Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Беляев, Об асимптотике особых точек решений задачи о движении тяжелого n -мерного тела в случае Лагранжа, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 11, 55–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 03:58:37

УДК 517.927.7

А. В. Беляев

Об асимптотике особых точек решений задачи о движении тяжелого n -мерного тела в случае Лагранжа

Доказана однозначность решений задачи о движении тяжелого n -мерного тела в случае Лагранжа. Найдены все целые решения.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: многомерное тело, случай Лагранжа, полная интегрируемость, асимптотика решений, особые точки решений.

§ 1. Введение

Доказательство полной интегрируемости многомерного обобщения случая Эйлера задачи о движении твердого тела, полученное Манаковым в [1] методом ЛА-пары со спектральным параметром, показало весьма перспективную возможность нового взгляда на интегрируемость классических задач механики. Вслед за работой Мищенко и Фоменко [2] в работах Адлера и Мербеке [3], [4] была представлена алгебро-геометрическая схема интегрирования, включающая в себя построение как инволютивного набора первых интегралов, так и ЛА-пары с параметром. Практически все последующие работы представляли собой иллюстрацию этого метода.

Нельзя не отдать должное красоте конструкции Адлера и Мербеке, однако если акцентировать внимание не на алгебро-геометрической интерпретации фазового пространства, а на более прозаической, но в то же время весьма принципиальной вещи – самих решениях задачи, то эффективность этой конструкции не выглядит впечатляюще.

Так, например, решение классической задачи Лагранжа методом ЛА-пары в статье Ратиу и Мербеке [5] занимает 20 страниц, в то время как классическое решение занимает в [6] три страницы. Кроме того, пока не существует общего способа получения ЛА-пары, а если это и удастся сделать (см. [7]), то метод не обязательно дает все решения задачи, как это видно на примере задачи Гесса в работе Драговича и Гаджича [8].

Из вышеизложенного следует, что формулировка “задача интегрируется методом ЛА-пары с параметром”, как правило, означает принципиальную возможность получения точных решений и не обязательно означает, что в рассматриваемой задаче получены точные формулы, выражающие явную зависимость искомых величин от времени. Поэтому для проинтегрированной таким способом задачи, вообще говоря, актуален вопрос об эффективизации (см., например, [9]) формул, задающих ее решение.

Таким образом, несмотря на значительный прогресс в интегрировании гамильтоновых систем вполне обоснована необходимость поиска дополнительных средств исследования с более удобным аналитическим формализмом. В связи с этим мы возвращаемся к работе [10], в которой используются весьма простые технические средства, и показываем, что анализ проблемы с точки зрения аналитических свойств решений гамильтоновых систем позволяет ответить на ряд принципиальных вопросов, которые оказываются вне поля зрения в схеме Адлера–Мербеке–Реймана–Семенова–Тян–Шанского (см. [11]).

Для исследования аналитических свойств решений квазиоднородных гамильтоновых систем мы используем идею работы [12] факторизации фазового потока по квазиоднородному растяжению. В результате факторизации фазовое пространство отображается на компактное голоморфное многообразие со структурой голоморфного слоения с особенностями, которые соответствуют особым точкам решений рассматриваемой задачи.

Компактность профакторизованного фазового пространства позволяет получить полную классификацию особых точек, благодаря которой оказывается возможным доказать теорему об однозначности решений многомерного случая Лагранжа и найти полный список целых решений.

Схема доказательства этих результатов точно такая же, как и при получении аналогичных результатов для классической задачи о движении тяжелого твердого тела, полученных в [12] и [13]. Чтобы сделать настоящую статью максимально понятной, мы приводим не только необходимые результаты этих статей, но и идеи их доказательств.

§ 2. Формулировка основных результатов

Многомерное обобщение случая Лагранжа задачи о движении тяжелого твердого тела рассматриваем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, \Omega] + R \wedge \Gamma, \\ \dot{\Gamma} = -\Omega\Gamma; \end{cases}$$

здесь $M, \Omega \in \mathfrak{so}(n)$, $\Gamma, R \in \mathbb{R}^n$. Матрица Ω есть матрица угловой скорости в теле, оператор инерции имеет вид $M = \Omega I + I\Omega$, $I^T = I$; Γ – вектор силы тяжести в теле и R – вектор центра тяжести.

ТЕОРЕМА 1. *Все решения многомерного обобщения случая Лагранжа задачи о движении тяжелого твердого тела однозначны.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Однозначность решений многомерного обобщения случая Лагранжа не является тривиальным фактом, поскольку линеаризация потока происходит на якобиане кривой, вообще говоря, более, чем 4-го порядка. Как известно (см. [6]), обращение гиперэллиптического интеграла является неоднозначной функцией.

Подобный нетривиальный факт имеет место и в классическом случае Ковалевской, решение которого выражается через гиперэллиптические (ультраэллиптические) интегралы, но при этом является однозначным при всех начальных данных.

Как доказано Архангельским (см. [6]) на примере задачи о движении тяжелого твердого тела с ньютоновским потенциалом, из полной интегрируемости по Лиувиллю не обязательно следует однозначность решений. Тем не менее, по-видимому, существуют некоторые естественные причины, в силу которых решения интегрируемых задач, как правило, являются однозначными функциями времени на комплексной плоскости.

ТЕОРЕМА 2. *Все целые решения многомерного обобщения случая Лагранжа задачи о движении тяжелого твердого тела выражаются через круговые функции времени.*

§ 3. Гамильтонов формализм на алгебрах Ли

Как уже было отмечено, интегрирование гамильтоновых систем, особенно высокой размерности, требует наличия у исследуемой задачи достаточно богатой группы симметрий. Как следует из схемы интегрирования методом ЛА-пары с параметром, весьма желательно, чтобы задача была поставлена не просто на симплектическом многообразии (см., например, [14]), а на орбите коприсоединенного представления (см. [15]) подходящей алгебры Ли.

Прежде чем перейти к такому способу задания гамильтоновой системы, поставим задачу на кокасательном расслоении группы движений данной системы, например задачу о движении тяжелого твердого тела.

Как известно (см. [14]), на каждом кокасательном расслоении гладкого многообразия имеется каноническая 1-форма $\alpha = p dq$ (p – координата ковектора из кокасательного расслоения, q – координата на многообразии), дифференциал которой есть каноническая симплектическая форма $\omega = d\alpha$. Множество всех состояний системы описывается элементами g группы $\mathfrak{G}$ движений системы. Кинетическая энергия есть квадратическая форма на кокасательном расслоении группы, инвариантная относительно действия группы. Поскольку кокасательное расслоение группы Ли тривиально, каждый элемент этого расслоения можно представить в виде (p, q) . Тогда кинетическая энергия будет иметь вид $T = \frac{1}{2}(p, I^{-1}p)$, где I – оператор инерции. Потенциальная энергия $U(q)$ зависит только от состояния системы. Итак, $H = T(p) + U(q)$.

Если бы гамильтониан был левоинвариантным, можно было бы сразу редуцировать задачу на орбиту коприсоединенного представления (см. [16]) группы $\mathfrak{G}$, однако для задачи о движении тяжелого твердого тела это не так, поэтому мы воспользуемся результатом из [17].

При изложении схемы редукции, как правило, используется инвариантный стиль доказательства, который хотя и является достаточно изысканным, к сожалению, существенно сложнее доказательства “в координатах”. Желая сделать изложение максимально ясным, мы приводим соответствующий результат с координатным доказательством.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на кокасательном расслоении $T^*\mathfrak{G}$ группы Ли $\mathfrak{G}$ задан гамильтониан $H = T(p) + U(q)$, где $T(p)$ – кинетическая энергия, являющаяся левоинвариантной частью гамильтониана, $p \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathfrak{G}$ и $U(q)$, $q \in \mathfrak{G}$, – потенциальная энергия.

Тогда гамильтонова система, заданная с помощью гамильтониана H , редуцируется в гамильтонову систему, заданную на орбите коприсоединенного представления алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$, где V – линейное пространство, порожденное действием группы $\mathfrak{G}$ на функцию $U(q)$. Алгебра $\hat{\mathfrak{g}}$ является полупрямой суммой алгебры $\mathfrak{g}$ и линейного пространства V , а действие $\mathfrak{g}$ на V порождается действием группы $\mathfrak{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала скобки Пуассона функций, образующих алгебру Ли, изоморфную $\hat{\mathfrak{g}}$.

Пусть X, Y – левоинвариантные функции, заданные на $T^*\mathfrak{G}$, ограничение которых на $\mathfrak{g}^*$ является линейной функцией. Функции X, Y можно отождествить с левоинвариантными векторными полями, и в координатах они будут иметь вид $X(p, q) = p_i X^i(q)$, $Y(p, q) = p_i Y^i(q)$. Градиентами этих функций будут соответственно

$$\text{grad } X(p, q) = \left(X^j, \left(p_i \frac{\partial X^i}{\partial q_j} \right) \right), \quad \text{grad } Y(p, q) = \left(Y^j, \left(p_i \frac{\partial Y^i}{\partial q_j} \right) \right).$$

Значение формы $\overset{2}{\omega} = dp \wedge dq$ будет равно

$$\overset{2}{\omega}(\text{grad } X(p, q), \text{grad } Y(p, q)) = X^j p_i \frac{\partial Y^i}{\partial q_j} - Y^j p_i \frac{\partial X^i}{\partial q_j} = p_i [X, Y]^i,$$

а это означает, что скобкой Пуассона функций X, Y будет функция $[X, Y]$, т.е. соответствие между левоинвариантными функциями, линейными на $\mathfrak{g}^*$, продолжается до изоморфизма алгебр.

Пусть $V_1(q), V_2(q)$ – функции из V . В этом случае $V_i(p, q) = V_i(q)$, $i = 1, 2$, и в координатах (p, q)

$$\text{grad}_{T^*\mathfrak{G}} V_i = (0, \text{grad } V_i), \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, что теперь $\{V_1(q), V_2(q)\} = 0$.

Наконец, для функций $X(p, q), V(q)$ имеем

$$\overset{2}{\omega}(\text{grad } X(p, q), \text{grad } V(q)) = X^i \frac{\partial V}{\partial q_i} = L_X V;$$

здесь $L_X V$ – производная функции V вдоль векторного поля X .

Итак, рассмотренные выше функции образуют алгебру Ли, изоморфную $\hat{\mathfrak{g}}$. Зная скобки Пуассона базисных функций этой алгебры, мы получаем скобку Пуассона на множестве полиномов от базисных функций. В это множество включается и гамильтониан. Наконец, функции, являющиеся инвариантами коприсоединенного представления, становятся первыми интегралами рассматриваемой задачи. Теорема доказана.

Для многомерного обобщения кинетическая энергия твердого тела, состоящего из дискретного числа материальных точек, равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{A}r_i, \dot{A}r_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\Omega r_i, \Omega r_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega_{kl} r_{il} \omega_{km} r_{im};$$

здесь $A \in \text{So}(n)$, $\dot{A} = A\Omega$, $\Omega \in \text{so}(n)$ – скорость в теле. Для сплошного тела надо взять соответствующий интеграл. Обозначим $I_{lm} = \sum_i m_i r_{il} r_{im}$, тогда $T = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\Omega I \Omega)$; при этом момент в теле равен $M = \frac{\partial T}{\partial \Omega} = -\frac{1}{2}(\Omega I + I \Omega)$. Для простоты коэффициент перед M внесем в значение I и будем иметь $M = \Omega I + I \Omega$.

Таким образом, уравнения Эйлера $\dot{m} = \text{ad}_{\text{grad } T(m)}^* m$ в матричном виде записываются следующим образом (см. [18]):

$$(\Omega I + I \Omega)' = [\Omega I + I \Omega, \Omega] = [I, \Omega^2],$$

и именно это представление было проинтегрировано в [1].

С помощью скобки Пуассона эти же уравнения можно получить следующим образом.

Определим базисные векторы в $\text{so}(n)$: ν_{ij} – это кососимметрическая матрица, у которой на (i, j) -м, и (j, i) -м местах стоят соответственно 1 и -1 . В таких обозначениях имеем $\{\nu_{ij}, \nu_{jk}\} = \nu_{ik}$.

К этим обозначениям добавим $I = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\nu_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)\omega_{ij}$; тогда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{\nu_{ij}^2}{\alpha_i + \alpha_j},$$

а искомая гамильтонова система $\dot{\nu}_{ij} = \{\nu_{ij}, H\}$ будет иметь вид в полном соответствии с матричной записью:

$$(\alpha_i + \alpha_j)\dot{\omega}_{in} = (\alpha_i - \alpha_j) \sum_{l=1}^n \omega_{il} \omega_{lj}.$$

Теперь для получения многомерного обобщения задачи о движении тяжелого твердого тела надо выбрать подходящее представление для группы Ли $\text{So}(n)$. Эта задача решается не однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для многомерного обобщения задачи о движении тяжелого твердого тела в настоящей работе рассматривается минимальное представление $\text{So}(n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (см. также [11]). В работе [19] выбирается представление $\text{So}(n): \text{So}(n) \rightarrow \text{So}(n)$.

Определим базисные векторы алгебры $\hat{\mathfrak{g}} = \text{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$: ν_{ij} – это кососимметрическая матрица, у которой на (i, j) -м и (j, i) -м местах стоят соответственно 1 и -1 , γ_i – столбец, имеющий на i -м месте 1. В таких обозначениях имеем

$$\{\nu_{ij}, \nu_{jk}\} = \nu_{ik}, \quad \{\nu_{ij}, \gamma_j\} = \gamma_i, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Выбирая линейный потенциал по γ_i , получаем

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{\nu_{ij}^2}{\alpha_i + \alpha_j} + \sum_i r_i \gamma_i,$$

а искомая гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{\nu}_{ij} = \{H, \nu_{ij}\}, \\ \dot{\gamma}_i = \{H, \gamma_i\} \end{cases}$$

будет иметь вид

$$\begin{cases} (\alpha_i + \alpha_j) \dot{\omega}_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) \sum_{l=1}^n \omega_{il} \omega_{lj} + \gamma_j r_i - \gamma_i r_j, \\ \dot{\gamma}_i = - \sum_{l=1}^n \omega_{il} \gamma_l. \end{cases} \quad (1)$$

В терминах ad^* имеем

$$\begin{cases} \dot{m} = \text{ad}_{\text{grad } T(m)}^* m + \text{ad}_{\text{grad } U(x)}^* x, \\ \dot{x} = \text{ad}_{\text{grad } T(m)}^* x; \end{cases}$$

здесь $m \in \text{so}(n)^*$, $x \in (\mathbb{R}^n)^*$, или, в матричном виде,

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, \Omega] + R \wedge \Gamma, \\ \dot{\Gamma} = -\Omega \Gamma; \end{cases}$$

здесь $M, \Omega \in \text{so}(n)$, $\Gamma, R \in \mathbb{R}^n$. Матрица Ω есть матрица угловой скорости в теле, оператор инерции имеет вид $M = \Omega I + I \Omega$, $I^T = I$, Γ – вектор силы тяжести в теле и R – вектор центра тяжести.

§ 4. Интегрируемость по Лиувиллю многомерного обобщения случая Лагранжа

Естественно считать, что случай Лагранжа имеет место, если предположить, что подобно классическому случаю все диагональные элементы оператора инерции, кроме одного, равны между собой и все координаты вектора силы тяжести, кроме одного, равны нулю, т.е. если $I = \text{diag}(A, \dots, A, B)$, $R = (0, \dots, 0, r_n)$, то система (1) будет иметь достаточно простой вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{ij} = 0, \quad i, j \leq n-1, \\ \dot{\omega}_{in} = \frac{A-B}{A+B} \sum_{l=1}^n \omega_{il} \omega_{ln} + \frac{r_n}{(A+B)} \gamma_i, \quad i \leq n-1, \\ \dot{\gamma}_i = - \sum_{l=1}^n \omega_{il} \gamma_l. \end{cases} \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложенное многомерное обобщение случая Лагранжа является корректным в том смысле, что при $n = 3$ система (1) совпадает с классической системой уравнений Эйлера–Пуассона, а система (2) описывает классический случай Лагранжа.

При этом нельзя заранее утверждать, что не существует другого обобщения, для которого уравнения (2) являются частным случаем.

Учитывая, что часть переменных ω_{ij} являются формальными, запишем уравнения (2) в окончательном виде следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p} = \lambda \Omega p + \mu \gamma, \\ \dot{\gamma} = -\Omega \gamma - xp, \\ \dot{x} = (p, \gamma); \end{cases} \quad (3)$$

здесь $p = (\nu_{1n}, \dots, \nu_{n-1,n})$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$, $x = \gamma_n$, $\Omega = (\omega_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n-1$, $\lambda = \frac{A-B}{A+B}$, $\mu = \frac{r_n}{A+B}$.

Далее будем называть многомерной задачей Лагранжа дифференциальные уравнения, задающие обобщение случая Лагранжа для многомерного тела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [10]). Пусть кососимметрическая матрица U коммутирует с кососимметрической матрицей Ω . Тогда существует первый интеграл J_U системы (2),

$$J_U = (\lambda + 1)(\Omega U p, p) - 2\mu(U p, \gamma).$$

Доказательство этого представляет собой простое вычисление производной функции J_U вдоль векторного поля (3).

Полученные интегралы определены не на всей алгебре, поэтому необходимо распространить их на все пространство $(\mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n)^*$. Естественный способ, с помощью которого можно это сделать, – взять в качестве матрицы U нечетные степени матрицы Ω . Итак, первыми интегралами задачи (2) являются функции

$$J_r = (\lambda + 1)(\Omega^{2r} p, p) - 2\mu(\Omega^{2r-1} p, \gamma), \quad r = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

ТЕОРЕМА 4 (см. [10]). Для почти всех начальных условий в задаче, заданной на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ со структурой, определенной соотношениями

$$\{\nu_{ij}, \nu_{jk}\} = \nu_{ik}, \quad \{\nu_{ij}, \gamma_j\} = \gamma_i, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4A} \sum_{i < j < n-1} \nu_{ij}^2 + \frac{1}{2(A+B)} \sum_{i < n-1} p_i^2 + r_n \gamma_n, \quad \nu_{in} = (A+B)p_i,$$

гамильтонова система $\text{sgrad } H$ является вполне интегрируемой по Лиувиллю (см. [14]) и в смысле некоммутативной интегрируемости (см. [20]). Все

решения рассматриваемой задачи являются условно-периодическими, а траектории движения лежат на инвариантных торах размерности $n - 1$. Эти торы являются поверхностями уровня гамильтониана H , первых интегралов

$$\Omega_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{2A}, \quad i < j < n - 1,$$

образующих алгебру $\mathfrak{h} \approx \mathfrak{so}(n - 1)$, и первых интегралов

$$J_r = (\lambda + 1)(\Omega^{2r} p, p) + 2\mu(\Omega^{2r-1} p, \gamma), \quad r = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

В схеме интегрируемости по Лиувиллю инвариантные торы половинной размерности орбиты коприсоединенного представления задаются гамильтонианом H , первыми интегралами

$$J_r, \quad r = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

и сдвигами инвариантов алгебры линейных интегралов

$$\mathrm{Tr}(\Omega + \lambda a)^{2r}, \quad r = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathfrak{h}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инволютивность первых интегралов J_r , $r = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right]$, доказывается непосредственным вычислением. В качестве промежуточных результатов вычисления укажем следующие.

Пусть $h \in \mathfrak{h}$; обозначим через Ω_h матрицу, равную (Ω, h) . Тогда

$$\{h, \Omega\} = [\Omega, \Omega_h], \quad \{h, p\} = -\Omega_h p, \quad \{h, \gamma\} = -\Omega_h \gamma$$

и, как следствие,

$$\{h, \Omega^r p\} = -\Omega_h \Omega^r p, \quad \{h, \Omega^r \gamma\} = -\Omega_h \Omega^r \gamma.$$

Кроме того, обозначим $J'_r = (\Omega^{2r} p, p)$, $J''_r = (\Omega^{2r-1} p, \gamma)$; тогда

$$\{h, J'_r\} = \{h, J''_r\} = 0.$$

Используя приведенные соотношения, легко получить

$$\{J'_r, J'_s\} = \{J''_r, J''_s\} = 0, \quad \{J'_r, J''_s\} + \{J''_r, J'_s\} = 0,$$

что доказывает инволютивность интегралов J_r .

Чтобы доказать функциональную независимость первых интегралов

$$\Omega_{ij}, \quad i, j \leq n - 1, \quad J_r, \quad r = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

на орбите коприсоединенного представления, нужно доказать линейную независимость косых градиентов этих функций в некоторой точке.

Предположим, что существуют $\lambda_0, \lambda_{ij}, \lambda_m$ такие, что

$$\text{sgrad}\left(\sum \lambda_0 H + \lambda_{ij} \Omega_{ij} + \lambda_r I_r\right)\Big|_y = 0.$$

Тогда как следствие имеем в точке y

$$\left\{\sum \lambda_0 H + \lambda_{ij} \Omega_{ij} + \lambda_r J_r, h\right\} = \left\{\sum \lambda_{ij} \Omega_{ij}, h\right\} = 0.$$

Кососимметрическую матрицу с элементами λ_{ij} обозначим Λ . Имеем

$$\text{Tr}(\Lambda\{\Omega, h\}) = \text{Tr}(\Lambda[\Omega_h, \Omega]) = \text{Tr}(\Omega_h[\Omega, \Lambda]) = 0 \implies [\Omega, \Lambda] = 0,$$

т.е. Λ есть линейная комбинация степеней Ω почти всюду.

Предположим, что в точке y матрица Ω не имеет кратных корней, $\Omega p \neq 0$, $\gamma = 0$ и $x \neq 0$. Тогда в точке y имеем

$$\{J_r, \gamma\} = -\frac{2x}{k+1} \Omega^{2r} p, \quad \{H, \gamma\} = -xp, \quad \{\Omega, \gamma\} = 0.$$

Нетрудно видеть, что когда n нечетно, $\text{sgrad } J_r$, $r = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$, независимы, а когда n четно, независимы $\text{sgrad } J_r$, $r = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$, $\text{sgrad } H$. Следовательно,

$$\text{sgrad}\left(\sum \lambda_0 H + \lambda_{ij} \Omega_{ij} + \lambda_r J_r\right)\Big|_y = 0 \implies \lambda_r = 0, \quad \lambda_0 = 0$$

(в случае нечетного n гамильтониан не рассматриваем). Далее,

$$\{\lambda_{ij} \Omega_{ij}, p\} = \text{Tr}(\Lambda\{\Omega, p\}) = -2\Lambda p \neq 0,$$

т.е. найдена точка, где функции Ω_{ij} , $i, j \leq n-1$, J_r , $r = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$, функционально независимы на орбите, а если n четно, то в набор этих независимых функций можно добавить и гамильтониан.

Размерность орбиты общего положения коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ равна $\frac{n(n+1)}{2} - [\frac{n-1}{2}] - 1$ (см. [21]), следовательно, размерность поверхности уровня первых интегралов равна $n-1$.

Теперь необходимо указать $n-1$ коммутирующих векторных полей на поверхности уровня первых интегралов. Это значит, что нужно найти функции, находящиеся в инволюции со всеми первыми интегралами. Очевидно, что этими функциями являются интегралы J_r , инварианты $\text{Tr}(\Omega^{2r})$, $r = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$, коприсоединенного представления алгебры линейных интегралов $\mathfrak{h}$, а если n четно, то и H . Как видим, этих функций достаточно количество, равное $n-1$, следовательно, инвариантные многообразия – торы, поток на которых условно-периодичен.

Инвариантные торы размерности $n-1$ можно различными способами сгруппировать в инвариантные торы половинной размерности задачи. Для этого некоммутативную алгебру первых интегралов надо заменить инволютивным набором функционально независимых интегралов в количестве половинной размерности орбиты коприсоединенного представления. Для алгебры $\mathfrak{so}(n)$, в частности, эта задача решена в [2]. Как следует из этой работы, в качестве

инволютивного набора можно взять, например, сдвиги инвариантов коприсоединенного представления; при этом количество функционально независимых функций, находящихся в инволюции, будет достаточным. Тем самым, теорема полностью доказана¹.

§ 5. Классификация особых точек решений и целые решения классической задачи о движении тяжелого твердого тела

Содержание этого параграфа есть краткое изложение необходимых нам фактов из [12].

Уравнения Эйлера–Пуассона, задающие решение классической задачи о движении тяжелого твердого тела, запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} A\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p; \end{cases} \quad (4)$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{C}^3$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{C}^3$, $Ap = (A_1p_1, A_2p_2, A_3p_3)$, $A_i > 0$, $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$.

Сделаем замену переменных следующего вида:

$$p(t) = e^{-\tau} \tilde{p}(\tau), \quad \gamma(t) = e^{-2\tau} \tilde{\gamma}(\tau);$$

получим

$$\begin{cases} A\dot{\tilde{p}} = A\tilde{p} \times \tilde{p} + \tilde{\gamma} \times r + A\tilde{p}, \\ \dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma} \times \tilde{p} + 2\tilde{\gamma}. \end{cases} \quad (5)$$

Связь между решениями (4) и (5) выражается соотношениями

$$p(t) = \frac{1}{t - t_*} \tilde{p}(\ln(t - t_*)), \quad \gamma(t) = \frac{1}{(t - t_*)^2} \tilde{\gamma}(\ln(t - t_*)).$$

Пусть теперь $(\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}^0)$ – особая точка системы дифференциальных уравнений (5); тогда траектория $\tilde{p}(\tau)$, $\tilde{\gamma}(\tau)$, входящая в $(\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}^0)$, при обратной замене задается решением с особой точкой t_* ($t - t_* = e^\tau$)

$$p(t) = \tilde{p}^0(t - t_*)^{-1} + \dots, \quad \gamma(t) = \tilde{\gamma}^0(t - t_*)^{-2} + \dots.$$

Теперь чтобы получить асимптотику особых точек решений исходной системы (4), достаточно получить асимптотику решений системы (5) в окрестности особых точек, что является стандартной задачей. Для этого нужно сначала решить линеаризованную систему в окрестности особой точки, а затем применить оператор Пикара для полученного первого приближения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебраическую систему, задающую особые точки системы (5), мы называем *характеристической*:

$$\begin{cases} A\tilde{p}^0 \times \tilde{p}^0 + \tilde{\gamma}^0 \times r + A\tilde{p}^0 = 0, \\ \tilde{\gamma}^0 \times \tilde{p}^0 + 2\tilde{\gamma}^0 = 0. \end{cases}$$

¹Результаты, обобщающие теорему 4, см., например, в работе [11], а также в работах [22], [23].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Характеристическая система для уравнений Эйлера–Пуассона полностью решается, если выполнено условие вырожденности: хотя бы одна координата r_i равна нулю или среди собственных значений оператора инерции A_i есть равные.

В невырожденном случае система решается, если известны корни некоторого полинома восьмой степени с коэффициентами, зависящими от A_i, r_i .

При решении характеристической системы обнаруживаются случаи ее вырождения, соответствующие известным случаям интегрируемости Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Гриоли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Характеристическая система для уравнений Эйлера–Пуассона имеет два типа корней: $(\tilde{p}^0, 0)$ и $(\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}^0)$, $\tilde{\gamma}^0 \neq 0$. Эти корни являются коэффициентами главных частей асимптотик двух типов особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона, которые мы будем называть α -особыми и β -особыми точками.

Нахождение асимптотик особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона вышеописанным способом не гарантирует получения полного списка асимптотик всех особых точек. Для того чтобы найти все особые точки, мы применяем факторизацию потока в фазовом пространстве, которая превращает фазовое пространство в компактное голоморфное многообразие со структурой голоморфного слоения с особыми точками. Исследование всех особых точек полученного слоения позволяет найти все особые точки решений уравнений Эйлера–Пуассона.

Пусть $p(t), \gamma(t)$ – решение уравнений Эйлера–Пуассона; тогда решением будет и $\alpha p(\alpha t), \alpha^2 \gamma(\alpha t)$. Это обстоятельство позволяет произвести факторизацию на множестве траекторий решений системы (4).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{C}$ действует в $\mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$\alpha: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\alpha^{k_1} z_1, \dots, \alpha^{k_n} z_n), \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Тогда факторпространство $P_k^{n-1} = \{(z_1^{(k_1)} : \dots : z_n^{(k_n)})\}$ по этому действию является компактным голоморфным многообразием.

ТЕОРЕМА 6. Каноническая проекция $\pi: \mathbb{C}^6 \rightarrow P_*^5$, $*$ = (1, 1, 1, 2, 2, 2), $\mathbb{C}^6 = \{(p, \gamma)\}$, проектирует слоение, задаваемое потоком (4) в голоморфное слоение $\mathcal{F}$ компактного голоморфного многообразия P_*^5 .

Все особые точки слоения $\mathcal{F}$ компактного голоморфного многообразия P_*^5 есть π -проекции особых точек z_0 системы уравнений (4) и π -проекции решений $\tilde{z}^0$ характеристической системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Слоение $\mathcal{F}$ является интегрируемым, поскольку существует послойно-инвариантное отображение

$$J: P_*^5 \setminus X^2 \rightarrow P^2,$$

$$J: (p_1^{(1)} : p_2^{(1)} : p_3^{(1)} : \gamma_1^{(2)} : \gamma_2^{(2)} : \gamma_3^{(2)}) \rightarrow (\mathcal{H}^6(p, \gamma) : \mathcal{M}^4(p, \gamma) : \mathcal{T}^3(\gamma)),$$

где $X^2 = \{\pi(z) : \mathcal{H}(z) = \mathcal{M}(z) = \mathcal{T}(z) = 0\}$.

Кроме того, поверхность X^2 является инвариантной для слоения $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 7. Все особые точки решений уравнений Эйлера–Пуассона (4) являются α - или β -особыми точками либо являются предельными особыми точками α - или β -особых точек, либо аппроксимируются асимптотикой β -особых точек (последнее, если одно из собственных значений линейной аппроксимации в окрестности особой β -точки системы (5) равно нулю).

В формулировке теоремы 7 отсутствует упоминание об особых точках, являющихся проекциями особых точек уравнений Эйлера–Пуассона (4). Причина заключается в том, что эти особые точки дают асимптотику при $t \rightarrow t_* = \infty$, в отличие от α - или β -особых точек, для которых $t_* \in \mathbb{C}$. Для доказательства теоремы существенна только компактность многообразия P_*^5 .

ТЕОРЕМА 8. Все непостоянные решения $z(t)$ уравнений Эйлера–Пуассона имеют особые точки $t_* \in \mathbb{C}$, если

$$\prod_{\sigma} B_{12} \sum_{\sigma} r_1 \sqrt{B_{23}} \neq 0.$$

Условие теоремы 8 находится как условие отсутствия особых точек, являющихся π -проекциями особых точек уравнений (4). Идея доказательства заключается в следующем.

Пусть $\Gamma(t)$ – траектория, по которой $z(t) \rightarrow \infty$. Благодаря компактности P_*^5 на этой траектории найдутся точки t_0, t_1 такие, что $\pi(z(t_0)) \approx \pi(z(t_1))$. Пусть норма вектора $z(t_1)$ в $k > 0$ раз больше нормы $z(t_0)$. Тогда в силу квазиодно-родности уравнений Эйлера–Пуассона и отсутствия особых точек, являющихся π -проекциями особых точек уравнений (4), от точки t_1 можно дойти до точки t_2 так, что норма вектора $z(t_2)$ будет в k раз больше нормы $z(t_1)$, причем за время, в k раз меньшее, чем от t_0 до t_1 . Повторяя это действие бесконечное число раз, за конечное время можно достичь бесконечного значения нормы $z(t)$.

ТЕОРЕМА 9. Все целые решения уравнений Эйлера–Пуассона (4) исчерпываются частными решениями случаев Эйлера, Лагранжа и Гриоли.

Теперь (см. теорему 8) мы можем, используя асимптотику особых точек $\pi(z_0)$, найти все целые решения.

§ 6. Асимптотика особых точек решений многомерного обобщения случая Лагранжа

Для нахождения асимптотики, следуя методу из [12], сделаем замену переменных в системе (3) следующего вида:

$$\tilde{\omega}_{ij}(\tau) = e^{\tau} \omega_{ij}(e^{\tau}), \quad \tilde{\gamma}_i(\tau) = e^{2\tau} \gamma_i(e^{\tau}).$$

Мы получим систему

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\omega}}_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}, \quad i, j \leq n-1, \\ \dot{\tilde{\omega}}_{in} = \frac{A-B}{A+B} \sum_{l=1}^n \tilde{\omega}_{il} \tilde{\omega}_{ln} - \frac{r_n}{A+B} \tilde{\gamma}_i + \tilde{\omega}_{in}, \quad i \leq n-1, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_i = - \sum_{l=1}^n \tilde{\omega}_{il} \tilde{\gamma}_l + 2\tilde{\gamma}_i, \end{cases} \quad (6)$$

для которой исходные переменные выражаются через новые следующим образом:

$$\omega_{ij}(\tau) = t^{-1}\tilde{\omega}_{ij}(\ln(t)), \quad \gamma_i(\tau) = t^{-2}\tilde{\gamma}_i(\ln(t)).$$

Из этого соотношения следует, что если получить асимптотику траектории, входящей в особую точку системы (6), то в исходных координатах мы получим асимптотику особой точки решения многомерной задачи Лагранжа.

Особые точки системы (6) находим из следующей системы, которую далее называем характеристической:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{ij} = 0, \quad i, j \leq n-1, \\ \frac{A-B}{A+B} \sum_{l=1}^n \tilde{\omega}_{il}\tilde{\omega}_{ln} - \frac{r_n}{A+B} \tilde{\gamma}_i + \tilde{\omega}_{in} = 0, \quad i \leq n-1, \\ -\sum_{l=1}^n \tilde{\omega}_{il}\tilde{\gamma}_l + 2\tilde{\gamma}_i = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7), записанная в обозначениях, аналогичных (5), имеет вид

$$\begin{cases} \mu\tilde{\gamma} + \tilde{p} = 0, \\ -\tilde{x}\tilde{p} + 2\tilde{\gamma} = 0, \\ (\tilde{p}, \tilde{\gamma}) + 2\tilde{x} = 0, \end{cases}$$

легко решается, и мы получаем $(n-2)$ -параметрическую систему решений

$$\tilde{x}^0 = -\frac{2}{\mu}, \quad \tilde{\gamma}^0 = -\frac{\tilde{p}^0}{\mu}, \quad (\tilde{p}^0, \tilde{p}^0) = -4. \quad (8)$$

Теперь в найденных особых точках линеаризуем систему дифференциальных уравнений (6):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\omega}}_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}, \quad i, j \leq n-1, \\ \dot{\tilde{\omega}}_{in} = \frac{A-B}{A+B} \sum_{l=1}^n \tilde{\omega}_{il}\tilde{\omega}_{ln}^0 - \frac{r_n}{A+B} \tilde{\gamma}_i + \tilde{\omega}_{in}, \quad i \leq n-1, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_i = -\sum_{l=1}^n (\tilde{\omega}_{il}\tilde{\gamma}_l^0 + \tilde{\omega}_{il}^0\tilde{\gamma}_l) + 2\tilde{\gamma}_i, \end{cases}$$

и запишем ее в обозначениях, аналогичных (5):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega}, \\ \dot{\tilde{p}} = \lambda\tilde{\Omega}\tilde{p}^0 + \mu\tilde{\gamma} + \tilde{p}, \\ \dot{\tilde{\gamma}} = -\tilde{\Omega}\tilde{\gamma}^0 - \tilde{x}^0\tilde{p} - \tilde{x}\tilde{p}^0 + 2\tilde{\gamma}, \\ \dot{\tilde{x}} = (\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}) + (\tilde{p}, \tilde{\gamma}^0) + 2\tilde{x}. \end{cases} \quad (9)$$

Система для нахождения собственных значений линейного оператора в правой части (9) имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = \nu \tilde{\Omega}, \\ \lambda \tilde{\Omega} \tilde{p}^0 + \mu \tilde{\gamma} + \tilde{p} = \nu \tilde{p}, \\ -\tilde{\Omega} \tilde{\gamma}^0 - \tilde{x}^0 \tilde{p} - \tilde{x} \tilde{p}^0 + 2\tilde{\gamma} = \nu \tilde{\gamma}, \\ (\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}) + (\tilde{p}, \tilde{\gamma}^0) + 2\tilde{x} = \nu \tilde{x}. \end{cases}$$

Далее возможны два случая: $\tilde{\Omega} = 0$ или $\nu = 1$. Рассмотрим их.

1) Для $\nu = 1$ имеем

$$\begin{cases} \lambda \tilde{\Omega} \tilde{p}^0 + \mu \tilde{\gamma} = 0, \\ -\tilde{\Omega} \tilde{\gamma}^0 - \tilde{x}^0 \tilde{p} - \tilde{x} \tilde{p}^0 + \tilde{\gamma} = 0, \\ (\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}) + (\tilde{p}, \tilde{\gamma}^0) + \tilde{x} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из кососимметричности $\tilde{\Omega}$, первого уравнения (10) и соотношений (7) следует, что $(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}^0) = 0$. Подставим представление $\tilde{\gamma}$ из первого уравнения (10) и представление $\tilde{p}$ из второго уравнения (10) в третье уравнение. Мы получаем, что $\tilde{x} = 0$, и, следовательно, решение (10) имеет вид

$$\tilde{p} = \frac{\lambda - 1}{2} \tilde{\Omega} \tilde{p}^0, \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\lambda}{\mu} \tilde{\Omega} \tilde{p}^0, \quad \tilde{x} = 0,$$

из которого следует, что размерность собственного пространства с собственным значением 1 равна $\dim \tilde{\Omega}$.

2) Для $\tilde{\Omega} = 0$ имеем

$$\begin{cases} \mu \tilde{\gamma} + \tilde{p} = \nu \tilde{p}, \\ -\tilde{x}^0 \tilde{p} - \tilde{x} \tilde{p}^0 + 2\tilde{\gamma} = \nu \tilde{\gamma}, \\ (\tilde{p}^0, \tilde{\gamma}) + (\tilde{p}, \tilde{\gamma}^0) + 2\tilde{x} = \nu \tilde{x}. \end{cases}$$

Подставив представление $\tilde{\gamma}$ из первого уравнения в два других, получим

$$\begin{cases} \mu \tilde{\gamma} = (\nu - 1) \tilde{p}, \\ -\mu \tilde{x} \tilde{p}^0 = \nu(\nu - 3) \tilde{p}, \\ (\nu - 2)(\tilde{p}^0, \tilde{p}) = \mu(\nu - 2) \tilde{x}. \end{cases}$$

2а) $\nu(\nu - 3) \neq 0$. Выражая $\tilde{p}$ из второго уравнения и подставляя в третье, с учетом (8) получаем $(\nu - 4)(\nu - 2)(\nu + 1)\mu \tilde{x} = 0$. Итак,

$$(\nu - 4)(\nu - 2)(\nu + 1) = 0, \quad \tilde{p} = -\frac{\mu \tilde{x}}{\nu(\nu - 3)} \tilde{p}^0, \quad \mu \tilde{\gamma} = (\nu - 1) \tilde{p}.$$

Размерность собственного пространства с собственным значением -1 , 2 или 4 равна 1 .

2b) $\nu(\nu - 3) = 0$. В этом случае мы, очевидным образом, получаем

$$\tilde{x} = 0, \quad (\tilde{p}^0, \tilde{p}) = 0, \quad \tilde{\gamma} = \frac{(\nu - 1)\tilde{p}}{\mu}.$$

Размерность собственного пространства с собственным значением 0 или 3 равна $n - 2$.

Общая размерность собственных пространств равна $2n - 1 + \dim \tilde{\Omega}$, т.е. для линейного оператора системы (9) найден собственный базис.

ТЕОРЕМА 10. *Все решения многомерной задачи Лагранжа имеют в особых точках асимптотику следующего вида:*

$$\begin{cases} p(t) = \tilde{p}^0 t^{-1} + \frac{\lambda - 1}{2} \Omega \tilde{p}^0 + \frac{1}{2} \mu x \tilde{p}^0 t - \frac{\lambda}{2} \Omega^2 \tilde{p}^0 t + \frac{1}{4} p^\perp t^2 \\ \quad + \frac{1}{8} ((\lambda - 1) \Omega p^\perp - 2\mu x_1 \tilde{p}^0 - x^2 \mu^2 \tilde{p}^0 + 2\mu x \lambda \Omega^2 \tilde{p}^0 - 2\lambda^2 \Omega^4 \tilde{p}^0) t^3 + \dots, \\ \gamma(t) = \tilde{\gamma}^0 t^{-2} - \lambda \mu^{-1} \Omega \tilde{p}^0 t^{-1} + \frac{1}{2} x \tilde{p}^0 - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu^{-1} \Omega^2 \tilde{p}^0 \\ \quad + \frac{1}{2} \mu^{-1} (p^\perp - \lambda \mu x \Omega \tilde{p}^0 + \lambda^2 \Omega^3 \tilde{p}^0) t \\ \quad + \frac{1}{8} \mu^{-1} ((\lambda - 3) \Omega p^\perp - 6\mu x_1 \tilde{p}^0 - 3\mu^2 x^2 \tilde{p}^0 + 6\mu x \lambda \Omega^2 \tilde{p}^0 - 3\lambda^2 \Omega^4 \tilde{p}^0) t^2 + \dots, \\ x(t) = \tilde{x}^0 t^{-2} + x + x_1 t^2 + x_2 t^4 + \dots \end{cases} \quad (11)$$

В представлении (11)

$$\tilde{x}^0 = -\frac{2}{\mu}, \quad \tilde{\gamma}^0 = -\frac{\tilde{p}^0}{\mu}, \quad (\tilde{p}^0, \tilde{p}^0) = -4, \quad p^\perp \perp \tilde{p}^0,$$

x, x_1 – свободные параметры. Размерность множества свободных параметров равна $2n - 2 + \dim \Omega$, $\Omega \in \mathfrak{h}$. Асимптотика (11) является асимптотикой общего положения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя полученное разложение линейного оператора системы дифференциальных уравнений (9), запишем ее решение для траекторий, входящих в особую точку:

$$\begin{cases} \tilde{p}(t) = \tilde{p}^0 + \frac{\lambda - 1}{2} \Omega \tilde{p}^0 e^t + \frac{1}{2} \mu x \tilde{p}^0 e^{2t} + p^\perp e^{3t} + \frac{1}{2} \mu x_1 \tilde{p}^0 e^{4t}, \\ \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}^0 - \lambda \mu^{-1} \Omega \tilde{p}^0 e^t + \frac{1}{2} x \tilde{p}^0 e^{2t} + 2\mu^{-1} p^\perp e^{3t} + \frac{1}{2} x_1 \tilde{p}^0 e^{4t}, \\ \tilde{x}(t) = \tilde{x}^0 + x e^{2t} + x_1 e^{4t}. \end{cases}$$

Добавляя необходимые слагаемые и возвращаясь к переменным исходной задачи, получаем искомую асимптотику особой точки. Размерность фазового пространства равна $2n - 1 + \dim \Omega$, $\Omega \in \mathfrak{h}$. Следовательно, учитывая число свободных параметров, получаем, что (11) – асимптотика общего положения.

Из доказанной теоремы вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 11. *Все решения многомерного обобщения случая Лагранжа задачи о движении тяжелого твердого тела однозначны.*

§ 7. Целые решения многомерного обобщения случая Лагранжа

Найдем целые решения для многомерной задачи Лагранжа. Для этого мы используем схему исследования (см. [13]), примененную в классической задаче. Вообще говоря, нет принципиальных препятствий для нахождения всех целых решений не только для многомерного случая Лагранжа, но и для многомерного тела общего вида. Однако соответствующее исследование оказывается весьма громоздким, поскольку требует использования явного вида инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$, а затем и решения или хотя бы эффективного исследования нелинейных алгебраических систем уравнений, аналогичных тем, которые рассматривались в классическом случае.

Поскольку задача о движении многомерного тела является не актуальной по существу, а, скорее, модельной, то такие исследования мы не осуществляем, а приводим тот результат, который можно получить без серьезных вычислений, используя лишь идею компактификации фазового пространства.

Целые решения для классической задачи твердого тела имеются, если на слое, полученном в результате факторизации фазового пространства, есть особые точки, лежащие на нулевой поверхности уровня всех имеющихся первых интегралов. Соответствующие алгебраические соотношения дают переопределенную систему, включающую в себя параметры многомерного тела. Очевидно, что среди решений этой системы должно быть и решение, соответствующее случаю Лагранжа, так как это верно в классическом случае.

Система, задающая подходящие особые точки, имеет вид

$$\begin{cases} \lambda\Omega p + \mu\gamma = 0, \\ -\Omega\gamma - xp = 0, \\ (p, \gamma) = 0. \end{cases}$$

Эта система легко решается, и мы имеем

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{\lambda}{\mu}\Omega p, \\ \lambda\Omega^2 p - \mu xp = 0, \\ (p, \Omega p) = 0. \end{cases}$$

Последнее равенство системы выполняется тождественно, и окончательно получаем

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{\lambda}{\mu}\Omega p, \\ (\lambda\Omega^2 - \mu x)p = 0. \end{cases}$$

Итак, если мы рассматриваем целое решение, то при $t \rightarrow \infty$, а также при условии $(p, \gamma) \rightarrow \infty$ должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \gamma \sim -\frac{\lambda}{\mu}\Omega p, \\ x \sim \frac{\lambda}{\mu}, \end{cases}$$

где x – собственное значение оператора (Ω^2) .

Последнее означает, что функция $x(t)$ является ограниченной на всей комплексной плоскости времени, т.е. является константой.

Дальнейшие рассуждения являются уже очевидными, поскольку тогда система (3), задающая движение многомерного тела в случае Лагранжа, является просто линейной системой дифференциальных уравнений.

Остается только найти такое решение (3), при котором $(p, \gamma) \equiv 0$. В принципе эта задача алгоритмически разрешима, и можно сначала найти ее общее решение, а потом на полученное решение наложить соответствующее условие. Заранее ясно, что соответствующие вычисления окажутся достаточно громоздкими и, как это обычно бывает, плохо иллюстрируют геометрию решений. Мы поступим иначе.

Поскольку $(p, \gamma) \equiv 0$, то в силу (3) $(p, \gamma)' \equiv 0$, а значит,

$$(\lambda + 1)(\Omega p, \gamma) - x(p, p) + \mu(\gamma, \gamma) \equiv 0.$$

Поскольку функции $(p, p) - 2\mu x$, $(\gamma, \gamma) + x^2$ являются первыми интегралами, то функции (p, p) , (γ, γ) , $(\Omega p, \gamma)$ являются константами вдоль искомого решения.

Аналогичным образом получим

$$(\Omega p, \gamma)' = (\lambda + 1)(\Omega^2 p, \gamma) \equiv 0, \quad (\Omega^2 \gamma, \gamma)' = -x(\Omega^2 p, \gamma) \equiv 0.$$

Благодаря наличию интеграла J_2 получаем также, что $(\Omega^2 p, p) \equiv \text{const}$,

$$(\Omega^2 p, \gamma)' = (\lambda + 1)(\Omega^3 p, \gamma) - x(\Omega^2 p, p) + \mu(\Omega^2 \gamma, \gamma) \equiv 0.$$

Очевидно, что, действуя таким образом, мы можем доказать, что вдоль искомого целого решения функции $(\Omega^{2r} p, p)$, $(\Omega^{2r} p, \gamma)$, $(\Omega^{2r+1} p, \gamma)$, $(\Omega^{2r} \gamma, \gamma)$ являются постоянными. Эти частные интегралы задают поверхность размерности $[(n-1)/2]$.

В самом деле, рассмотрим градиенты этих функций в $2(n-1)$ -мерном пространстве. Очевидно, что градиенты функций

$$\begin{aligned} \text{grad}((\Omega^{2r} p, p)) &= (2\Omega^{2r} p, 0), & \text{grad}((\Omega^{2r+1} p, \gamma)) &= (\Omega^{2r+1} \gamma, \Omega^{2r+1} p), \\ \text{grad}((\Omega^{2r} p, \gamma)) &= (\Omega^{2r} \gamma, \Omega^{2r} p) \end{aligned}$$

линейно независимы, значит, размерность поверхности уровня частных интегралов не больше $[(n-1)/2]$. Но эта размерность и не меньше, поскольку такую размерность имеет тор с образующими $(\exp(\Omega^{2r+1} t)p, \exp(\Omega^{2r+1} t)\gamma)$. Это означает, что каждая точка траектории искомого целого решения имеет вид $(A(t)p, A(t)\gamma)$, где $A(t) \in \text{So}(n-1)$, $\dot{A}(t) = A(t)C(t)$, $C(t) \in \text{so}(n-1)$, $[C(t), \Omega] = 0$. Кроме того, поскольку мы ищем линейное решение, то $C(t) \equiv \text{const}$.

Подставив это представление в систему (3), получим

$$\begin{cases} ACp = \lambda \Omega Ap + \mu A\gamma, \\ AC\gamma = -\Omega A\gamma - xAp. \end{cases}$$

Поскольку $[C(t), \Omega] = 0$, то окончательно имеем линейную систему, в которой C , p , γ не зависят от времени, т.е. являются по сути начальными условиями:

$$\begin{cases} Cp = \lambda\Omega p + \mu\gamma, \\ C\gamma = -\Omega\gamma - xp. \end{cases}$$

Полученная система легко решается:

$$\begin{cases} (C - \lambda\Omega)p = \mu\gamma, \\ (C + \Omega)\gamma = -xp \end{cases} \iff \begin{cases} (C - \lambda\Omega)p = \mu\gamma, \\ (C + \Omega)(C - \lambda\Omega)p = -\mu xp. \end{cases}$$

Найти собственные векторы оператора $(C + \Omega)(C - \lambda\Omega)$ достаточно просто, тем самым, задача нахождения целых решений многомерной задачи Лагранжа для интеграла Ω общего положения полностью решена. Отметим также, что необходимое начальное условие $(p, \gamma) \equiv 0$ выполнено, поскольку матрица $(C - \lambda\Omega)$ (или $(C + \Omega)$) кососимметрична.

ТЕОРЕМА 12. *Все целые решения многомерного обобщения случая Лагранжа задачи о движении тяжелого твердого тела*

$$\begin{cases} \dot{p} = \lambda\Omega p + \mu\gamma, \\ \dot{\gamma} = -\Omega\gamma - xp, \\ \dot{x} = (p, \gamma) \end{cases} \quad (12)$$

для кососимметрической матрицы общего положения $\Omega \in \mathfrak{so}(n-1)$ имеют вид

$$\begin{cases} p(t) = \exp(Ct)p_0, \\ \gamma(t) = \exp(Ct)\gamma_0, \\ x(t) = x_0, \end{cases}$$

где $[C, \Omega] = 0$, $C \in \mathfrak{so}(n-1)$, p_0 – собственный вектор оператора $(C - \lambda\Omega)(C + \Omega)$; $-\mu x_0$ – его собственное значение; γ_0 – произвольное начальное значение γ .

Несложно убедиться в том, что в классическом случае $n = 3$ теорема 12 дает известное целое решение. Напомним, что определяющие соотношения классического решения являются следующими:

$$(\dot{\gamma}_3)^2 \equiv 0, \quad p_1 = \lambda\gamma_1, \quad p_2 = \lambda\gamma_2, \quad \lambda = \text{const},$$

а решения $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ выражаются через синусы и косинусы.

Дифференциальные уравнения классического случая Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} k\dot{p}_1 = (k-1)p_2p_3 + r_3\gamma_2, \\ k\dot{p}_2 = (1-k)p_1p_3 - r_3\gamma_1, \\ \dot{p}_3 = 0, \\ \dot{\gamma}_1 = p_3\gamma_2 - p_2\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_2 = p_1\gamma_3 - p_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_3 = p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2. \end{cases} \quad (13)$$

Чтобы перейти от системы (12) к системе (13), надо сделать следующие переобозначения:

$$\Omega \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -p_3 \\ p_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad p \rightarrow \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$x \rightarrow \gamma_3, \quad \lambda \rightarrow \frac{1-k}{k}, \quad \mu \rightarrow -\frac{r_3}{k}.$$

Теперь мы видим, что в силу теоремы 12 $(\dot{\gamma}_3)^2 \equiv 0$, следовательно, в силу (13) $p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2 \equiv 0$ или $p_1 = \lambda\gamma_1$, $p_2 = \lambda\gamma_2$. Наконец, в силу линейности решения системы (13) последние два соотношения выполняются при фиксированном λ .

Список литературы

- [1] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 93–94; англ. пер.: S. V. Manakov, “Note on the integration of Euler’s equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body”, *Funct. Anal. Appl.*, **10:4** (1976), 328–329.
- [2] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:2** (1978), 396–415; англ. пер.: A. S. Miščenko, A. T. Fomenko, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, **12:2** (1978), 371–389.
- [3] M. Adler, P. van Moerbeke, “Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves”, *Adv. in Math.*, **38:3** (1980), 267–317.
- [4] M. Adler, P. van Moerbeke, “Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory”, *Adv. in Math.*, **38:3** (1980), 318–379.
- [5] T. Ratiu, P. van Moerbeke, “The Lagrange rigid body motion”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **32:1** (1982), 211–234.
- [6] Ю. А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела*, Наука, М., 1977.
- [7] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003.
- [8] V. Dragović, B. Gajić, “An L – A pair for the Hess–Apel’rot system and a new integrable case for the Euler–Poisson equations on $\mathfrak{so}(4) \times \mathfrak{so}(4)$ ”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **131:4** (2001), 845–855.
- [9] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31:1** (1976), 55–136; англ. пер.: B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties”, *Russian Math. Surveys*, **31:1** (1976), 59–146.
- [10] А. В. Беляев, “О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести”, *Матем. сб.*, **114(156):3** (1981), 465–470; англ. пер.: A. V. Beljaev, “On the motion of a multidimensional body with fixed point in a gravitational field”, *Math. USSR-Sb.*, **42:3** (1982), 413–418.
- [11] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, “The Kowalewski top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions”, *Comm. Math. Phys.*, **122:2** (1989), 321–354.
- [12] A. Belyaev, “The factorization of the flow defined by the Euler–Poisson equations”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **7:4** (2001), 18–30.

- [13] А. В. Беляев, “О целых решениях уравнения Эйлера–Пуассона”, *Укр. матем. журн.*, **56**:5 (2004), 677–686; англ. пер.: A. V. Belyaev, “Entire solutions of the Euler–Poisson equations”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:5 (2004), 817–829.
- [14] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989; англ. пер.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [15] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [16] J. Marsden, A. Weinstein, “Reduction of symplectic manifolds with symmetry”, *Rep. Mathematical Phys.*, **5**:1 (1974), 121–130.
- [17] А. В. Бочаров, А. М. Виноградов, “Гамильтонова форма механики с трением, неголономной механики, инвариантной механики, теории преломления и удара”, добавление II к статье: А. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт, Структура гамильтоновой механики, *УМН*, **32**:4 (1977), 228–234; англ. пер.: A. V. Bocharov, A. M. Vinogradov, “The Hamiltonian form of mechanics with friction, non-holonomic mechanics, invariant mechanics, the theory of refraction and impact”, appendix II: A. M. Vinogradov, B. A. Kupersmidt, The structures of Hamiltonian mechanics, *Russian Math. Surveys*, **32**:4 (1977), 235–241.
- [18] А. С. Мищенко, “Интегралы геодезических потоков на группах Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **4**:3 (1970), 73–77; англ. пер.: A. S. Mishchenko, “Integral geodesics of a flow on Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **4**:3 (1970), 232–235.
- [19] T. Ratiu, “Euler–Poisson equations on Lie algebras and the N -dimensional heavy rigid body”, *Amer. J. Math.*, **104**:2 (1982), 409–448.
- [20] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:2 (1978), 113–121.
- [21] M. Rais, “L’indice des produits semi-directs $E \times_{\rho} g$.”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **287**:4 (1978), 195–197.
- [22] А. В. Болсинов, “Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92; англ. пер.: A. V. Bolsinov, “Compatible Poisson brackets on lie algebras and completeness of families of functions in involution”, *Math. USSR-Izv.*, **38**:1 (1992), 69–90.
- [23] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, “Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли”, *Матем. заметки*, **72**:1 (2002), 11–34; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, “Compatible Poisson Brackets on Lie Algebras”, *Math. Notes*, **72**:1 (2002), 10–30.

А. В. Беляев (A. V. Belyaev)

Донецкий государственный университет управления,
Украина
E-mail: nika@vnet.dn.ua

Поступила в редакцию

05.05.2010 и 11.05.2011