Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Кесельман, Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 117–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:10:41

УДК 517.54+514.774

В. М. Кесельман

Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем

Доказывается, что на любом некомпактном n -мерном имеющем край римановом многообразии конформно-параболического типа существует такая конформная замена метрики, что в новой метрике на многообразии выполняется относительное изопериметрическое неравенство того же вида, какой оно имеет в замкнутом n -мерном евклидовом полупространстве. При этом полученное изопериметрическое неравенство является асимптотически точным.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: риманово многообразие, конформный тип многообразия, конформная емкость, конформные метрики, изопериметрическая функция.

§ 1. Введение. Формулировка теоремы

В настоящей статье мы даем развернутое изложение теоремы, приведенной в кратком сообщении [1].

Сформулированный в аннотации результат является естественным развитием работы [2], где аналогичный вопрос решался в отношении абсолютного изопериметрического неравенства на многообразии без края.

Всюду ниже M – n -мерное ($n \geq 2$) связное некомпактное гладкое многообразие с краем ∂M , а g – риманова метрика на M .

Наличие края многообразия позволяет рассматривать для произвольной области $D \subset M$ так называемую *относительную границу* области $\partial_M D := \partial D \setminus \partial M$, где ∂D – полная граница области D в M .

Рассматриваемые области всегда будем предполагать предкомпактными и с кусочно гладкими границами.

Изопериметрическое неравенство. Для области $D \subset M$ обозначим через $V(D)$ и $S(\partial_M D)$ соответственно ее объем и площадь ее относительной границы $\partial_M D$ (т.е. n -мерную и $(n-1)$ -мерную меры Хаусдорфа указанных множеств) в метрике g .

Под относительным изопериметрическим неравенством на римановом многообразии M , как обычно, понимается соотношение вида

$$\mathcal{P}(V(D)) \leq S(\partial_M D),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00073а).

справедливое для произвольной области $D \subset M$, где $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$, $x > 0$, – некоторая вещественная функция, называемая *изопериметрической функцией* многообразия M в метрике g .

Например, для замкнутого полупространства $\mathbb{R}_+^n$ евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ изопериметрическое неравенство выполняется с изопериметрической функцией вида

$$\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{(n-1)/n},$$

где $c > 0$ – абсолютная константа.

Конформный тип риманова многообразия. Пусть $G \subset M$ – произвольная область, а $K \subset G$ – невырожденный континуум (т.е. отличный от точки связный компакт). Упорядоченная пара (K, G) образует конденсатор на M .

Конформной емкостью конденсатора (K, G) называется величина

$$\text{cap}(K, G) := \inf_f \int_G |\nabla f|^n dv,$$

где нижняя грань берется по всем локально липшицевым и финитным в G функциям f , для которых $f \equiv 1$ на K .

Здесь через $|\nabla f|$ и dv обозначены соответственно норма градиента ∇f функции f и элемент объема многообразия M относительно метрики g .

Известно, что величина $\text{cap}(K, M)$ всегда положительна или всегда равна нулю независимо от выбора невырожденного континуума K .

Будем говорить, что многообразие M является *конформно-параболическим* (или что оно имеет *конформно-параболический тип*), если $\text{cap}(K, M) = 0$ для любого (или хотя бы одного) невырожденного континуума $K \subset M$; в противном случае будем называть M многообразием *конформно-гиперболическим* (или многообразием *конформно-гиперболического типа*).

Класс конформных метрик многообразия. Риманова метрика $\tilde{g}$ на M называется *конформно-эквивалентной* или, короче, *конформной* метрике g , если $\tilde{g} = \lambda^2 g$, где $\lambda > 0$ – некоторая гладкая функция на M .

Поскольку величина $\text{cap}(K, G)$, как известно (и легко видеть), не меняется при конформных заменах исходной метрики многообразия, то *конформный тип многообразия является инвариантом в классе конформных римановых метрик на нем*.

В противоположность этому геометрические характеристики такие, как площадь и объем, конечно, меняются при конформном изменении метрики многообразия. В связи с этим условимся при переходе от исходной метрики g к конформной ей метрике $\tilde{g}$ обозначения одноименных геометрических величин наделять тильдой. Именно, объем области $D \subset M$ и площадь ее относительной границы $\partial_M D$ в метрике $\tilde{g}$ будем обозначать через $\tilde{V}(D)$ и $\tilde{S}(\partial_M D)$ соответственно.

Формулировка теоремы.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что многообразие M является конформно-параболическим. Пусть ε – произвольное положительное число.*

Справедливы следующие утверждения:

1) существует конформная исходной метрике полная риманова метрика $\tilde{g}$ на M , в которой объем многообразия M бесконечен и выполняется изопериметрическое неравенство евклидова вида

$$C \cdot \tilde{V}^{(n-1)/n}(D) \leq \tilde{S}(\partial_M D) \quad (1.1)$$

(с некоторой постоянной $C > 0$) для всех предкомпактных областей $D \subset M$, объем $\tilde{V}(D)$ которых больше ε ;

2) неравенство (1.1) является асимптотически точным в том смысле, что неравенство

$$\tilde{S}(\partial_M D) < (1 + \varepsilon)C \cdot \tilde{V}^{(n-1)/n}(D) \quad (1.2)$$

(с той же, что и в (1.1), постоянной $C = C(\varepsilon)$) выполняется для всех областей D некоторого исчерпания многообразия M .

Под исчерпанием многообразия M здесь понимается последовательность $\{D_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, областей $D_k \subset M$ таких, что $D_k \Subset D_l$ при любых $k < l$, причем $\bigcup_k D_k = M$.

§ 2. Доказательство теоремы

Доказательство сформулированной теоремы требует некоторого развития доказательства теоремы из [2] и состоит из трех этапов, которые можно в общих чертах описать следующим образом.

Этап 1. На многообразии M строится такая конформная его исходной метрике полная метрика $\tilde{g}$, для которой на $(M, \tilde{g})$ существует геодезический луч, идущий строго внутри многообразия M , т.е. не имеющий общих точек с краем ∂M многообразия M .

Напомним, что геодезическим лучом на римановом многообразии M называется выходящая из какой-либо точки геодезическая бесконечной длины, любая компактная связная часть которой является кратчайшей между своими точками.

Этап 2. Предположим, что на (M, g) существует геодезический луч, не пересекающийся с ∂M . Тогда строятся некоторое подмногообразие $H \subset M \setminus \partial M$ (имеющее облик трубки или полосы, идущей вдоль указанного геодезического луча) и конформная метрике g полная метрика $\tilde{g}_H$ на H такие, что на многообразии $(H, \tilde{g}_H)$ выполняется асимптотически точное относительное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

Этап 3. Предположим, что многообразие (M, g) полное, имеет конечный объем и выделено подмногообразие $(H, \tilde{g}_H)$, указанное выше в описании этапа 2. Тогда метрика $\tilde{g}_H$ специальным образом продолжается на все многообразие M так, что в новой метрике $\tilde{g}$, конформной исходной метрике g , теперь уже на многообразии M выполняется асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

Последовательное соединение указанных этапов возможно благодаря тому, что при доказательстве теоремы мы вправе заменять метрику g на любую конформную ей полную метрику на M .

Заметим вместе с тем, что завершающий этап 3 распространения метрики с H на все многообразие M возможен лишь при условии конформной параболичности многообразия M .

Мы используем следующее свойство конформно-параболических римановых многообразий (см. [3]).

Для конформно-параболического многообразия существует конформная его исходной метрике полная метрика, в которой многообразие имеет конечный (сколь угодно малый) объем.

Прежде чем переходить к последовательному изложению доказательства теоремы, отметим, что оно отличается от доказательства теоремы из [2] главным образом рассмотрением этапа 1, который за ненадобностью вообще отсутствует в случае многообразия M без края.

Вспомогательные утверждения. Выполнение указанных трех этапов основывается соответственно на трех нижеследующих леммах.

1. Известно, что на произвольном полном некомпактном многообразии с краем или без края существует геодезический луч с началом в любой точке (см., например, [4; добавление, § 1, лемма 1]).

Именно в силу этого факта для многообразия M без края можно начинать доказательство теоремы сразу со второго из указанных этапов.

Однако легко построить некомпактное многообразие с непустым краем, на котором геодезический луч, выпущенный из любой точки, пересекает край многообразия. Тем не менее справедлива следующая

ЛЕММА 1 (о луче). *Предположим, что некомпактное риманово многообразие (M, g) с непустым краем является полным, а p – произвольная его внутренняя точка. Тогда метрику g можно заменить на конформную ей полную метрику $\tilde{g}$ так, что на $(M, \tilde{g})$ найдется исходящий из p геодезический луч, не имеющий общих точек с ∂M .*

При этом если g -объем $V(M)$ многообразия конечен, то указанную метрику $\tilde{g}$ можно построить так, что объем $\tilde{V}(M)$ многообразия M в этой метрике будет сколь угодно близок к $V(M)$.

Доказательству этой леммы посвящен § 3. Отметим, что основные технические трудности доказательства связаны как раз с требованием (важным в дальнейшем использовании леммы) почти сохранить объем многообразия при изменении его метрики. Без этого требования доказательство леммы, конечно, было бы много проще.

2. Лемма, составляющая содержание второго этапа доказательства теоремы, названа нами основной, поскольку она совпадает с самой теоремой, но по отношению не ко всему многообразию M , а к некоторому его подмногообразию H и метрике $\tilde{g}_H$ на H , конформной метрике g .

Однако для последующего продолжения метрики $\tilde{g}_H$ с H на все многообразие M многообразие $(H, \tilde{g}_H)$ должно обладать определенными дополнительными свойствами, которые указаны в формулировке леммы.

ЛЕММА 2 (основная). *Допустим, что на многообразии (M, g) имеется не пересекающийся с ∂M геодезический луч l с началом в точке p .*

Пусть $U \subset M \setminus \partial M$ – произвольная открытая окрестность луча l .

Рассмотрим исчерпание многообразия M , состоящее из открытых g -шаров $B_p(t)$ радиусов t с центром в точке p .

Тогда для любого числа $\epsilon > 0$ существуют n -мерное некомпактное замкнутое в M подмногообразие $H \subset U$ и конформная метрике g риманова метрика $\tilde{g}_H$ на H , в которой многообразие H имеет бесконечный объем и обладает следующими основными свойствами:

- 1) на многообразии $(H, \tilde{g}_H)$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство евклидова вида

$$C_H \cdot \tilde{V}^{(n-1)/n}(D) \leq \tilde{S}(\partial_H D) \quad (2.1)$$

(с некоторой постоянной $C_H = C_H(\epsilon) > 0$) для всех областей $D \subset H$ таких, что $\tilde{V}(D) > \epsilon$;

- 2) неравенство (2.1) является асимптотически точным в том смысле, что неравенство

$$\tilde{S}(\partial_H D) < (1 + \epsilon) C_H \cdot \tilde{V}^{(n-1)/n}(D)$$

(с той же, что и в (2.1), постоянной C_H) выполняется для всех областей D , пробегающих некоторое исчерпание многообразия H ;

и следующими дополнительными свойствами:

- 1') метрика $\tilde{g}_H$ на H является полной, причем такой, что $\tilde{g}_H/g \geq \delta^2$ всюду на H для некоторого числа $\delta > 0$;
- 2') исчерпание $\{G_t\}$ многообразия H , удовлетворяющее основному свойству 2), можно построить так, что порождаемое им исчерпание $\{G_t \cap \partial H\}$ края ∂H будет совпадать с исчерпанием $\{B_p(t) \cap \partial H\}$ края ∂H посредством семейства g -шаров $B_p(t)$.

Поясним, что совпадение двух исчерпаний мы понимаем как совпадение классов множеств, составляющих исчерпание.

Основная лемма сформулирована и доказана в [2] для многообразия M без края. Однако, очевидно, ее справедливость не зависит от наличия или отсутствия у многообразия края, поэтому мы здесь считаем ее уже установленной.

3. Наконец, завершающий этап 3 реализует следующая

ЛЕММА 3 (о продолжении). Пусть на многообразии (M, g) выполнены условия основной леммы и для некоторого числа $\epsilon > 0$ построено многообразие $(H, \tilde{g}_H)$, удовлетворяющее всем основным и дополнительным свойствам основной леммы.

Предположим также, что исходная метрика g является полной, а g -объем $V(M)$ многообразия M и g -площади $S(\partial B_p(t))$ геодезических сфер $\partial B_p(t)$ удовлетворяют условиям

$$V(M) < \epsilon, \quad S(\partial B_p(t_k)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t_k \rightarrow +\infty \quad (2.2)$$

для некоторой возрастающей последовательности $\{t_k\}$.

Тогда метрику $\tilde{g}_H$ можно продолжить с H на все многообразие M до метрики $\tilde{g}$, удовлетворяющей утверждениям 1) и 2) теоремы для числа $\varepsilon > 0$, зависящего только от участвующего здесь ε .

При этом значение ε можно сделать сколь угодно малым при первоначальном выборе достаточно малого ε .

Теперь можно добавить

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Исчерпание $\{D_k\}$ многообразия M , удовлетворяющее утверждению 2) теоремы, строится с помощью исчерпания $\{G_t\}$ многообразия H , указанного в свойстве 2') основной леммы, следующим образом:

$$D_k := G_{\tau(t_k)} \cup (B_p(t_k) \setminus H), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – некоторая возрастающая функция, а $\{t_k\}$ – последовательность, фигурирующая в лемме о продолжении.

В отличие от основной леммы лемма о продолжении не была в [2] явно сформулирована, но п. 1.3.2 указанной работы содержит подробное доказательство этой леммы. Повторим здесь (опуская элементарные детали) только построение указанной в лемме о продолжении метрики $\tilde{g}$ на M , чтобы убедиться в независимости этого построения от наличия у многообразия M края.

Для определения метрики $\tilde{g}$ на M сначала представим построенную в пределах H метрику $\tilde{g}_H$ в виде $\tilde{g}_H = \lambda_H^2 g|_H$, где $g|_H$ – ограничение исходной метрики g на H , а λ_H – гладкая положительная функция в H ; затем, продолжая λ_H указанным ниже образом до гладкой функции λ на M , положим $\tilde{g} := \lambda^2 g$ на M .

Во-первых, исходя из дополнительного свойства 1') основной леммы, подчиним функцию λ условиям

$$\lambda \geq \delta \quad \text{всюду в } M, \quad \lambda = \lambda_H \quad \text{на } H;$$

во-вторых, функцию λ построим настолько близкой к единичной функции на $M \setminus H$, чтобы наряду с (2.2) теперь уже в метрике $\tilde{g}$ также выполнялись условия

$$\tilde{V}(M \setminus H) < \varepsilon, \quad \tilde{S}(\partial B_p(t_k) \setminus H) \rightarrow 0 \quad \text{при } t_k \rightarrow +\infty.$$

Тогда, как легко видеть (см. формальные выкладки в [2; п. 1.3.2]), такая метрика $\tilde{g}$ является искомой для леммы о продолжении (причем реализуется и приведенное после ее формулировки замечание).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Прежде чем соединить последовательно рассмотренные три леммы, необходимо согласовать участвующие в них и в формулировке теоремы сколь угодно малые ε и ε .

Итак, пусть выполнено условие теоремы, т.е. многообразие (M, g) является конформно-параболическим и задано произвольное число $\varepsilon > 0$.

Найдем для этого ε соответствующее число $\varepsilon > 0$, существование которого обеспечено последним утверждением леммы о продолжении.

Поскольку для доказательства теоремы исходную метрику мы вправе заменять на любую конформную ей метрику, то на основании приведенного выше

свойства конформной параболичности можно считать, что исходная метрика является полной и $\mathbf{V}(M) < \epsilon$.

Кроме того, на основании леммы о луче можно также считать, что на (M, g) имеется не задевающий ∂M геодезический луч l с началом в какой-либо точке $p \in M \setminus \partial M$. При этом такое допущение не изменит условия $\mathbf{V}(M) < \epsilon$.

Из этого условия, в частности, следует, что найдется возрастающая последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $\mathbf{S}(\partial B_p(t_k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ (так как $\mathbf{S}(\partial B_p(t)) = \mathbf{V}'(B_p(t))$ для почти всех $t > 0$). Значит, на (M, g) выполнены условия (2.2).

Теперь существование метрики $\tilde{g}$, о которой говорит теорема, получается последовательным применением сначала основной леммы к геодезическому лучу l , который найден на основании леммы о луче, а затем применением леммы о продолжении. Этим доказательство теоремы завершается.

В этом рассуждении осталось недоказанным только одно утверждение, а именно сформулированная выше лемма о луче. Перейдем к ее обоснованию.

§ 3. Доказательство леммы о луче

Будем использовать следующие обозначения: если $\gamma \subset M$ – некоторая кривая, то $|\gamma|$ – ее g -длина; $\gamma(x, y)$ – кривая (или часть кривой γ) с концевыми точками x и y ; если $X \subset M$, $Y \subset M$ – произвольные множества, то $\rho(X, Y)$ – расстояние между ними. Таким образом, $\rho(X, Y) := \inf |\gamma(x, y)|$, где нижняя грань берется по всем кривым $\gamma(x, y)$ и точкам $x \in X$, $y \in Y$.

Для построения искомой метрики $\tilde{g}$ мы будем менять метрику g в примыкающих к краю многообразия специального вида окрестностях, которые сейчас определим.

Пусть $\mathcal{U} \subset \partial M$ – некоторое множество и $u > 0$ – некоторое число. Содержащее $\mathcal{U}$ подмножество многообразия M будем называть *нормально расслоенной окрестностью толщины $u > 0$* и обозначать $\mathcal{N}_u \mathcal{U}$, если оно состоит из тех и только тех точек $x \in M$, для каждой из которых существуют единственная точка $\xi \in \partial M$ и единственная кратчайшая $\gamma(\xi, x)$ такие, что

$$|\gamma(\xi, x)| = \rho(x, \partial M) < u, \quad (3.1)$$

причем указанная точка ξ лежит в $\mathcal{U}$.

Поскольку край ∂M гладкий, то для любого предкомпактного множества $\mathcal{U} \subset \partial M$ нормально расслоенная окрестность $\mathcal{N}_u \mathcal{U}$ существует для достаточно малого $u > 0$. Такое значение u будем называть *допустимым для $\mathcal{U}$* .

Окрестность $\mathcal{N}_u \mathcal{U}$ получается как образ подмножества $[0, u) \times \mathcal{U}$ нормального расслоения $\nu(\partial M) := [0, +\infty) \times \partial M$ края ∂M под действием экспоненциального отображения $\exp_{\nu(\partial M)}: \nu(\partial M) \rightarrow M$. При всех достаточно малых значениях $u > 0$ это отображение диффеоморфно (см., например, [5; ч. II, § 7.2]).

Для определения подходящей толщины нормально расслоенной окрестности в доказательстве леммы о луче будет служить

ЛЕММА 4 (ключевая). Пусть $\mathcal{U} \subset \partial M$ – произвольное открытое в ∂M предкомпактное множество, $U = \mathcal{N}_u \mathcal{U}$ – нормально расслоенная окрестность при некотором $u > 0$.

Тогда для любого положительного числа $d < u$ можно подобрать сколь угодно малое число $\delta > 0$ и постоянную $c > 0$ так, что для любой пары точек $x \in U$, $y \in U$ таких, что $\rho(x, \mathcal{U}) = d$, $\rho(y, \mathcal{U}) = d$, найдется кривая $\tilde{\gamma}(x, y) \subset M$, для которой

$$\rho(\tilde{\gamma}(x, y), \partial M) \geq \delta, \quad |\tilde{\gamma}(x, y)| < \rho(x, y) + c\delta^2. \quad (3.2)$$

Таким образом, кратчайшую $\gamma(x, y)$, которая априори могла выходить на край ∂M , можно заменить кривой $\tilde{\gamma}(x, y)$, удаленной от края на расстояние $\geq \delta$, увеличив при этом длину кривой не более чем на величину порядка δ^2 .

Доказательство этой леммы будет основано на равномерной оценке второй вариации длины кривой, т.е. второй производной (по некоторому параметру) от длины кривой, полученной из заданной кривой с помощью определенной ее вариации, описанной ниже. Перейдем к точным формулировкам.

Согласно определению нормально расслоенной окрестности U через каждую точку $x \in U$ проходит единственная кратчайшая $\gamma(\xi, x)$, определяемая условием (3.1), идущая от точки $\xi \in \mathcal{U}$ внутрь многообразия M к точке x . Следовательно, однозначно определено гладкое в U векторное поле $n = \{n_x\}$, $x \in U$, единичных векторов n_x , касательных в точке x к кратчайшей $\gamma(\xi, x)$.

Для произвольной регулярной кривой $\gamma: [0, s] \rightarrow U$, отнесенной к натуральному параметру, и любой функции $f \in C^1[0, s]$ рассмотрим вариацию $\varphi_\gamma: [0, s] \times [0, \varepsilon) \rightarrow U$ кривой γ следующего вида:

$$\varphi_\gamma(t, \tau) := \exp_{\gamma(t)}(\tau f(t)n_{\gamma(t)}), \quad (3.3)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число такое, что $\exp_{\gamma(t)}(\tau f(t)n_{\gamma(t)}) \in U$.

Вариация φ_γ порождает семейство гладких кривых $\gamma_\tau: t \rightarrow \varphi_\gamma(t, \tau)$, $t \in [0, s]$, длина $s_\gamma(\tau)$ которых является гладкой функцией параметра τ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (оценка второй вариации длины кривой). Для любого положительного B существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для вариации вида (3.3) произвольной регулярной кривой $\gamma: [0, s] \rightarrow U$ (отнесенной к натуральному параметру) и любой функции $f \in C^1[0, s]$, подчиненной условиям

$$\max_{t \in [0, s]} |f(t)| < B, \quad \max_{t \in [0, s]} |f'(t)| < B, \quad (3.4)$$

при всех $\tau \in [0, \delta]$ справедлива оценка

$$s''_\gamma(\tau) < C(U)B^2s, \quad (3.5)$$

где $C(U)$ – некоторая постоянная, зависящая только от U .

Оценку (3.5) можно получить, например, следуя приведенному в [6; лекция 27] выводу формулы второй вариации длины кривой при $\tau = 0$ для произвольной гладкой вариации кривой. Этот вывод исходит из того, что

$$s''_\gamma(\tau) := \int_0^s |\dot{\gamma}_\tau(t)|''_{t^2} dt,$$

и доказательство оценки (3.5), тем самым, сводится к доказательству поточечной оценки

$$\forall t \in [0, s] \quad |\dot{\gamma}_\tau(t)|''_{t^2} \leq C(U)B^2.$$

Учитывая это, можно сделать следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1 останется справедливым и в том случае, когда внутри окрестности U лежит не вся кривая γ , а лишь некоторая ее часть $\gamma: T \rightarrow U$, $T \subset [0, s]$, но при условии, что носитель функции f принадлежит множеству T . В этом случае вариация всей кривой γ определяется с помощью (3.3) только для точек $t \in T$, а для остальных t полагаем $\varphi_\gamma(t, \tau) \equiv \gamma(t)$ (тождественно по $\tau \in [0, \varepsilon)$), т.е. часть кривой γ , выходящая за пределы окрестности U , остается неподвижной.

Воспользуемся теперь вариацией (3.3) и утверждением 1 (с учетом замечания 2) для доказательства ключевой леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Искомую кривую $\tilde{\gamma}(x, y)$ для произвольных точек $x \in U$, $y \in U$ таких, что $\rho(x, \mathcal{U}) = d$, $\rho(y, \mathcal{U}) = d$, мы построим с помощью вариации вида (3.3) кратчайшей, соединяющей указанные точки. Правда, вариация будет рассматриваться не в самой окрестности U , а в некоторой другой, вообще говоря, отличной от U нормально расслоенной окрестности, которую мы сейчас построим.

Пусть F – какое-либо компактное подмножество в M , содержащее все кратчайшие $\gamma(x, y)$ для любых точек x, y из U таких, что $\rho(x, \mathcal{U}) = d$, $\rho(y, \mathcal{U}) = d$. Рассмотрим тогда подмножество $\mathcal{F}$ в ∂M , состоящее из всех таких точек края многообразия M , в каждой из которых реализуется расстояние до ∂M некоторой точки из F , т.е., строго говоря,

$$\mathcal{F} := \{\zeta \in \partial M \mid \exists z \in F : \rho(z, \zeta) = \rho(z, \partial M)\}. \quad (3.6)$$

Ясно, что $\mathcal{F}$ – компактное множество, содержащее множество $\mathcal{U}$.

Возьмем теперь некоторое предкомпактное открытое в ∂M множество $\mathcal{V}$ такое, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$, и для некоторого положительного значения $v < d$ построим нормально расслоенную окрестность $V = \mathcal{N}_v \mathcal{V}$. Именно в этой окрестности V и будут далее рассматриваться вариации вида (3.3). (В определении этих вариаций U играла роль произвольной нормально расслоенной окрестности, в качестве которой теперь будет выступать окрестность V .) Прежде всего, отметим следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (свойства окрестности $\mathcal{N}_v \mathcal{V}$). Пусть $x \in U$, $y \in U$ – произвольные точки такие, что $\rho(x, \mathcal{U}) = d$, $\rho(y, \mathcal{U}) = d$ и $\gamma(x, y) \subset M$ – кратчайшая.

1) Если $0 < h < v$, то для любого $z \in \gamma(x, y)$ $\rho(z, \partial M) < h$ тогда и только тогда, когда $z \in \mathcal{N}_h \mathcal{V}$.

2) Кривая $\gamma(x, y)$ не пересекается с множеством $\mathcal{N}_v \partial \mathcal{V}$.

3) Если $0 < h < v$ и $\gamma(x_h, y_h)$ – компонента связности множества $\gamma(x, y) \cap \overline{\mathcal{N}_h \mathcal{V}}$, то $\rho(x_h, \mathcal{V}) = h$, $\rho(y_h, \mathcal{V}) = h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) вытекает из самого определения нормально расслоенной окрестности $\mathcal{N}_v\mathcal{V}$.

Далее, если вопреки свойству 2) существует точка $z \in \gamma(x, y) \cap \mathcal{N}_v\partial\mathcal{V}$, то $\rho(z, \partial M) = \rho(z, \zeta)$ для некоторой точки $\zeta \in \partial\mathcal{V}$. Вместе с тем $\zeta \in \mathcal{F}$ по определению (3.6) множества $\mathcal{F}$. Но последнее противоречит выбору $\mathcal{V}$, согласно которому $\partial\mathcal{V} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Наконец, свойство 3) вытекает из 2), так как концевые точки указанной компоненты связности лежат на границе множества $\overline{\mathcal{N}_h\mathcal{V}}$, которая состоит из точек множества $\mathcal{N}_v\partial\mathcal{V}$ и тех точек z , для которых $\rho(z, \mathcal{V}) = h$.

Зафиксируем теперь произвольные точки $x \in U$, $y \in U$ такие, что $\rho(x, \mathcal{U}) = d$, $\rho(y, \mathcal{U}) = d$, вместе с какой-либо кратчайшей $\gamma(x, y) \subset M$, и пусть $\gamma: [0, s] \rightarrow M$ — ее натуральная параметризация.

Для построения нужной нам вариации кратчайшей зададим произвольно $h \in (0, v/2)$ и выделим все отрезки этой кратчайшей, каждый из которых, скажем, $\gamma(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots$, представляет собой компоненту связности множества $\gamma(x, y) \cap \mathcal{N}_h\mathcal{V}$ и удовлетворяет условию

$$\gamma(x_i, y_i) \cap \mathcal{N}_{h/2}\mathcal{V} \neq \emptyset. \quad (3.7)$$

Назовем такие отрезки $\gamma(x_i, y_i)$ *подвижными*, поскольку только они будут подвергаться под действием вариации реальному изменению, а остальная часть кривой $\gamma(x, y)$ останется неподвижной.

Пусть $\gamma: [a_i, b_i] \rightarrow \mathcal{N}_v\mathcal{V}$ — натуральные параметризации $\gamma(x_i, y_i)$, где $0 < a_i < b_i < s$, и все отрезки $[a_i, b_i]$ попарно не пересекаются.

Построим функцию $f \in C^1[0, s]$ с носителем в $\bigcup_i [a_i, b_i]$, полагая на каждом из отрезков $[a_i, b_i]$

$$f(t) := \begin{cases} \frac{2}{h}(t - a_i) & \text{при } t \in \left[a_i, a_i + \frac{h}{2}\right], \\ 1 & \text{при } t \in \left[a_i + \frac{h}{2}, b_i - \frac{h}{2}\right], \\ \frac{2}{h}(b_i - t) & \text{при } t \in \left[b_i - \frac{h}{2}, b_i\right] \end{cases}, \quad (3.8)$$

и сглаживая затем f в точках a_i , $a_i + h/2$, $b_i - h/2$ и b_i .

Отметим, что $|\gamma(x_i, y_i)| > h$ в силу свойства 3) утверждения 2 и условия (3.7). Значит, $a_i + h/2 < b_i - h/2$, так что определение (3.8) корректно.

Определим теперь нужную нам вариацию $\varphi_\gamma: [0, s] \times [0, h] \rightarrow M$ всей кратчайшей $\gamma(x, y)$ так: зададим φ_γ равенством (3.3) с только что построенной функцией f для всех тех значений t , каждое из которых принадлежит какому-либо из отрезков $[a_i, b_i]$, а для остальных $t \in [0, s]$ положим $\varphi_\gamma(t, \tau) \equiv \gamma(t)$ (тождественно по $\tau \in [0, h]$).

Тогда для такой вариации можно воспользоваться утверждением 1 (учитывая замечание 2). Поскольку согласно построению (3.8) функция f удовлетворяет условиям (3.4) с постоянной $B^2 = 1 + 4/h^2$, то на основании утверждения 1

и оценки (3.5) существует число $\delta \in (0, h/2)$ такое, что

$$\forall \tau \in [0, \delta] \quad s''_\gamma(\tau) < C(V) \left(1 + \frac{4}{h^2}\right) \text{diam } F, \quad (3.9)$$

где, напомним, множества F и $V = \mathcal{N}_v \mathcal{V}$ построены в начале доказательства ключевой леммы, а через $\text{diam } F$ обозначен диаметр F .

Заметим, что по построению множество F и окрестность V , а также число h , зависящее только от толщины окрестности V , определяются заданными в условии ключевой леммы окрестностью U и числом d . Следовательно, как число δ , так и правая часть в (3.9) зависят только от U и d .

Убедимся, что найденное δ и является искомым значением для ключевой леммы, а именно, кривая $\gamma_\delta: t \rightarrow \varphi_\gamma(t, \delta)$, $t \in [0, s]$, может выступать в качестве искомой кривой $\tilde{\gamma}(x, y)$.

Проверим справедливость для γ_δ первого неравенства в (3.2). С этой целью заметим, что по определению $\varphi_\gamma(t, \delta)$

$$\forall t \in [0, s] \quad \rho(\gamma_\delta(t), \partial M) = \rho(\gamma(t), \partial M) + \delta f(t), \quad (3.10)$$

поскольку подвижные при вариации $\varphi_\gamma(t, \delta)$ точки $\gamma(t)$ отодвинулись от ∂M согласно (3.3) на расстояние $\delta f(t)$, а в неподвижных точках кривой γ функция f по определению равна нулю.

Рассмотрим сначала любое $t \in [0, s]$, для которого $\gamma(t) \in \mathcal{N}_{h/2} \mathcal{V}$. В этом случае точка $\gamma(t)$ принадлежит согласно условию (3.7) некоторому определенному выше подвижному отрезку $\gamma(x_i, y_i)$. Поскольку $\rho(x_i, \mathcal{V}) = \rho(y_i, \mathcal{V}) = h$ в силу свойства 3) утверждения 2, то точка $\gamma(t)$ удалена от точек x_i и y_i на расстояние $\geq h/2$, так что $t \in [a_i + h/2, b_i - h/2]$. Но тогда $f(t) = 1$ по определению (3.8). Следовательно, в силу (3.10) справедливо неравенство $\rho(\gamma_\delta(t), \partial M) \geq \delta$.

Для всех остальных $t \in [0, s]$, т.е. тех, для которых $\gamma(t) \notin \mathcal{N}_{h/2} \mathcal{V}$, точки $\gamma(t)$ удалены от ∂M в силу свойства 1) утверждения 2 на расстояние, большее или равное $h/2 > \delta$. Следовательно, и в этом случае из (3.10) вытекает неравенство $\rho(\gamma_\delta(t), \partial M) > \delta$.

Таким образом, кривая γ_δ действительно удовлетворяет первому из неравенств в (3.2) для искомой кривой $\tilde{\gamma}(x, y)$.

Для получения второго неравенства в (3.2) по отношению к кривой γ_δ запишем разложение по формуле Тейлора для функции s_γ :

$$s_\gamma(\delta) = s_\gamma(0) + s'_\gamma(0)\delta + s''_\gamma(\tau)\delta^2, \quad \text{где } \tau \in (0, \delta). \quad (3.11)$$

При этом $s'_\gamma(0) = 0$ в силу общего факта равенства нулю первой вариации (при $\tau = 0$) длины геодезической γ в случае собственной вариации φ_γ (т.е. такой, что $\varphi_\gamma(0, \tau) \equiv \gamma(0)$, $\varphi_\gamma(s, \tau) \equiv \gamma(s)$), каковой и является, очевидно, рассматриваемая вариация кратчайшей $\gamma(x, y)$.

Тогда из (3.11), применяя оценку (3.9), получаем неравенство

$$s_\gamma(\delta) < s_\gamma(0) + c\delta^2$$

с некоторой постоянной c , зависящей, как было отмечено выше (сразу вслед за оценкой (3.9)), только от U и d . Но это и есть второе неравенство в (3.2), так как $s_\gamma(\delta) = |\gamma_\delta|$, $s_\gamma(0) = |\gamma(x, y)| = \rho(x, y)$.

Таким образом, кривая γ_δ действительно может выступать в качестве искомой кривой $\tilde{\gamma}(x, y)$, так что найденные значения δ и c являются искомыми. Ключевая лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для построения искомой метрики $\tilde{g}$ мы изменим метрику g только в окрестности края многообразия так, чтобы, с одной стороны, объем многообразия почти не изменился, а с другой – чтобы никакой исходящий из точки $p \notin \partial M$ геодезический в метрике $\tilde{g}$ луч не смог выйти на край многообразия $(M, \tilde{g})$.

Для определения искомой метрики $\tilde{g}$ построим по индукции, исходя из произвольного исчерпания $\{\mathcal{G}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ края ∂M , последовательность метрик $\tilde{g}_k$ на M , осуществляя конформные замены $\tilde{g}_k = \lambda_k^2 \tilde{g}_{k-1}$ таким образом, что метрика $\tilde{g}_k$ будет отличаться от $\tilde{g}_{k-1}$ лишь в некоторой сколь угодно тонкой нормально расслоенной окрестности множества $\mathcal{G}_k$. После этого метрику $\tilde{g}$ определим так:

$$\tilde{g} := \left(\prod_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 \right) g. \quad (3.12)$$

Переходя к построению, договоримся, что принятые выше в исходной метрике g обозначения $\mathbf{V}$ (объем), ρ и $|\cdot|$ (расстояние и длина), $\mathcal{N}_d \mathcal{U}$ (нормально расслоенная окрестность толщины d для $\mathcal{U} \subset \partial M$) при использовании их в какой-либо другой метрике мы будем наделять обозначением этой новой метрики в качестве нижнего индекса.

Построение искомой метрики $\tilde{g}$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ для оценки изменения объема многообразия M при переходе к метрике $\tilde{g}$.

Возьмем какое-либо исчерпание края ∂M , состоящее из $(n-1)$ -мерных непустых предкомпактных областей $\mathcal{G}_i \subset \partial M$, $i \in \mathbb{N}$, которые переобозначим следующим образом:

$$\mathcal{B}_k := \mathcal{G}_{3k-1}, \quad \mathcal{D}_k := \mathcal{G}_{3k}, \quad \mathcal{U}_k := \mathcal{G}_{3k+1},$$

где $k = 1, 2, \dots$ – номер, по которому и будем проводить индукционное построение, считая первоначальной метрику $\tilde{g}_0 = g$.

Предположим, что для произвольно фиксированного $k \in \mathbb{N}$ уже построена конформная метрике g метрика $\tilde{g}_{k-1}$ на M вместе с некоторым числом $\delta_{k-1} > 0$, смысл которого будет указан в дальнейшем описании. Индукционный переход от $\tilde{g}_{k-1}$ к $\tilde{g}_k$ вместе с определением очередного δ_k будет состоять из двух последовательных шагов, неформальное содержание и предназначение которых можно описать следующим образом.

На первом шаге в некоторой нормально расслоенной окрестности множества $\mathcal{D}_k \setminus \overline{\mathcal{B}_k}$, окружающего множество $\mathcal{B}_k$, метрика $\tilde{g}_{k-1}$ заменяется большей метрикой $g_k = \Lambda_k^2 \tilde{g}_{k-1}$ и, тем самым, вокруг множества $\mathcal{B}_k$ создается, образно говоря, вал, преграда.

При этом толщина такой окрестности выбирается настолько малой, а функция Λ_k – настолько большой, чтобы, с одной стороны, объем всего многообразия почти не изменился, а с другой – чтобы любой геодезический луч в будущей метрике $\tilde{g}$ был вынужден огибать такую преграду (точная формулировка сказанного приведена ниже в замечании 3).

На втором шаге строится основная метрика $\tilde{g}_k = \lambda_k^2 g_k$, которая отличается от g_k только внутри нормально расслоенной окрестности множества $\mathcal{U}_k$ сколь угодно малой g_k -толщины $\delta_k < d_k$ и потому почти не увеличивает объем многообразия. Само значение δ_k берется из ключевой леммы, рассматриваемой по отношению к многообразию (M, g_k) (при естественных заменах g на g_k , $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}_k$, d на d_k и δ на δ_k).

При таком построении геодезический на $(M, \tilde{g})$ луч l не будет иметь точек пересечения ни с каким множеством $\mathcal{B}_k$ и, значит, с краем ∂M .

В самом деле, если допустить, что $\mathcal{B}_k \cap l \neq \emptyset$, то всякая гипотетическая точка множества $\mathcal{B}_k \cap l$ будет принадлежать (см. ниже утверждение 3) некоторому отрезку $l(x, y) \subset l$, концевые точки которого удовлетворяют условиям ключевой леммы.

Тогда, как покажет проверка, за счет произведенного при построении выбора числа δ_k и метрики $\tilde{g}_k$ отрезок $l(x, y)$ в метрике $\tilde{g}$ окажется длиннее, чем некоторая кривая $\tilde{\gamma}(x, y)$ с теми же концами. Но это противоречит определению геодезического луча l .

Перейдем теперь к конкретной реализации описанного построения метрики $\tilde{g}$ и формальным обоснованиям.

Первый шаг: построение промежуточной метрики g_k . Пусть

$$H_k(t) := (\mathcal{N}_t(\mathcal{D}_k \setminus \overline{\mathcal{B}_k}))_{\tilde{g}_{k-1}} \quad (3.13)$$

при любом $\tilde{g}_{k-1}$ -допустимом для $\mathcal{D}_k \setminus \overline{\mathcal{B}_k}$ значении толщины $t > 0$.

Найдем допустимые для $(\mathcal{D}_k \setminus \overline{\mathcal{B}_k})_{\tilde{g}_{k-1}}$ такие значения h_k и η_k , что $0 < \eta_k < h_k < \delta_{k-1}$, и построим конформную метрике $\tilde{g}_{k-1}$ метрику $g_k = \Lambda_k^2 \tilde{g}_{k-1}$ на M , обладающую следующими свойствами:

- 1) $g_k \geq \tilde{g}_{k-1}$ на M , причем $g_k = \tilde{g}_{k-1}$ вне множества $H_k(h_k)$ и

$$\mathbf{V}_{g_k}(H_k(h_k)) < 2^{-k} \varepsilon; \quad (3.14)$$

- 2) для любой кривой $\gamma_1(x, y) \subset \overline{H_k(\eta_k)}$ такой, что $x \in (\mathcal{N}_{\eta_k} \partial \mathcal{D}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$ и $y \in (\mathcal{N}_{\eta_k} \partial \mathcal{B}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$, существует кривая $\gamma_2(x, y) \subset \partial_M(H_k(h_k))$, удовлетворяющая неравенству $|\gamma_1(x, y)|_{g_k} > 3|\gamma_2(x, y)|_{g_k}$.

Для построения указанной метрики g_k возьмем произвольные открытые в ∂M множества $\mathcal{B}'$, $\mathcal{D}'$ такие, что $\mathcal{B}_k \in \mathcal{B}' \in \mathcal{D}' \in \mathcal{D}_k$, обозначим для краткости

$$H'(\eta_k) := (\mathcal{N}_{\eta_k}(\mathcal{D}' \setminus \overline{\mathcal{B}'}))_{\tilde{g}_{k-1}}$$

и заметим, что для любой кривой $\gamma_1(x, y)$, удовлетворяющей условию свойства 2), найдется такая кривая $\gamma_2(x, y) \subset \partial_M(H_k(h_k))$, что

$$|\gamma_1(x, y) \cap \overline{H'(\eta_k)}|_{\tilde{g}_{k-1}} \geq s_1, \quad |\gamma_2(x, y)|_{\tilde{g}_{k-1}} \leq s_2, \quad (3.15)$$

где $s_1 > 0$ и $s_2 > 0$ – некоторые не зависящие от η_k , h_k постоянные.

Если $s_1 > 3s_2$, то свойство 2) выполняется в метрике g_{k-1} , поэтому ее можно и оставить в качестве метрики g_k , так что $\Lambda_k \equiv 1$ на M .

В случае $s_1 \leq 3s_2$ положим $\lambda_0 := 3s_2/s_1$ и рассмотрим какую-либо гладкую на M функцию Λ_k , подчиненную условиям:

$$\Lambda_k \equiv \lambda_0 \text{ на } H'(\eta_k), \quad \Lambda_k \equiv 1 \text{ вне множества } H_k(h_k), \quad 1 \leq \Lambda_k \leq \lambda_0 \text{ на } M.$$

Тогда метрика $g_k := \Lambda_k^2 \tilde{g}_{k-1}$ при достаточно малом h_k будет удовлетворять неравенству (3.14) и, тем самым, свойству 1), поскольку

$$\mathbf{V}_{g_k}(H_k(h_k)) < \lambda_0^n \mathbf{V}_{\tilde{g}_{k-1}}(H_k(h_k)),$$

а постоянная λ_0 не зависит от h_k . Кроме того, в силу (3.15) для любой кривой $\gamma_1(x, y)$, удовлетворяющей условию свойства 2), найдется такая кривая $\gamma_2(x, y) \subset \partial_M(H_k(h_k))$, что

$$|\gamma_1(x, y)|_{g_k} > \lambda_0 |\gamma_1(x, y) \cap \overline{H'(\eta_k)}|_{\tilde{g}_{k-1}} \geq \lambda_0 s_1 = 3s_2 \geq 3|\gamma_2(x, y)|_{g_k}$$

(здесь мы учли, что $|\gamma_2(x, y)|_{\tilde{g}_{k-1}} = |\gamma_2(x, y)|_{g_k}$), значит, свойство 2) справедливо. Таким образом, промежуточная метрика g_k построена.

Второй шаг: определение основной метрики $\tilde{g}_k$. Обозначим

$$D_k(t) := (\mathcal{N}_t \mathcal{D}_k)_{g_k}, \quad U_k(t) := (\mathcal{N}_t \mathcal{U}_k)_{g_k} \quad (3.16)$$

при любом g_k -допустимом для $\mathcal{U}_k$ значении толщины $t > 0$. Пусть u_k, d_k — такие значения, причем $d_k < u_k < \eta_k$.

На основании ключевой леммы, рассматриваемой по отношению к многообразию (M, g_k) , найдем число $\delta_k \in (0, d_k)$ и постоянную $c_k > 0$, удовлетворяющие следующему свойству:

если точки x, y из M такие, что $\rho_{g_k}(x, \mathcal{U}_k) = d_k, \rho_{g_k}(y, \mathcal{U}_k) = d_k$, то существует кривая $\tilde{\gamma}(x, y) \subset M$, для которой

$$\rho_{g_k}(\tilde{\gamma}(x, y), \partial M) \geq \delta_k, \quad |\tilde{\gamma}(x, y)|_{g_k} < \rho_{g_k}(x, y) + c_k \delta_k^2. \quad (3.17)$$

При этом число δ_k выберем настолько малым, что

$$c_k \delta_k < 2^{-k}, \quad \mathbf{V}_{g_k}(U_k(\delta_k)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k}}. \quad (3.18)$$

Тогда для индукционного определения очередной метрики $\tilde{g}_k$ построим гладкую на M функцию μ_k , подчиненную условиям:

$$\mu_k \equiv c_k \delta_k \text{ на } D_k\left(\frac{\delta_k}{2}\right), \quad \mu_k \equiv 0 \text{ на } M \setminus U_k(\delta_k), \quad 0 \leq \mu_k \leq c_k \delta_k \text{ на } M, \quad (3.19)$$

и после этого положим $\tilde{g}_k := (1 + \mu_k)^2 g_k$.

В результате двух указанных шагов построения метрика $\tilde{g}_k$ будет получена из метрики $\tilde{g}_{k-1}$ путем конформной замены вида

$$\tilde{g}_k = \lambda_k^2 \tilde{g}_{k-1}, \quad \text{где } \lambda_k = \Lambda_k(1 + \mu_k),$$

функция Λ_k построена на первом шаге, а функция μ_k – на втором в (3.19).

Тогда исходя из построенной последовательности функций λ_k определим метрику $\tilde{g}$, как сказано выше, формулой (3.12). Отметим, что бесконечное произведение в (3.12) сходится в силу неравенств в (3.19), (3.18) и того, что носители функций $\Lambda_k - 1$, т.е. множества $H_k(h_k)$, построенные на первом шаге, при различных k попарно не пересекаются.

Запишем также формулу, связывающую между собой метрики $\tilde{g}$ и g_k для произвольного $k \in \mathbb{N}$, а именно

$$\tilde{g} := \left(\prod_{i=k}^{+\infty} \Lambda_{i+1}^2 (1 + \mu_i)^2 \right) g_k. \quad (3.20)$$

Опираясь на эту формулу, сделаем два замечания.

Предназначение первого шага состоит в создании вокруг множества $\mathcal{B}_k$ такой преграды $\overline{H_k(h_k)}$ сколь угодно малого $\tilde{g}$ -объема, которую геодезические должны огибать, а именно, справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не существует кратчайшей, соединяющей какие-либо точки $x \in (\mathcal{N}_{\eta_k} \partial \mathcal{D}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$ и $y \in (\mathcal{N}_{\eta_k} \partial \mathcal{B}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$, которая целиком лежит в $\overline{H_k(\eta_k)}$.

Действительно, пусть вопреки сказанному существует указанная кратчайшая $\gamma_1(x, y) \subset \overline{H_k(\eta_k)}$. Тогда в силу свойства 2) промежуточной метрики g_k найдется кривая $\gamma_2(x, y) \subset \partial_M(H_k(h_k))$ такая, что

$$|\gamma_1(x, y)|_{\tilde{g}} \geq |\gamma_1(x, y)|_{g_k} > 3|\gamma_2(x, y)|_{g_k}. \quad (3.21)$$

С другой стороны, применяя (3.20) и учитывая, что $\Lambda_{i+1} \equiv 1$ на $\overline{H_k(\eta_k)}$ при всех $i \geq k$, а также условия (3.19) и (3.18) на функции μ_i , получаем

$$|\gamma_2(x, y)|_{\tilde{g}} \leq \prod_{i=k}^{+\infty} (1 + 2^{-i}) |\gamma_2(x, y)|_{g_k} < 3|\gamma_2(x, y)|_{g_k}.$$

Сравнивая полученное неравенство с (3.21), видим, что отрезок $\gamma_1(x, y)$ не является кратчайшим на многообразии $(M, \tilde{g})$, что доказывает утверждение, сформулированное в рассматриваемом замечании.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Метрика $\tilde{g}$ может отличаться от метрики g_k только в тех точках $x \in M$, для которых $\rho_{g_k}(x, \partial M) < \delta_k$.

Действительно, согласно (3.20) различие между $\tilde{g}$ и g_k возможно лишь на носителях функций Λ_{i+1} и μ_i при $i \geq k$, т.е. на множествах $H_{i+1}(h_{i+1})$ и $U_k(\delta_k)$ (см. (3.13) и (3.16)). Но для любой точки $x \in M$, принадлежащей любому из указанных множеств, $\rho_{g_k}(x, \partial M) < \delta_k$, поскольку $\rho_{g_k}(x, \partial M) \leq \rho_{g_i}(x, \partial M) \leq \rho_{\tilde{g}_i}(x, \partial M)$ и $\delta_{i+1} < h_{i+1} < \delta_k$ при $i \geq k$ по построению.

Проверка требуемых свойств метрики $\tilde{g}$. По построению метрика $\tilde{g}$ конформна g и так же, как g , является полной метрикой (так как $\tilde{g} \geq g$).

Оценим величину $\Delta \mathbf{V}$ изменения объема многообразия M при переходе от g к метрике $\tilde{g}$. Согласно проведенному индукционному построению для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ происходило последовательное увеличение объема многообразия сначала (на первом шаге при переходе от $\tilde{g}_{k-1}$ к метрике g_k) на величину, меньшую $\mathbf{V}_{g_k}(H_k(h_k))$, а затем (на втором шаге при переходе от g_k к метрике $\tilde{g}_k$) на величину, меньшую $\mathbf{V}_{\tilde{g}_k}(U_k(\delta_k))$. Следовательно,

$$\Delta \mathbf{V} < \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{V}_{g_k}(H_k(h_k)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{V}_{\tilde{g}_k}(U_k(\delta_k)) < 2\varepsilon$$

в силу условий (3.14), (3.18) и (3.19). Значит, в силу произвольности числа ε последнее утверждение леммы о луче справедливо.

Итак, требуется доказать, что на $(M, \tilde{g})$ существует геодезический луч, исходящий из заданной точки $p \notin \partial M$ и не пересекающий ∂M .

Прежде всего, на основании известного факта (приведенного перед формулировкой леммы о луче) на $(M, \tilde{g})$ как на полном некомпактном многообразии всегда существует некоторый геодезический луч l с началом в точке p . Докажем, что $l \cap \partial M = \emptyset$.

В противном случае найдется точка $q \in l \cap \mathcal{B}_k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда для выбранного в начале второго шага построения числа d_k и отвечающей ему окрестности $D_k(d_k)$ (см. (3.16)) справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Существует отрезок $l(x, y)$ луча l такой, что*

$$q \in l(x, y) \subset \overline{D_k(d_k)}, \quad \rho_{g_k}(x, \partial M) = d_k, \quad \rho_{g_k}(y, \partial M) = d_k. \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $p \notin \overline{D_k(d_k)}$. На луче l имеется также точка $p' \notin \overline{D_k(d_k)}$ такая, что отрезки $l(p, q)$ и $l(p', q)$ пересекаются лишь в точке q . Убедимся, что на этих отрезках и находятся искомые точки x и y . Для определенности обратимся к отрезку $l(p, q)$.

Рассмотрим связную компоненту множества $l(p, q) \cap \overline{D_k(d_k)}$, представляющую собой некоторый отрезок луча l , одной из концевых точек которого является точка q , а другая его концевая точка (обозначим ее через x) лежит на относительной границе окрестности $D_k(d_k)$.

Предположим, что $\rho_{g_k}(x, \partial M) \neq d_k$. Тогда точка x лежит на “боковой границе” окрестности $D_k(d_k)$ и отрезок $l(x, q)$ проходит “сквозь” множество $(\mathcal{N}_{d_k}(\mathcal{D}_k \setminus \mathcal{B}_k))_{g_k}$, разделяющее точки x и q . Строго говоря, это означает, что наряду с x существует точка x' такая, что

$$x \in (\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{D}_k)_{g_k}, \quad x' \in (\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{B}_k)_{g_k}, \quad l(x, x') \subset \overline{(\mathcal{N}_{d_k}(\mathcal{D}_k \setminus \mathcal{B}_k))_{g_k}}. \quad (3.23)$$

Поскольку $(\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{D}_k)_{g_k} = (\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{D}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$ и $(\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{B}_k)_{g_k} = (\mathcal{N}_{d_k} \partial \mathcal{B}_k)_{\tilde{g}_{k-1}}$ в силу свойства 1) первого шага построения, причем

$$\overline{(\mathcal{N}_{d_k}(\mathcal{D}_k \setminus \mathcal{B}_k))_{g_k}} \subset \overline{H_k(d_k)} \subset \overline{H_k(\eta_k)},$$

то (3.23) противоречит замечанию 3.

Полученное противоречие показывает, что $\rho_{g_k}(x, \partial M) = d_k$ для определенной выше точки $x \in l(p, q)$ такой, что $l(x, q) \subset \overline{D_k(d_k)}$. Аналогично, на отрезке $l(p', q)$, выбранном в начале доказательства утверждения, находим точку y такую, что $l(y, q) \subset \overline{D_k(d_k)}$ и $\rho_{g_k}(y, \partial M) = d_k$. Тогда отрезок $l(x, y)$ является искомым для рассматриваемого утверждения 3.

Обратимся теперь к отрезку $l(x, y)$, удовлетворяющему условиям (3.22). В силу выбора числа $\delta_k < d_k$ (на втором шаге построения с помощью ключевой леммы) найдется кривая $\tilde{\gamma}(x, y) \subset M$, соединяющая указанные в (3.22) точки x и y , для которой выполняются неравенства (3.17).

В силу замечания 4 первое из неравенств (3.17) показывает, что кривая $\tilde{\gamma}(x, y)$ лежит вне области различия метрик $\tilde{g}$ и g_k , поэтому второе из неравенств (3.17) можно записать в виде

$$|\tilde{\gamma}(x, y)|_{\tilde{g}} < \rho_{g_k}(x, y) + c_k \delta_k^2. \quad (3.24)$$

Оценим теперь $\tilde{g}$ -длину отрезка $l(x, y)$. Заметим, что из условий (3.22) вытекает, что на отрезке $l(x, y)$ найдутся точки x', y' , удовлетворяющие аналогичным условиям для окрестности $D_k(\delta_k/2)$, а именно

$$q \in l(x', y') \subset \overline{D_k\left(\frac{\delta_k}{2}\right)}, \quad \rho_{g_k}(x, \partial M) = \frac{\delta_k}{2}, \quad \rho_{g_k}(y, \partial M) = \frac{\delta_k}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|l(x', y')|_{g_k} = |l(x', q)|_{g_k} + |l(y', q)|_{g_k} \geq \rho_{g_k}(x', \partial M) + \rho_{g_k}(y', \partial M) = \delta_k.$$

Тогда согласно определению (3.19) для метрики $\tilde{g}_k = (1 + \mu_k)^2 g_k$ имеем

$$|l(x', y')|_{\tilde{g}_k} = (1 + c_k \delta_k) |l(x', y')|_{g_k} \geq |l(x', y')|_{g_k} + c_k \delta_k^2.$$

Добавив сюда неравенство $|l(x, y) \setminus l(x', y')|_{\tilde{g}_k} \geq |l(x, y) \setminus l(x', y')|_{g_k}$, приходим к оценке $\tilde{g}$ -длины отрезка $l(x, y)$

$$|l(x, y)|_{g_k} + c_k \delta_k^2 \leq |l(x, y)|_{\tilde{g}_k} \leq |l(x, y)|_{\tilde{g}}.$$

Применяя последнюю оценку к (3.24), получаем, что $|\tilde{\gamma}(x, y)|_{\tilde{g}} < |l(x, y)|_{\tilde{g}}$. Значит, отрезок $l(x, y)$ не является кратчайшим на $(M, \tilde{g})$, что противоречит определению l как геодезического луча на $(M, \tilde{g})$.

Напомним, что существование такого отрезка $l(x, y)$ было установлено в утверждении 3, исходя из предположения, что луч l пересекает край ∂M в некоторой точке q множества $\mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому полученное противоречие доказывает, что геодезический луч l на многообразии $(M, \tilde{g})$ на самом деле не пересекается с краем многообразия.

Таким образом лемма о луче полностью доказана.

Настоящая работа, как и [1], была выполнена благодаря научному общению с В. А. Зоричем, за что я его искренне благодарю.

Список литературы

- [1] В. М. Кесельман, “Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем”, *УМН*, **65**:2 (2010), 195–196; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “The relative isoperimetric inequality on a conformally parabolic manifold with boundary”, *Russian Math. Surveys*, **65**:2 (2010), 384–385.
- [2] В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 3–36; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “The isoperimetric inequality on conformally parabolic manifolds”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 1–33.
- [3] V. A. Zorich, “The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems”, *Quasiconformal space mappings*, Lecture Notes in Math., **1508**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 132–148.
- [4] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971; пер. с нем.: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Math., **55**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1968.
- [5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [6] М. М. Постников, *Риманова геометрия*, Факториал, М., 1998; англ. пер.: M. M. Postnikov, *Geometry VI. Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

В. М. Кесельман (V. M. Kesel'man)

Московский государственный индустриальный
университет

E-mail: kvlm@online.ru

Поступила в редакцию
17.05.2010