

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^{r-1/2}(\partial\Omega)} \leq D \|z(t, \cdot)\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\widetilde{D}}{(t+1)^k} \|y_0(\cdot)\|_{H_m^r(\Omega)}.$$

Список литературы

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Егоров Ю. В. Некоторые задачи теории оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3(5). С. 887–904.
3. Егоров Ю. В. О некоторых задачах теории оптимального управления // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145(2). С. 241–244.
4. Гальчук Л. И. О некоторых задачах на оптимальное управление системами, описываемыми параболическими уравнениями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1965. Т. 1(3). С. 21–33.
5. Russel D. L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. №3. P. 189–211.
6. Fattorini H. O., Russel D. L. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension // Arch. Ration. Mech. Anal. 1971. V. 43(3). P. 272–292.

7. *Lasiecka I., Triggiani R.* Controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems // *Appl. Math. Optim.* 1991. V. 23. P. 109–154.
8. *Lasiecka I., Triggiani R.* Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations // *Partial differential equation methods in control and shape analysis* / ed. G. Da Prato, J.-L. Zolésio. New York: Marcel Dekker, 1997. P. 215–243. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 188.)
9. *Triggiani R.* Controllability and observability in Banach space with bounded operators // *SIAM J. Control. Optim.* 1975. V. 13 (2). P. 462–491.
10. *Fursikov A. V.* Exact boundary zero controllability of three-dimensional Navier–Stokes equations // *J. Dynam. Control Systems.* 1995. V. 1(3). P. 325–350.
11. *Fursikov A. V., Imanuilov O. Yu.* On controllability of certain systems simulating a fluid flow // *Flow control*. New-York: Springer-Verlag, 1995. P. 149–184. (IMA Volume Math. Appl. V. 68.)
12. *Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю.* Точная управляемость уравнений Навье–Стокса и Буссинеска // *УМН.* 1999. Т. 54. №3(227). С. 93–146.
13. *Lasiecka I.* Stabilization of hyperbolic and parabolic systems with nonlinearly perturbed boundary conditions // *J. Differential Equations.* 1988. V. 75(1). P. 53–87.
14. *Фурсиков А. В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // *Матем. сб.* 2001. Т. 192(4). С. 115–160.
15. *Fursikov A. V.* Real process corresponding to the 3D Navier–Stokes system, and its feedback stabilization from the boundary // *Amer. Math. Soc.* 2002. V. 206. P. 95–123.
16. *Russel D. L.* Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions // *SIAM Rev.* 1978. V. 20. P. 639–739.
17. *Seregin G., Šverák V.* The Navier–Stokes equations and backward uniqueness // Preprint. IMA, 2001.
18. *Горшков А. В.* Степенная стабилизация одномерного уравнения теплопроводности // *УМН.* 2001. Т. 56(2). С. 213–214.
19. *Фурсиков А. В.* Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье–Стокса посредством управления с обратной связью с границы области // *Международная математическая серия. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. В честь академика О. А. Ладыженской.* 2002. Т. 2. С. 127–164.
20. *Wayne C. E.* Invariant manifolds for parabolic differential equations on unbounded domains // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1997. V. 138. P. 279–306.
21. *Eckmann J.-P., Wayne C. E.* Non-linear stability analysis of higher order dissipative partial differential equations // *Math. Phys. Electron. J.* 1998. V. 4. №3 (electronic).
22. *Gallay Th., Wayne C. E.* Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier–Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$ // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 2002. V. 163(3). P. 209–258.
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
24. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
25. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
26. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
27. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.