Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О квазиинвариантах Римана, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 6, 111–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:24:11

УДК 517.954

С. И. Похожаев

О квазиинвариантах Римана

Введено понятие квазиинвариантов Римана и рассмотрены приложения этих квазиинвариантов к некоторым законам сохранения. Проведен детальный анализ случая неизэнтропического течения идеального политропного газа. Получены достаточные условия возникновения градиентных катастроф.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: инварианты Римана, квазиинварианты Римана, законы сохранения, градиентная катастрофа, неизэнтропическое течение идеального газа.

§ 1. Введение

Известна та плодотворная роль, которую играют инварианты Римана в теории законов сохранения, описываемых гиперболическими системами (см., например, [1]–[3] и приведенную там литературу). К сожалению, эти инварианты существуют только для узкого класса систем. По существу, общий класс систем, допускающих инварианты Римана, ограничивается случаем систем вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^m a_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

при $x \in \mathbb{R}$, $m = 2$ с коэффициентами $a_{ki} = a_{ki}(u_1, u_2)$, удовлетворяющими условию гиперболичности

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \geq 0.$$

При рассмотрении таких систем с $m > 2$ или даже с $a_{ki} = a_{ki}(t, x, u_1, u_2)$ в случае $m = 2$ инварианты Римана, как правило, не существуют. Оказывается, что если ввести понятие квазиинвариантов, то класс систем, для которых существуют квазиинварианты, будет существенно шире класса систем, для которых существуют инварианты Римана.

Под *квазиинвариантом Римана системы уравнений* понимается функция, зависящая от решения этой системы и монотонно изменяющаяся вдоль соответствующей характеристики исходной системы.

При этом под *квазиинвариантом Римана нулевого порядка* понимается функция вида

$$R_0(t, x, u) = R_0(t, x, u_1, \dots, u_m),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00441 и № 09-01-12157 офи-м) и Программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/5328).

а под *квазиинвариантом Римана высшего порядка* понимается функция, зависящая также от производных решения соответствующего порядка.

При этом, как и в случае инвариантов Римана, поведение соответствующих квазиинвариантов определяется дифференциальными уравнениями первого порядка вдоль соответствующих характеристик.

Но, в отличие от инвариантов Римана, значение этих квазиинвариантов, вообще говоря, не сохраняется. При этом для широкого класса квазилинейных систем имеет место монотонное изменение этих квазиинвариантов вдоль соответствующих характеристик.

Это дает возможность получить как достаточные условия существования гладкого глобального по $t > 0$ решения задачи Коши, так и достаточные условия отсутствия такого решения, а также установить оценку времени градиентной катастрофы в зависимости от начальных данных.

В основе анализа лежит метод квазиинвариантов Римана.

Для нахождения квазиинвариантов Римана используется метод специальных продолжений исходной системы уравнений. Отметим, что метод продолжения для систем гиперболических уравнений известен и широко применяется для исследования решений таких систем (см., например, работы [4]–[7]).

Для нахождения квазиинвариантов Римана мы используем некоторую модификацию этого метода.

По существу, основным содержанием настоящей статьи является представление подхода, основанного на использовании квазиинвариантов Римана. Для представления этого подхода мы рассматриваем систему уравнений, описывающую неизэнтропическое одномерное течение сжимаемого идеального газа, и скалярные законы сохранения в многомерном случае. Исследованию неизэнтропического одномерного течения идеального сжимаемого газа посвящена обширная литература (см., например, работы [8]–[11] и ссылки в них). Отметим, что представленные в настоящей статье соответствующие результаты носят более конструктивный характер.

Статья имеет следующую структуру.

В § 2 и § 3 излагается суть предлагаемого подхода. А именно, в § 2 на основании известной техники нахождения инвариантов Римана (см., например, [2], [3], [12]–[14]) выводятся условия существования квазиинвариантов Римана нулевого порядка.

В § 3 для системы уравнений, описывающей неизэнтропическое течение идеального газа, находятся квазиинварианты Римана. В § 4 содержится общая схема метода специальных продолжений. В § 5 рассматривается проблема отсутствия градиентной катастрофы. Проблема существования градиентной катастрофы рассматривается в § 6. В § 7 вводятся квазиинварианты Римана первого порядка. Эти квазиинварианты вычисляются для системы уравнений, описывающей неизэнтропическое течение газа. Случай неизэнтропического течения политропного газа рассматривается в § 8, где устанавливаются достаточные условия возникновения градиентной катастрофы. Параграф 9 посвящен исследованию случая изэнтропического течения политропного газа. Здесь выводится критерий возникновения градиентной катастрофы. Отметим, что этот критерий можно также получить на основании результатов П. Лакса [15]

и Дж. Джонсона [16]. Мы включили в статью этот параграф с целью демонстрации предлагаемого подхода на этом классическом примере изэнтропического течения газа. Многомерный случай, а именно, скалярные многомерные законы сохранения рассматриваются в § 10. Здесь установлен критерий возникновения градиентных катастроф для решений таких уравнений. В заключительном § 11 рассматривается приложение полученного критерия к специальному нелинейному уравнению второго порядка.

Отметим, что одно и то же обозначение в разных параграфах может соответствовать разным величинам.

§ 2. Квазиинварианты Римана нулевого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Здесь $u = u(t, x)$ – вектор-функция с вещественными компонентами $u_i = u_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, $A(t, x, u)$ – $(m \times m)$ -матрица с вещественными элементами $A_{ij}(t, x, u)$.

Введем, следуя теории инвариантов Римана, C^1 -функцию вида

$$R = R(t, x, u_1, \dots, u_m) \quad (2.2)$$

(см. [2], [3]) и рассмотрим ее поведение вдоль некоторой кривой

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t, x, u_1, \dots, u_m). \quad (2.3)$$

Тогда для производной

$$D_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x}$$

вдоль этой кривой получаем

$$D_\lambda R = \frac{\partial R}{\partial t} + \lambda \frac{\partial R}{\partial x} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial R}{\partial u_k} \left(- \sum_{i=1}^m a_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x} \right). \quad (2.4)$$

Отсюда, приравнявая к нулю коэффициенты при $\frac{\partial u_k}{\partial x}$, получаем систему

$$A^* \nabla_u R = \lambda \nabla R, \quad (2.5)$$

где $A^* = A^*(t, x, u_1, \dots, u_m)$ – матрица, сопряженная матрице A с элементами $a_{ik}(t, x, u)$, $i, k = 1, \dots, m$.

Отсюда получаем известное условие выполнения дифференциального соотношения

$$D_\lambda R(t, x, u) = \frac{\partial R}{\partial t} + \lambda \frac{\partial R}{\partial x},$$

где $\frac{\partial R}{\partial t}$ и $\frac{\partial R}{\partial x}$ – частные производные функции $R(t, x, \cdot)$ (см. [14]).

Это условие формулируется следующим образом.

(Н₁) Матрица A^* имеет действительное собственное значение λ , которому отвечает собственная C^1 -вектор-функция

$$\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

такая, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}, \quad i, k = 1, \dots, m.$$

В частности, при $a_{ki} = a_{ki}(u)$ и $R = R(u)$ при условии (Н₁) получаем существование инварианта Римана $R = R(u)$:

$$D_\lambda R(u) = 0. \quad (2.6)$$

В случае квазиинварианта Римана относительно матрицы $A(t, x, u)$ предполагается, что выполнено следующее условие.

(Н₂) Матрица $A(t, x, u)$ системы (2.1) такова, что существует $\lambda = \lambda(t, x, u)$ и кривая $x = x_\lambda(t)$, определяемая уравнением (2.3), и C^1 -функция $Q(t, x, u)$, для которой выполнено неравенство

$$D_\lambda Q(t, x, u) \geq 0 \quad (2.7)$$

в силу (2.1), т.е. для решения $u = u(t, x)$ при $x = x_\lambda(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Таким образом, в определении квазиинварианта Римана знак равенства в (2.6) заменяется знаком неравенства в (2.7).

Рассмотрим приложение квазиинвариантов Римана к системе уравнений, неизэнтропическое течение газа.

§ 3. Неизэнтропическое течение газа

Уравнения неизэнтропического одномерного движения идеального сжимаемого политропного газа, как известно (см. [13], [3]), в переменных Лагранжа имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь u – скорость движения, p – давление, v – удельный объем, S – энтропия, а C^1 -функция $p = p(v, S)$ удовлетворяет условию гиперболичности, т.е.

$$p_v(v, S) < 0$$

при рассматриваемых значениях $v > 0$ и $S \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в случае политропного газа давление p , удельный объем $v > 0$ и энтропия S связаны следующим соотношением:

$$p = p(v, S) = \frac{a_0^2}{\gamma} v^{-\gamma} e^{S/c_\gamma}, \quad (3.2)$$

где a_0, c_γ – некоторые положительные постоянные и $\gamma > 1$.

Всюду в этой статье рассматривается гладкое решение системы (3.1) с функцией $v(t, x) > 0$.

Для C^1 -функции $Q(u, v, S)$ вычислим производную $D_\lambda Q$. В силу (3.1) имеем

$$D_\lambda Q = Q_u(-p_v v_x - p_S S_x + \lambda u_x) + Q_v(u_x + \lambda v_x) + Q_S \lambda S_x. \quad (3.3)$$

Отсюда при $\lambda^2 = -p_v > 0$ получаем

$$D_\lambda Q = (\lambda Q_S - p_S Q_u) S_x \quad (3.4)$$

для функции $Q = Q(u, v, S)$, удовлетворяющей системе

$$\begin{cases} \lambda Q_u + Q_v = 0, \\ -p_v Q_u + \lambda Q_v = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

т.е. для любой C^1 -функции Q вида

$$Q = Q(\xi, S) \quad (3.6)$$

с $\xi = u - \Lambda(v, S)$ и $\Lambda_v = \lambda(v, S)$, где $\lambda(v, S)$ – один из корней уравнения $\lambda^2 = -p_v$, т.е. $\lambda = \lambda_1(v, S) = \sqrt{-p_v(v, S)}$ или $\lambda = \lambda_2(v, S) = -\lambda_1(v, S)$.

Ясно, что для общих функций $p(v, S)$ с $p_v < 0$ не существует решения системы

$$\begin{cases} \lambda Q_u + Q_v = 0, \\ -p_v Q_u + \lambda Q_v = 0, \\ -p_S Q_u + \lambda Q_S = 0 \end{cases}$$

с $\lambda \neq 0$, т.е. не существует нетривиальных инвариантов Римана.

Однако для специальных классов функций $p(v, S)$, например, для функций вида

$$p(v, S) = e^{-\alpha^2 v} p_1(S), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

и произвольной C^1 -функцией $p_1(S) > 0$ такие инварианты Римана существуют. В данном случае имеем

$$Q = u \pm \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha^2 v/2} p_1^{1/2}(S)$$

с $\lambda = \pm \alpha e^{-\alpha^2 v/2} p_1^{1/2}(S)$.

Следовательно, для рассмотрения более широких классов функций $p(v, S)$ необходимо переходить к квазиинвариантам Римана.

Общим решением системы (3.5) являются C^1 -функции вида (3.6). Выберем в качестве решения системы (3.5) функцию

$$Q(\xi, S) = \xi + q(S),$$

где q – произвольная C^1 -функция.

Тогда дифференциальное соотношение (3.4) примет следующий вид:

$$D_\lambda Q = [\lambda q'(S) - (p_S + \lambda \Lambda_S)] S_x. \quad (3.7)$$

ПРИМЕР 3.1. Для случая политропного газа с функцией p , определяемой формулой (3.2), имеем

$$D_\lambda Q = \left(q'(S) + \frac{a_0}{\gamma(\gamma-1)c_v} e^{S/(2c_v)} \cdot v^{-(\gamma-1)/2} \right) \lambda S_x \quad (3.8)$$

с $\lambda = a_0 e^{S/(2c_v)} v^{-(1+\gamma)/2}$.

Положим теперь

$$q(S) = 2a_0 c_v A e^{S/(2c_v)}$$

с произвольной константой A . Тогда из соотношения (3.8) следует, что

$$D_\lambda Q = a_0^2 e^{S/c_v} \left(A + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)c_v} v^{-(\gamma-1)/2} \right) v^{-(1+\gamma)/2} S_x. \quad (3.9)$$

В частности, при $A = 0$, т.е. для функции

$$Q_0 = \xi = u - \Lambda(v, S)$$

находим, что

$$D_\lambda Q_0 = \frac{a_0^2}{\gamma} \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{c_v} e^{S/c_v} v^{-\gamma} S_x = \frac{1}{(\gamma-1)c_v} p(v, S) S_x. \quad (3.10)$$

Таким образом, при $\gamma \neq 1$ и $p(v, S) > 0$ функция Q_0 является квазиинвариантом Римана в областях $D_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2; S_x \geq 0\}$ и $D_- = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2; S_x \leq 0\}$.

Ясно, что для изэнтропического случая, т.е. когда $S(x) = S_0(x) = \text{const}$, эта функция является инвариантом Римана.

Для определения условий существования градиентной катастрофы необходимо расширить предыдущий класс квазиинвариантов Римана и перейти к квазиинвариантам Римана высшего порядка. С этой целью рассмотрим следующую схему метода продолжений.

§ 4. Общая схема метода специальных продолжений первого порядка

В предположении, что решение $u = u(x, t)$ системы (2.1) принадлежит классу C^2 , введем скалярную (вещественную) функцию $\varphi(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ так, чтобы эта функция в силу системы (2.1) удовлетворяла дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \psi \left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

со скалярными функциями $\xi = \xi(t, x, u)$ и $\psi(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$.

Тогда непосредственно получаем, что ξ есть собственное значение матрицы A и функция $\varphi(t, x, u, p)$ определяется соотношением

$$\varphi(t, x, u, p) = \langle l, p \rangle + w(t, x, u).$$

Здесь $l = l(t, x, u)$ – левый собственный вектор из класса C^1 матрицы A , соответствующий собственному значению ξ , $\langle l, p \rangle$ – скалярное произведение векторов l , $p = (p_1, \dots, p_m)$, а $w(t, x, u)$ – произвольная функция из класса C^1 .

Рассмотрим продолжения с $w(t, x, u) \equiv 0$, т.е.

$$\varphi(t, x, u, p) = \langle l, p \rangle. \quad (4.2)$$

Продолжения этого вида для заданной точки (t, x, u) определены с точностью до $(m - r) \geq 1$ скалярных функций, где r – ранг матрицы $(A - \xi E)$ в точке (t, x, u) и E – единичная $(m \times m)$ -матрица. Тот факт, что продолжения вида (4.2) не определены однозначно, дает возможность выбирать специальные продолжения этого вида.

В предположении, что $l \in C^1$ и решение $u \in C^2$, вычислим правую часть уравнения (4.1) для функции $\varphi(t, x, u, p)$, определенной формулой (4.2). Тогда для функции

$$\varphi = \langle l(t, x, u), u_x \rangle$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \langle g, u_x \rangle + s(u_x, u_x). \quad (4.3)$$

Здесь $(\cdot)_\eta$ – частная производная по переменной η ,

$$g = -lA_x + l_t + \xi l_x, \quad (4.4)$$

$$s(v, v) = \xi \langle l_u v, v \rangle - \langle l_u A v, v \rangle - \langle l, [A_u v] v \rangle, \quad (4.5)$$

$v \in \mathbb{R}^m$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обозначение скалярного произведения векторов из $\mathbb{R}^m$ и под умножением слева вектора на матрицу понимается обычное умножение справа этого вектора на матрицу, транспонированную к данной.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если матрица $A \in C^1$ и левый собственный вектор $l \in C^1$, то, дифференцируя по u соотношение

$$lA = \xi l,$$

для выражения $s(v, v)$ получим

$$s(v, v) = \langle [A^* l_u - l_u A] v, v \rangle - \langle \xi_u, v \rangle \langle l, v \rangle.$$

Здесь A^* – матрица, транспонированная к матрице A .

§ 5. Об отсутствии градиентной катастрофы

Под *градиентной катастрофой решения* $u(t, x)$ системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка понимается существование конечных $T > 0$ и $L > 0$ таких, что для решения $u(t, x)$ этой системы, принадлежащего классу $C^1([0, T) \times \mathbb{R})$, выполнено соотношение

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T} \sup_{x \in [-L, L]} |u_x(t, x)| = +\infty$$

при условии, что

$$\sup_{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}} |u(t, x)| < \infty.$$

Рассмотрим систему уравнений в области $D_M = Q \times \{u \in \mathbb{R}^m : |u| \leq M\}$, где $Q = [0, T) \times \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть матрица $A(t, x, u)$ принадлежит классу $C^1(D_M)$ и все собственные значения $\xi_k = \xi_k(t, x, u)$, $k = 1, \dots, m$, матрицы $A(t, x, u)$ являются вещественными, ограниченными в области D_M и принадлежат классу $C^1(D_M)$.

Пусть существуют левые собственные векторы $l_k = l_k(t, x, u)$, $k = 1, \dots, m$, из класса $C^1(D_M)$ (l_k соответствует собственное значение ξ_k), ограниченные в D_M и такие, что:

- 1) система $\{l_1, \dots, l_m\}$ при любом $(t, x, u) \in D_M$ образует базис в пространстве $\mathbb{R}^m$ и определитель $\Delta(t, x, u)$ со столбцами $l_1, \dots, l_m$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta(t, x, u)| \geq c_0, \quad (t, x, u) \in D_M,$$

с некоторой постоянной $c_0 > 0$;

- 2) все выражения $S_k(v, v)$, определяемые формулой (4.5) при $\xi = \xi_k$ и $l = l_k$, $k = 1, \dots, m$, тождественно равны нулю.

Тогда для системы (2.1) не существует градиентной катастрофы в области D_M за конечный момент времени $T > 0$, если ограничены само решение $u(t, x)$ при $(t, x) \in Q = [0, T] \times \mathbb{R}$ и его производные первого порядка при $t = 0$. При этом предполагается, что $(t, x, u(t, x)) \in D_M$ при $(t, x) \in Q$ и $u \in C^1(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $u \in C^2(Q)$. Положим

$$\varphi_k = \langle l_k(t, x, u), u_x \rangle, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Тогда для этих функций из уравнения (4.3) в силу условий теоремы ($S_k(v, v) \equiv 0$ при $k = 1, \dots, m$) получим

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = \langle g_k, u_x \rangle \quad (5.2)$$

с $g_k = l_{k,t} - l_k A_x + \xi_k l_{k,x}$, $l_{k,\eta} = \frac{\partial l_k}{\partial \eta}$.

Теперь от дифференциальных уравнений (5.2) перейдем к интегральным уравнениям вдоль соответствующих характеристических кривых в плоскости (t, x) . Для этого обозначим через $x_k(t^0, x^0, \tau)$ решение задачи Коши

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k(\tau, x_k, u(\tau, x_k)), \quad x_k|_{\tau=t^0} = x^0. \quad (5.3)$$

Тогда из уравнений (5.2) при $k = 1, \dots, m$ получим

$$\varphi_k(t, x) = \varphi_k(0, x_k(t, x, 0)) + \int_0^t \langle g_k, u_x \rangle d\tau. \quad (5.4)$$

Здесь в правой части k -го уравнения интеграл берется вдоль k -й характеристической кривой, соответствующей $x_k(t, x^0, \tau)$.

Выразим теперь из системы (5.1) при $k = 1, \dots, m$ компоненты $u_{1x}, \dots, u_{mx}$ вектора u_x через $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и подставим эти выражения в слагаемые $\langle g_k, u_x \rangle$. Тогда из полученных уравнений для нормы

$$\|\bar{\varphi}(t)\| = \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq \tau \leq t} |\varphi_k(\tau, x)|$$

следует неравенство

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \|\bar{\varphi}(0)\| + Kt + M_1 \int_0^t \|\bar{\varphi}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [0, T)$$

с некоторыми постоянными K и M_1 , конечными в силу условий теоремы.

Отсюда получаем, что

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \|\bar{\varphi}(0)\| \exp(M_1 t) + KM_1^{-1}[\exp(M_1 t) - 1], \quad t \in [0, T).$$

Итак, равномерная ограниченность нормы $\|\bar{\varphi}(t)\|$ при $t \in [0, T)$ установлена. Тогда из системы (5.1) в силу условий теоремы вытекает равномерная (по $t \in [0, T)$) ограниченность $|u_x(t, x)|$ – модуля вектора $u_x(t, x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \in [0, T)$.

В заключение доказательства, основанного на интегральных соотношениях (5.4) с $k = 1, \dots, m$, отметим, что вместо предварительного условия $u \in C^2(Q)$ достаточно предположить, что $u \in C^1(Q)$.

Теорема 5.1 доказана.

ПРИМЕР 5.1 (Б. Л. Рождественский и А. Д. Сидоренко; см. [5]).

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \xi_1(t, x, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \xi_2(t, x, u_1) \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$u_1(0, x) = u_1^0(x), \quad u_2(0, x) = u_2^0(x) \quad (5.6)$$

с ограниченными начальными функциями $u_1^0(x), u_2^0(x)$ из класса $C^1(\mathbb{R})$.

Обозначим $d = \max\{\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1^0(x)|, \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_2^0(x)|\}$, произвольно зафиксируем конечное число $T > 0$ и положим $Q = [0, T] \times \mathbb{R}$, $J = [-d, d]$. Предположим, что $\xi_1(t, x, u_2)$ и $\xi_2(t, x, u_1)$ принадлежат классу C^1 при $(t, x) \in Q$ и $u_1, u_2 \in J$ и существуют положительные (конечные) числа c и ε , зависящие, вообще говоря, от T и d , такие, что

$$|\xi_1(t, x, u_2)| \leq c, \quad |\xi_2(t, x, u_1)| \leq c, \quad |\xi_1(t, x, u_2) - \xi_2(t, x, u_1)| \geq \varepsilon > 0$$

при любых $(t, x) \in Q$ и $u_1, u_2 \in J$. Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix},$$

имеет собственные векторы

$$l_1 = (\xi_2 - \xi_1, 0), \quad l_2 = (0, \xi_2 - \xi_1),$$

которые удовлетворяют всем условиям теоремы 5.1. При этом определитель $\Delta(t, x, u)$ со столбцами l_1 и l_2 удовлетворяет неравенству

$$\Delta(t, x, u) \geq \varepsilon^2 > 0$$

при любых $(t, x) \in Q$ и $u_1, u_2 \in J$.

Следовательно, задача Коши (5.5), (5.6) на промежутке $[0, T]$ не допускает градиентной катастрофы, если при $t = 0$ производные $\frac{du_1^0(x)}{dx}$ и $\frac{du_2^0(x)}{dx}$ являются ограниченными функциями на $\mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В теореме 5.1 и приведенном примере условие ограниченности производной $u_x(0, x)$ при $t = 0$ на всей прямой $\mathbb{R}$ является несущественным (при $u_x(0, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$). Явление градиентной катастрофы решения обычно рассматривается в конечных точках плоскости (t, x) , поэтому достаточно все рассуждения провести в соответствующем (компактном) множестве – области зависимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В случае $\xi_1 = \xi_1(u_2)$ и $\xi_2 = \xi_2(u_1)$ с $\xi_1, \xi_2 \in C^1(\mathbb{R})$ система (5.5) обладает инвариантами Римана первого порядка. А именно, для функций

$$R_1 = A_1(u_1)(\xi_1 - \xi_2) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad R_2 = A_2(u_2)(\xi_2 - \xi_1) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

с произвольными C^1 -функциями A_1 и A_2 выполнены соотношения

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R_2}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0.$$

Отсюда при дополнительном условии

$$\xi_1(u_2) \neq \xi_2(u_1)$$

на рассматриваемых решениях системы (5.5) получаем ограниченность производных $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ и, следовательно, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ при всех $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ ограничены начальные данные $u_0(x)$ и $v_0(x)$ и их производные.

Ясно, что эти условия на начальные данные имеют локальный характер.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Для систем вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

с $\xi_k = \xi_k(u)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ такими, что

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u_k} \equiv 0,$$

также существуют инварианты Римана R_k первого порядка, но при дополнительных структурных условиях на собственные значения ξ_k , $k = 1, \dots, m$, при $m > 2$. Эти дополнительные условия диктуются условиями совместности соответствующей переопределенной системы уравнений при $m > 2$.

§ 6. О существовании градиентной катастрофы

Существование градиентной катастрофы известно из работы П. Лакса [15] для существенно нелинейных гиперболических систем (из двух дифференциальных уравнений первого порядка), обладающих инвариантами Римана.

В этом параграфе приводится доказательство существования градиентной катастрофы для определенных систем квазилинейных уравнений, которое не использует непосредственно инварианты Римана.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть для решения $u(x, t)$ (в каком-либо разумном смысле) системы (2.1) существует априорная оценка

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq M.$$

Пусть матрица $A(t, x, u)$ принадлежит классу $C^1(D_M)$ с $D_M = Q \times \{v \in \mathbb{R}^m : |v| \leq M\}$ и существует левый собственный вектор $l = l(t, x, u)$ матрицы $A(t, x, u)$, принадлежащий классу $C^1(D_M)$, с ограниченным на D_M собственным значением $\xi = \xi(t, x, u)$ из класса $C^1(D_M)$ такой, что при всех $(t, x, u) \in D_M$ выполнено неравенство

$$s(v, v) \geq c_0 |v|^2, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad (6.1)$$

с постоянной $c_0 > 0$. Здесь квадратичная форма $s(v, v)$ определена формулой (4.5). Пусть

$$c_2 := \sup_{(t,x,u) \in D_M} |g(t, x, u)| < \infty,$$

где вектор-функция $g(t, x, u)$ определена формулой (4.4), и пусть

$$c_3 := \sup_{(t,x,u) \in D_M} |l(t, x, u)| < \infty.$$

Предположим относительно начальных данных, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \langle l(0, x, u(0, x)), u_x(0, x) \rangle > \frac{c_2 c_3}{c_0}. \quad (6.2)$$

Тогда не существует решения $u(t, x)$, принадлежащего классу $C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть x_0 – точка, в которой

$$\varphi_0 := \langle l(0, x_0, u(0, x_0)), u_x(0, x_0) \rangle > \frac{c_2 c_3}{c_0}. \quad (6.3)$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение задачи Коши

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \xi(t, \tilde{x}, u(t, \tilde{x})), \quad \tilde{x}|_{t=0} = x_0.$$

Тогда из уравнения (4.3) в силу условий теоремы для скалярной функции

$$\varphi(t, x) := \langle l(t, x, u(t, x)), u_x(t, x) \rangle,$$

рассматриваемой вдоль характеристической кривой $x = \tilde{x}(t)$, т.е. для

$$\varphi(t) = \varphi(t, \tilde{x}(t)),$$

имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} \geq -c_2 |u_x| + c_0 |u_x|^2 \geq -\frac{c_0}{2} |u_x|^2 - \frac{c_2^2}{2c_0} + c_0 |u_x|^2 \geq -\frac{c_2^2}{2c_0} + \frac{c_0}{2c_3^2} \varphi^2.$$

Отсюда выводим, что для функции $\varphi(t)$ с начальным значением φ_0 , удовлетворяющим неравенству (6.3), существует конечное $T > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \varphi(t) = +\infty. \quad (6.4)$$

Полученное предельное соотношение противоречит сделанному предположению.

Теорема 6.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Теорема 6.1 остается справедливой и в случае $M = +\infty$. В этом случае все условия теоремы должны выполняться при любых $(t, x, u) \in D_\infty = [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Предельное соотношение (6.4) показывает, что разрушение C^1 -решения происходит в результате градиентной катастрофы.

§ 7. Квазиинварианты Римана первого порядка

Рассмотрим приложение квазиинвариантов Римана первого порядка к системе (3.1), описывающей неизэнтропическое течение идеального сжимаемого газа.

Будем искать для этой системы квазиинварианты Римана в виде

$$Q = M(v, S) \frac{\partial R}{\partial x} + N(v, S) \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (7.1)$$

где

$$R = Q_0 = u - \Lambda(v, S)$$

определено в § 3, а M и N – искомые функции.

Таким образом, в этот класс квазиинвариантов входят функции $Q = Q(u, v, S, u_x, v_x, S_x)$, зависящие не только от самого решения (u, v, S) , но и от производных (u_x, v_x, S_x) .

Тогда для производной вдоль характеристики $x_\lambda(t)$ ($\frac{dx_\lambda}{dt} = \lambda$) имеем

$$\begin{aligned} D_\lambda Q &= \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial t} + \lambda \frac{\partial M}{\partial x} - \lambda_x M \right) \\ &\quad + \frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \lambda \frac{\partial N}{\partial x} \right) - M \frac{\partial}{\partial x} [(p_S + \lambda \Lambda_S) S_x] + \lambda N \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу уравнения

$$u_x = \frac{\partial R}{\partial x} + \lambda v_x + \Lambda_S S_x$$

находим, что

$$\begin{aligned} D_\lambda Q &= M_v \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + (2\lambda M_v - \lambda_v M) v_x \frac{\partial R}{\partial x} \\ &\quad + A_1 S_x \frac{\partial R}{\partial x} + A_2 S_x^2 + A_3 S_{xx} + A_4 S_x v_x, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\begin{cases} A_1 = M_v \Lambda_S + \lambda M_S - \lambda_S M + N_v, \\ A_2 = N_v \Lambda_S + \lambda N_S - M(p_S + \lambda \Lambda_S)_S, \\ A_3 = \lambda N - M(p_S + \lambda \Lambda_S), \\ A_4 = 2\lambda N_v - M(p_S + \lambda \Lambda_S)_v. \end{cases} \quad (7.3)$$

В терминах функции Q уравнение (7.2) принимает следующий вид:

$$D_\lambda Q = \frac{M_v}{M^2} Q^2 + B_1 Q + B_2, \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(A_1 - \frac{2NM_v}{M} \right) \frac{S_x}{M} + \left(2\lambda M_v - \lambda_v M \right) \frac{v_x}{M}, \\ B_2 &= \left(\frac{M_v}{M^2} N^2 - A_1 \frac{N}{M} + A_2 \right) S_x^2 + A_3 S_{xx} + A_4 S_x v_x - \frac{N}{M} \left(2\lambda M_v - \lambda_v M \right) S_x v_x. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что существуют C^1 -функции $M(v, S)$ и $N(v, S)$ такие, что

$$\begin{cases} 2\lambda M_v - \lambda_v M = 0, \\ 2\lambda N_v - (p_S + \lambda \Lambda_S)_v M = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Тогда из уравнения (7.4) следует, что

$$D_\lambda Q = \frac{M_v}{M^2} Q^2 + \bar{B}_1 Q + \bar{B}_2, \quad (7.6)$$

где

$$\bar{B}_1 = \left(A_1 - \frac{\lambda_v}{\lambda} N \right) \frac{S_x}{M}, \quad (7.7)$$

$$\bar{B}_2 = \left(\frac{M_v}{M^2} N^2 - A_1 \frac{N}{M} + A_2 \right) S_x^2 + A_3 S_{xx}. \quad (7.8)$$

Из первого уравнения системы (7.5) находим, что

$$M(v, S) = M_0(S)(-p_v)^{1/4} \quad (7.9)$$

при $p_v < 0$ с произвольной C^1 -функцией $M_0(S)$. Следовательно, при условии

$$p_{vv}(v, S) > 0$$

уравнение (7.6) дает возможность получить условия существования градиентной катастрофы, т.е. существования точки $M_\infty(T_\infty, x_\infty)$ с $T_\infty < 0$ такой, что

$$Q(t, x_\lambda(t)) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow T_\infty.$$

Рассмотрим приложение этого результата к исследованию течения политропного газа.

§ 8. Неизэнтропическое течение политропного газа

Для политропного газа имеем

$$p(v, S) = \frac{a_0^2}{\gamma} v^{-\gamma} e^{S/c_v}, \quad (8.1)$$

где v – удельный объем, т.е. $v = 1/\rho$ и ρ – плотность, S – энтропия, $a_0 > 0$, $\gamma > 1$ и $c_v > 0$ – параметры газа.

Соответствующие вычисления приводят к следующим выражениям для коэффициентов уравнения (7.6):

$$\frac{M_v}{M^2} = -\frac{\gamma+1}{4} M_0^{-1}(S) a_0^{-1/2} e^{S/(4c_v)} v^{(\gamma-3)/4}.$$

При специальном выборе функции M_0 , а именно, при

$$M_0(S) = e^{\kappa S},$$

где

$$\kappa = -\frac{2}{3\gamma-1} \frac{1}{c_v},$$

имеем

$$\bar{B}_1 = 0, \quad \bar{B}_2 = -k_1 S_x^2 + k_2 S_{xx},$$

где

$$k_1 = \frac{M_0(S)}{\gamma(3\gamma-1)^2} \frac{1}{c_v^2} a_0^{5/2} e^{5S/(4c_v)} v^{-(1+5\gamma)/4}, \quad k_2 = (3\gamma-1)c_v k_1.$$

Отметим, что при таком выборе функции $M_0(S)$ имеем

$$M(v, S) = M_0(S) \lambda^{1/2}, \quad N_v(v, S) = \frac{M_0(S)}{2(\gamma-1)c_v} \lambda^{3/2},$$

где $\lambda = \sqrt{-p_v} = a_0 e^{S/(2c_v)} v^{-(1+\gamma)/2}$, так что

$$\begin{aligned} M(v, S) &= M_0(S) a_0^{1/2} e^{S/(4c_v)} v^{-(1+\gamma)/4}, \\ N(v, S) &= -\frac{2}{3\gamma-1} \frac{1}{\gamma-1} \frac{M_0(S)}{c_v} a_0^{3/2} e^{3S/(4c_v)} v^{-(3\gamma-1)/4}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (7.6) в случае политропного газа (8.1) при указанном выборе функций $M(v, S)$ и $N(v, S)$ принимает следующий вид:

$$D_\lambda Q = -kQ^2 - k_1 S_x^2 + k_2 S_{xx}, \quad (8.2)$$

где $k = k(v, S) = \frac{\gamma+1}{4} M_0^{-1}(S) a_0^{-1/2} v^{(\gamma-3)/4} e^{-S/(4c_v)}$.

Рассмотрим теперь класс C^2 -функций $S = S(x) = S_0(x)$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} S(x) = S_0(x) \leq S_* < \infty, \\ (3\gamma-1)c_v S_{xx} - S_x^2 \leq 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

при $x \in \mathbb{R}$, например, функции вида

$$S(x) = c_1 \ln(1 + x^2),$$

где $c_1 \leq -\frac{1}{2}(3\gamma - 1)c_v < 0$.

Тогда уравнение (8.2) дает возможность получить достаточные условия градиентной катастрофы решений в соответствующем классе ограниченных (сверху и снизу) функций $v > 0$.

Начнем анализ со случая $\gamma = 3$. Имеем

$$k = k_0 = a_0^{-1/2}$$

и условие (8.3) принимает следующий вид:

$$8c_v S_{xx} - S_x^2 \leq 0. \quad (8.4)$$

Тогда из уравнения (8.2) следует дифференциальное неравенство

$$D_\lambda Q \leq -k_0 Q^2. \quad (8.5)$$

Это неравенство влечет следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть $\gamma = 3$ и энтропия $S_0(x)$ удовлетворяет неравенству (8.4). Пусть существует начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что

$$Q_0 := Q(0, x_0) < 0. \quad (8.6)$$

Тогда существует T_∞ такое, что

$$Q_\lambda(t) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow T_\infty \leq -\frac{1}{k_0 Q_0}.$$

Здесь $Q_\lambda(t) = Q(t, x_\lambda(t))$, где

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = \lambda(v, S), \quad x_\lambda(0) = x_0 \quad (8.7)$$

и $\lambda(v, S) = a_0 v^{-2} e^{S/2c_v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение предложения следует из дифференциального неравенства (8.5) и начального условия (8.6). В самом деле, имеем

$$Q_\lambda(t) \leq \frac{Q_0}{1 + k_0 Q_0 t}, \quad t > 0.$$

Пространственное положение точки градиентной катастрофы $x_\infty = x_\lambda(T_\infty)$ определяется из дифференциального уравнения (8.7) и начального условия (8.7).

В рассматриваемом классе энтропий (8.3) имеем

$$\frac{dx_\lambda}{dt} \leq a_* v^{-2}, \quad a_* = a_0 e^{S_*/(2c_v)}.$$

Следовательно, в классе функций $v > 0$, для которых

$$\int_0^{T_\infty} v_\lambda^{-2}(t) dt < \infty,$$

где $v_\lambda(t) = v_\lambda(t, x_\lambda(t))$, эта точка x_∞ находится на конечном расстоянии от начальной точки x_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Ясно, что при соответствующих условиях аналогичное утверждение о градиентной катастрофе справедливо и для второго квазиинварианта Римана Q_* , определяемого вторым собственным значением $\lambda_*(v, S) = -\lambda(v, S)$.

Введем теперь класс C^2 -функций $v = v(t, x)$ и $S = S(x)$ с ограниченными значениями $\|v^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ и $\|S\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ таких, что

$$k_1(v, S)[(8\gamma - 1)c_v S_{xx} - S_x^2] \leq M_\infty, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (8.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. На самом деле достаточно потребовать выполнения этих условий в рассматриваемой области переменных $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Тогда из уравнения (8.2) следует дифференциальное неравенство

$$D_\lambda Q \leq -kQ^2 + M_\infty \quad (8.9)$$

в этом классе функций v и S . Таким образом, поведение функции $Q_\lambda(t)$ определяется коэффициентом $k = k(v, S)$, величиной M_∞ и начальным условием $Q_\lambda(0)$.

Рассмотрим следующий простейший случай. Пусть функции v и S таковы, что существует при $t > 0$ кривая $x_\lambda(t)$ такая, что

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = \lambda(v, S), \quad x_\lambda(0) = x_0,$$

и вдоль этой кривой выполняется неравенство

$$k(v, S) \geq k_* \quad (8.10)$$

с некоторой постоянной $k_* > 0$.

Тогда из дифференциального неравенства (8.9) получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть существует начальная точка x_0 такая, что

$$Q_\lambda(0) = Q_\lambda(0, x_0) < -m, \quad m = \left(\frac{M_\infty}{k_*} \right)^{1/2} > 0,$$

и вдоль кривой $x_\lambda(t)$ с $x_\lambda(0) = x_0$ выполнены условия (8.9) и (8.10).

Тогда существует T_∞ такое, что

$$Q_\lambda(t) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow T_\infty.$$

При этом T_∞ удовлетворяет неравенству

$$T_\infty < \frac{1}{2(k_* M_\infty)^{1/2}} \ln \left| \frac{Q_\lambda(0) - m}{Q_\lambda(0) + m} \right| < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть функции $S \in C^2(\mathbb{R})$ и $v > 0$, $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, таковы, что

$$\|S\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty, \quad \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|v^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \infty$$

и для них выполнено неравенство (8.8).

Тогда для каждой начальной точки x_0 существует значение $c_* < 0$ такое, что при $Q_\lambda(0) < c_*$ возникает за конечное время градиентная катастрофа вдоль характеристики $x_\lambda(t)$, исходящей из этой точки x_0 .

Для анализа поведения решения уравнения (8.2) в более широком классе функций S и v можно воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 8.1. Пусть $y(t)$ – решение дифференциального неравенства

$$\frac{dy}{dt} \leq -k(t)y^2 + h(t), \quad y(0) = y_0, \quad (8.11)$$

где $k \geq 0$, $k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $k^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Тогда если при некотором $2 < T_* < \infty$ выполнено неравенство

$$\inf_{2 \leq T \leq T_*} \inf_{\varphi_0 \in H_k} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^2 \frac{|\varphi'_0(\tau)|^2}{k(\tau T)\varphi_0(\tau)} d\tau + T \int_0^2 h(\tau T)\varphi_0(\tau) d\tau + y_0 \right\} < 0, \quad (8.12)$$

то существует $2 \leq T_\infty \leq T_*$ такое, что

$$y(t) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow T_\infty.$$

Здесь H_k – множество пробных C^1 -функций $\varphi_0 \geq 0$ таких, что

$$\varphi_0(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1, \\ 0 & \text{при } \tau \geq 2 \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\int_0^2 \frac{|\varphi'_0(\tau)|^2}{k(\tau T)\varphi_0(\tau)} d\tau < \infty.$$

Для доказательства этой леммы достаточно умножить дифференциальное неравенство (8.11) на пробную функцию $\varphi(t) = \varphi_0(\tau)$ с $\tau = t/T$, проинтегрировать это неравенство по отрезку $[0, T]$ и провести стандартный анализ полученных соотношений.

§ 9. Изэнтропическое течение газа

Используем квазиинварианты Римана для получения условий возникновения градиентной катастрофы в случае изэнтропического течения политропного газа.

В этом случае $S(x) \equiv S_0$. Без ограничения общности можно считать, что $S_0 = 0$. В противном случае достаточно заменить в уравнении политропы (8.1):

$$a_0^2 \rightarrow \tilde{a}_0^2 = a_0^2 e^{S_0/c_v}.$$

Итак, в этом случае имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \quad (9.1)$$

где $p(v) = \frac{a_0^2}{\gamma} v^{-\gamma}$, $v > 0$, $a_0 > 0$.

Инварианты Римана для этой системы, как известно (см. [13], [3]), определяются формулами

$$\begin{cases} R_1(u, v) = u + \frac{2a_0}{\gamma - 1} v^{-(\gamma-1)/2}, \\ R_2(u, v) = u - \frac{2a_0}{\gamma - 1} v^{-(\gamma-1)/2}. \end{cases} \quad (9.2)$$

В силу сохранения инвариантов вдоль соответствующих характеристик имеем

$$\begin{cases} R_1(u, v)|_{x=x_\lambda(t)} = R_1(x_0), \\ R_2(u, v)|_{x=x_{\lambda^*}(t)} = R_2(x_0^*). \end{cases} \quad (9.3)$$

Здесь $x_\lambda(t)$ и $x_{\lambda^*}(t)$ – соответствующие характеристики, исходящие из начальных точек x_0 и x_0^* соответственно.

На основании этих соотношений легко получить априорные оценки для гладких функций u и v . В самом деле, фиксируя произвольно точку $M(t, x)$ и “спускаясь” по характеристикам на соответствующие начальные точки x_0 и x_0^* при $t = 0$, получаем в силу соотношений (9.2) и (9.3), что

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{R_1(x_0) + R_2(x_0^*)}{2}, \\ (v(t, x))^{-(\gamma-1)/2} &= (\gamma - 1) \frac{R_1(x_0) - R_2(x_0^*)}{4a_0}, \quad \gamma > 1, \end{aligned} \quad (9.4)$$

при согласованном естественном условии

$$R_1(x_0) > R_2(x_0^*).$$

Отметим, что инварианты Римана R_1 и R_2 отвечают характеристикам $x_1(t)$ и $x_2(t)$, для которых

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1(v) = a_0 v^{-(1+\gamma)/2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2(v) = -a_0 v^{-(1+\gamma)/2}$$

соответственно.

Следовательно, в соотношении (9.4) имеем $x_0^* > x_0$.

Таким образом, для выполнения согласованного начального условия достаточно монотонного убывания начальной функции $u_0(x)$ при возрастании x и, естественно, строгой положительности начальной функции $v_0(x)$.

Уравнение (8.2) для функции

$$Q = Q_1 = M(v) \frac{\partial R_1}{\partial x},$$

где

$$M(v) = a_0^{1/2} v^{-(1+\gamma)/4},$$

принимает следующий вид:

$$D_\lambda Q = -kQ^2, \quad (9.5)$$

где $k = \frac{\gamma+1}{4} a_0^{-1/2} v^{(\gamma-3)/4}$.

Рассмотрим теперь задачу Коши для системы (9.1) при начальных C^1 -функциях $u_0(x)$ и $v_0(x)$ таких, что

$$0 < M_0 \leq R_1(x_0) - R_2(x_1) < M_1 < \infty \quad (9.6)$$

с некоторыми $M_1 > M_0 > 0$ при любых $x_1 > x_0$ на $\mathbb{R}$, которым соответствует начальная функция $Q_{1,0}(x) = Q_1|_{t=0}$.

Тогда на основании уравнения (9.5) и соответствующих априорных оценок получаем следующий результат.

ЛЕММА 9.1. Пусть заданы C^1 -начальные функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$, удовлетворяющие условию согласования (9.6).

Тогда для возникновения градиентной катастрофы в случае изэнтропического течения политропного газа (9.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала начальная точка x_0 , в которой выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий: либо

$$\left. \frac{\partial R_1}{\partial x} \right|_{t=0, x=x_0} < 0,$$

либо

$$\left. \frac{\partial R_2}{\partial x} \right|_{t=0, x=x_0} < 0.$$

§ 10. Скалярные многомерные законы сохранения

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_i(u)}{\partial x_i} = 0, \quad A_i \in C^2(\mathbb{R}) \quad (10.1)$$

Ясно, что здесь инвариантом Римана является само решение, которое сохраняет свое значение вдоль кривой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, для которой

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(u), \quad a_i(u) = \frac{dA_i}{du} \quad (10.2)$$

(естественно, при условии существования гладкого решения).

Для исследования вопроса о возникновении градиентной катастрофы рассмотрим квазиинварианты Римана – функции Q вида

$$Q = \sum_{i=1}^N b_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad b_i \in C^1(\mathbb{R}). \quad (10.3)$$

Для нахождения квазиинвариантов Римана вычислим производную функции Q вдоль характеристической кривой (10.2). Тогда в силу уравнения (10.1) имеем

$$\frac{dQ(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial Q}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N b_i(u) a'_k(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad (10.4)$$

где $a'_k(u) = \frac{da_k(u)}{du}$.

Отсюда, полагая $b_i(u) = a'_i(u)$, для функции

$$Q = \sum_{i=1}^N a'_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (10.5)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = -Q^2 \quad (10.6)$$

вдоль характеристической кривой (10.2).

Таким образом, функция Q , определяемая соотношением (10.5), является квазиинвариантом для закона сохранения (10.1).

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (10.1) с C^1 -начальной функцией: $u|_{t=0} = u_0(x)$. Тогда из соотношения (10.6) непосредственно получаем следующий результат.

ЛЕММА 10.1. *Для возникновения градиентной катастрофы гладкого решения задачи Коши для уравнения (10.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что*

$$Q_0 = Q|_{t=0} < 0.$$

При этом для времени T_∞ возникновения этой катастрофы имеем

$$T_\infty = -\frac{1}{Q_0}.$$

§ 11. Некоторые приложения

Рассмотрим в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ квазилинейное уравнение специального вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,k=1}^N a_i a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - 2 \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{k=1}^N a'_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (11.1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \quad (11.2)$$

такими, что

$$u_1 + \sum_{k=1}^N a_k(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_k} = 0 \text{ при } t = 0. \quad (11.3)$$

Здесь C^1 -функции $a_i = a_i(u)$ и $a'_i = \frac{da_i(u)}{du}$.

Введем функцию

$$w := \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^N a_k(u) \frac{\partial u}{\partial x_k}. \quad (11.4)$$

ЛЕММА 11.1. Любое C^1 -решение задачи (11.1)–(11.3), понимаемое в смысле распределений, удовлетворяет в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ следующему уравнению первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^N a_k(u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0. \quad (11.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция w в силу (11.1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (a_k(u)w) = 0.$$

Отсюда в силу начального условия (11.3) получаем, что $w(t, x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}_+^{N+1}$. Лемма 11.1 доказана.

Теперь, применяя к уравнению (11.5) лемму 10.1, получаем критерий возникновения C^1 -катастрофы для решения задачи (11.1)–(11.3).

Для возникновения C^1 -катастрофы решения задачи (11.1)–(11.3) необходимо и достаточно, чтобы существовала начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что

$$Q|_{t=0, x=x_0} = \sum_{i=1}^N a'_i(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \Big|_{x=x_0} < 0.$$

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за сделанные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Список литературы

- [1] Б. Риман, “О распространении плоских волн конечной амплитуды”, *Собрание сочинений*, Гостехиздат, М.-Л., 1948, 376–395.
- [2] P. D. Lax, *Hyperbolic partial differential equations*, Courant Lect. Notes Math., **14**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [3] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978; англ. пер.: B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*, Transl. Math. Monogr., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [4] F. John, “Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**:3 (1974), 377–405.
- [5] Б. Л. Рождественский, А. Д. Сидоренко, “О невозможности “градиентной катастрофы” для слабонелинейных систем”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **7**:5 (1967), 1176–1179; англ. пер.: B. L. Rozhdestvenskii, A. D. Sidorenko, “Impossibility of the “gradient catastrophe” for slightly non-linear systems”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **7**:5 (1967), 282–287.
- [6] C. M. Dafermos, “Hyperbolic conservation laws with involutions and contingent entropies”, *Recent advances in nonlinear partial differential equations and applications* (Toledo, Spain, 2006), Proc. Sympos. Appl. Math., **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 193–217.

- [7] Ch. Zhu, “Global smooth solution of the nonisentropic gas dynamics system”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **126**:4 (1996), 769–775.
- [8] L. Lin, H. Liu, T. Yang, “Existence of globally bounded continuous solutions for nonisentropic gas dynamics equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **209**:2 (1997), 492–506.
- [9] L. Lin, S. Vong, “A note on the existence and nonexistence of globally bounded classical solutions for nonisentropic gas dynamics”, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **26**:3 (2006), 537–540.
- [10] С. И. Похожаев, “Об уравнениях неизоэнтропического движения газов”, *Тр. МЭИ*, **357** (1978), 81–87.
- [11] С. И. Похожаев, “Вопросы отсутствия решений нелинейных краевых задач”, *Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978, 200–203.
- [12] R. Courant, P. Lax, “On nonlinear partial differential equations with two independent variables”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**:2–3 (1949), 255–273.
- [13] Р. Курант, К. Фридрихс, *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, ИЛ, М., 1950; пер. с англ.: R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publ., New York, 1948.
- [14] P. D. Lax, “Hyperbolic systems of conservation laws. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:4 (1957), 537–566.
- [15] P. D. Lax, “Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations”, *J. Mathematical Phys.*, **5**:5 (1964), 611–613.
- [16] J. L. Johnson, “Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:5 (1967), 639–641.

С. И. Похожаев (S. I. Pokhozhaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

11.05.2010 и 22.09.2010