Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич, Существование и единственность меры с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 7, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:21:53

УДК 517.938

А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич

Существование и единственность меры с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов

Основным результатом работы является утверждение, что “гладкая” мера Мазура и Вича является единственной мерой с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов. Доказательство основано на символическом представлении потока в пространстве Вича зашнурованных прямоугольников.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: пространство модулей, индукция Рази, символическая динамика, сдвиг Маркова, специальный поток.

§ 1. Введение

Геодезический поток Тейхмюллера $\{g_t\}$, впервые рассмотренный Г. Мазуром (см. [1]) и У. Вичем (см. [2]), действует на пространстве модулей римановых поверхностей, снабженных голоморфным дифференциалом. Более точно, пусть S – замкнутая поверхность рода $g \geq 2$. Введем на S комплексную структуру σ и голоморфный дифференциал ω . Пара (σ, ω) считается эквивалентной другой паре (σ_1, ω_1) , если существует диффеоморфизм поверхности S , переводящий (σ, ω) в (σ_1, ω_1) . Пространство модулей $\mathcal{M}(g)$ состоит из классов эквивалентности, а поток $\{g_t\}$ на $\mathcal{M}(g)$ порождается действием на парах (σ, ω) по формуле $g_t(\sigma, \omega) = (\sigma', \omega')$, где $\omega' = e^t \operatorname{Re}(\omega) + ie^{-t} \operatorname{Im}(\omega)$, а комплексная структура σ' определяется требованием голоморфности ω' . Если (σ, ω) и (σ', ω') эквивалентны, то дифференциалы ω и ω' имеют одинаковые порядки нулей и одинаковые площади. Следовательно, эти порядки и площади корректно определены на $\mathcal{M}(g)$. Кроме того, они сохраняются потоком Тейхмюллера $\{g_t\}$. Возьмем произвольный неупорядоченный набор $\kappa = (k_1, \dots, k_r)$, где $k_i \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_r = 2g - 2$, и обозначим через $\mathcal{M}_\kappa$ подпространство $\mathcal{M}(g)$, соответствующее дифференциалам единичной площади, т.е. $\frac{i}{2} \int \omega \wedge \bar{\omega} = 1$, с порядками нулей k_i , $i = 1, \dots, r$; такое подпространство $\mathcal{M}_\kappa$ называют *слоем* в $\mathcal{M}(g)$. Каждый слой является $\{g_t\}$ -инвариантным множеством.

Работа первого автора частично поддержана Национальным научным фондом (грант № DMS 0604386), фондом Эдгара Оделла Ловетта в Университете Райса и Программой математической теории управления РАН. Работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 07-01-92215 CNRS(L) и № 08-01-00105).

Пространство $\mathcal{M}_\varkappa$ допускает естественную топологическую структуру, относительно которой оно, вообще говоря, несвязно. Число его связных компонент не превышает трех и зависит от $\varkappa$ (подробности см. в [3]). Каждая компонента $\mathcal{H}$ этого пространства является $\{g_t\}$ -инвариантным множеством.

По теореме Хаббарда и Мазура (см. [4]) $\mathcal{H}$ допускает локальную идентификацию с пространством относительных гомологий $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{C})$, где $p_1, \dots, p_m$ – нули дифференциала. Мера Лебега на $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{C})$, нормированная так, чтобы решетка $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ имела кообъем 1, порождает вследствие указанной идентификации некоторую глобально определенную $\{g_t\}$ -инвариантную меру на $\mathcal{H}$ (см. [1], [5], [6]).

Зафиксируем $\mathcal{H}$ и обозначим через $\mu_\varkappa$ нормированное ограничение на $\mathcal{H}$ этой $\{g_t\}$ -инвариантной меры.

Вич (см. [5]) показал, что $\{g_t\}$ по отношению к мере $\mu_\varkappa$ является K -поток с энтропией, определяемой формулой

$$h_{\mu_\varkappa}(\{g_t\}) = 2g - 1 + r. \quad (1.1)$$

Наша цель – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. *Мера $\mu_\varkappa$ – единственная мера с максимальной энтропией для потока $\{g_t\}$ на $\mathcal{H}$.*

Доказательство этой теоремы основано на представлении потока $\{g_t\}$ в виде специального потока над топологическим сдвигом Маркова со счетным алфавитом. Рассуждения проводятся в два этапа. Мы начинаем с условий на инвариантную меру потока, гарантирующих, что она является мерой с максимальной энтропией. Эти условия содержатся в теореме 2.2 (см. п. 2.1). Мы даем набросок ее доказательства, которое близко по духу к термодинамическому формализму для топологических сдвигов Маркова со счетным алфавитом (см. [7]–[11]); мы, в частности, используем теорему единственности Буззи и Сарига (см. [12]) для равновесной меры. Приложение термодинамического формализма к другой гладкой динамической системе с некомпактным фазовым пространством – геодезическому потоку на модулярной поверхности – можно найти в [13].

Пункты 2.2–2.5 посвящены подробному доказательству теоремы 2.2. В оставшейся части работы (§§ 3–5) мы выводим теорему 1.1 из теоремы 2.2, начиная, как и раньше, с наброска последующих рассуждений. В центре нашей аргументации в этой части доказательства находится следующее наблюдение. Поток Тейхмюллера порождает устойчивое и неустойчивое слоения с бесконечно гладкими слоями, по отношению к которым он является “измеримо-аносовским” в смысле Вича (см. [5]) и Форни (см. [14]). Мера Мазура–Вича $\mu_\varkappa$ порождает глобально определенные сигма-конечные меры на неустойчивых слоях, эти меры равномерно растягиваются потоком. Другими словами, мера Мазура–Вича обладает свойством равномерного растяжения Маргулиса (см. [15]) на неустойчивых слоях. Грубо говоря, предложение 4.8 выражает свойство Маргулиса в терминах символического представления потока Тейхмюллера.

Заметим, что для доказательства теоремы 1.1 мы нуждаемся лишь в частном случае теоремы 2.2, касающемся топологического сдвига Бернулли со счетным алфавитом. Однако доказательство в этом частном случае было бы лишь немногим проще, чем в общем. Основные результаты настоящей работы опубликованы без доказательства в [16].

§ 2. Специальные потоки

Пусть G – абелева группа (в дальнейшем будут встречаться лишь случаи $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{R}$) и $\{T_g, g \in G\}$ – действие группы G измеримыми преобразованиями метризуемого топологического пространства X , снабженного борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}$.

Если $G = \mathbb{Z}$, то соответствующее действие обозначим через $\{X, T_n\}$ (или $\{T_n\}$) и будем называть *каскадом*. Если $G = \mathbb{R}$, то будем писать $\{X, T_t\}$ (или $\{T_t\}$) и называть действие *потоком*. В первом случае $T_n = T^n$, $n \in \mathbb{Z}$, где T – взаимно однозначное и измеримое вместе с обратным преобразование пространства $(X, \mathcal{B})$, называемое *автоморфизмом*. Мы будем придерживаться той же терминологии, говоря о действиях вместе с их инвариантными мерами.

Каскады $\{X, T_n\}$, $\{X', T'_n\}$, действующие соответственно на $(X, \mathcal{B})$, $(X', \mathcal{B}')$, называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное эпиморфное и измеримое вместе с обратным отображение $\Phi: X \rightarrow X'$, при котором $T'_n \circ \Phi = \Phi \circ T_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Если отображение Φ не обязательно эпиморфно, то будем говорить, что каскад $\{X, T_n\}$ *вложен* в каскад $\{X', T'_n\}$.

Рассмотрим каскад $\{X, T_n\}$ вместе с $\{T_n\}$ -инвариантной борелевской вероятностной мерой μ на X . Будем обозначать этот объект через $\{X, T; \mu\}$. Назовем каскады $\{X, T_n; \mu\}$ и $\{X', T'_n; \mu'\}$ *изоморфными*, если существуют множества $X_1 \in \mathcal{B}$ и $X'_1 \in \mathcal{B}'$, инвариантные относительно всех T_n и всех T'_n соответственно и такие, что $\mu(X_1) = \mu'(X'_1) = 1$ и ограничения $\{X_1, T_n|_{X_1}\}$ и $\{X'_1, T'_n|_{X'_1}\}$ изоморфны в определенном только что смысле.

Замена $G = \mathbb{Z}$ на $G = \mathbb{R}$ и соответственно n на t автоматически приводит к аналогичным понятиям для потоков.

В этой работе мы преимущественно будем иметь дело с потоками, которые можно определить следующим образом. Пусть T – автоморфизм пространства $(X, \mathcal{B})$ и $f: X \rightarrow [c, \infty)$, $c > 0$, – измеримая функция. Рассмотрим прямое произведение $X \times \mathbb{R}_+$ и его подмножество $X_f = \{(x, u) : x \in X, 0 \leq u < f(x)\}$. Для $t \geq 0$ и каждой точки $\tilde{x} = (x, u) \in X_f$ положим

$$S_t \tilde{x} = \begin{cases} (x, u + t), & \text{если } u + t < f(x), \\ \left(T^n x, u + t - \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \right) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где n в последнем выражении таково, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \leq u + t < \sum_{i=0}^n f(T^i x).$$

Положив $S_t = (S_{-t})^{-1}$ для $t < 0$, получим, таким образом, поток $\{X_f, S_t\}$. Для этого потока будем также использовать обозначение (T, f) и называть его *специальным потоком*, построенным по T и f .

Обозначим через $\mathcal{M}_{T,f}$ множество всех T -инвариантных борелевских вероятностных мер μ на X , для которых $\mu(f) < \infty$; здесь и далее $\mu(f) := \int f d\mu$. Каждая (T, f) -инвариантная борелевская вероятностная мера μ_f на X_f порождается некоторой мерой $\mu \in \mathcal{M}_{T,f}$, а именно

$$\mu_f = (\mu(f))^{-1}(\mu \times \lambda)|_{X_f},$$

где λ – мера Лебега на $\mathbb{R}_+$. Меру μ_f будем называть *f-поднятием* меры μ и для краткости будем писать $(T, f; \mu_f)$ вместо $((T, f); \mu_f)$. Энтропия $h(T, f; \mu_f)$ потока (T, f) по отношению к мере μ_f задается по формуле Абрамова равенством

$$h(T, f; \mu_f) = \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)}, \quad (2.1)$$

где $h(T; \mu)$ – энтропия автоморфизма T по отношению к мере μ . Определим *топологическую энтропию* потока (T, f) соотношением

$$h_{\text{top}}(T, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{T,f}} h(T, f; \mu_f). \quad (2.2)$$

Эта терминология оправдывается следующим известным фактом: если X – компактное пространство, T – его гомеоморфизм и функция f непрерывна, то правая часть (2.2) действительно равна топологической энтропии потока (T, f) .

Следует заметить, что в некомпактном случае существуют различные определения топологической энтропии, которые для конкретных систем могут приводить к различным значениям (см., например, [17]).

Каждую меру $\mu \in \mathcal{M}_{T,f}$, для которой супремум в (2.2) достигается, будем называть *мерой с максимальной энтропией* для (T, f) .

2.1. Специальные потоки над сдвигами Маркова. В конкретном случае, с которым мы будем иметь дело, (X, T) является топологическим сдвигом Маркова со счетным алфавитом, т.е. X – это множество бесконечных двусторонних путей в ориентированном графе $\Gamma = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер $E \subseteq V \times V$, а T – преобразование сдвига: $(Tx)_i = x_{i+1}$ для каждого $x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in X$. Другими словами, X состоит из всех последовательностей $x \in V^{\mathbb{Z}}$, для которых $B_{x_i, x_{i+1}} = 1$, где $B = B(\Gamma)$ – матрица смежности вершин графа Γ . Вершины $v \in V$ будем также называть *буквами*.

В дальнейшем будем предполагать, что граф Γ связан. Если Γ – полный граф, т.е. $E = V \times V$, то мы имеем *топологический сдвиг Бернулли* с алфавитом V .

Введем дискретную топологию на V , топологию прямого произведения на $V^{\mathbb{Z}}$ и индуцированную топологию на $X \subset V^{\mathbb{Z}}$. Отображение T , очевидно, является гомеоморфизмом пространства X . Каждый конечный путь в графе Γ , т.е. последовательность $w = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$, где $(v_i, v_{i+1}) \in E$ при $i = 1, \dots, k-1$,

будем называть *словом*. Обозначим множество всех слов (включая пустое) через $W(\Gamma)$.

Рассмотрим два слова, $w = (v_1, \dots, v_k)$ и $w' = (v'_1, \dots, v'_l)$. Их конкатенация $ww' := (v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_l)$ – это тоже слово, если $(v_k, v'_1) \in E$. Будем говорить, что w *содержит* w' (или что w' является *подсловом* слова w), если $v'_1 = v_i, \dots, v'_l = v_{i+l-1}$ для некоторого i , $1 \leq i \leq k-l+1$. В частном случае, когда $i = 1$, будем называть w' *префиксом* слова w . Пусть $w = (v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 2$, – слово и $w' = (v_1, \dots, v_l)$, $l \leq n$, – префикс в w . Будем называть w' *простым префиксом*, если не существует такого k , $2 \leq k \leq l$, что $(v_1, \dots, v_{n-k+1}) = (v_k, \dots, v_n)$. Если w – простой префикс самого себя, то будем называть w *простым словом*. Очевидно, что если простое слово является префиксом другого слова, то оно является простым префиксом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Так как слово $w = (v_1, \dots, v_n)$ – это конкатенация однобуквенных слов v_i , мы будем также писать $w = v_1 \dots v_n$.

Каждому слову w поставим в соответствие цилиндр $C_w = \{x \in X : (x_0, \dots, x_{|w|-1}) = w\}$, где $|w|$ – длина слова w , т.е. число составляющих его символов.

Для функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$\text{var}_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i \text{ при } |i| \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем говорить, что f имеет *суммируемые вариации*, если $\sum_{n=1}^{\infty} \text{var}_n(f) < \infty$, и что f *зависит только от будущего*, если из справедливости равенства $x_i = y_i$ для всех $i \geq 0$ следует, что $f(x) = f(y)$.

Для специального потока $\{S_t\} = (T, f)$ и множества $C \subset X$ положим

$$\tilde{\tau}(x, C) = \inf\{t > 0 : S_t(x, 0) \in C \times \{0\}\}, \quad x \in X, \quad (2.3)$$

так что $\tilde{\tau}(x, C)$ есть первый момент достижения множества $C \times \{0\}$ точкой $x \times \{0\} \in X_f$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть (X, T) – топологический сдвиг Маркова со счетным алфавитом, отвечающий связному графу Γ , и $f : X \rightarrow [c, \infty)$, $c > 0$, – функция с суммируемыми вариациями, зависящая только от будущего. Пусть задан специальный поток $\{S_t\} = (T, f)$, построенный по T и f . Предположим, что $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_{T,f}$ – мера, положительная на всех цилиндрах в X , и что для всякого $l > 0$ существует простое слово $w \in W(\Gamma)$ с $|w| > l$ такое, что для каждого слова $\hat{w}$, не содержащего w , и для $\bar{\mu}$ -почти каждой точки $x \in C_{w\hat{w}w}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\bar{\mu}(C_{w\hat{w}w})}{\bar{\mu}(C_w)} - e^{-s\tilde{\tau}(x, C_w)} \right| \leq e^{-\alpha|w| - s\tilde{\tau}(x, C_w)}, \quad (2.4)$$

где $\tilde{\tau}(x, C_w)$ определено в (2.3), а α, s – положительные константы (зависящие только от $\bar{\mu}$).

Тогда:

- (i) $s = h_{\text{top}}(T, f)$;

- (ii) если $s = h(T, f; \bar{\mu}_f)$, то $\bar{\mu}_f$ – единственная мера с максимальной энтропией для потока $\{S_t\} = (T, f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Дробь в левой части (2.4) есть, очевидно, условная мера цилиндра $C_{w\hat{w}w}$ при условии C_w .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Предположение, что f зависит только от будущего, сделано лишь для удобства: теорема 2.2 остается верной и без этого ограничения; тем не менее в дальнейшем мы будем использовать ее только в приведенной выше форме.

Наметим доказательство теоремы 2.2. На первом шаге (в п. 2.2) мы рассмотрим частный случай, когда (X, T) – сдвиг Бернулли, а $f(x)$, $x \in X$, зависит только от x_0 (будем тогда говорить, что f зависит только от нулевой координаты). В этом случае топологическую энтропию $h_{\text{top}}(T, f)$ можно явно выразить через f . На следующем шаге мы возвращаемся к общему случаю и доказываем, что супремум в определении $h_{\text{top}}(T, f)$ можно брать по множеству эргодических мер, которые положительны на всех цилиндрах в X (см. п. 2.4). Это позволяет утверждать, что для специального потока (T_C, f_C) , где T_C – преобразование, индуцированное автоморфизмом T на цилиндре $C \subset X$, а f_C определяется естественным образом по f , T и C , выполнено соотношение

$$h_{\text{top}}(T, f) = h_{\text{top}}(T_C, f_C).$$

Если взять $C = \{x : (x_0, \dots, x_k) = w\}$, где $w \in W(\Gamma)$, то производный автоморфизм (C, T_C) будет изоморфен сдвигу Бернулли со счетным алфавитом, а поток (T_C, f_C) – специальному потоку (σ, φ) над таким сдвигом Бернулли. Здесь мы используем аппроксимацию и находим функцию φ^w , зависящую только от нулевой координаты и равномерно близкую к φ (для достаточно длинного слова w). Топологические энтропии специальных потоков (σ, φ) и (σ, φ^w) также близки. К (σ, φ^w) мы применяем результаты, полученные на первом этапе рассуждения, и переписываем для этого потока неравенство (2.4) (см. п. 2.5). Устремив длину слова w к бесконечности, мы завершаем доказательство соотношения $s = h_{\text{top}}(T, f)$, из которого следует, что рассматриваемая мера имеет максимальную энтропию. Единственность такой меры мы выводим из единственности соответствующей равновесной меры и используем здесь теорему Буззи и Сарига (см. [12]).

2.2. Энтропия специальных потоков над сдвигами Бернулли. Доказательство теоремы 2.2 основано на свойствах специальных потоков, построенных по топологическому сдвигу Маркова (в частности, сдвигу Бернулли) и функциям одной или конечного числа координат. Некоторые из этих свойств, впервые изученные Савченко (см. [8]), описываются в этом пункте. Для удобства читателя мы приводим доказательства. Наш подход близок к подходу работы [8].

Начнем с двух простых лемм. Пусть $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ или $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, и $c = (c_i, i \in \mathcal{N})$ – последовательность действительных чисел с $\inf_{i \in \mathcal{N}} c_i > 0$.

Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{N}, \mathbf{c}}$ семейство таких последовательностей $\mathbf{p} = (p_i, i \in \mathcal{N})$, что

$$p_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i = 1, \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i c_i < \infty \quad (2.5)$$

(разумеется, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}, \mathbf{c}}$ не зависит от $\mathbf{c}$, если $|\mathcal{N}| < \infty$). Пусть

$$H(\mathbf{p}) = H_{\mathcal{N}, \mathbf{c}}(\mathbf{p}) := - \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} p_i \log p_i \right) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} p_i c_i \right)^{-1}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad (2.6)$$

(как обычно, мы полагаем $0 \log 0 = 0$).

ЛЕММА 2.5. *Если последовательность $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ такова, что $p_k = 0$ для некоторого $k \in \mathcal{N}$, то существует такая последовательность $\mathbf{p}' = (p'_i, i \in \mathcal{N}) \in \mathcal{P}$, что $p'_i > 0$ для всех i и $H(\mathbf{p}') \geq H(\mathbf{p})$, где неравенство является строгим, если $H(\mathbf{p}) < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $\mathcal{N}$ на два непустых подмножества,

$$\mathcal{N}^0 = \{i \in \mathcal{N} : p_i = 0\}, \quad \mathcal{N}^1 = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^0.$$

Зафиксируем произвольное $l \in \mathcal{N}^1$ и для $t \in [0, p_l]$ положим $\mathbf{p}^t = (p_i^t, i \in \mathcal{N})$, где $p_k^t = t$, $p_l^t = p_l - t$ и $p_i^t = p_i$ для $i \neq k, l$ (по предположению $k \in \mathcal{N}^0$). Очевидно, $\mathbf{p}^t \in \mathcal{P}$ и $H(\mathbf{p}^t) = \infty$, когда $H(\mathbf{p}) = \infty$. Простое вычисление показывает, что если $H(\mathbf{p}) < \infty$, то правая производная $\frac{d^+}{dt} H(\mathbf{p}^t)$ в точке $t = 0$ равна $+\infty$. Отсюда следует, что $H(\mathbf{p}^t) > H(\mathbf{p})$, если $t > 0$ достаточно мало.

Если $\mathcal{N}^0 = \{k\}$, то доказательство завершено. Если $\mathcal{N}^0 \setminus \{k\} \neq \emptyset$, мы сначала рассмотрим случай $H(\mathbf{p}) < \infty$. Зафиксируем произвольное $t \in (0, p_l)$, для которого $H(\mathbf{p}^t) > H(\mathbf{p})$. Легко подобрать такие положительные числа q_i , $i \in \mathcal{N}^0 \setminus \{k\}$, что

$$\sum_{i \in \mathcal{N}^0 \setminus \{k\}} q_i = 1, \quad \sum_{i \in \mathcal{N}^0 \setminus \{k\}} q_i (c_i - \log q_i) < \infty. \quad (2.7)$$

Для $s \in [0, t]$ положим $\mathbf{p}^{t,s} = (p_i^{t,s}, i \in \mathcal{N})$, где

$$\begin{aligned} p_i^{t,s} &= sq_i, & i \in \mathcal{N}^0 \setminus \{k\}; & & p_i^{t,s} &= p_i, & i \in \mathcal{N}^1 \setminus \{l\}; \\ p_k^{t,s} &= t - s; & & & p_l^{t,s} &= p_l - t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) следует, что $\mathbf{p}^{t,s} \in \mathcal{P}$ и $\lim_{s \rightarrow 0} H(\mathbf{p}^{t,s}) = H(\mathbf{p}^t)$. Значит, $H(\mathbf{p}^{t,s}) > H(\mathbf{p})$ при достаточно малых $s > 0$, и так как $p_i^{t,s} > 0$, мы можем взять $\mathbf{p}^{t,s}$ с одним из таких s в качестве $\mathbf{p}'$.

Осталось заметить, что если $H(\mathbf{p}) = \infty$, то $H(\mathbf{p}^{t,s}) = \infty$ для всех $s \in [0, t]$ (см. (2.7), (2.8)).

ЛЕММА 2.6. *Пусть $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, и пусть $\mathbf{c}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ и $H = H_{\mathcal{N}, \mathbf{c}}$ определены так же, как и выше. Тогда $\sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} H(\mathbf{p})$ – единственное решение уравнения $F_n(\beta) = 1$, где $F_n(\beta) = \sum_{i=1}^n e^{-\beta c_i}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как H – непрерывная функция на компактном множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, она достигает супремума в некоторой точке $\mathbf{p}^0 = (p_i^0, i = 1, \dots, n) \in \mathcal{P}$. По лемме 2.5 $p_i^0 > 0$ для всех i . Пусть

$$\mathcal{P}^+ = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} : p_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Для $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ положим $p_1 = 1 - \sum_{i=2}^n p_i$ и рассмотрим уравнения $\frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$, $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$. Из этой системы уравнений следует, что если $\mathbf{p}^0$ – точка экстремума функции $H(\mathbf{p})$, то $p_i^0 = e^{-\beta^0 c_i} / F_n(\beta^0)$, $1 \leq i \leq n$, где $\beta^0 = \text{const} > 0$. Поэтому доказываемое утверждение верно, если $c_i = c_1$ при $i = 2, \dots, n$. В противном случае мы берем произвольное i , для которого $c_i \neq c_1$, и из равенства $\frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial p_i} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = 0$, где $p_1 = 1 - \sum_{i=2}^n p_i$, получаем $\beta^0 = H(\mathbf{p}^0)$. С другой стороны, подставляя $\mathbf{p}^0$ вместо $\mathbf{p}$ в $H(\mathbf{p})$, мы убеждаемся, что

$$H(\mathbf{p}^0) = \beta^0 - \frac{F_n(\beta^0)}{F'_n(\beta^0)} \log F_n(\beta^0).$$

Таким образом, $\log F_n(\beta^0) = 0$, т.е. β^0 – корень уравнения $F_n(\beta) = 1$. Этот корень единственный, так как $F_n(\beta)$ убывает по β . Наконец,

$$H(\mathbf{p}^0) = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} H(\mathbf{p}),$$

поскольку, как уже было отмечено, каждая точка максимума принадлежит $\mathcal{P}^+$, а потому в ней должны выполняться равенства $\frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$, $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$, $p_1 = 1 - \sum_{i=2}^n p_i$. Но мы видели, что эти уравнения имеют только одно решение.

Рассмотрим теперь сдвиг Бернулли со счетным алфавитом (X, T) , где $X = V^{\mathbb{Z}}$, и специальный поток $\{S_t\} = (T, f)$, построенный по T и такой функции f , что $f(x) = f_0(x_0)$, $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, где $f_0: V \rightarrow [c, \infty)$, $c > 0$. Пусть

$$F(\beta) = \sum_{v \in V} e^{-\beta f_0(v)}, \quad \beta \geq 0.$$

Следующую лемму (как и предыдущую) можно вывести из предложения 3.2 статьи [18] (см. также [11]).

ЛЕММА 2.7. *Если существует $\beta_0 \geq 0$ с $F(\beta_0) = 1$, то $h_{\text{top}}(T, f) = \beta_0$. В противном случае $h_{\text{top}}(T, f) = \sup\{\beta \geq 0 : F(\beta) = \infty\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $B_{T,f}$ семейство всех бернуллиевских мер из $\mathcal{M}_{T,f}$. Каждая мера $\nu \in B_{T,f}$ определяется одномерным распределением $\{p^\nu(v), v \in V\}$, где

$$p^\nu(v) = \nu(C_v) \geq 0, \quad \sum_{v \in V} p^\nu(v) = 1, \quad \sum_{v \in V} p^\nu(v) f_0(v) < \infty.$$

Заметим, что

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{T,f}} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} = \sup_{\nu \in B_{T,f}} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)}. \quad (2.9)$$

Действительно, каждая мера $\mu \in \mathcal{M}_{T,f}$ порождает меру $\mu_B \in B_{T,f}$ с $p^{\mu_B}(v) = \mu_B(C_v) = \mu(C_v)$. Очевидно, $\mu_B(f) = \mu(f)$, и основные свойства энтропии гарантируют, что $h(T; \mu) \leq h(T; \mu_B)$.

Занумеруем в произвольном порядке вершины $v \in V$ и положим $B^{(n)} = \{\nu \in B_{T,f} : p^\nu(v_i) = 0, i \geq n+1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждой меры $\mu \in B_{T,f}$ можно подобрать такую последовательность мер $\nu_n \in B^{(n)}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(T; \nu_n)}{\nu_n(f)} = \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)}.$$

Тогда в силу (2.9)

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{T,f}} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\nu \in B^{(n)}} \frac{h(T; \nu)}{\nu(f)}. \quad (2.10)$$

Теперь заметим, что соотношения

$$p_i := p^\nu(v_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^\nu := (p_1, \dots, p_n)$$

определяют взаимно однозначное соответствие между $B^{(n)}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}$, где $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, и что $h(T; \nu)/\nu(f) = H_{\mathcal{N}, \mathbf{c}}(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$, где $\mathbf{c} = (c_i, i \in \mathcal{N})$, $c_i = f_0(v_i)$, $i \in \mathcal{N}$ (см. (2.5) и (2.6)).

По лемме 2.6 правая часть (2.10) есть $\sup_n \beta_n$, где β_n определяется равенством $F_n(\beta_n) = 1$. Заметим, что F_n есть n -я частичная сумма ряда для F , а F_n и F — строго убывающие функции (для функции F это верно на полуоси, где она конечна). Следовательно, $\sup_n \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$. Рассмотрим две возможности, первая из которых состоит в том, что $F(\beta) = \infty$ для всех $\beta \geq 0$. Понятно, что тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$. В противном случае должно существовать единственное $\beta_\infty > 0$, для которого либо $F(\beta_\infty) = 1$, либо $F(\beta) < 1$ при $\beta \geq \beta_\infty$ и $F(\beta) = \infty$ при $\beta < \beta_\infty$. Так как $F_n(\beta) < F_{n+1}(\beta) < F(\beta)$ для всех $n \geq 1$ и $\beta \geq 0$, то в обоих случаях $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \beta_\infty$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n =: \beta'_\infty < \beta_\infty$, то $F(\beta'_\infty) > 1$ (во втором случае $F(\beta'_\infty) = \infty$). Это значит, что $F_n(\beta'_\infty) > 1$ для достаточно больших n . Но $\beta'_\infty > \beta_n$, а потому $F_n(\beta'_\infty) < F_n(\beta_n) < 1$ для всех n . Отсюда можно заключить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_\infty$. Таким образом, мы доказали оба утверждения леммы.

2.3. Производные автоморфизмы и редукция Маркова–Бернулли.

Перед тем как сформулировать очередную лемму необходимо напомнить следующее определение. Пусть T — автоморфизм пространства $(X, \mathcal{B})$, и пусть $C \in \mathcal{B}$. Положим

$$X_C = \left\{ x \in X : \sum_{n < 0} \mathbf{1}_C(T^n x) = \sum_{n > 0} \mathbf{1}_C(T^n x) = \infty \right\}, \quad C' = C \cap X_C. \quad (2.11)$$

Таким образом, C' состоит из всех точек множества C , которые посещают C бесконечно много раз под действием как положительных, так и отрицательных степеней T . Пусть также

$$\tau(T, C; x) = \min\{n > 0 : T^n x \in C'\}, \quad T_{C'} x = T^{\tau(T, C; x)} x, \quad x \in C'. \quad (2.12)$$

Ясно что множества X_C , C' измеримы и инвариантны по отношению к T и $T_{C'}$ соответственно и что $T_{C'}$ – автоморфизм множества C' , снабженного индуцированной борелевской σ -алгеброй; $T_{C'}$ называется *индуцированным (производным) автоморфизмом* на C' .

ЛЕММА 2.8. Пусть (T, f) – специальный поток, построенный по автоморфизму T пространства $(X, \mathcal{B})$ и $\mathcal{B}$ -измеримой функции $f: X \rightarrow [c, \infty)$, $c > 0$, и пусть $C \in \mathcal{B}$. Тогда специальный поток $(T|_{X_C}, f|_{X_C})$, построенный по ограничениям T и f на X_C , изоморфен специальному потоку $(T_{C'}, f_{C'})$, где

$$f_{C'}(x) = \sum_{i=0}^{\tau(T, C'; x)-1} f(T^i x), \quad x \in C'. \quad (2.13)$$

Далее, если эргодическая мера $\mu \in \mathcal{M}_{T, f}$ такова, что $\mu(C) > 0$, то $\mu(f) = \int_{C'} f_{C'} d\mu$ и специальный поток $(T, f; \mu_f)$ изоморфен специальному потоку $(T_{C'}, f_{C'}; (\mu_{C'})_{f_{C'}})$, где μ_f – f -поднятие меры μ , $\mu_{C'}$ – нормированное ограничение меры μ на C' и $(\mu_{C'})_{f_{C'}}$ – $f_{C'}$ -поднятие меры $\mu_{C'}$.

Мы опускаем доказательство этой леммы, так как она непосредственно вытекает из стандартных фактов эргодической теории (см., например, [19]).

Следующая конструкция, напоминающая метод первого возвращения Дёблина в теории цепей Маркова, неоднократно появлялась в литературе в различных формах (по-видимому, впервые – в [20]; см. также [18] и [7]).

Пусть $w = (v_1, \dots, v_l) \in W(\Gamma)$ и $C = C_w$. Тогда множество X_C , определенное в (2.11), можно описать следующим образом: $x \in X$ принадлежит X_C тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность целых чисел $i_k = i_k(x)$, $-\infty < k < \infty$, такая, что $i_k \leq 0$ при $k \leq 0$, $i_k > 0$ при $k > 0$ и $(x_{i_k}, \dots, x_{i_k+l-1}) = w$ для каждого k , причем никакой другой отрезок последовательности x не совпадает с w . Далее, C' состоит из таких x , для которых $i_0(x) = 0$. Очевидно,

$$i_1(x) = \tau(T, C'; x), \quad i_k(x) \geq i_1(x) + k - 1, \quad x \in C'.$$

Обозначим через A_w множество всех слов $w' = (v'_1, \dots, v'_{l'}) \in W(\Gamma)$ с $l' > l$, для которых $(v'_1, \dots, v'_{l'}) = (v'_{l'-l+1}, \dots, v'_{l'}) = w$, и никакое другое подслово w' (т.е. слово вида $(v'_m, v'_{m+1}, \dots, v'_n)$, $1 \leq m \leq n \leq l'$) не совпадает с w . Легко видеть, что если $x \in X_C$, то для всякого $k \in \mathbb{Z}$ слово $(x_{i_k}, x_{i_k+1}, \dots, x_{i_k+l-1})$ принадлежит A_w . Таким образом, мы получаем отображение $\Psi_w: X_C \rightarrow (A_w)^{\mathbb{Z}}$, измеримое по отношению к соответствующим борелевским σ -алгебрам; его ограничение на C' , очевидно, индуцирует взаимно однозначное соответствие между C' и $(A_w)^{\mathbb{Z}}$. Далее, если $x \in C'$, то $\Psi_w T_{C'} x = \sigma_w \Psi_w x$, где σ_w – сдвиг на $Y_w := (A_w)^{\mathbb{Z}}$, т.е. $(\sigma_w y)_i = y_{i+1}$, $y = (y_i, i \in \mathbb{Z}) \in Y_w$. Таким образом, $T_{C'}$ изоморфно сдвигу Бернулли (Y_w, σ_w) со счетным алфавитом A_w . Здесь и далее мы будем рассматривать $a \in A_w$ либо как слово в алфавите V , либо как букву в новом алфавите A_w . Какая из этих двух возможностей имеет место, всегда будет ясно из контекста.

Эта конструкция по существу сводит изучение топологического сдвига Маркова (X, T) к изучению топологического сдвига Бернулли, определенного словом w , поэтому мы будем называть ее *редукцией Маркова–Бернулли*, примененной к (X, T) и w .

2.4. Положительные меры. Наша следующая цель – показать, что топологическую энтропию специального потока над сдвигом Маркова можно получить, пользуясь только эргодическими мерами, положительными на всех цилиндрах.

ЛЕММА 2.9. *Пусть (X, T) и f те же, что и в теореме 2.2, и пусть (T, f) – специальный поток, построенный по T и f . Тогда*

$$h_{\text{top}}(T, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+} h(T, f; \mu_f),$$

где $\mathcal{E}_{T,f}^+$ состоит из всех эргодичных мер, принадлежащих $\mathcal{M}_{T,f}$, которые положительны на всех цилиндрах в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{E}_{T,f}$ множество всех эргодичных мер в $\mathcal{M}_{T,f}$. Если $\mu \in \mathcal{M}_{T,f} \setminus \mathcal{E}_{T,f}$, т.е. если мера μ неэргодична по отношению к T , то f -поднятие μ_f меры μ неэргодично по отношению к специальному потоку (T, f) . Поток $(T, f; \mu_f)$ можно разложить на эргодические компоненты (см. [21]). Это означает следующее. Существует измеримое разбиение ζ пространства (X_f, μ_f) такое, что μ_f -почти каждый элемент C_ζ этого разбиения является (T, f) -инвариантным, а условная мера $(\mu_f)^{C_\zeta}$, индуцированная мерой μ на C_ζ , инвариантна и эргодична по отношению к ограничению (T, f) на C_ζ . Мы можем рассматривать $(\mu_f)^{C_\zeta}$ как меру на всем пространстве X_f ; она (T, f) -инвариантна и эргодична. Согласно общей формуле (см. [22; § 9])

$$h(T, f; \mu_f) = \int_{X_f | \zeta} h(T, f; (\mu_f)^{C_\zeta}) \mu_{f,\zeta}(dC_\zeta),$$

где $\mu_{f,\zeta}$ – проекция меры μ_f на факторпространство $X_f | \zeta$. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент C_ζ , что

$$h(T, f; (\mu_f)^{C_\zeta}) > h(T, f; \mu_f) - \varepsilon.$$

С другой стороны, $(\mu_f)^{C_\zeta}$, будучи (T, f) -инвариантной вероятностной мерой на X_f , является f -поднятием некоторой T -инвариантной вероятностной меры μ^{C_ζ} на X , т.е. $(\mu_f)^{C_\zeta} = (\mu^{C_\zeta})_f$. Ясно, что $\mu^{C_\zeta}(f) < \infty$ и динамическая система (T, μ^{C_ζ}) эргодична. Так как $\varepsilon > 0$ было произвольно малым, мы заключаем, что

$$h_{\text{top}}(T, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}} h(T, f; \mu_f).$$

Пусть $\mathcal{E}_{T,f}^0 := \mathcal{E}_{T,f} \setminus \mathcal{E}_{T,f}^+$, и предположим, что вопреки утверждению леммы, которую мы доказываем, для некоторого $\delta \in (0, \infty)$

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^0} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} > \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} + \delta, \quad (2.14)$$

откуда, в частности, следует, что

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} < \infty.$$

В силу (2.14) существует такая мера $\mu^0 \in \mathcal{E}_{T,f}^0$, что

$$\frac{h(T; \mu^0)}{\mu^0(f)} \geq \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} + \frac{\delta}{2}. \quad (2.15)$$

Чтобы показать, что такая ситуация невозможна, рассмотрим вначале случай, когда $h(T; \mu^0) < \infty$, и положим $h^0 = h(T, \mu^0)/\mu^0(f)$. Поскольку f имеет суммируемые вариации, можно подобрать такое $n_\delta \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_\delta$ существует функция $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ со следующими тремя свойствами: $f_n(x) = f_n(y)$, если $x_i = y_i$ при $|i| \leq n$; $\inf_{x \in X} f_n(x) \geq c$ и

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\delta c^2}{8h^0}.$$

Легко проверить, что

$$\left| \frac{h(T; \mu)}{\mu(f_n)} - \frac{h(T; \mu)}{\mu(f)} \right| < \delta \quad (2.16)$$

для всякой меры $\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+ \cup \{\mu^0\}$. Тогда (см. (2.15))

$$\frac{h(T; \mu^0)}{\mu^0(f_n)} \geq \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T,f_n}^+} \frac{h(T; \mu)}{\mu(f_n)} + \frac{\delta}{4}. \quad (2.17)$$

Так как $|f - f_n| < \text{const}$, функции f и f_n одновременно интегрируемы или неинтегрируемы по любой конечной мере. Поэтому $\mathcal{E}_{T,f_n} = \mathcal{E}_{T,f}$ и $\mathcal{E}_{T,f_n}^+ = \mathcal{E}_{T,f}^+$.

В случае когда $h(T; \mu^0) = \infty$, неравенство (2.17), очевидно, также выполняется.

Используя предположение $\mu^0 \in \mathcal{E}_{T,f}^0$, найдем такое слово $w^0 \in W(\Gamma)$, что $\mu^0(C_{w^0}) = 0$. Зафиксируем произвольное $n^1 \geq \max\{n_\delta, |w^0|\}$ и слово $w^1 \in W(\Gamma)$, для которого $|w^1| = n^1$, $\mu^0(w^1) > 0$. Затем положим $f^1 := f_{n^1}$, $C := C_{w^1}$ и применим редукцию Маркова–Бернулли к (X, T) и w^1 . По лемме 2.8 специальный поток $(T|_{X_C}, f^1|_{X_C})$ изоморфен специальному потоку $(\sigma, \varphi) := (\sigma_{w^1}, \varphi_{f^1, w^1})$, где

$$\varphi(y) := (f^1)_{C'}(\Psi_{w^1}^{-1}y), \quad y \in Y_{w^1}. \quad (2.18)$$

Заметим, что функция φ постоянна на каждом одномерном цилиндре $\{y \in Y : y_0 = a\}$, $a \in A_{w^1}$; причина в том, что каждое $a \in A_{w^1}$, рассматриваемое как слово из $W(\Gamma)$, не может быть короче, чем w^1 .

Перенеся меру $\mu_{C'}^0$ (нормированное сужение μ^0 на C' ; C' определено в (2.11)) на Y с помощью отображения Ψ_{w^1} , получим некоторую вероятностную борелевскую меру ν^0 на Y . Из описанных выше свойств Ψ_{w^1} следует, что автоморфизмы $(T_{C'}; (\mu^0)_{C'})$ и $(\sigma; \nu^0)$ изоморфны и, следовательно, по лемме 2.8 специальный поток $(T, f^1; (\mu^0)_{f^1})$ изоморфен специальному потоку $(\sigma, \varphi; (\nu^0)_\varphi)$, где

$(\mu^0)_{f^1}$ и $(\nu^0)_\varphi$ – соответственно f^1 -поднятие меры μ^0 и φ -поднятие меры ν^0 . Значит, согласно (2.1)

$$\frac{h(T; \mu^0)}{\mu^0(f^1)} = \frac{h(\sigma; \nu^0)}{\nu^0(\varphi)}. \quad (2.19)$$

Если заменить ν^0 на σ -инвариантную борелевскую меру ν^1 с тем же самым одномерным распределением (т.е. с $\nu^1(C_a) = \nu^0(C_a)$ для всех $a \in A_{w^1}$, где $C_a = \{y \in Y : y_0 = a\}$), то числитель в правой части (2.19) может только увеличиться, а знаменатель останется неизменным (так как φ – константа на каждом цилиндре C_a , $a \in A_{w^1}$).

Из определения ν^0 и ν^1 следует, что $\nu^0(C_{a^0}) = \nu^1(C_{a^0}) = 0$ для некоторого $a^0 \in A_{w^1}$. Действительно, пусть $w^1 = (v_1^1, \dots, v_{l_1}^1)$. Так как граф Γ связан, существует слово $(v_1, \dots, v_r) \in W(\Gamma)$, для которого $(v_1, \dots, v_{l_1}) = w^1$, $(v_{r-l_0+1}, \dots, v_r) = w^0$, где $l_0 = |w^0|$. Выберем произвольным образом одно из таких слов наименьшей длины и обозначим его w' . Аналогично, пусть w'' – одно из слов наименьшей длины, в которых имеются начальное и конечное подслова, которые совпадают соответственно с w^0 и w^1 . Из предположений $\mu^0(w^0) = 0$, $\mu^0(w^1) > 0$, $|w^0| \leq |w^1|$ следует, что $w'' = w^0 \hat{w}$, где слово $\hat{w}$ может иметь одну из трех форм:

- (а) $\hat{w} = w^1$;
- (б) $\hat{w} = \hat{w}^1 w^1$, $\hat{w}^1 \in W(\Gamma)$;
- (в) $\hat{w} = (v_k^1, \dots, v_{l_1}^1)$, где $1 < k \leq l_1$, – это подслово, расположенное в конце слова w^1 .

Рассмотрим слово $w' \hat{w}$. Легко проверить, что $w' \hat{w} \in A_{w^1}$. Кроме того, $\mu^0(w' \hat{w}) = 0$, так как $w' \hat{w}$ содержит w^0 в качестве подслова. Тогда

$$\mu_{w^1}^0(C'_{w^1} \cap C_{w' \hat{w}}) = 0.$$

Теперь можно положить $a^0 := w' \hat{w}$. Поскольку $\Psi_{w^1}(C' \cap C_{w' \hat{w}}) = C_{a^0}$, мы получаем $\nu^1(C_{a^0}) = \nu^0(C_{a^0}) = 0$.

Теперь мы хотим так возмутить меру ν^1 в пределах класса бернуллиевских мер на Y , чтобы получить меру, для которой правая часть (2.19) будет больше, чем для меры ν^0 , и которая будет положительной на всех цилиндрах.

Поскольку $\varphi(y)$, $y = (y_i, i \in \mathbb{Z}) \in Y$, зависит лишь от y_0 , можно записать $\varphi(y) = \varphi_0(y_0)$, где φ_0 – функция на A_{w^1} .

Пользуясь леммой 2.5, найдем такую σ -инвариантную бернуллиевскую меру ν^2 на Y , что если $h(\sigma; \nu^1) < \infty$, то

$$\frac{h(\sigma; \nu^2)}{\nu^2(\varphi)} > \frac{h(\sigma; \nu^1)}{\nu^1(\varphi)} \geq \frac{h(\sigma; \nu^0)}{\nu^0(\varphi)}, \quad (2.20)$$

а если $h(\sigma; \nu^1) = \infty$, то также и $h(\sigma; \nu^2) = \infty$.

С помощью отображения $\Psi_{w^1}^{-1}$ перенесем меру ν^2 на C' и обозначим полученную меру через μ' . Тогда специальный поток $(\sigma, \varphi; (\nu^2)_\varphi)$ будет изоморфен специальному потоку $(T_{C'}, (f^1)_{C'}; (\mu')_{(f^1)_{C'}})$. Пусть $C'(n) = \{x \in C' : \tau_{T, C}(x) = n\}$,

$n = 1, 2, \dots$, и $\mu'_n = \mu'|_{C'(n)}$ – сужение меры μ' на $C'(n)$, рассматриваемое как мера на X . Тогда мера

$$\mu'' := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \circ \mu'_n$$

сосредоточена на X_C и T -инвариантна. Пронормировав μ'' , получим вероятностную меру μ''' . По лемме 2.8 потоки $(T|_{X_C}, f^1|_{X_C})$ и $(T_{C'}, (f^1)_{C'})$ изоморфны. Тогда поток $(T, f^1; (\mu''')_{f^1})$ будет изоморфен потоку $(T_{C'}, (f^1)_{C'}; (\mu')_{f^1_{C'}})$ и, значит (см. выше), потоку $(\sigma, \varphi; (\nu^2)_{\varphi})$. Следовательно,

$$\frac{h(T; \mu''')}{\mu'''(f^1)} = \frac{h(\sigma; \nu^2)}{\nu^2(\varphi)} > \frac{h(T; \mu^0)}{\mu^0(f^1)} \quad (2.21)$$

(см. (2.19), (2.20)). Ясно, что $\mu''' \in \mathcal{E}_{T,f}$. Более того, $\mu''' \in \mathcal{E}_{T,f}^+$. Иначе мы могли бы применить к μ''' процедуру, которая привела нас от μ^0 к ν^0 . Полученная мера тогда совпадала бы с $\nu^{t,s}$ и существовала бы такая буква $a \in A_{w^1}$, что $\nu^{t,s}(C_a) = 0$. Но мы знаем, что это невозможно. Значит, (2.21) противоречит (2.17) при $f_n = f^1$, а потому противоречит (2.14).

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $\Gamma, (X, T), f$ те же, что и в теореме 2.2, (Y_w, σ_w) – топологический сдвиг Бернулли, полученный из (X, T) и w с помощью редукции Маркова–Бернулли, где $w \in W(\Gamma)$, и пусть $\varphi_{f,w}$ – функция, определенная в (2.18). Тогда потоки (T, f) и $(\sigma_w, \varphi_{f,w})$ имеют одинаковые топологические энтропии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и раньше, положим $C = C_w$ и будем использовать обозначения (2.11)–(2.13). Из определений σ_w и $\varphi_{f,w}$ непосредственно вытекает, что специальные потоки $(T_{C'}, f_{C'})$ и $(\sigma_w, \varphi_{f,w})$ изоморфны и, значит, $h_{\text{top}}(T_{C'}, f_{C'}) = h_{\text{top}}(\sigma_w, \varphi_{f,w})$. Аналогично, по лемме 2.8 $h_{\text{top}}(T_{C'}, f_{C'}) = h_{\text{top}}(T|_{X_C}, f|_{X_C})$. Но $h_{\text{top}}(T|_{X_C}, f|_{X_C}) \leq h_{\text{top}}(T, f)$, так как X_C – T -инвариантное подмножество пространства X . Следовательно,

$$h_{\text{top}}(\sigma_w, \varphi_{f,w}) = h_{\text{top}}(T_{C'}, f_{C'}) \leq h_{\text{top}}(T, f). \quad (2.22)$$

С другой стороны, по той же лемме 2.8 $h(T_{C'}, f_{C'}; \tilde{\mu}_{C'}) = h(T, f; \tilde{\mu})$ для каждой меры $\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+$, где $\tilde{\mu}_{C'} = f_{C'}\text{-поднятие}$ нормированного ограничения меры μ на C' , а $\tilde{\mu} = f\text{-поднятие}$ самой меры μ . Супремум по $\mu \in \mathcal{E}_{T,f}^+$ левой части последнего равенства, очевидно, не больше, чем $h(T_{C'}, f_{C'})$, а по лемме 2.9 супремум правой части равен $h_{\text{top}}(T, f)$. Таким образом, $h_{\text{top}}(T_{C'}, f_{C'}) \geq h_{\text{top}}(T, f)$, что вместе с (2.22) доказывает наше утверждение.

2.5. Доказательство теоремы 2.2. Будем придерживаться обозначений из формулировки теоремы 2.2. Зафиксируем n и будем временно писать w и C вместо w_n и C_{w_n} соответственно. Рассмотрим множества X_C, C' , индуцированное преобразование $T_{C'}: C' \rightarrow C'$ и функцию $f_{C'}$ (см. (2.11)–(2.13)). Применим редукцию Маркова–Бернулли к (X, T) и w .

Из (2.3) и (2.13) видно, что $\tilde{\tau}(T, C'; x) = f_{C'}(x)$ для каждого $x \in C'$. Тогда (2.4) можно переписать в виде неравенства

$$\left| \frac{\bar{\mu}(C_{w\hat{w}w})}{\bar{\mu}(C)} - e^{-sf_{C'}(x)} \right| \leq e^{-\alpha|w|-sf_{C'}(x)}, \quad (2.23)$$

которое выполняется для $\bar{\mu}$ -почти всех $x \in C_{w\hat{w}w}$.

Вследствие простоты w каждое слово $a \in A_w$ имеет вид $a = w\hat{w}w$, где $\hat{w} \in W(\Gamma)$ ($\hat{w}$ может быть пустым словом, если $ww \in W(\Gamma)$) и $\hat{w}$ не содержит w в качестве подслова.

По предположению мера $\bar{\mu}$ положительна на всех цилиндрах и T -инвариантна. Поэтому $\bar{\mu}(C) = \bar{\mu}(C') > 0$, и мы можем, нормировав $\bar{\mu}$ на C' , получить в результате $T_{C'}$ -инвариантную вероятностную меру $\bar{\mu}'$. Ее образ $\nu' := (\Psi_w)_* \bar{\mu}'_0$ — это вероятностная мера на $Y = Y_w$, инвариантная по отношению к преобразованию сдвига σ . Из определения Ψ_w следует, что при $a := w\hat{w}w \in A_w$

$$C_a := \{y \in Y : y_0 = a\} = \Psi_w C_{w\hat{w}w}$$

и, значит,

$$\nu'(C_a) = \frac{\bar{\mu}(C_{w\hat{w}w})}{\bar{\mu}(C_w)}. \quad (2.24)$$

Заметим, что $\nu'(C_a) > 0$ при всех $a \in A_w$.

Приняв во внимание соотношение между $f_{C'}$ и $\varphi = \varphi_{f,w}$ (см. (2.18)) и используя (2.23), (2.24), мы получим

$$|\nu'(C_a) - e^{-s\varphi(y)}| \leq e^{-\alpha|w|-s\varphi(y)}, \quad a \in A_w, \quad (2.25)$$

для ν' -почти всех $y \in C_a$.

Нашим следующим шагом будет аппроксимация функции φ некоторой функцией, постоянной на каждом цилиндре C_a , $a \in A_w$.

Так как по предположению w — простое слово, для всех $x \in C'$ справедливо неравенство $\tau(T, C'; x) \geq |w|$ (см. (2.12)). Будем говорить, что $x^{(1)} = (x_i^{(1)}, i \in \mathbb{Z}) \in C'$ и $x^{(2)} = (x_i^{(2)}, i \in \mathbb{Z}) \in C'$ эквивалентны ($x^{(1)} \sim x^{(2)}$), если $\tau(T, C'; x^{(1)}) = \tau(T, C'; x^{(2)})$ и $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ при $0 \leq i \leq \tau(T, C'; x^{(1)})$. Если $x^{(1)} \sim x^{(2)}$, то (вследствие простоты w) $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ при $\tau(T, C'; x^{(1)}) \leq i \leq \tau(T, C'; x^{(1)}) + |w| - 1$, откуда следует (см. (2.13)), что

$$|f_{C'}(x^{(1)}) - f_{C'}(x^{(2)})| \leq \sum_{i=0}^{\tau(T, C'; x^{(1)})-1} |f(T^i x^{(1)}) - f(T^i x^{(2)})| \leq \sum_{n=|w|}^{\infty} \text{var}_n(f). \quad (2.26)$$

Пусть

$$C^w(x) := \{x' \in C' : x' \sim x\}, \quad f^w(x) = \inf_{x' \in C^w(x)} f_{C'}(x'). \quad (2.27)$$

Легко видеть, что $C^w(x)$ — цилиндр и что такие цилиндры образуют разбиение множества C' . Кроме того, в силу (2.27), (2.26) функция f^w постоянна на

каждом элементе этого разбиения и

$$0 \leq f_{C'}(x) - f^w(x) \leq \sum_{n=|w|}^{\infty} \text{var}_n(f), \quad x \in C'.$$

Следовательно,

$$0 \leq \varphi(y) - \varphi^w(y) \leq \sum_{n=|w|}^{\infty} \text{var}_n(f), \quad y \in Y, \quad (2.28)$$

где $\varphi^w(y) := f^w(\Psi_w^{-1}y)$ – константа на каждом цилиндре $C_a \subset Y$, $a \in A_w$ (здесь под $\Psi_w^{-1}y$ мы подразумеваем единственную точку $x \in C'$, для которой $\Psi_w x = y$), и, значит, на A_w существует такая функция φ_0^w , что $\varphi^w(y) = \varphi_0^w(y_0)$.

Принимая во внимание лемму 2.7, оценим сумму $\sum_{a \in A_w} \exp[-s\varphi_0^w(a)]$. Пусть

$$\delta_w := \sum_{n=|w|}^{\infty} \text{var}_n(f). \quad (2.29)$$

Так как $\nu'(C_a) > 0$ при всех $a \in A_w$, мы можем для каждого a выбрать такую точку $y_a \in C_a$, что при $y = y_a$ выполняется (2.25). Тогда

$$\nu'(C_a) - \exp[-\alpha|w| - s\varphi(y_a)] \leq e^{-s\varphi(y_a)} \leq \nu'(C_a) + \exp[-\alpha|w| - s\varphi(y_a)],$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\nu'(C_a)}{1 + e^{-\alpha|w|}} &\leq e^{-s\varphi(y_a)} \leq \frac{\nu'(C_a)}{1 - e^{-\alpha|w|}}, \quad a \in A_w, \\ \frac{1}{1 + e^{-\alpha|w|}} &\leq \sum_{a \in A_w} e^{-s\varphi(y_a)} \leq \frac{1}{1 - e^{-\alpha|w|}}. \end{aligned}$$

Из (2.28), (2.29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{-\alpha|w|}} &\leq \sum_{a \in A_w} e^{-s\varphi(y_a)} \leq \sum_{a \in A_w} e^{-s\varphi_0^w(a)} = \sum_{a \in A_w} e^{-s\varphi^w(y_a)} \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-\alpha|w|}} + \sum_{a \in A_w} [e^{-s\varphi^w(y_a)} - e^{-s\varphi(y_a)}] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha|w|}} + \sum_{a \in A_w} e^{-s\varphi(y_a)} [e^{s(\varphi(y_a) - \varphi^w(y_a))} - 1] \\ &\leq \frac{e^{s\delta_w}}{1 - e^{-\alpha|w|}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

По предположению мы можем взять $w = w_n$, где $|w_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из (2.30) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a \in A_{w_n}} \exp[-s\varphi_0^{w_n}(a)] = 1. \quad (2.31)$$

Пусть

$$F_n(u) := \sum_{a \in A_{w_n}} \exp[-u\varphi_0^{w_n}(a)], \quad n = 1, 2, \dots$$

Если при фиксированном n найдется $u \in \mathbb{R}$, для которого $F_n(u) = 1$ (такое u может быть только одно), обозначим его через u_n . В противном случае положим $u_n := \sup\{u : F_n(u) = \infty\}$. Заметим, что $u_n \geq 0$ (так как $F_n(0) = \infty$) и $u_n < \infty$ (в силу (2.30)). Из определения φ^{w_n} следует, что $\inf_{y \in Y} \varphi^{w_n}(y) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (напомним, что $Y = Y_{w_n}$). Следовательно, для каждого $\gamma > 0$ равномерно по $u \in D_\gamma$, где $D_\gamma := \{u : \gamma < F_n(u) < \infty\}$, выполняется соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} (dF_n(u)/du) = -\infty$ (если u – левый конец интервала D_γ , то подразумевается правая производная). Используя этот факт, из (2.31) легко вывести, что $u_n \rightarrow s$ при $n \rightarrow \infty$ (было бы достаточно знать, что $dF_n(u)/du < \text{const} < 0$ на D_γ).

Рассмотрим теперь изоморфные специальные потоки (σ, φ^{w_n}) и $(T_{C'}, f^{w_n})$. По лемме 2.7

$$t_n = h_{\text{top}}(\sigma, \varphi^{w_n}) = h_{\text{top}}(T_{C'}, f^{w_n}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $C' = (C_{w_n})'$, и, следовательно,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\text{top}}(T_{C'}, f^{w_n}).$$

Из (2.28) и очевидных неравенств $h_{\text{top}}(\sigma, \varphi^{w_n}) \leq 2s$ (при достаточно больших n), $\inf \varphi \geq c$ и $\inf \varphi^{w_n} \geq c$ получаем

$$|h_{\text{top}}(\sigma, \varphi^{w_n}) - h_{\text{top}}(\sigma, \varphi)| \leq \frac{2s\delta_n}{c},$$

где $\delta_n = \sum_{k=|w_n|} \text{var}_n(f)$ (см. (2.16)). Следовательно, $s = h_{\text{top}}(\sigma, \varphi)$ и, значит (см. следствие 2.10), $s = h_{\text{top}}(T, f)$. Таким образом, утверждение (i) доказано.

Чтобы доказать утверждение (ii), предположим, что $s = h_{\text{top}}(T, f; (\bar{\mu})_f)$. Это вместе с (i) означает, что $(\bar{\mu})_f$ – мера с максимальной энтропией для специального потока (T, f) . Покажем, что (T, f) может иметь только одну меру с максимальной энтропией.

Пусть $(\bar{\mu})_f$ – такая мера. Тогда в силу (2.2)

$$\frac{h(T, \mu)}{\mu(f)} \leq \frac{h(T, \bar{\mu})}{\bar{\mu}(f)} = s \quad \text{при всех } \mu \in \mathcal{M}_{T,f},$$

где $s = h_{\text{top}}(T, f)$. Поэтому для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{T,f}$ справедливо неравенство $h(T, \mu) + \mu(g) \leq 0$, где $g(x) := -sf(x)$, $x \in X$; при этом $h(T, \bar{\mu}) + \bar{\mu}(g) = 0$, так что топологическое давление для g равно нулю и $\bar{\mu}$ – g -равновесная мера. Используя естественную проекцию $\pi: V^{\mathbb{Z}} \rightarrow V^{\mathbb{Z}_+}$, положим $X_+ = \pi X$ и $f_+(x_+) = f(x)$ для всякого $x_+ \in X_+$ и всякого $x \in \pi^{-1}x_+$ (по предположению f – константа на множестве $\pi^{-1}x_+$, так что $f(x)$ зависит только от x_+). Легко проверить, что $\pi T x = T_+ \pi x$, $x \in X$, где T_+ – преобразование сдвига на X_+ , и что, более того, π порождает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{M}_{T,f}$ и множеством $\mathcal{M}_{T_+,f_+}$ T_+ -инвариантных вероятностных мер μ_+ на X_+ с $\mu_+(f_+) < \infty$. Пусть $\bar{\mu}_0 \in \mathcal{M}_{T_+,f_+}$ отвечает мере $\bar{\mu}$. Тогда $\bar{\mu}_+$ есть g_+ -равновесная мера, где $g_+ = -sf_+$. Заметим, что односторонний

сдвиг Маркова T_+ топологически транзитивен (в силу связности графа Γ), топологическое давление для g_+ равно нулю (так как оно равно нулю для g) и $\sup_{x_+ \in X_+} g_+(x_+) < 0$ (так как $\inf_{x \in X} f(x) > 0$). Тогда по теореме 1.1 из [12] может существовать только одна g_+ -равновесная мера. Тем самым, доказательство теоремы 2.2 закончено.

§ 3. Накрывающий поток

Начнем выводить теорему 1.1 из теоремы 2.2. Цель этого параграфа – напомнить конструкцию потока, который можно рассматривать как “накрывающий” для потока Тейхмюллера $\{g_t\}$ (см. § 5). Мы покажем (следствие 5.2), что нашу задачу можно свести к аналогичной задаче для накрывающего потока (обозначим его через $\{P^t\}$).

Сначала напомним некоторые конструкции Рази [23], Вича [2] и Зорича [24] (см. также [25]). С помощью этих конструкций мы представим (в п. 3.2) накрывающий поток как специальный поток над измеримым преобразованием, определенным на ограниченном борелевском множестве в конечномерном евклидовом пространстве. Затем (в § 4) рассмотрим символическое представление потока $\{P^t\}$ и покажем, что он с точностью до изоморфизма является специальным потоком над топологическим сдвигом Маркова со счетным алфавитом (обозначим алфавит через $\mathcal{A}$). Теорему 2.2 нельзя еще непосредственно применить к этому специальному потоку, так как определяющая его функция не отделена от нуля и не имеет суммируемых вариаций. Именно поэтому мы заменим базу (секущую Пуанкаре) нашего потока на ее подходящее цилиндрическое подмножество (фактически мы используем некоторое семейство цилиндров) и, тем самым, перейдем к новому специальному представлению (восходящему к Вичу). Какое бы цилиндрическое множество мы ни взяли, новый специальный поток оказывается построенным над сдвигом Бернулли со счетным алфавитом (это не что иное как редукция Маркова–Бернулли, введенная в п. 2.3). Здесь нам будут полезны не все цилиндры, а только те, которые соответствуют допустимым “положительным” словам $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^n$ (существует канонический способ поставить в соответствие каждому слову w матрицу с неотрицательными целочисленными элементами; если все элементы этой матрицы положительны, мы называем w *положительным словом*). Заменив положительность более сильным требованием, чтобы каждое слово w , участвующее в конструкции, имело простой положительный префикс (определение дано в п. 2.1), мы сможем доказать (см. пп. 4.3, 4.4), что функция, по которой строится специальный поток, имеет суммируемые вариации (даже удовлетворяет условию Гёльдера), а мера $\mu_{\mathcal{X}}$ (из § 1) индуцирует на базе нашего специального потока инвариантную меру, удовлетворяющую условиям, наложенным на меру $\bar{\mu}$ в теореме 2.2. Остается заметить, что для каждой $\{P^t\}$ -инвариантной вероятностной меры ν с положительной энтропией существует достаточно большой запас слов w с $\nu(w) > 0$, имеющих простой положительный префикс (см. лемму 5.5). Таким образом, мы имеем все необходимое для применения теоремы 2.2.

3.1. Индуцированные отображения. Пусть π – перестановка m символов, которая всюду в дальнейшем будет считаться неприводимой в том смысле, что $\pi\{1, \dots, k\} = \{1, \dots, k\}$ возможно лишь при $k = m$. Операции Рази a и b определяются формулами

$$a\pi(j) = \begin{cases} \pi j & \text{при } j \leq \pi^{-1}m, \\ \pi m & \text{при } j = \pi^{-1}m + 1, \\ \pi(j-1) & \text{при } \pi^{-1}m + 1 < j \leq m, \end{cases}$$

$$b\pi(j) = \begin{cases} \pi j & \text{при } \pi j \leq \pi m, \\ \pi j + 1 & \text{при } \pi m < \pi j < m, \\ \pi m + 1 & \text{при } \pi j = m. \end{cases}$$

Эти операции сохраняют неприводимость. Класс Рази $\mathcal{R}(\pi)$ определяется как множество всех перестановок, которые можно получить из π применением группы преобразований, порожденной элементами a и b . С этого момента мы фиксируем некоторый класс Рази $\mathcal{R}$, состоящий из неприводимых перестановок.

Для $i, j = 1, \dots, m$ обозначим через E^{ij} матрицу размера $m \times m$, в которой элемент с индексами (i, j) равен единице, а остальные элементы равны нулю. Пусть E – единичная матрица размера $m \times m$. Следуя Вичу (см. [2]), введем унимодулярные матрицы

$$A(a, \pi) = \sum_{i=1}^{\pi^{-1}m} E^{ii} + E^{m, \pi^{-1}m+1} + \sum_{i=\pi^{-1}m}^{m-1} E^{i, i+1}, \quad (3.1)$$

$$A(b, \pi) = E + E^{m, \pi^{-1}m}. \quad (3.2)$$

Для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ положим

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|.$$

Пусть

$$\Delta_{m-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : |\lambda| = 1, \lambda_i > 0 \text{ при } i = 1, \dots, m\}.$$

Каждую пару (λ, π) , $\lambda \in \Delta_{m-1}$, можно отождествить с преобразованием полуинтервала $I := [0, 1)$ (перекладыванием отрезков), определяемым следующим образом. Разобьем I на полуинтервалы $I_k := [\beta_{k-1}, \beta_k)$, где $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i$, $1 \leq k \leq m$, и разместим полуинтервалы I_k в I в следующем порядке (считая слева направо): $I_{\pi^{-1}1}, \dots, I_{\pi^{-1}m}$. В результате получим кусочно линейное преобразование полуинтервала I , сохраняющее меру Лебега.

Пространство $\Delta(\mathcal{R})$ перекладываний отрезков, отвечающее классу $\mathcal{R}$, определяется как

$$\Delta(\mathcal{R}) = \Delta_{m-1} \times \mathcal{R}.$$

Положим

$$\begin{aligned}\Delta_{\pi}^{+} &= \{\lambda \in \Delta_{m-1} \mid \lambda_{\pi^{-1}m} > \lambda_m\}, & \Delta_{\pi}^{-} &= \{\lambda \in \Delta_{m-1} \mid \lambda_m > \lambda_{\pi^{-1}m}\}, \\ \Delta^{+}(\mathcal{R}) &= \bigcup_{\pi \in \mathcal{R}} \{(\pi, \lambda) \mid \lambda \in \Delta_{\pi}^{+}\}, & \Delta^{-}(\mathcal{R}) &= \bigcup_{\pi \in \mathcal{R}} \{(\pi, \lambda) \mid \lambda \in \Delta_{\pi}^{-}\}, \\ \Delta^{\pm}(\mathcal{R}) &= \Delta^{+}(\mathcal{R}) \cup \Delta^{-}(\mathcal{R}).\end{aligned}$$

Индукция Рази-Вича $\mathcal{T}: \Delta^{\pm}(\mathcal{R}) \rightarrow \Delta(\mathcal{R})$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{T}(\lambda, \pi) = \begin{cases} \left(\frac{A(a, \pi)^{-1}\lambda}{|A(a, \pi)^{-1}\lambda|}, a\pi \right), & \text{если } \lambda \in \Delta_{\pi}^{+}, \\ \left(\frac{A(b, \pi)^{-1}\lambda}{|A(b, \pi)^{-1}\lambda|}, b\pi \right), & \text{если } \lambda \in \Delta_{\pi}^{-}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Можно проверить, что $\mathcal{T}(\lambda, \pi)$ – перекладывание отрезков, порожденное парой (λ, π) на полуинтервале $[0, 1 - \gamma)$, $\gamma = \min(\lambda_m, \lambda_{\pi^{-1}m})$, растянутом до единичной длины.

Положим

$$\Delta^{\infty}(\mathcal{R}) = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{T}^{-n} \Delta^{\pm}(\mathcal{R}). \quad (3.4)$$

Каждая $\mathcal{T}$ -инвариантная вероятностная мера сосредоточена на $\Delta^{\infty}(\mathcal{R})$. С другой стороны, естественная мера Лебега, определенная на $\Delta(\mathcal{R})$, которая конечна, но не инвариантна, также сосредоточена на $\Delta^{\infty}(\mathcal{R})$. Вич (см. [2]) показал, что $\mathcal{T}$ обладает абсолютно непрерывной эргодической инвариантной мерой на $\Delta(\mathcal{R})$, которая, однако, бесконечна.

Следуя Зоричу (см. [24]), для $(\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}(\mathcal{R})$ положим

$$n(\lambda, \pi) = \begin{cases} \min\{k > 0 : \mathcal{T}^k(\lambda, \pi) \in \Delta^{-}(\mathcal{R})\}, & \text{если } \lambda \in \Delta_{\pi}^{+}, \\ \min\{k > 0 : \mathcal{T}^k(\lambda, \pi) \in \Delta^{+}(\mathcal{R})\}, & \text{если } \lambda \in \Delta_{\pi}^{-}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Индукция Рази-Вича-Зорича $\mathcal{G}$ определяется формулой

$$\mathcal{G}(\lambda, \pi) = \mathcal{T}^{n(\lambda, \pi)}(\lambda, \pi), \quad (\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}(\mathcal{R}). \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.1 (см. [24]). *Отображение $\mathcal{G}$ обладает эргодической инвариантной вероятностной мерой ν , которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\Delta^{\infty}(\mathcal{R})$. Плотность ρ этой меры имеет вид*

$$\rho(\lambda, \pi) = \frac{P_{\pi}(\lambda)}{Q_{\pi}(\lambda)}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

где P_{π} и Q_{π} – однородные многочлены с неотрицательными коэффициентами.

3.2. Зашнурованные прямоугольники. Кратко напомним конструкцию пространства Вича зашнурованных прямоугольников. Будем использовать обозначения из [26].

Зашнурованные прямоугольники, связанные с классом Рази $\mathcal{R}$, – это тройки (λ, π, δ) , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_i > 0$, $\pi \in \mathcal{R}$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in \mathbb{R}^m$ и δ удовлетворяет неравенствам

$$\delta_1 + \dots + \delta_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (3.7)$$

$$\delta_{\pi^{-1}1} + \dots + \delta_{\pi^{-1}i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (3.8)$$

Векторы δ , для которых выполняются неравенства (3.7), (3.8), образуют конус в $\mathbb{R}^m$; мы обозначим его через $K(\pi)$.

Для зашнурованного прямоугольника (λ, π, δ) положим

$$h_r := -\sum_{i=1}^{r-1} \delta_i + \sum_{i=1}^{\pi r-1} \delta_{\pi^{-1}i}, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (3.9)$$

$$\text{Area}(\lambda, \pi, \delta) := \sum_{r=1}^m \lambda_r h_r \quad (3.10)$$

(при $u > v$ мы полагаем $\sum_{i=u}^v \dots = 0$). В силу (3.7), (3.8) $h_r \geq 0$ при всех r , и если мы поставим в соответствие каждой тройке (λ, π, δ) множество $\mathcal{Z} := \bigcup_{r=1}^m I_r \times [0, h_r]$ (объединение прямоугольников в $\mathbb{R}^2$), то $\text{Area}(\lambda, \pi, \delta)$ окажется мерой Лебега (площадью) этого множества. С помощью подходящего отождествления интервалов, принадлежащих границам различных прямоугольников $I_r \times [0, h_r]$, можно получить компактную риманову поверхность, а также 1-форму на ней. Эта процедура (восходящая к Вичу; см. [2]) подробно описана в литературе (см., например, [27], [24]). В дальнейшем мы не будем использовать ее непосредственно, поэтому детали опускаем.

Обозначим через $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ пространство всех зашнурованных прямоугольников, отвечающих классу Рази $\mathcal{R}$, т.е.

$$\mathcal{V}(\mathcal{R}) = \{(\lambda, \pi, \delta) : \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \pi \in \mathcal{R}, \delta \in K(\pi)\}.$$

Пусть также

$$\mathcal{V}^+(\mathcal{R}) = \{(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{R}) : \lambda_{\pi^{-1}m} > \lambda_m\},$$

$$\mathcal{V}^-(\mathcal{R}) = \{(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{R}) : \lambda_{\pi^{-1}m} < \lambda_m\},$$

$$\mathcal{V}^\pm(\mathcal{R}) = \mathcal{V}^+(\mathcal{R}) \cup \mathcal{V}^-(\mathcal{R}).$$

Вич (см. [2]) ввел поток $\{P^t\}$, действующий на $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ по формуле

$$P^t(\lambda, \pi, \delta) = (e^t \lambda, \pi, e^{-t} \delta),$$

а также отображение $\mathcal{U} : \mathcal{V}^\pm(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R})$, где

$$\mathcal{U}(\lambda, \pi, \delta) = \begin{cases} (A(\pi, a)^{-1} \lambda, a\pi, A(\pi, a)^{-1} \delta), & \text{если } \lambda_{\pi^{-1}m} > \lambda_m, \\ (A(\pi, b)^{-1} \lambda, b\pi, A(\pi, b)^{-1} \delta), & \text{если } \lambda_{\pi^{-1}m} < \lambda_m \end{cases}$$

(включение $\mathcal{U}\mathcal{V}^\pm(\mathcal{R}) \subset \mathcal{V}(\mathcal{R})$ не очевидно и требует доказательства, это сделано в работе [2]). Отображение $\mathcal{U}$ и поток $\{P^t\}$ коммутируют на $\mathcal{V}^\pm(\mathcal{R})$ и оба

сохраняют меру, определенную на $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ формой $\text{Vol} = d\lambda_1 \cdots d\lambda_m d\delta_1 \cdots d\delta_m$. Они сохраняют также площадь зашнурованного прямоугольника (см. (3.10)) и, значит, могут быть ограничены на множество

$$\mathcal{V}^{1,\pm}(\mathcal{R}) := \{(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{V}^\pm(\mathcal{R}) : \text{Area}(\lambda, \pi, \delta) = 1\}.$$

Ограничение на $\mathcal{V}^{1,\pm}(\mathcal{R})$ формы Vol порождает на этом множестве меру $\mu_{\mathcal{R}}$, инвариантную относительно $\mathcal{U}$ и $\{P^t\}$.

Для $(\lambda, \pi) \in \Delta(\mathcal{R})$ введем обозначение

$$\tau^0(\lambda, \pi) := -\log(|\lambda| - \min(\lambda_m, \lambda_{\pi^{-1}m})). \quad (3.11)$$

Из (3.1), (3.2) следует, что если $\lambda \in \Delta_\pi^+ \cup \Delta_\pi^-$, то

$$\tau^0(\lambda, \pi) = -\log |A^{-1}(c, \pi)\lambda|, \quad (3.12)$$

где $c = a$ при $\lambda \in \Delta_\pi^+$ и $c = b$ при $\lambda \in \Delta_\pi^-$.

Далее, обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(\mathcal{R}) &:= \{x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{R}) : |\lambda| = 1, \text{Area}(\lambda, \pi, \delta) = 1\}, \\ \tau(x) &:= \tau^0(\lambda, \pi) \quad \text{для } x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_1(\mathcal{R}), \\ \mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R}) &:= \bigcup_{x \in \mathcal{Y}_1(\mathcal{R}), 0 \leq t \leq \tau(x)} P^t x. \end{aligned} \quad (3.13)$$

С помощью отображения $\mathcal{U}$ мы хотим перенести поток P^t на множество $\mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R})$ (или, более точно, на его подходящее подмножество).

Легко проверить, что $\mathcal{U}P^{\tau(x)}x \in \mathcal{Y}_1(\mathcal{R})$ для каждого $x \in \mathcal{Y}_1(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V}^\pm(\mathcal{R})$. Отождествляя $P^{\tau(x)}x$ и $\mathcal{U}P^{\tau(x)}x$, можно продолжить траекторию точки x на некоторое расстояние. Однако может случиться, что $\mathcal{U}P^{\tau(x)}x \notin \mathcal{V}^\pm(\mathcal{R})$; значит, так действовать нельзя.

Чтобы корректно определить $\{P^t\}$ на инвариантном множестве, нам придется несколько уменьшить область определения отображения $\mathcal{U}$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\neq^{1,\pm}(\mathcal{R}) &:= \left\{(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{V}^{1,\pm}(\mathcal{R}) : \sum_{i=1}^m \delta_i \neq 0\right\}, \\ \mathcal{V}_\infty(\mathcal{R}) &:= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{V}_\neq^{1,\pm}(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ясно, что $\mathcal{U}^n$ корректно определено на $\mathcal{V}_\infty(\mathcal{R})$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Положим теперь

$$\mathcal{Y}(\mathcal{R}) := \mathcal{Y}_1(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V}_\infty(\mathcal{R}), \quad \tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R}) := \mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V}_\infty(\mathcal{R}).$$

Указанное выше отождествление позволяет определить на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ естественный поток, для которого мы сохраним обозначение $\{P^t\}$. (Несмотря на то, что ограниченная положительная функция τ не отделена от нуля, поток $\{P^t\}$ корректно определен.)

Заметим также, что $\mu_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R})) > 0$. По теореме, доказанной независимо друг от друга Вичем (см. [2]) и Мазуром (см. [1]), $\mu_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R})) < \infty$, и мы будем в дальнейшем предполагать, что ограничение меры $\mu_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R})$ есть вероятностная мера. Поскольку очевидно, что $\mu_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_{1,\tau}(\mathcal{R}) \setminus \tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})) = 0$, мы можем считать меру $\mu_{\mathcal{R}}$ определенной на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$. Это эргодическая мера по отношению к потоку $\{P^t\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Наше изложение отличается от изложения в работе Вича [2] линейной заменой переменных: векторные параметры h и a зашнурованного прямоугольника (λ, π, δ) из [2] выражаются через π и δ с помощью (3.9) и соотношений

$$a_r = a_r(\delta) = - \sum_{i=1}^r \delta_i, \quad r = 1, \dots, m.$$

Следуя Зоричу (см. [24]), введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^+(\mathcal{R}) &= \{x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}(\mathcal{R}) : \lambda \in \Delta_{\pi}^+, a_m(\delta) < 0\}, \\ \mathcal{Y}^-(\mathcal{R}) &= \{x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}(\mathcal{R}) : \lambda \in \Delta_{\pi}^-, a_m(\delta) > 0\}, \\ \mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R}) &= \mathcal{Y}^+(\mathcal{R}) \cup \mathcal{Y}^-(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ – множество всех $x \in \mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R})$, для которых существует бесконечно много таких положительных t и бесконечно много таких отрицательных t , что $P^t x \in \mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R})$.

Для $x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ обозначим через $\mathcal{F}(x)$ точку, в которую x попадает при первом возвращении на трансверсаль $\mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R})$ под действием потока $\{P^t\}$. Отображение $\mathcal{F}$ является расширением отображения $\mathcal{G}$ на пространство зашнурованных прямоугольников:

$$\mathcal{F}(\lambda, \pi, \delta) = (\lambda', \pi', \delta'), \quad (\lambda', \pi') = \mathcal{G}(\lambda', \pi'). \quad (3.14)$$

Заметим, что $\mathcal{F}$ обратимо на $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ и что если $x \in \mathcal{Y}^+(\mathcal{R})$ (соответственно $x \in \mathcal{Y}^-(\mathcal{R})$), то $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{Y}^-(\mathcal{R})$ (соответственно $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{Y}^+(\mathcal{R})$). Кроме того,

$$\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^n \mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R}).$$

Если $x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ и $\mathcal{G}(\lambda, \pi) = \mathcal{T}^n(\lambda, \pi)$, то в силу (3.3), (3.6) момент первого возвращения x в $\mathcal{Y}^{\pm}(\mathcal{R})$ под действием потока $\{P^t\}$ есть

$$\tau(\lambda, \pi) + \dots + \tau(\mathcal{T}^{n-1}(\lambda, \pi)) = -\log |A^{-1}(c, c^{n-1}\pi) \dots A^{-1}(c, \pi)\lambda|, \quad (3.15)$$

где $c = a$ при $\lambda \in \Delta_{\pi}^+$ и $c = b$ при $\lambda \in \Delta_{\pi}^-$.

Мы закончим этот параграф рассмотрением связи между вероятностной мерой $\mu_{\mathcal{R}}$, упомянутой выше, и мерой ν из теоремы 3.1.

Обозначим через $\mu_{\mathcal{R}}^1$ $\mathcal{F}$ -инвариантную вероятностную меру, индуцированную мерой $\mu_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$. Заметим, что если $(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$, то $(\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}$.

ЛЕММА 3.3 (ср. [2] и [24]). Пусть $\tilde{\psi}: \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R}) \rightarrow \Delta^{\infty}(\mathcal{R})$ – отображение, определенное равенством $\tilde{\psi}(\lambda, \pi, \delta) = (\lambda, \pi)$. Тогда $\tilde{\psi}_* \mu_{\mathcal{R}}^1 = \nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что на каждом из пространств $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, $\mathcal{Y}_\infty^\pm(\mathcal{R})$ и $\Delta^\infty(\mathcal{R})$ определена естественная мера Лебега. Поскольку мера $\mu_{\mathcal{R}}$ пропорциональна мере Лебега на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, из определения $\{P^t\}$ следует, что $\mu_{\mathcal{R}}^1$ абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега на $\mathcal{Y}_\infty^\pm(\mathcal{R})$. Пусть $\nu^1 := \tilde{\psi}_* \mu_{\mathcal{R}}^1$. Ясно, что ν^1 – вероятностная мера, абсолютно непрерывная по отношению к мере Лебега mes_Δ на $\Delta^\infty(\mathcal{R})$, а по теореме 3.1 ν – вероятностная мера, эквивалентная мере mes_Δ и эргодическая по отношению к $\mathcal{G}$. Следовательно, $\nu^1 = \nu$.

§ 4. Символическое представление накрывающего потока

В этом параграфе мы строим специальные потоки над символическими сдвигами Маркова, играющие важную роль при изучении потока $\{P^t\}$. Используя работы [2], [24], начнем с краткого описания символической модели для отображения $\mathcal{G}$.

4.1. Символическая динамика для отображения $\mathcal{G}$. Мы будем иметь дело только с перекладываниями отрезков (λ, π) из $\Delta^\infty(\mathcal{R})$ (см. (3.4)), для которых определены все итерации отображения $\mathcal{G}$. Как и раньше, будем придерживаться обозначений работы [26].

Рассмотрим алфавит

$$\mathcal{A} := \{(c, n, \pi) \mid c = a \text{ или } b, n \in \mathbb{N}, \pi \in \mathcal{R}\}.$$

Для $w_1 = (c_1, n_1, \pi_1) \in \mathcal{A}$, $w_2 = (c_2, n_2, \pi_2) \in \mathcal{A}$ положим

$$B(w_1, w_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } (c_1)^{n_1} \pi_1 = \pi_2, c_2 \neq c_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

определив, тем самым, функцию $B: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$. Другими словами, мы имеем ориентированный граф $\Gamma_{\mathcal{A}, B} = (V, E)$, где $V = \mathcal{A}$, а E состоит из всех пар (w_1, w_2) , для которых $B(w_1, w_2) = 1$. Из определения класса Рази $\mathcal{R}$ в п. 3.1 следует, что граф $\Gamma_{\mathcal{A}, B}$ связан.

Введем пространство слов

$$\mathcal{W}_{\mathcal{A}, B} = \{w = w_1 \dots w_n \mid w_i \in \mathcal{A}, B(w_i, w_{i+1}) = 1, i = 1, \dots, n\},$$

куда удобно включить и пустое слово. Как и в п. 2.1, обозначим через $|w|$ длину слова $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, т.е. число входящих в него символов, а для двух слов $w^{(1)}, w^{(2)} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ обозначим через $w^{(1)}w^{(2)}$ их конкатенацию. Заметим, что $w^{(1)}w^{(2)}$ не обязательно принадлежит $\mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, разве что при выполнении условия совместимости последней буквы в $w^{(1)}$ с первой буквой в $w^{(2)}$.

Каждому непустому слову $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ следующим образом поставим в соответствие перенормировочную матрицу $A(w)$. Если w состоит из одной буквы, $w = (c, n, \pi) \in \mathcal{A}$, положим (см. (3.1), (3.2))

$$A(w) = A(c, \pi)A(c, c\pi) \cdots A(c, c^{n-1}\pi); \quad (4.1)$$

если же $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, где $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \mathcal{A}$, то

$$A(w) = A(w_1) \cdots A(w_n). \quad (4.2)$$

Рассмотрим пространства последовательностей

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{A}, B} &= \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \mid \omega_n \in \mathcal{A}, B(\omega_n, \omega_{n+1}) = 1 \text{ при всех } n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ \Omega_{\mathcal{A}, B}^{\mathbb{Z}} &= \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \mid \omega_n \in \mathcal{A}, B(\omega_n, \omega_{n+1}) = 1 \text{ при всех } n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Пусть σ – сдвиг на шаг влево, определенный на каждом из этих пространств.

Теперь опишем кодирующее отображение. Для каждой буквы $w = (c, n, \pi) \in \mathcal{A}$ положим

$$\Delta(w) = \begin{cases} \Delta^+(\mathcal{R}) \cap \{(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R}) \mid n(\lambda, \pi)\}, & \text{если } c = a, \\ \Delta^-(\mathcal{R}) \cap \{(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R}) \mid n(\lambda, \pi)\}, & \text{если } c = b. \end{cases} \quad (4.3)$$

Иначе говоря, если $c = a$ (соответственно $c = b$), то $\Delta(w)$ состоит из всех точек $(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R}) \cap \Delta^+(\mathcal{R})$ (соответственно $(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R}) \cap \Delta^-(\mathcal{R})$), для которых $\mathcal{T}^k(\lambda, \pi) \in \Delta^+(\mathcal{R})$ (соответственно $\mathcal{T}^k(\lambda, \pi) \in \Delta^-(\mathcal{R})$) при $k = 0, \dots, n-1$ и $\mathcal{T}^n(\lambda, \pi) \in \Delta^-(\mathcal{R})$ (соответственно $\mathcal{T}^k(\lambda, \pi) \in \Delta^+(\mathcal{R})$). Используя (3.5), можно проверить, что при $w = (c, n, \pi)$

$$\Delta(w) = \begin{cases} \Delta^\infty(\mathcal{R}) \cap \left\{ (\lambda, \pi) \mid \lambda \in \Delta_\pi^+, \frac{A(w)^{-1}\lambda}{|A(w)^{-1}\lambda|} \in \Delta_{a^n\pi}^- \right\}, & \text{если } c = a, \\ \Delta^\infty(\mathcal{R}) \cap \left\{ (\lambda, \pi) \mid \lambda \in \Delta_\pi^-, \frac{A(w)^{-1}\lambda}{|A(w)^{-1}\lambda|} \in \Delta_{b^n\pi}^+ \right\}, & \text{если } c = b. \end{cases} \quad (4.4)$$

Легко видеть, что все множества $\Delta(w)$, $w \in \mathcal{A}$, непусты и образуют разбиение множества $\Delta^\infty(\mathcal{R})$. Пользуясь этим разбиением, построим символическую динамику для преобразования $\mathcal{G}$. Итерируя это разбиение n раз с помощью $\mathcal{G}$, мы получим разбиение, элементы которого $\Delta(w)$ определяются словами $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ длины n . А именно, для слова $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, $w_i \in \mathcal{A}$, положим

$$\Delta(w) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathcal{G}^{-i} \Delta(w_{i+1}). \quad (4.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из (3.3), (3.6) и (4.1)–(4.4) следует, что если $(\lambda, \pi) \in \Delta(w)$ и $(\lambda', \pi') = \mathcal{G}(\lambda, \pi)$, то

$$\lambda' = \frac{A^{-1}(w)\lambda}{|A^{-1}(w)\lambda|}, \quad \lambda = \frac{A(w)\lambda'}{|A(w)\lambda'|}.$$

Эти формулы легко обобщить по индукции на случай, когда $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, $(\lambda, \pi) \in \Delta(w)$ и $(\lambda', \pi') = \mathcal{G}(\lambda, \pi)$.

Кодирующее отображение $\Phi: \Delta^\infty(\mathcal{R}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}, B}$ определяется формулой

$$\Phi(\lambda, \pi) = (\omega_0, \omega_1, \dots), \quad \mathcal{G}^n(\lambda, \pi) \in \Delta(\omega_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Рассмотрим условия, при которых кодирующее отображение можно обратить. Для $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ обозначим через $\Omega_{\mathbf{q}}$ множество всех последовательностей $\omega \in \Omega_{\mathcal{A}, B}$, начинающихся словом $\mathbf{q}$ и содержащих его бесконечно много раз. В дальнейшем ключевую роль будут играть слова $\mathbf{q}$, для которых все элементы перенормировочной матрицы $A(\mathbf{q})$ положительны. Для краткости будем называть такие слова $\mathbf{q}$ *положительными*. Заметим, что каждое слово, содержащее положительный префикс, тоже положительно.

Следующие два леммы принадлежат Вичу (см. [2; с. 237 и рассуждения, связанные с формулой (13.9)]).

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ – положительное слово. Тогда для каждой последовательности $\omega \in \Omega_{\mathbf{q}}$ существует единственное переключивание $(\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}(\mathcal{R})$, для которого $\Phi(\lambda, \pi) = \omega$.

ЛЕММА 4.3. Если переключивание отрезков $(\lambda, \pi): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ обладает единственной инвариантной мерой, то существует положительное слово $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, для которого $(\lambda, \pi) \in \Delta(\mathbf{q})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. На самом деле Вич (см. [2]) установил, что для существования слова $\mathbf{q}$, фигурирующего в лемме 4.3, достаточно, чтобы отображение (λ, π) удовлетворяло условию Кина бесконечности различных орбит.

4.2. Символическая динамика для потока $\{P^t\}$. Вначале мы построим символическую динамику для отображения $\mathcal{F}$, введенного в п. 3.2. Для $(\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ положим

$$\tilde{\Phi}(\lambda, \pi, \delta) = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots), \quad \omega_i \in \mathcal{A}, \quad (4.7)$$

если $\mathcal{F}^n(\lambda, \pi, \delta) = (\lambda'_n, \pi'_n, \delta'_n)$ и $(\lambda'_n, \pi'_n) \in \Delta(\omega_n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (напомним, что $\mathcal{F}$ обратимо на $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$). По аналогии с кодирующим отображением Φ (см. п. 4.1) имеем

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})) \subset \Omega_{\mathcal{A}, B}^{\mathbb{Z}}.$$

Кроме того, в силу (3.14) и (4.6) из (4.7) следует, что

$$\Phi(\lambda, \pi) = (\omega_0, \omega_1, \dots).$$

Для $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, $|\mathbf{q}| = l$, аналогично определению $\Omega_{\mathbf{q}}$ в п. 4.1 обозначим через $\Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$ множество всех последовательностей $\omega \in \Omega_{\mathcal{A}, B}^{\mathbb{Z}}$, удовлетворяющих условию $\omega_0 \dots \omega_{l-1} = \mathbf{q}$, в которых $\mathbf{q}$ встречается бесконечно много раз как в прошлом, так и в будущем.

Введем обозначения

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R}) := \tilde{\Phi}^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}), \quad \mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R}) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} P^t \mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$$

и предположим, что множество $\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ (а потому и $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})$) непусто.

Пусть $\mathcal{F}_{\mathbf{q}}$ – отображение первого возвращения в $\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ под действием $\mathcal{F}$, т.е. отображение, которое $\mathcal{F}$ индуцирует на $\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ (см. п. 2.3).

По определению $\{P^t\}|_{\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})}$ (ограничение потока $\{P^t\}$ на $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})$) борелевски изоморфно специальному потоку $(\mathcal{F}_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$, построенному над отображением $\mathcal{F}_{\mathbf{q}}$. Чтобы описать функцию $\tau_{\mathbf{q}}$, возьмем $(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R})$, $(\lambda', \pi') = \mathcal{G}(\lambda, \pi)$ и введем, следуя Вичу, функцию

$$\tau^1: (\lambda, \pi) \mapsto \log |A(\omega_0)\lambda'|, \quad (4.8)$$

где ω_0 определяется уравнением $\Phi(\lambda, \pi) = (\omega_0, \omega_1, \dots)$, т.е. $(\lambda, \pi) \in \Delta(\omega_0)$ (напомним, что норма вектора v определяется как $|v| = \sum_i |v_i|$). Из (3.1), (3.2) и замечания 4.1 видно, что $\tau^1: (\lambda, \pi) > 0$. Используя (3.14) и (3.15), легко проверить, что если $x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\infty}^\pm(\mathcal{R})$ и $(\lambda, \pi) \in \Delta(\omega_0)$, где $\omega_0 = (c, n, \pi)$, то момент первого возвращения точки x в $\mathcal{Y}_{\infty}^\pm(\mathcal{R})$ под действием потока $\{P^t\}$ есть как раз $\tau^1(\lambda, \pi)$.

Пусть теперь $(\lambda, \pi) \in \Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}})$, $(\omega_0, \omega_1, \dots) = \Phi(\lambda, \pi)$ и s – момент второго появления слова $\mathbf{q}$ в $(\omega_0, \omega_1, \dots)$, т.е.

$$s = s(\omega_0, \omega_1, \dots) = \min\{k > 0 : (\omega_k, \dots, \omega_{k+l-1}) = \mathbf{q}\}. \quad (4.9)$$

Положим

$$\tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi) = \tau^1(\lambda, \pi) + \tau^1(\mathcal{G}(\lambda, \pi)) + \dots + \tau^1(\mathcal{G}^{s-1}(\lambda, \pi)). \quad (4.10)$$

Если $x = (\lambda, \pi, \delta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^\pm(\mathcal{R})$, то $(\lambda, \pi) \in \Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}})$ и

$$\tau_{\mathbf{q}}(x) = \tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi). \quad (4.11)$$

Обозначим через Ψ_1 отображение, переводящее $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})$ в фазовое пространство потока $(\mathcal{F}_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$ и порождающее упомянутый выше изоморфизм между потоками $\{P^t\}|_{\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})}$ и $(\mathcal{F}_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$.

С этого момента будем предполагать, что $\mathbf{q}$ – положительное слово. Для такого $\mathbf{q}$ мы построим некоторый специальный поток $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\tau}_{\mathbf{q}})$, тесно связанный с $(\mathcal{F}_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$. Обозначим, как и прежде, через σ сдвиг на один шаг влево в $\Omega_{\mathcal{A}, B}^{\mathbb{Z}}$ и для $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$ положим

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}(\omega) := \sigma^s, \quad \hat{\tau}_{\mathbf{q}}(\omega) := \tau_{\mathbf{q}}^1(\Phi^{-1}(\omega_0, \omega_1, \dots)), \quad (4.12)$$

где s определено в (4.9). Заметим, что если $\omega \in \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$, то $(\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega_{\mathbf{q}}$, поэтому в силу леммы 4.2 $\Phi^{-1}(\omega_0, \omega_1, \dots)$ – однозначно определенная точка множества $\Delta^\infty(\mathcal{R})$.

Если слово $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ положительно, то согласно предложению 6 из [26] каждому $\omega \in \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$ соответствует не более одного зашнурованного прямоугольника; иными словами, ограничив $\tilde{\Phi}$ на множество $\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^\pm(\mathcal{R}) := \tilde{\Phi}^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}})$, мы получим инъективное отображение. Оно естественным образом индуцирует измеримое инъективное отображение Ψ_2 фазового пространства потока $(\sigma_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$ в фазовое пространство потока $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\tau}_{\mathbf{q}})$, переводящее первый поток во второй, ограниченный на некоторое инвариантное множество. Поэтому $(\mathcal{F}_{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbf{q}})$ вкладывается (в смысле § 2) в $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\tau}_{\mathbf{q}})$.

Введем новый алфавит $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$; он будет состоять из всех слов $w = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, $v_i \in \mathcal{A}$, $n > l$, для которых $(v_1, \dots, v_l) = \mathbf{q}$, $(v_{n-l+1}, \dots, v_n) = \mathbf{q}$ и никакое другое подслово слова w не совпадает с $\mathbf{q}$. Поскольку $|\mathcal{A}| = \infty$ и граф $\Gamma_{\mathcal{A}, B}$ связан (см. п. 4.1), можно утверждать, что $|\mathcal{A}_{\mathbf{q}}| = \infty$. В соответствии с редукцией Маркова–Бернулли, введенной в п. 2.3, существует измеримое взаимно однозначное отображение $\Psi_{\text{М-В}}: \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}$, которое переводит $\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}$ в сдвиг $\sigma_{\mathbf{q}}$ на $(\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}$ на один шаг влево. Следовательно, поток $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\tau}_{\mathbf{q}})$ изоморфен специальному потоку $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$, где

$$f_{\mathbf{q}}(u) = \hat{\tau}_{\mathbf{q}}(\Psi_{\text{М-В}}^{-1}(u)), \quad u \in (\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}. \quad (4.13)$$

Обозначим через Ψ_3 соответствующее отображение фазового пространства потока $(\hat{\sigma}_{\mathbf{q}}, \hat{\tau}_{\mathbf{q}})$ в фазовое пространство потока $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$. Суммируя, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4.5. *Отображение $\Psi := \Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \Psi_3$ порождает вложение потока $\{P^t\}|_{\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})}$ в поток $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$.*

Обратимся к вероятностной мере $\mu_{\mathcal{R}}$ на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ и вероятностной мере $\mu_{\mathcal{R}}^1$, индуцированной мерой $\mu_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ (см. п. 3.2).

Заметим, что мера $\mu_{\mathcal{R}}$ каждого борелевского множества с непустой внутренностью положительна (мы предполагаем, что $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ и другие пространства, встречающиеся в этой работе, наделены естественной топологией). Из этого факта с использованием леммы 4.2 и определений отображений $\mathcal{I}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ легко вывести, что

$$\mu_{\mathcal{R}}^1(\{x \in \mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R}) : x = (\lambda, \pi, \delta), (\lambda, \pi) \in \Delta(\mathbf{q})\}) > 0.$$

Поскольку мера $\mu_{\mathcal{R}}$ $\{P^t\}$ -эргодична, мы имеем

$$\mu_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1, \quad \mu_{\mathcal{R}}^1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^n \mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})\right) = 1. \quad (4.14)$$

Пронормировав сужение меры $\mu_{\mathcal{R}}^1$ на $\mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$, мы получим некоторую вероятностную меру $\bar{\mu}_{\mathcal{R}, \mathbf{q}}^1$.

Пусть ψ – естественная проекция пространства $\Omega_{\mathcal{A}, B}^{\mathbb{Z}}$ на $\Omega_{\mathcal{A}, B}$. Напомним что в п. 3.2 мы ввели естественную проекцию $\tilde{\psi}$ множества $\mathcal{Y}_{\infty}^{\pm}(\mathcal{R})$ на $\Delta^{\infty}(\mathcal{R})$. Ясно, что $\psi(\tilde{\Phi}(x)) = \Phi(\psi(x))$ для каждого $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^n \mathcal{Y}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})$. Комбинируя этот факт с (4.14) и леммой 3.3, получаем

$$\psi_*(\tilde{\Phi}_* \mu_{\mathcal{R}}^1) = \Phi_* \nu. \quad (4.15)$$

Используя положительность ν на всех непустых открытых множествах, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4.6. *Мера $\Psi_* \mu_{\mathcal{R}}$ положительна на каждом открытом множестве в фазовом пространстве потока $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$.*

4.3. Свойства функции, порождающей специальный поток. Напомним, что мы называем слово $w' = w_1 \dots w_l \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$ простым префиксом слова $w = w_1 \dots w_l \dots w_n$, если равенство $w_1 \dots w_{n-k+1} = w_k \dots w_n$ возможно лишь в двух случаях: $k = 1$ и $k > l$ (см. п. 2.1).

ЛЕММА 4.7. Пусть $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$ – слово, имеющее простой положительный префикс. Тогда функция $f_{\mathbf{q}}$, введенная в (4.13), зависит только от будущего, отделена от нуля и удовлетворяет условию Гёльдера в следующем смысле: существуют такие константы $C_{\mathbf{q}} > 0$ и $\alpha_{\mathbf{q}} > 0$ (зависящие только от $\mathbf{q}$), что если $u = (\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots) \in \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$ и $\tilde{u} = (\dots, \tilde{u}_{-1}, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots) \in \mathcal{A}_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$ удовлетворяют условию $u_i = \tilde{u}_i$ при $|i| \leq n$, то

$$|f_{\mathbf{q}}(u) - f_{\mathbf{q}}(\tilde{u})| \leq C_{\mathbf{q}} \exp(-\alpha_{\mathbf{q}} n).$$

В частности, функция $f_{\mathbf{q}}$ имеет суммируемые вариации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что функция $f_{\mathbf{q}}$ зависит только от будущего, непосредственно следует из ее определения. Докажем, что она отделена от нуля. В силу (4.13), (4.12) это свойство функции $f_{\mathbf{q}}$ следует из аналогичного свойства функции $\tau_{\mathbf{q}}^1$, определенной на $\Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}})$. А из (4.8), (4.10) и замечания 4.1 легко вывести, что при $(\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega_{\mathbf{q}}$

$$\tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi) = \log |A(\omega_0) \cdots A(\omega_{s-1})\lambda'|, \quad (\lambda, \pi) = \Phi^{-1}(\omega_0, \omega_1, \dots), \quad (4.16)$$

где s определено в (4.9) и $(\lambda', \pi') = \mathcal{G}(\lambda, \pi) = \Phi^{-1}(\omega_s, \omega_{s+1}, \dots)$. Если $\mathbf{p}$ – простой префикс слова $\mathbf{q}$, то $s \geq |\mathbf{p}|$, так что $\mathbf{p}$ – префикс слова $(\omega_0, \dots, \omega_{s-1})$ и, значит, это слово положительное. Тогда все элементы $(m \times m)$ -матрицы

$$A(\omega_0, \dots, \omega_{s-1}) = A(\omega_0) \cdots A(\omega_{s-1})$$

являются положительными целыми числами, в то время как λ' – положительный вектор с $|\lambda'| = 1$. Следовательно, для каждого $(\lambda, \pi) \in \Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{q}})$

$$\tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi) = \log |A(\omega_0, \dots, \omega_{s-1})\lambda'| \geq \log m > 0.$$

Перейдем теперь к гёльдеровскому свойству функции $f_{\mathbf{q}}$. Пусть $u, \tilde{u}$ – последовательности из формулировки леммы и $\omega = \Psi_{M-B}^{-1}(u)$, $\tilde{\omega} = \Psi_{M-B}^{-1}(\tilde{u})$. По определению $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$, значит, $(\omega_0, \omega_1, \dots), (\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots) \in \Omega_{\mathbf{q}}$. В силу (4.11)–(4.13)

$$f_{\mathbf{q}}(u) = \tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi) = \log |A(\omega_0, \dots, \omega_{s-1})\lambda'|, \quad (4.17)$$

$$f_{\mathbf{q}}(\tilde{u}) = \tau_{\mathbf{q}}^1(\tilde{\lambda}, \tilde{\pi}) = \log |A(\tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_{s-1})\tilde{\lambda}'|, \quad (4.18)$$

где

$$(\lambda, \pi) = \Phi^{-1}(\omega_0, \omega_1, \dots), \quad (\tilde{\lambda}, \tilde{\pi}) = \Phi^{-1}(\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots),$$

$$(\lambda', \pi') = \mathcal{G}^s(\lambda, \pi), \quad (\tilde{\lambda}', \tilde{\pi}') = \mathcal{G}^s(\tilde{\lambda}, \tilde{\pi}).$$

Так как $\mathbf{p}$ – простой префикс слова $\mathbf{q}$, можно найти такое $k \geq nl-1$, что $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ при $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда согласно замечанию 4.1 для некоторых векторов $\lambda'', \tilde{\lambda}'' \in \Delta_{m-1}$

$$\lambda = \frac{A(\omega_0, \dots, \omega_{nl-1})\lambda''}{|A(\omega_0, \dots, \omega_{nl-1})\lambda''|}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{A(\omega_0, \dots, \omega_{nl-1})\tilde{\lambda}''}{|A(\omega_0, \dots, \omega_{nl-1})\tilde{\lambda}''|}. \quad (4.19)$$

Введем метрику Гильберта d_H на Δ_{m-1} равенством

$$d_H(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \log \frac{\max_{1 \leq i \leq m} (\lambda_i^{(1)} / \lambda_i^{(2)})}{\min_{1 \leq i \leq m} (\lambda_i^{(1)} / \lambda_i^{(2)})}, \quad (4.20)$$

$$\lambda^{(j)} = (\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_m^{(j)}), \quad j = 1, 2.$$

Известно, что если неотрицательная $(m \times m)$ -матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет условию $\sum_{j=1}^m a_{ij} > 0$ при всех i , то отображение $T_A: \Delta_{m-1} \rightarrow \Delta_{m-1}$, где $T_A \lambda = A\lambda / |A\lambda|$, не увеличивает d_H -расстояний между точками, а если $a_{ij} > 0$ при всех i, j , то T_A является равномерным сжатием (см., например, [25]).

По определению слово $\omega_0 \dots \omega_{nl-1}$ является конкатенацией, а именно

$$\omega_0 \dots \omega_{nl-1} = \mathbf{p}w_1 \dots \mathbf{p}w_n,$$

где слово w_i , $1 \leq i \leq n$, таково, что сумма элементов в каждой строке матрицы $A(w_i)$ положительна. Отсюда следует (см. (4.19)), что

$$d_H(\lambda, \tilde{\lambda}) \leq d_H(T_{A(\mathbf{q})}^n \lambda'', T_{A(\mathbf{q})}^n \tilde{\lambda}'') \leq C_1 \alpha^n, \quad (4.21)$$

где $C_1 \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha \in (0, 1)$ зависят только от $\mathbf{q}$ (мы использовали тот факт, что $T_{A(\mathbf{q})}$ переводит Δ_{m-1} в множество конечного d_H -диаметра).

Положим $A_1 = A(\omega_0, \dots, \omega_{s-1})$. Так как все элементы матрицы A_1 положительны, имеем (см. (4.20))

$$d_H\left(\frac{A_1 \lambda}{|A_1 \lambda|}, \frac{A_1 \tilde{\lambda}}{|A_1 \tilde{\lambda}|}\right) = \log \frac{\max_i ((A_1 \lambda)_i / (A_1 \tilde{\lambda})_i)}{\min_i ((A_1 \lambda)_i / (A_1 \tilde{\lambda})_i)} \leq C_2 d_H(\lambda, \tilde{\lambda}),$$

где $(A_1 \lambda)_i$ (соответственно $(A_1 \tilde{\lambda})_i$) есть i -я компонента вектора $A_1 \lambda$ (соответственно $A_1 \tilde{\lambda}$) и C_2 определяется словом $\mathbf{q}$. Тогда в силу (4.17), (4.21)

$$|f_{\mathbf{q}}(u) - f_{\mathbf{q}}(\tilde{u})| = \left| \log \frac{|A_1 \lambda|}{|A_1 \tilde{\lambda}|} \right| \leq C_2 d_H(\lambda, \tilde{\lambda}) \leq C_2 C_1 \alpha^n,$$

и остается положить $C_{\mathbf{q}} = C_2 C_1$ и $\alpha_{\mathbf{q}} = -\log \alpha$.

4.4. Переходные вероятности и свойство равномерного растяжения. По теореме 3.1 отображение $\mathcal{G}$, определенное на $\Delta(\mathcal{R})$, сохраняет абсолютно непрерывную эргодичную меру, которая была обозначена символом ν .

Рассмотрим слово $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, где $w_i = (c_i, n_i, \pi_i) \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq k$. Будем говорить, что w *совместимо* с $(\lambda, \pi) \in \Delta^\infty(\mathcal{R})$ (или что (λ, π) и w *совместимы*), если либо

$$\lambda \in \Delta_\pi^-, \quad c_k = a, \quad a^{n_k} \pi_k = \pi,$$

либо

$$\lambda \in \Delta_{\pi}^{+}, \quad c_k = b, \quad b^{n_k} \pi_k = \pi.$$

В предположении, что w совместимо с (λ, π) , положим

$$t_w(\lambda, \pi) = \left(\frac{A(w)\lambda}{|A(w)\lambda|}, \pi_1 \right). \quad (4.22)$$

Из определения $\mathcal{G}$ (см. (3.6)) следует, что

$$\mathcal{G}^{-n}(\lambda, \pi) = \{t_w(\lambda, \pi) : |w| = n \text{ и } w \text{ совместимо с } (\lambda, \pi)\}. \quad (4.23)$$

Заметим, что $\mathcal{G}^{-n}(\lambda, \pi)$ – бесконечное множество.

В п. 4.1 мы поставили в соответствие каждому слову $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ множество $\Delta(w) \subset \Delta^{\infty}(\mathcal{R})$ (см. (4.5)). Легко проверить (см. замечание 4.1), что

$$\Delta(w) = \{t_w(\lambda, \pi) : (\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}(\mathcal{R}) \text{ и } w \text{ совместимы}\}. \quad (4.24)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем ν -измеримое разбиение $\mathcal{G}^{-n}\varepsilon$ множества $\Delta^{\infty}(\mathcal{R})$, где ε – разбиение на отдельные точки. Каждый элемент разбиения $\mathcal{G}^{-n}\varepsilon$ есть $\mathcal{G}^{-n}(\lambda, \pi)$ для некоторой пары $(\lambda, \pi) \in \Delta^{\infty}(\mathcal{R})$, его точки соответствуют словам $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ длины n , совместимым с (λ, π) , и имеют вид $t_w(\lambda, \pi)$ (см. (4.22), (4.23)). Обозначим через $\nu(w|(\lambda, \pi))$ условную меру (определяемую мерой ν) точки, отвечающей слову w , при условии элемента $\mathcal{G}^{-n}(\lambda, \pi)$ разбиения $\mathcal{G}^{-n}\varepsilon$.

В [26; п. 3.5] показано, что если слово w совместимо с (λ, π) , то

$$\nu(w|(\lambda, \pi)) = \frac{\rho(t_w(\lambda, \pi))}{\rho(\lambda, \pi)|A(w)\lambda|^m}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь множество $\Delta(\mathbf{q})$, отвечающее слову $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ (см. (4.5)). Каждая точка из $\Delta(\mathbf{q})$ имеет вид $(\lambda, \pi_{\mathbf{q}})$, где $\pi_{\mathbf{q}}$ – фиксированная перестановка, а λ принадлежит некоторому множеству $\Delta'(\mathbf{q}) \subset \Delta_{m-1}$. Обозначим через $d(\mathbf{q})$ диаметр этого множества по отношению к метрике Гильберта на Δ_{m-1} , введенной в (4.20).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. *Существуют такие положительные константы β_1 и β_2 (зависящие только от $\mathcal{R}$), что для каждого положительного слова $\mathbf{p}' \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ с $d(\mathbf{p}') \leq \beta_1$ справедливо следующее. Пусть $\mathbf{p}$ – слово, содержащее $\mathbf{p}'$ в качестве простого префикса, и пусть слово $\mathbf{r} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ начинается и заканчивается словом $\mathbf{p}$ и больше нигде $\mathbf{p}$ не содержит. Тогда для каждой точки $(\lambda, \pi) \in \Delta(\mathbf{r}) \cap \Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{p}})$ выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\nu(\Delta(\mathbf{r})) \exp[m\tau_{\mathbf{p}}^1(\lambda, \pi)]}{\nu(\Delta(\mathbf{p}))} - 1 \right| \leq \beta_2 d(\mathbf{p}'),$$

где $\tau_{\mathbf{p}}^1$ определено в (4.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению слово $\mathbf{r}$ имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{p}'u\mathbf{p} = \mathbf{p}\tilde{u}$ для некоторых $u, \tilde{u} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$. Тогда

$$\nu(\Delta(\mathbf{r})) = \int_{\Delta(\mathbf{p})} \nu(\mathbf{p}'u | (\lambda, \pi)) d\nu(\lambda, \pi). \quad (4.26)$$

Из (4.25) следует, что

$$\nu(\mathbf{p}'u | (\lambda, \pi)) = \frac{\rho(t_{\mathbf{p}'u}(\lambda, \pi))}{\rho(\lambda, \pi)} \frac{1}{|A(\mathbf{p}'u)\lambda|^m}. \quad (4.27)$$

Используя (4.20) и учитывая, что $|\lambda| = 1$ при $\lambda \in \Delta_{m-1}$, для любых двух точек $(\lambda, \pi_{\mathbf{p}'})$, $(\tilde{\lambda}, \pi_{\mathbf{p}'}) \in \Delta(\mathbf{p}')$ и для $i = 1, \dots, m$ мы получаем

$$e^{-d(\mathbf{p}')} \leq \frac{\tilde{\lambda}_i}{\lambda_i} \leq e^{d(\mathbf{p}')} \quad (4.28)$$

Оценим первое отношение в правой части (4.27). Из включения $\mathbf{p}'u\mathbf{p}' \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$ следует, что если $(\lambda, \pi_{\mathbf{p}'}) \in \Delta(\mathbf{p}')$, то пара $(\lambda, \pi_{\mathbf{p}'})$ совместима с $\mathbf{p}'u$. Значит, $t_{\mathbf{p}'u} \in \Delta(\mathbf{p}'u) \subset \Delta(\mathbf{p}')$ (см. (4.24)). Введя обозначения

$$(\hat{\lambda}, \hat{\pi}) := t_{\mathbf{p}'u}(\lambda, \pi_{\mathbf{p}'}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m),$$

заметим, что $\hat{\pi} = \pi_{\mathbf{p}'}$. В силу (4.28)

$$e^{-d(\mathbf{p}')} \lambda_i \leq \hat{\lambda}_i \leq e^{d(\mathbf{p}')} \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

а по теореме 3.1 $\rho(\hat{\lambda}, \hat{\pi}) = P_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda})/Q_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda})$, где $P_{\hat{\pi}}$ и $Q_{\hat{\pi}}$ – однородные многочлены с неотрицательными коэффициентами. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda}) &\leq P_{\hat{\pi}}(e^{d(\mathbf{p}')} \lambda) \leq e^{\gamma_1 d(\mathbf{p}')} P_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda}), \\ Q_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda}) &\geq Q_{\hat{\pi}}(e^{-d(\mathbf{p}')} \lambda) \geq e^{-\gamma_2 d(\mathbf{p}')} Q_{\hat{\pi}}(\hat{\lambda}), \end{aligned}$$

где γ_1 и γ_2 определяются плотностью ρ (а в конечном итоге – классом $\mathcal{R}$). Отсюда немедленно получаем

$$\exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)d(\mathbf{p}')] \leq \frac{\rho(t_{\mathbf{p}'u}(\lambda, \pi))}{\rho(\lambda, \pi)} \leq \exp[(\gamma_1 + \gamma_2)d(\mathbf{p}')] \quad (4.29)$$

В силу (4.28) и положительности всех элементов матрицы $A(\mathbf{p}'u)$ для каждой пары точек $(\lambda, \pi_{\mathbf{p}'})$, $(\tilde{\lambda}, \pi_{\mathbf{p}'}) \in \Delta(\mathbf{p}')$ справедливы неравенства

$$\exp[-d(\mathbf{p}')] \leq \frac{|A(\mathbf{p}'u)\tilde{\lambda}|}{|A(\mathbf{p}'u)\lambda|} \leq \exp[d(\mathbf{p}')] \quad (4.30)$$

Теперь зафиксируем произвольную точку $(\lambda^0, \pi^0) \in \Delta(\mathbf{r}) \cap \Phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{p}})$. По лемме 4.2

$$(\lambda^0, \pi^0) = \Phi^{-1}(\omega_0, \omega_1, \dots)$$

для некоторой последовательности $(\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega_{\mathbf{p}}$. Пусть s – число, определенное в (4.9), и $(\lambda', \pi') := \mathcal{G}^s(\lambda^0, \pi^0)$. Очевидно, $s = |\mathbf{p}'u|$. Тогда $(\lambda', \pi') \in \Delta(\mathbf{p}) \subset \Delta(\mathbf{p}')$ и в силу (4.26), (4.27), (4.29), (4.30)

$$\begin{aligned} \frac{\nu(\Delta(\mathbf{r}))|A(\mathbf{p}'u)\lambda'|^m}{\nu(\Delta(\mathbf{p}))} &= \frac{1}{\nu(\Delta(\mathbf{p}))} \int_{\Delta(\mathbf{p})} \frac{\rho(t_{\mathbf{p}'u}(\lambda, \pi))}{\rho(\lambda, \pi)} \frac{|A(\mathbf{p}'u)\lambda'|^m}{|A(\mathbf{p}'u)\lambda|^m} d\nu(\lambda, \pi) \\ &\leq \exp[(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)d(\mathbf{p}')]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Аналогично,

$$\frac{\nu(\Delta(\mathbf{r}))|A(\mathbf{p}'u)\lambda'|^m}{\nu(\Delta(\mathbf{p}))} \geq \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)d(\mathbf{p}')]. \quad (4.32)$$

Из (4.31), (4.32) получаем неравенства

$$\left| \frac{\nu(\Delta(\mathbf{r}))|A(\mathbf{p}'u)\lambda'|^m}{\nu(\Delta(\mathbf{p}))} - 1 \right| \leq \exp[(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)d(\mathbf{p})] \leq 2(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)d(\mathbf{p}'),$$

последнее из которых справедливо при

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)d(\mathbf{p}') \leq \log 2.$$

Остается вспомнить, что в силу (4.16)

$$|A(\mathbf{p}'u)\lambda'| = \exp(\tau_{\mathbf{p}}^1(\lambda, \pi)).$$

§ 5. Зашнурованные прямоугольники и абелевы дифференциалы. Завершение доказательства теоремы 1.1

Выше мы фиксировали связную компоненту $\mathcal{H}$ пространства $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ (см. § 1). Ей отвечает единственный класс Рази $\mathcal{R}$, для которого справедлива следующая теорема (см. [2], [3]).

ТЕОРЕМА 5.1 (Вич). *Существует измеримое отображение*

$$\pi_{\mathcal{R}}: \tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{H}$$

такое, что каждая точка имеет лишь конечное число прообразов, $(\pi_{\mathcal{R}})_\mu_{\mathcal{R}} = \mu_{\mathcal{X}}$ и $\pi_{\mathcal{R}} \circ P^t = g_t \circ \pi_{\mathcal{R}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Напомним, что множество $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ определено в п. 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. 1. *Если $\eta - \{g_t\}$ -инвариантная эргодичная вероятностная мера на $\mathcal{H}$, то существует $\{P^t\}$ -инвариантная мера $\tilde{\eta}$ на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, для которой $(\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta} = \eta$.*

2. *Если $\tilde{\eta}$ – такая $\{P^t\}$ -инвариантная вероятностная мера на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, что $\{g_t\}$ -инвариантная мера $(\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta}$ эргодична, то*

$$h_{\tilde{\eta}}(\{P^t\}) = h_{(\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta}}(\{g_t\}). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По теореме 5.1 полный прообраз $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$ каждой точки $p \in \mathcal{H}$ конечен. Мы утверждаем, что функция $\kappa(p) := \#\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$ борелевская. Чтобы это доказать, нам придется обратиться к конструкции отображения $\pi_{\mathcal{R}}$, упомянутого в теореме 5.1.

Голоморфный дифференциал ω (см. § 1) имеет конечное число нулей и конечное число горизонтальных слоев, выходящих из нулей. Каждый из этих слоев можно взять в качестве базы для построения зашнурованного прямоугольника, и параметры этого прямоугольника будут линейными функциями относительных периодов формы ω по отношению к ее нулям. При этом совпадение двух зашнурованных прямоугольников выражается в виде линейного соотношения между относительными периодами формы ω . Отсюда сразу следует, что число зашнурованных прямоугольников, отвечающих одному и тому же абелеву дифференциалу, является борелевской функцией на пространстве модулей.

Пусть теперь η – эргодическая вероятностная мера на $\mathcal{H}$. Вследствие эргодичности η и измеримости $\{g_t\}$ -инвариантной функции κ существует такое множество $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, что $\eta(\mathcal{H}') = 1$ и $\kappa(p)$ не зависит от $p \in \mathcal{H}'$. Кроме того, точки каждого множества $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$, $p \in \mathcal{H}'$, можно занумеровать целыми числами от 1 до $\kappa(p)$ таким образом, что номер точки станет измеримой функцией на $\mathcal{H}'$. Учитывая это и снабдив точки множества $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$, $p \in \mathcal{H}'$, одинаковыми весами (условными мерами), мы получим $\{P^t\}$ -инвариантную вероятностную меру $\tilde{\eta}$ на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, для которой $(\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta} = \eta$.

2. Пусть $\tilde{\eta} - \{P^t\}$ -инвариантная вероятностная мера на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ и $\eta = (\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta}$. Предположим, что мера η эргодична по отношению к потоку $\{g_t\}$ и, значит, по отношению к автоморфизму g_{t_0} при некотором $t_0 > 0$.

Обозначим через $\mathfrak{s}$ каноническое разбиение для P^{t_0} и $\tilde{\eta}$, т.е. разбиение пространства $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$, отвечающее разложению потока P^{t_0} на эргодичные компоненты по отношению к $\tilde{\eta}$. Пусть $\tilde{\eta}_C$ – условная мера, индуцированная мерой $\tilde{\eta}$ на элементе C этого разбиения; будем рассматривать ее как меру на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$. Заметим, что для $\tilde{\eta}$ -почти всех C мера $\tilde{\eta}_C$ существует и эргодична по отношению к P^{t_0} .

Возьмем измеримое множество M , состоящее из прообразов $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$. Применяя эргодическую теорему Биркгофа к P^{t_0} , $\tilde{\eta}$, M и к P^{t_0} , $\tilde{\eta}_C$, M , заключаем, что $\mathfrak{s}$ и разбиение $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ на прообразы $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$, $p \in \mathcal{H}$, независимы по отношению к мере $\tilde{\eta}$. Следовательно, $(\pi_{\mathcal{R}})_*\tilde{\eta}_C = \eta$ для $\tilde{\eta}$ -почти всех элементов $C \in \mathfrak{s}$.

Как и раньше, мощность прообраза $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$ постоянна (равна, скажем, k) на некотором множестве $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ с $\eta(\mathcal{H}') = 1$. Кроме того, если мера $\tilde{\eta}_C$ P^{t_0} -эргодична, то условная мера, порожденная мерой $\tilde{\eta}_C$ на $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(p)$, для η -почти всех $p \in \mathcal{H}'$ равномерна. Тогда пространство с мерой $(\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R}), \tilde{\eta}_C)$ изоморфно прямому произведению $(\mathcal{H}, \eta)$ и множества, состоящего из k точек, мера каждой из которых равна $1/k$. В этом представлении P^{t_0} оказывается косым произведением с базой $(\mathcal{H}, \eta, g_{t_0})$, и из формулы Абрамова–Рохлина (см. [28]) для энтропии косого произведения следует, что $h_{\tilde{\eta}_C}(P^{t_0}) = h_{\eta}(g_{t_0})$. Поэтому энтропия $\tilde{\eta}$ -почти каждой эргодической компоненты автоморфизма P^{t_0} равна $h_{\eta}(g_{t_0})$, вследствие чего $h_{\tilde{\eta}}(P^{t_0}) = h_{\eta}(g_{t_0})$. Так как для энтропии

автоморфизма S_t , входящего в измеримый поток $\{S_t\}$, вычисленной по отношению к $\{S_t\}$ -инвариантной вероятностной мере μ , выполняется соотношение $h_\mu(\{S_t\}) = |t|h_\mu(S_1)$, мы приходим к (5.1).

Теорема 5.1 и следствие 5.2 с учетом эргодичности меры $\mu_\mathcal{X}$ по отношению к $\{g_t\}$ (см. § 1) позволяют сделать следующий вывод.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Для доказательства того, что $\mu_\mathcal{X}$ – единственная мера с максимальной энтропией для потока $\{g_t\}$, достаточно проверить, что $\mu_\mathcal{X}$ – единственная мера с максимальной энтропией для потока $\{P^t\}$.*

Напомним, что класс Рази $\mathcal{R}$, с которым мы имеем дело, состоит из перестановок m символов. Имея это в виду, из (1.1) и следствия 5.2 можно заключить, что

$$h_{\mu_\mathcal{R}}(\{P^t\}) = 2g - 1 + r = m. \quad (5.2)$$

Будем называть точку $x \in \tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$ бесконечно ренормализуемой, если ее траектория $\{P^t x, t \in \mathbb{R}\}$ пересекает трансверсаль $\mathcal{Y}^\pm(\mathcal{R})$ бесконечно много раз как при $t > 0$, так и при $t < 0$. Множество бесконечно ренормализуемых точек было обозначено в п. 3.2 через $\mathcal{Y}_\infty^\pm(\mathcal{R})$.

Следующее предложение по существу содержится в [2] и [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Существует такое борелевское множество $V \subset \mathcal{H}$, что:*

- (i) $\mu(V) = 1$ для каждой эргодической $\{g_t\}$ -инвариантной вероятностной меры μ на $\mathcal{H}$;
- (ii) $\pi_\mathcal{R}^{-1}(p) \cap \mathcal{Y}_\infty^\pm \neq \emptyset$ для каждой точки $p \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактного множества $K \subset \mathcal{H}$ обозначим через $K^\pm$ совокупность точек $p \in \mathcal{H}$, для которых существуют такие $t_n \rightarrow +\infty$ и $s_n \rightarrow -\infty$, что $g_{t_n} p \in K$, $g_{s_n} p \in K$ при $n = 1, 2, \dots$.

Возьмем такую возрастающую последовательность компактных множеств K_n , что $\bigcup_n K_n = \mathcal{H}$. Пусть $V = \bigcup_n K_n^\pm$; тогда V – борелевское множество. Очевидно, для каждой вероятностной меры μ на $\mathcal{H}$ существует такое n_0 , что $\mu(K_{n_0}) > 0$. Если к тому же мера μ $\{g_t\}$ -инвариантная и эргодическая, то $\mu(K_{n_0}^\pm) = 1$ и, значит, $\mu(V) = 1$.

Пусть (σ, ω) принадлежит классу эквивалентности $p \in V$ (см. § 1). Тогда по теореме Мазура (см. [1]) расслоения, отвечающие $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$, строго эргодичны. Отсюда, в частности, следует существование в $\pi_\mathcal{R}^{-1}p$ бесконечно ренормализуемого зашнурованного прямоугольника (см., например, [29]), что нам и нужно было доказать.

ЛЕММА 5.5. *Пусть $\tilde{\eta}$ – эргодическая $\{P^t\}$ -инвариантная вероятностная мера на $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{R})$. Тогда существует положительное слово $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, для которого $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{R})) = 1$. Кроме того, если $h_{\tilde{\eta}}(\{P^t\}) > 0$, то для всякого $\mathbf{p}$ с $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{R})) = 1$ найдется такое $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, что $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1$ и $\mathbf{p}$ – простой префикс слова $\mathbf{q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как мера $\tilde{\eta}$ эргодична по отношению к $\{P^t\}$, ее проекция $\eta := (\pi_{\mathcal{R}})_* \tilde{\eta}$ эргодична по отношению к $\{g_t\}$. Пусть V то же, что и в предложении 5.4, и $W = \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(V)$. Согласно предложению 5.4 $\eta(V) = 1$, откуда следует, что $\tilde{\eta}(W) = 1$.

Для каждой точки $x = (\lambda, \pi, \delta) \in W$ перекладывание (λ, π) обладает единственной инвариантной мерой. Теперь лемма 4.3 гарантирует существование положительного слова $\mathbf{q}_x \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, для которого $(\lambda, \pi) \in \Delta(\mathbf{q}_x)$. Так как $\eta(W) = 1$, а $\mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ – счетное множество, найдется такое $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$, что $\tilde{\eta}(\{x : \mathbf{q}_x = \mathbf{q}\}) > 0$. Для этого $\mathbf{q}$ выполняется неравенство $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}, \infty}^{\pm}(\mathcal{R})) > 0$, откуда в силу эргодичности меры $\tilde{\eta}$ следует, что $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1$.

Рассмотрим множество $\mathcal{W}(\mathbf{p}) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{A}, B}$ всех слов, имеющих $\mathbf{p}$ своим префиксом. Если $\mathbf{q} \in \mathcal{W}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}$ не является простым префиксом в $\mathbf{q}$, то $\mathbf{q}$ представимо как конкатенация: $\mathbf{q} = \mathbf{q}'\mathbf{q}' \dots \mathbf{q}'\mathbf{q}''$, где $\mathbf{q}'$ – префикс в $\mathbf{p}$, а $\mathbf{q}''$ либо является префиксом в $\mathbf{q}'$, либо пусто. В таком случае либо $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 0$, либо $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) > 0$, и мера $\tilde{\eta}$ сосредоточена на множестве периодических точек потока $\{P^t\}$. Но это не может выполняться для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{W}(\mathbf{p})$, поскольку $\tilde{\eta}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1$ и $h_{\tilde{\eta}}(\{P^t\}) > 0$.

Ниже нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 5.6. Пусть $\Gamma = (V, E)$ – ориентированный граф с $|V| = \infty$ и $W(\Gamma)$ – соответствующее множество слов (см. п. 2.1). Тогда для каждого $w \in W(\Gamma)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется слово $w' \in W(\Gamma)$ вида $w' = ww_1ww_2w \dots w_{n-1}w$, $w_i \in W(\Gamma)$, содержащее n непересекающихся подслов, совпадающих с w и такое, что $w'' := ww_1ww_2w \dots w_{n-1}$ – простое слово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим первую и последнюю буквы слова w соответственно через v^- и v^+ и построим по индукции последовательность букв $v_1, v_2, \dots$ следующим образом. В качестве v_1 выберем произвольную букву, не входящую в w . Если $v_1, \dots, v_k$, $1 \leq k \leq n-1$, уже выбраны, то обозначим через w_k^+ (соответственно w_k^-) кратчайшее слово с началом v^+ и концом v_k (соответственно v_k и v^-). Если найдется несколько слов минимальной длины, мы выберем любое из них. В качестве v_{k+1} возьмем любую букву, кроме тех, которые содержатся хотя бы в одном из слов $w, w_1^+, w_1^-, \dots, w_k^+, w_k^-$.

Рассмотрим последовательность слов

$$w, w_1^+, w_1^-, w, w_2^+, w_2^-, w, \dots, w, w_n^+, w_{n-1}^-, w.$$

Удалим последнюю букву в каждом из этих слов, кроме последнего, и обозначим через w' конкатенацию полученных слов. Легко проверить, что w' обладает требуемыми свойствами (чтобы определить w_k , нужно удалить первую и последнюю буквы из w_k^+ и последнюю букву из w_k^- , после чего взять конкатенацию получившихся слов).

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.1. Согласно следствию 5.3 достаточно показать, что $\mu_{\mathcal{R}}$ – единственная мера с максимальной энтропией для потока $\{P^t\}$.

Пусть μ – мера на $\tilde{V}(\mathcal{R})$ с $h_\mu(\{P^t\}) \geq h_{\mu_{\mathcal{R}}}(\{P^t\})$. Без потери общности можно считать что μ – эргодическая мера (в противном случае можно было бы перейти к эргодической компоненте). По лемме 5.5 существует слово $\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$, имеющее простой положительный префикс и такое, что $\mu(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1$. Напомним, что также и $\mu_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})) = 1$. Согласно лемме 4.5 поток $\{P^t\}|_{\mathcal{V}_{\mathbf{q}}(\mathcal{R})}$ вложен в специальный поток $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$ с помощью отображения Ψ . Очевидно, функция $f_{\mathbf{q}}$ зависит только от будущего (см. п. 2.1). Кроме того, по лемме 4.7 функция $f_{\mathbf{q}}$ отделена от нуля и имеет суммируемые вариации.

По лемме 4.6 мера $\Psi_*\mu_{\mathcal{R}}$ положительна на всех непустых открытых подмножествах фазового пространства потока $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$. Эта мера каноническим образом индуцирует некоторую вероятностную меру $\bar{\mu}_{\mathbf{q}}$ на $(\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}$ – базе специального потока $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$. Отсюда следует, что мера $\bar{\mu}_{\mathbf{q}}$ положительна на всех цилиндрах в $(\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}$.

Покажем что $\bar{\mu}_{\mathbf{q}}$ удовлетворяет другим условиям, наложенным на меру $\bar{\mu}$ в теореме 2.2. Мы будем применять эту теорему к полному графу с множеством вершин $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$; в этой ситуации каждая последовательность букв, т.е. вершин графа, является словом.

Применим лемму 5.6 к связному графу $\Gamma_{\mathcal{A},B}$ (см. п. 4.1) и слову $\mathbf{q}$, взятому в качестве w . Пользуясь леммой, мы подберем для каждого $n \in \mathbb{N}$ слово вида $\mathbf{q}q_1\mathbf{q} \dots \mathbf{q}q_n\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$ с префиксом $\mathbf{q}q_1\mathbf{q} \dots \mathbf{q}q_n$, который является простым словом.

Каждое слово $\mathbf{a}_i := \mathbf{q}q_i\mathbf{q}$, $i = 1, \dots, n$, служит буквой в алфавите $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$, введенном в п. 4.2, причем $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, очевидно, является простым словом при всех n . Обозначим через $\hat{\mathbf{a}}$ произвольное слово в алфавите $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$, которое не содержит $\mathbf{a}$ в качестве подслова, и рассмотрим цилиндры $C_{\mathbf{a}}, C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}} \subset (\mathcal{A}_{\mathbf{q}})^{\mathbb{Z}}$. Используя определения соответствующих мер и отображений, получаем

$$\frac{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}})}{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}})} = \frac{(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R},\mathbf{q}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}})}{(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R},\mathbf{q}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}})} = \frac{(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}})}{(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}})}. \quad (5.3)$$

Заметим, что $\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}} = C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}$, где C – цилиндр в $\Omega_{\mathcal{A},B}^{\mathbb{Z}}$, носитель которого содержится в $\mathbb{Z}_+$. Отсюда следует, что

$$\psi^{-1}(\psi(C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}})) = C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}_+},$$

где $\Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}_+}$ состоит из всех $\omega = (\omega_k, k \in \mathbb{Z}) \in \Omega_{\mathcal{A},B}^{\mathbb{Z}}$, для которых $(\omega_n, \dots, \omega_{n+|\mathbf{q}|-1}) = \mathbf{q}$ при $n = 0$ и при бесконечно многих $n > 0$. Поэтому

$$(\psi_*(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1))(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}}) = (\psi_*(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1))(\psi(C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}})) = (\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}_+}).$$

Поскольку мера $\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1$ инвариантна относительно сдвига, а слово $\mathbf{q}$ является префиксом в $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$, из теоремы Пуанкаре о возвращении получаем

$$(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}}) = (\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(C \cap \Omega_{\mathbf{q}}^{\mathbb{Z}_+}) = (\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(C),$$

так что

$$(\psi_*(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1))(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}}) = (\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}}). \quad (5.4)$$

Заменив в этом рассуждении $C_{\mathbf{a}}$ на $C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}$, получим

$$(\psi_*(\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1))(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}) = (\tilde{\Phi}_*\mu_{\mathcal{R}}^1)(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}). \quad (5.5)$$

Подстановка соотношений (5.4) и (5.5) в (5.3) с учетом (4.15) дает

$$\frac{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}})}{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}})} = \frac{(\Phi_*\nu)(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}})}{(\tilde{\Phi}_*\nu)(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}})} = \frac{\nu(\Phi^{-1}(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}))}{\nu(\Phi^{-1}(\psi\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}}))}. \quad (5.6)$$

Аналогично предыдущему имеем

$$\psi(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}}) = C_{\mathbf{a}(\mathbf{q})} \cap \Omega_{\mathbf{q}}, \quad \psi(\Psi_{\text{M-B}}^{-1}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}) = C_{\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q})} \cap \Omega_{\mathbf{q}},$$

где $C_{\mathbf{a}(\mathbf{q})}$, $C_{\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q})}$ – цилиндры в $\Omega_{\mathcal{A},B}$, отвечающие соответственно словам $\mathbf{a}(\mathbf{q}) := \mathbf{q}q_1\mathbf{q} \dots \mathbf{q}q_n\mathbf{q} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$ и $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q}) := \mathbf{a}(\mathbf{q})\hat{w}\mathbf{a}(\mathbf{q}) \in \mathcal{W}_{\mathcal{A},B}$, а $\hat{w}$ – некоторое слово из множества $\Omega_{\mathcal{A},B}$. Следовательно (см. (5.6), (4.5)),

$$\frac{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}})}{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}})} = \frac{\nu(\Delta(\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q})))}{\nu(\Delta(\mathbf{a}(\mathbf{q})))}. \quad (5.7)$$

Применим теперь предложение 4.8 с $\mathbf{p}' = \mathbf{q}q_1\mathbf{q} \dots \mathbf{q}q_n$, $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{q})$, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q})$, где n достаточно велико. Это можно сделать благодаря следующим двум фактам:

1) выбор слова $\hat{a}$, описанный выше, гарантирует, что $\hat{w}$ не содержит подслов, совпадающих с $\mathbf{a}(\mathbf{q})$;

2) $d(\mathbf{p}) \leq e^{-n\alpha}$ для некоторого $\alpha > 0$, в чем можно убедиться, применяя метод из п. 4.3.

Отсюда с учетом (5.3) получаем

$$\left| \frac{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}})}{\bar{\mu}_{\mathbf{q}}(C_{\mathbf{a}})} - \exp(-m\tau_{\mathbf{a}(\mathbf{q})}^1(\lambda, \pi)) \right| \leq \beta_2 \exp(-n\alpha - m\tau_{\mathbf{q}}^1(\lambda, \pi)),$$

где

$$(\lambda, \pi) \in (\Phi^{-1}\psi\Psi_{\text{M-B}}C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}) \cap \Phi^{-1}\Omega_{\mathbf{a}(\mathbf{q})}.$$

С помощью (2.3), (4.13) и (4.10)–(4.12) можно проверить, что если для $u \in C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}$ при бесконечно многих $n > 0$ и бесконечно многих $n < 0$ выполняется равенство $(u_n, \dots, u_{n+|\mathbf{a}|-1}) = \mathbf{a}$, то $\tilde{\tau}(u, C_{\mathbf{a}}) = \tau_{\mathbf{a}(\mathbf{q})}(\lambda, \pi)$, где $(\lambda, \pi) = \Phi^{-1}\psi\Psi_{\text{M-B}}u \in \Phi^{-1}\Omega_{\mathbf{a}(\mathbf{q})}$. Остается заметить, что по теореме о возвращении $\bar{\mu}_{\mathbf{q}}$ -почти все $u \in C_{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{a}}$ удовлетворяют сформулированному условию.

Таким образом, мы видим, что для меры $\bar{\mu}_{\mathbf{q}}$ выполняются предположения теоремы 2.2 (в частности, константа s в (2.4) равна $m = h_{\Psi_*\mu_{\mathcal{R}}}(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$). Из этой теоремы следует, что $(\bar{\mu}_{\mathbf{q}})_f$ – мера с максимальной энтропией для $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$ и, значит, $\mu_{\mathcal{R}}$ – мера с максимальной энтропией для $\{P^t\}$, так что $h_{\text{top}}(\{P^t\}) = h_{\text{top}}(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}}) = m$.

Что же касается меры μ , то для нее $h_{\mu}(\{P^t\}) = h_{\mu_{\mathcal{R}}}(\{P^t\})$. Тогда мера $\Psi_*\mu$ имеет ту самую энтропию по отношению к специальному потоку $(\sigma_{\mathbf{q}}, f_{\mathbf{q}})$ (см. (5.2)), а поэтому является мерой с максимальной энтропией для этого потока. Но из теоремы 2.2 мы знаем, что такая мера единственна. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.1.

Список литературы

- [1] H. Masur, “Interval exchange transformations and measured foliations”, *Ann. of Math.* (2), **115**:1 (1982), 169–200.
- [2] W. A. Veech, “Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps”, *Ann. of Math.* (2), **115**:2 (1982), 201–242.
- [3] M. Kontsevich, A. Zorich, “Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities”, *Invent. Math.*, **153**:3 (2003), 631–678.
- [4] J. Hubbard, H. Masur, “Quadratic differentials and foliations”, *Acta Math.*, **142**:1 (1979), 221–274.
- [5] W. A. Veech, “The Teichmüller geodesic flow”, *Ann. of Math.* (2), **124**:3 (1986), 441–530.
- [6] M. Kontsevich, “Lyapunov exponents and Hodge theory”, *The mathematical beauty of physics* (Saclay, France, 1996), Adv. Ser. Math. Phys., **24**, World Scientific, Singapore–River Edge, NJ, 1997, 318–332.
- [7] Б. М. Гуревич, С. В. Савченко, “Термодинамический формализм для символических цепей Маркова со счетным числом состояний”, *УМН*, **53**:2 (1998), 3–106; англ. пер.: B. M. Gurevich, S. V. Savchenko, “Thermodynamic formalism for countable symbolic Markov chains”, *Russian Math. Surveys*, **53**:2 (1998), 245–344.
- [8] С. В. Савченко, “Специальные потоки, построенные по счетным топологическим цепям Маркова”, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:1 (1998), 40–53; англ. пер.: S. V. Savchenko, “Special flows constructed from countable topological Markov chains”, *Funct. Anal. Appl.*, **32**:1 (1998), 32–41.
- [9] O. M. Sarig, “Thermodynamic formalism for countable Markov shifts”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**:6 (1999), 1565–1593.
- [10] R. D. Mauldin, M. Urbański, “Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet”, *Israel J. Math.*, **125**:1 (2001), 93–130.
- [11] L. Barreira, G. Iommi, “Suspension flows over countable Markov shifts”, *J. Stat. Phys.*, **124**:1 (2006), 207–230.
- [12] J. Buzzi, O. Sarig, “Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:5 (2003), 1383–1400.
- [13] B. M. Gurevich, S. R. Katok, “Arithmetic coding and entropy for the positive geodesic flow on the modular surface”, *Mosc. Math. J.*, **1**:4 (2001), 569–582.
- [14] G. Forni, “Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus”, *Ann. of Math.* (2), **155**:2 (2000), 1–103.
- [15] G. A. Margulis, *On some aspects of the theory of Anosov systems*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [16] А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич, “О мере с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:3 (2008), 75–77; англ. пер.: A. I. Bufetov, B. M. Gurevich, “On the measure with maximal entropy for the Teichmüller flow on the moduli space of Abelian differentials”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:3 (2008), 224–226.
- [17] Р. Боуэн, “Топологическая энтропия для некомпактных множеств”, *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979, 178–195; пер. с англ.: R. Bowen, “Topological entropy for noncompact sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184** (1973), 125–136.
- [18] B. M. Gurevich, “A variational characterization of one-dimensional countable state Gibbs random fields”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **68**:2 (1984), 205–242.
- [19] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.

- [20] Б. М. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве путей счетного графа”, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 963–965; англ. пер.: B. M. Gurevich, “Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 744–747.
- [21] В. А. Рохлин, “Избранные вопросы метрической теории динамических систем”, *УМН*, **4:2** (1949), 57–128.
- [22] В. А. Рохлин, “Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой”, *УМН*, **22:5** (1967), 3–56; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations”, *Russian Math. Surveys*, **22:5** (1967), 1–52.
- [23] G. Rauzy, “Échanges d’intervalles et transformations induites”, *Acta Arith.*, **34:4** (1979), 315–328.
- [24] A. Zorich, “Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46:2** (1996), 325–370.
- [25] M. Viana, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, Brazilian Colloquium of Mathematics, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [26] A. I. Bufetov, “Decay of correlations for the Rauzy–Veech–Zorich induction map on the space of interval exchange transformations and the central limit theorem for the Teichmüller flow on the moduli space of Abelian differentials”, *J. Amer. Math. Soc.*, **19:3** (2006), 579–623.
- [27] M. Viana, “Dynamics of interval exchange maps and Teichmüller flows”, *Lecture notes of graduate courses taught at IMPA in 2005 and 2007*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [28] Л. М. Абрамов, В. А. Рохлин, “Энтропия косо го произведения преобразований с инвариантной мерой”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, **7:1** (1962), 5–13; англ. пер.: L. M. Abramov, V. A. Rokhlin, “The entropy of a skew product of measure-preserving transformations”, *Amer. Math. Soc. Transl. II*, **48** (1965), 255–265.
- [29] A. Zorich, “Flat surfaces”, *Frontiers in number theory, physics, and geometry*, т. I (Les Houches, France, 2003), Springer-Verlag, Berlin, 2006, 437–583.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)

Department of Mathematics,
Rice University, Houston, TX, USA;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

13.05.2010 и 21.11.2010

Б. М. Гуревич (B. M. Gurevich)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: gurevich@mech.math.msu.su