Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Григорян, Об усиленном L^p_μ -свойстве ортонормированных систем, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 10, 77–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:00:07

УДК 517.51

М. Г. Григорян

Об усиленном L_μ^p -свойстве ортонормированных систем

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L_{[0,1]}^2$ ортонормированная система ограниченных функций, и пусть при некотором $p_0 > 2$ $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $n \geq 1$. Тогда члены этой системы можно переставить так, чтобы вновь полученная система обладала усиленным L_μ^p -свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и измеримая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x) = 1$ на E , такие, что для любых $p > 2$ и $f(x) \in L_\mu^p[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L_{[0,1]}^1$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ по $L_\mu^p[0, 1]$ -норме, а последовательность коэффициентов Фурье функции лежит во всех l^q , $q > 2$.

Библиография: 36 названий.

§ 1. Введение

Настоящая статья является продолжением работ автора [1]–[6], посвященных исследованию сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам (ОНС).

Основой исследований автора в вышеупомянутом направлении является так называемое C -свойство Лузина измеримых функций. Оно состоит в том, что всякую измеримую конечную почти всюду функцию можно сделать непрерывной путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры Лебега. Этот знаменитый результат Н. Н. Лузин [7] получил в 1912 г.

Идея Лузина об исправлении функции с целью улучшения ее свойств получила в дальнейшем большое развитие.

В 1939 г. Д. Е. Меньшов [8] доказал следующую фундаментальную теорему.

ТЕОРЕМА А (усиленное C -свойство Меньшова). Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E , $|E| > 2\pi - \varepsilon$, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Далее в этом направлении интересные результаты получены А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Капиным, К. С. Казаряном, Ш. В. Хеладзе, А. Б. Гулисашвили, Р. И. Осиповым, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе и другими авторами (см. [9]–[21]).

Здесь мы приведем те результаты, которые непосредственно относятся к настоящей работе.

В работе [9] А. А. Талаляном установлена

ТЕОРЕМА (А. А. Талалян). Члены любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала следующим свойством: для любой функции $f(x) \in L^2_{[0,1]}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $g(x) \in L^2_{[0,1]}$ такую, что

$$|\{x \in [0, 1] : g(x) \neq f(x)\}| < \varepsilon$$

и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду.

В 1978 г. Ш. В. Хеладзе [19] опубликовал следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Ш. В. Хеладзе). Любую функцию $f(x) \in L^1$ изменением на множестве e , зависящем от функции $f(x)$, можно превратить в функцию $g(x)$, $|g(x)| = |f(x)|$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду и в метрике L^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Необходимо отметить, что во всех сформулированных выше теоремах “исключительное” множество e , на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции. Более того, Д. Е. Меньшовым в 1959 г. было установлено, что “исключительное” множество e в теореме А существенно зависит от управляемой функции (см. [22]), но тем не менее верна (см. [23])

ТЕОРЕМА В (Д. Е. Меньшов). Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и $Q \subset [0, 2\pi]$ — любое нигде не плотное множество. Тогда можно найти суммируемую функцию $g(x)$ такую, что $g(x) = f(x)$ на Q и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Отметим, что метод, который применил Д. Е. Меньшов при доказательстве теоремы В, не позволяет получить исправленную функцию с рядом Фурье, сходящимся в метрике L^1 .

В 1988 г. нам удалось доказать, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1 -свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по тригонометрической системе $\{\varphi_n\}$ сходится к ней по $L^1_{[0,1]}$ -норме (см. [1]).

Более того, положительно отвечая на поставленный П. Л. Ульяновым вопрос о том, обладает ли произвольная ортонормированная система усиленным L^1 -свойством, мы доказали следующие теоремы (см. [2], [5]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС ограниченных функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_n\}$ сходится к ней по $L^1_{[0,1]}$ -норме и последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ лежит во всех l^q , $q > 2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L_{[0,1]}^2$ ОНС ограниченных функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x) = 1$ на E , такие, что для любого числа $p \in [1, 2)$ и для каждой функции $f(x) \in L_\mu^p[0, 1] = \left\{ f(x) : \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty \right\}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 1]$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к ней по $L_\mu^p[0, 1]$ -норме.

Это свойство ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ назовем *усиленным L_μ^p -свойством*.

Сразу же отметим, что в 1981 г. К. С. Казаряном [17] построена полная равномерно ограниченная ортонормированная система $\{\psi_k\}$, которая не обладает усиленным C -свойством Меньшова.

В связи с теоремой 2 отметим, что П. Л. Ульянов [24] установил: если в тригонометрической системе переставить члены, то можно даже построить функцию класса $L_{[-\pi, \pi]}^p$ при всех $p < 2$, для которой ряд Фурье в метрике $L_{[-\pi, \pi]}^1$ не сходится.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны:

ВОПРОС 1. Можно ли в теореме 2 весовую функцию $\mu(x)$ взять тождественно равной единице, как в теореме 1?

ВОПРОС 2. Верна ли теорема 2 в случае $p > 2$?

Хотя неизвестно, обладает ли усиленным L_μ^p -свойством при $p > 2$ любая полная ОНС, но тем не менее в настоящей работе члены любой равномерно в $L_{[0,1]}^{p_0}$, $p_0 > 2$ фиксировано, ограниченной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ (каждая функция ограничена) переставлены так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала усиленным L_μ^p -свойством, $p > 2$. А именно верна

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L_{[0,1]}^2$ ОНС ограниченных функций,

$$\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

при некотором $p_0 > 2$. Тогда члены этой системы можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x) = 1$ на E , такие, что:

1) для любого числа $p > 2$ и для каждой функции

$$f(x) \in L_\mu^p[0, 1] = \left\{ f(x) : \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty \right\}$$

можно найти функцию $g(x) \in L_{[0,1]}^1$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к ней по $L_\mu^p[0, 1]$ -норме;

2) для каждой функции $f(x) \in \bigcap_{p>2} L_\mu^p[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L_{[0,1]}^1$, совпадающую с $f(x)$ на E , такую, что ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к ней во всех метриках $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 2$.

Теорема 3 следует из более общей теоремы 4, формулировка которой такова:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС ограниченных функций, $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $n \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty \quad \forall q > 2, \quad (1.2)$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots$, обладающий следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x) = 1$ на E , которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для любого числа $p > 2$ и для каждой функции $f(x) \in L^p_{\mu}[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]} \cap L^p_{\mu}[0, 1]$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к ней по $L^p_{\mu}[0, 1]$ -норме и является частичным рядом ряда (1.2);
- 2) для каждой функции $f(x) \in \bigcap_{p>2} L^p_{\mu}[0, 1]$ можно найти функцию

$$g(x) \in L^1_{[0,1]} \cap \left(\bigcap_{p>2} L^p_{\mu}[0, 1] \right),$$

ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ является частичным рядом ряда (1.2) и сходится к ней по всем нормам $L^p_{\mu}[0, 1]$, $p > 2$.

В связи с теоремой 3 необходимо сформулировать следующий результат М. Г. Григоряна, К. С. Казаряна и Ф. Сория [6].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система, замкнутая в $L^p_{[0,1]}$, $\|\varphi_n\|_p \leq \text{const}$, $n \geq 1$, при некотором $p > 2$. Тогда члены этой системы можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала усиленным $L^p_{[0,1]}$ -свойством: для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ можно найти функцию $\bar{f}(x) \in L^p_{[0,1]}$ такую, что $|\{x \in [0, 1] : \bar{f}(x) = f(x)\}| > 1 - \varepsilon$, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к ней по $L^p_{[0,1]}$ -норме.

Заметим, что как в теореме А. Меньшова об усиленном C -свойстве, так и в теореме 5 “исключительное” множество ε , на котором происходит изменение, зависит от исправляемой функции, а в сформулированных выше теоремах 1–4 это множество не зависит от исправляемой функции.

Отметим также, что в теореме 5 как условие (1.1), так и перестановка функций системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются необходимыми условиями [6], что не ясно в теореме 3. (Было бы интересно выяснить и этот вопрос.)

Из теоремы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС ограниченных функций, $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $n \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty \quad \forall q > 2, \quad (1.3)$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots$, обладающий следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для любого числа $p > 2$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд, который сходится к $f(x)$ по норме $L^p(E)$, т.е. ряд (1.3) – универсальный в $L^p(E)$ относительно частичных рядов;
- 2) для каждой функции $f(x) \in \bigcap_{p>2} L^p(E)$ из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд, который сходится к $f(x)$ по всем метрикам $L^p(E)$, $p > 2$.

Напомним следующее определение: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ называется *универсальным относительно перестановок* (соответственно *относительно частичных рядов*) в пространстве $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$ фиксировано, если для каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$, $p > 0$, члены этого ряда можно переставить так (соответственно из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ можно выделить такой частичный ряд), что вновь полученный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}(x)$ (соответственно частичный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n_k} f_{n_k}(x)$) сходится по метрике $L^p_{[0,1]}$ к функции $f(x)$.

Отметим, что следствие в некотором смысле окончательно: в его формулировке вместо E нельзя взять $[0, 1]$, поскольку ни при одном $p \geq 2$ ни по одной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ не существует ряда, который был бы универсален в $L^p_{[0,1]}$ относительно перестановок либо частичных рядов. Это почти очевидно.

В самом деле, если при некотором $p_0 \geq 2$ по некоторой ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно было бы построить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

универсальный в $L^p_{[0,1]}$ либо относительно перестановок, либо относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^p_{[0,1]}$, то (по определению) для функции $(|a_1| + 1)\varphi_1(x)$ найдется перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел (или возрастающая подпоследовательность $n_k \nearrow \infty$) такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) - (|a_1| + 1)\varphi_1(x) \right\|_{p_0} = 0$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - (|a_1| + 1)\varphi_1(x) \right\|_{p_0} = 0.$$

Отсюда ввиду того, что $\varphi_1(x) \in L^{q_0}_{[0,1]}$, $1/q_0 + 1/p_0 = 1$, сразу получим

$$a_1 = 1 + |a_1|$$

или

$$1 + |a_1| = \begin{cases} a_1, & n_1 = 1, \\ 0, & n_1 \neq 1. \end{cases}$$

Пришли к противоречию.

В дальнейшем мы будем рассматривать вопрос о том, в какой мере можно улучшать свойства наперед заданной ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ путем изменения значений функций системы $\{\varphi_n(x)\}$, $n \geq 1$, на множествах сколь угодно малой меры, причем так, чтобы значения функций $\varphi_n(x)$, $n \geq 1$, не изменялись на фиксированных множествах, мера которых сколь угодно близка к полной.

В частности, естественны следующие вопросы.

ВОПРОС 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система и $p > 2$ (соответственно $1 \leq p < 2$). Можно ли изменить значения функций системы $\{\varphi_n(x)\}$, $n \geq 1$, на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы по вновь полученной системе $\{\bar{\varphi}_n(x)\}$ (соответственно ортогональной системе $\{\bar{\varphi}_n^*(x)\}$) существовал бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_k \bar{\varphi}_n(x)$, универсальный в $L^p_{[0,1]}$ относительно перестановок (либо относительно частичных рядов)?

ВОПРОС 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система и $p \geq 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют ли измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$, $x \in E$, $n \geq 1$, и ряд Фурье каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ по вновь полученной системе $\{\psi_n\}$ сходится по норме $L^p_{[0,1]}$?

В связи с вопросами 3 и 4 отметим, что нам известен лишь ответ на вопрос 3 и только в случае $p > 2$.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС, $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $n \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, такие, что $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$, $x \in E$, $n \geq 1$, и по вновь полученной системе $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$, который универсален во всех $L^p_{[0,1]}$, $p > 2$, относительно перестановок.

Доказательство теоремы 6 будет дано в другой работе автора.

Отметим, что вопросам о существовании различных типов универсальных рядов посвящено много работ (см. обзорные статьи А. А. Талаляна [25] и П. Л. Ульянова [26]).

В настоящей работе доказывается, что теорему 3 можно перенести с одномерного случая на двумерный. В последнем случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга своими свойствами в таких вопросах, как сходимости в L^p , $p \geq 1$, и почти всюду (по этому поводу см. обзорные статьи Л. В. Жижиашвили [27], Б. И. Голубова [28], М. И. Дьяченко [29]).

Отметим также, что ряд классических результатов (скажем, такие теоремы, как теоремы Л. Карлесона [30], М. Рисса [31], А. Н. Колмогорова [32]) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный (см. статьи Ч. Феффермана [33], С. В. Конягина [34]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС ограниченных функций, $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $n \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда члены этой системы

можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала следующим свойством: для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset T = [0, 1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $\mu(x, y)$, $0 < \mu(x, y) \leq 1$, $\mu(x, y) = 1$ на E , такие, что:

- 1) для любого числа $p > 2$ и для каждой функции $f(x, y) \in L_\mu^p(T)$ можно найти функцию $g(x, y) \in L^1(T)$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что ее двойной ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(x) \cdot \varphi_n(y)\}$ сходится к ней по $L_\mu^p(T)$ -норме как по сферам, так и по прямоугольникам;
- 2) для каждой функции $f(x, y) \in \bigcap_{p>2} L_\mu^p(T)$ можно найти функцию $g(x, y) \in L^1(T)$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что ее двойной ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(x) \cdot \varphi_n(y)\}$ сходится к ней по всем метрикам $L_\mu^p(T)$, $p > 2$, как по сферам, так и по прямоугольникам.

Автор выражает благодарность участникам руководимого А. А. Талаляном семинара по действительному анализу в Институте математики НАН Армении за ценное обсуждение результатов настоящей работы.

§ 2. Доказательство основных лемм

Введем некоторые обозначения.

Разобьем сегмент $[0, 1]$ на 2^ν равных частей и обозначим эти отрезки через $\Delta_\nu^{(n)}$, $1 \leq n \leq 2^\nu$.

Характеристическую функцию множества E будем обозначать через $\chi_E(t)$.

Положим

$$I_m(x) = \begin{cases} -\sqrt{m}, & x \in \left[0, \frac{1}{m+1}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{m}}, & x \in \left(\frac{1}{m+1}, 1\right]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Каждую функцию $I_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, продолжим с периодом 1 с отрезка $[0, 1]$ на всю ось.

Очевидно, что

$$\int_0^1 I_m(x) dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

ЛЕММА 1. Для любых натуральных чисел s, t ($s > t$) и для любой ступенчатой функции $\varphi(x)$, интервалы постоянства которой имеют вид $\Delta_\nu^{(n)}$, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\varphi(x) I_m(2^s x)]^2 dx &= \int_0^1 \varphi^2(x) dx, \\ \int_0^1 |\varphi(x) I_m(2^s x)| dx &= \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \int_0^1 |\varphi(x)| dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \chi_{\Delta_k}(x),$$

Δ_k — интервалы постоянства функции $\varphi(x)$ вида $\Delta_\nu^{(n)}$; $e = \{x \in [0, 1], I_m(x) = -\sqrt{m}\}$. По определению функций $\varphi(x)$ и $I_m(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\varphi(x) I_m(2^s x)]^2 dx &= \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k^2 \left[\int_{\Delta_k \cap e} I_m^2(2^s x) dx + \int_{\Delta_k \setminus e} I_m^2(2^s x) dx \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k^2 \left[m \frac{|\Delta_k|}{m+1} + \frac{|\Delta_k|}{m} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \right] = \int_0^1 \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости второго равенства леммы 1. Лемма доказана.

Мы будем пользоваться также следующим неравенством Гарсия (см. [35; гл. 2, § 4]):

$$\frac{1}{N!} \left[\sum_{\sigma} \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=1}^n \chi_{\sigma(k)} \right|^p \right]^{1/p} \leq A_p \left[\left| \sum_{k=1}^n \chi_k \right| + \left(\sum_{k=1}^n \chi_k^2 \right)^{1/2} \right], \quad p \geq 1, \quad (2.3)$$

где суммирование ведется по множеству всех перестановок набора $1, 2, \dots, n$, $\{\chi_k\}$ — произвольные действительные числа, A_p — положительное число, зависящее только от p .

Основным средством для доказательства теоремы 4 является

ЛЕММА 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_{[0,1]}^2$ ортонормированная система,

$$\|\varphi_n\|_{p_0} \leq B = \text{const}, \quad p_0 > 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L_{[0,1]}$ и для любых чисел $N_0 > 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют функция $g(x) \in L_{[0,1]}$, измеримое множество $G \subset [0, 1]$, полином вида

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \varphi_k(x)$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^N$ натуральных чисел $N_0, \dots, N$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $g(x) = f(x), \quad x \in G, \quad |G| > 1 - \varepsilon,$
- 2) $\int_0^1 |g(x)| dx < 3 \int_0^1 |f(x)| dx, \quad |f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in [0, 1],$
- 3) $\int_0^1 |Q(x) - f(x)| dx < \varepsilon,$

- 4) $\sum_{k=N_0}^N |a_{\sigma(k)}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$
- 5) $\max_{N_0 \leq m \leq N} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^m a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx,$
- 6) $\max_{N_0 \leq m \leq N} \left(\int_e \left| \sum_{k=N_0}^m a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon \quad \forall p > 1,$

где $e \subset G$ – любое измеримое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x) \quad (2.5)$$

(Δ_ν имеют вид $\Delta_\nu^{(n)}$) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon_0^2}{4}, \quad (2.6)$$

где

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}; \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)| dx \right\}. \quad (2.7)$$

По лемме Фейера (см. [36; гл. 1, § 20]) из (2.2) будем иметь

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^1 I_1(sx) \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

следовательно, можно найти натуральное число $s_1 > \nu_0$ такое, что

$$\left| \int_0^1 [\varphi(x) I_1(2^{s_1}x)] \varphi_k(x) dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4\sqrt{N_0}}, \quad k = 1, 2, \dots, N_0. \quad (2.8)$$

Возьмем натуральное число $N_1 > N_0$ настолько большим, чтобы

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{N_1} a_i^{(1)} \varphi_i(x) - g_1(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где

$$g_1(x) = \varphi(x) I_1(2^{s_1}x),$$

$$a_i^{(1)} = \int_0^1 g_1(x) \varphi_i(x) dx.$$

Отсюда и из (2.8) вытекает

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=N_0}^{N_1} a_i^{(1)} \varphi_i(x) - g_1(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \left(\sum_{i=1}^{N_0} [a_i^{(1)}]^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Продолжая это рассуждение, мы можем по индукции определить последовательности чисел $s_1 < s_2 < \dots$, $N_0 < N_1 < \dots$, функций

$$g_m(x) = f(x)I_m(2^{s_m}x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

и полиномов

$$Q_m(x) = \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} a_i^{(m)} \varphi_i(x), \quad (2.10)$$

где

$$a_i^{(m)} = \int_0^1 g_m(x) \varphi_i(x) dx, \quad (2.11)$$

удовлетворяющие условиям

$$\left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2^{m+1}} \right)^2. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание лемму 1, из (2.9) будем иметь

$$\int_0^1 g_m^2(x) dx = \int_0^1 \varphi_m^2(x) dx, \quad (2.13)$$

$$\int_0^1 |g_m(x)| dx < \frac{2}{\sqrt{m}} \int_0^1 |\varphi(x)| dx. \quad (2.14)$$

Положим

$$E_m = \{x \in [0, 1] : I_m(2^{s_m}x) = -\sqrt{m}\}. \quad (2.15)$$

Очевидно, что (см. (2.1))

$$|E_m| = \frac{1}{m+1}. \quad (2.16)$$

Возьмем натуральные числа q_0 , q и положительное число ε_1 такие, чтобы выполнялись неравенства

$$q > q_0 > \left(\frac{8\|f\|_2}{\|f\|_1} \right)^{p_0}, \quad \varepsilon_1 < \min \left\{ p_0 - 2; \frac{\varepsilon}{4} \right\}, \quad (2.17)$$

$$0 < 1 - \sum_{m=q_0}^q m^{-1/2-1/(2+\varepsilon_1)} < \varepsilon_0 \left(\int_0^1 |\varphi(x)| dx + 1 \right)^{-1}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{m=q_0}^q \frac{1}{m} < \varepsilon_0^{p_0+1} \left(4(2A_{p_0}B_{p_0}\|\varphi\|_{p_0})^{p_0} + \left(1 + 2 \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{p_0} \right)^{-1}, \quad (2.19)$$

A_{p_0} и B_{p_0} — константы неравенств (2.3) и (2.4).

Положим

$$G_m = \left\{ x \in [0, 1] : |Q_m(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2^{m+2}} \right\}, \quad (2.20)$$

$$E = \bigcap_{m=q_0}^q G_m \cap \{[0, 1] \setminus E_m\}. \quad (2.21)$$

Применяя неравенство Чебышёва, из (2.11) находим

$$|G_m| > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2^{m+2}}. \quad (2.22)$$

В силу (2.16), (2.19)–(2.21) будем иметь

$$|E_m| > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

На основании неравенства Бесселя и леммы 1 из (2.9), (2.11) получим

$$\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} |a_i^{(m)}|^2 \leq \int_0^1 g_m^2(x) dx = \int_0^1 \varphi^2(x) dx, \quad m \geq 1. \quad (2.23)$$

В силу неравенства Гарсия (см. (2.3)) для каждого числа m , $q_0 \leq m \leq q$, можно определить перестановку $\sigma_m(N_{m-1}), \dots, \sigma_m(N_m - 1)$ натуральных чисел $N_{m-1}, \dots, N_m - 1$ такую, что

$$\begin{aligned} & \int_E \left[\max_{N_{m-1} \leq n < N_m} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| \right]^{p_0} dx \\ & \leq (A_{p_0})^{p_0} \int_E \left[\left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k^{(m)} \varphi_k(x) \right| + \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_k^{(m)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \right]^{p_0} dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Положим

$$H_m = \left(x \in E : \max_{N_{m-1} \leq n < N_m} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^n a_{\sigma_m(k)} \varphi_{\sigma_m(k)}(x) \right| > \varepsilon_0 m^{1/(2+\varepsilon)} \right). \quad (2.25)$$

Принимая во внимание равенство $g_m(x) = \varphi(x)/\sqrt{m}$ при $x \in E$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21)), из соотношений (2.4), (2.20), (2.21), (2.23)–(2.25) для каждого $m \in [q_0, q]$ будем иметь

$$\begin{aligned} & (m^{\frac{p_0}{2+\varepsilon}} \varepsilon_0^{p_0} |H_m|)^{1/p_0} \leq \left(\int_{H_m} \max_{N_{m-1} \leq n < N_m} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^n a_{\sigma_m(k)} \varphi_{\sigma_m(k)}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \\ & \leq A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_m(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left(\int_E \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_k^{(m)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{p_0/2} dx \right)^{1/p_0} \right] \\ & \leq A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_m(x) - g_m(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left(\int_E |g_m(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \right] \\ & \quad + A_{p_0} \left[\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} \left(\int_0^1 [a_k^{(m)} \varphi_k(x)]^{p_0} dx \right)^{2/p_0} \right]^{1/2} \\ & \leq A_{p_0} \frac{\varepsilon_0}{2^m} + A_{p_0} \frac{\|\varphi\|_{p_0}}{\sqrt{m}} + A_{p_0} B_{p_0} \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} |a_k^{(m)}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq 2A_{p_0} B_{p_0} \|\varphi\|_{p_0}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу получим

$$|H_m| < \left(\frac{2A_{p_0}B_{p_0}}{\varepsilon_0} \right)^{p_0} \cdot \frac{\|\varphi\|_{p_0}^{p_0}}{m^{\frac{p_0}{2+\varepsilon_1}}} \quad \forall m \in [q_0, q]. \quad (2.26)$$

Определим множество G , функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ и перестановку $\sigma(N_0), \dots, \sigma(N)$ натуральных чисел $N_0, \dots, N$ следующим образом:

$$G = E \cap ([0, 1] \setminus H_m) \cap \{x \in [0, 1] : |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0\}; \quad (2.27)$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ \bar{g}(x), & x \in [0, 1] \setminus G, \end{cases} \quad (2.28)$$

где

$$\bar{g}(x) = \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} g_m(x); \quad (2.29)$$

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \varphi_k(x) = \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} Q_m(x), \quad (2.30)$$

где

$$a_k = m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} a_k^m, \quad N_{m-1} \leq k < N_m, \quad N = N_q - 1, \quad (2.31)$$

$$\sigma(k) = \sigma_m(k), \quad N_{m-1} \leq k < N_m, \quad 1 \leq m \leq q. \quad (2.32)$$

Из (2.7), (2.19), (2.26), (2.27) следует

$$|G| > 1 - \varepsilon.$$

В силу (2.6), (2.7), (2.14), (2.18), (2.28), (2.29) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(x)| dx &= \int_G |f(x)| dx + \int_{[0,1] \setminus G} |\bar{g}(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \int_0^1 |g_m(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \frac{2}{\sqrt{m}} \int_0^1 |\varphi(x)| dx \\ &\leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.15), (2.18), (2.21), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |Q(x) - g(x)| dx \\
& \leq \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)| dx \right) + \int_0^1 |g(x) - \bar{g}(x)| dx \\
& \leq \frac{\varepsilon}{4} + \int_0^1 |\varphi(x) - f(x)| dx + \int_G \left| \varphi(x) - \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} g_m(x) \right| dx \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_G |\varphi(x)| \left[1 - \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} I_m(2^{s_m} x) \right] dx \\
& = \frac{\varepsilon}{2} + \left[1 - \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1} - \frac{1}{2}} \right] \cdot \int_0^1 |\varphi(x)| dx < \varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя из (2.6), (2.7), (2.11) и (2.13) получим

$$\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_i^{(m)}]^2 \leq \int_0^1 g_m^2(x) dx = \int_0^1 \varphi^2(x) dx \leq 2 \int_0^1 f^2(x) dx. \quad (2.33)$$

Отсюда и из (2.19), (2.31) и (2.32) следует

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N_0}^N |a_k|^{2+\varepsilon_1} &= \sum_{m=q_0}^q \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k^{(m)} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \right|^{2+\varepsilon_1} \\
&\leq \sum_{m=q_0}^q \frac{1}{m} \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} |a_k^{(m)}|^2 \right)^{\frac{2+\varepsilon_1}{2}} \\
&\leq \left(2 \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{2+\varepsilon_1}{2}} \cdot \sum_{m=q_0}^q \frac{1}{m} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

т.е. утверждения 1)–4) леммы 2 выполнены. Теперь проверим утверждения 5), 6).

Прежде всего заметим (см. (2.17), (2.31)–(2.33)), что для каждого $m \in [q_0, q]$ и для всех $n \in [N_{m-1}, N_m]$ имеет место

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{m-1}}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx &\leq \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k^2 = m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_i^{(m)}]^2 \\
&\leq 2q_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \int_0^1 f^2(x) dx. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Пусть $n \in [N_0, N]$, тогда для некоторого m_0 , $N_{m_0-1} \leq n < N_{m_0}$, из (2.30)–(2.32) получим

$$\sum_{k=N_0}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{k=l_0}^{m_0-1} k^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} Q_k(x) + \sum_{k=N_{m_0}-1}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x).$$

Отсюда и из (2.1), (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.19), (2.34) будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \\
& \leq \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)| dx \\
& \quad + \int_0^1 \left| \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} g_m(x) \right| dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{m_0}}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx \\
& \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)| dx + \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{q_1}{2+\varepsilon_1}} \frac{2}{\sqrt{m}} \int_0^1 |\varphi(x)| dx + \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)| dx \\
& < 3 \int_0^1 |f(x)| dx.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство $g_m(x) = \varphi(x)/\sqrt{m}$ при $x \in G$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21), (2.27)), из соотношений (2.7), (2.18), (2.20), (2.21), (2.25), (2.27), (2.31), (2.32) для всех $p \geq 1$, $n \in [N_0, M]$ и для любого измеримого множества $e \subset G$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& \left(\int_e \left| \sum_{k=N_0}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& = \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \left(\int_e |Q_m(x) - g_m(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
& \quad + \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \left(\int_e |g_m(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
& \quad + m_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \left(\int_e \left| \sum_{k=N_{m_0}}^n a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \sum_{m=q_0}^q m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1} - \frac{1}{2}} \left(\int_e |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon_0 < \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\{\omega_k(t)\}_{k=1}^\infty$ — полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система, $\|\omega_k\|_{p_0} < \text{const}$, $k \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда для любых чисел $\gamma \neq 0$, $\delta \in (0, 1)$, $N > 1$ и для любого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0, 1]^2$ существуют измеримое множество $E \subset T$, функция $g(x, y)$, полином $Q(x, y)$ вида

$$Q(x, y) = \sum_{k, n=N}^M c_{k, n} \omega_k(x) \omega_n(y)$$

и перестановка $\sigma(N), \sigma(N+1), \dots, \sigma(M)$ натуральных чисел $N, N+1, \dots, M$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $g(x, y) = \gamma \chi_\Delta(x, y) \quad \forall (x, y) \in E, \quad |E| > 1 - \delta,$
- 2) $\iint_T |g(x, y)| dx dy \leq 9|\gamma| |\Delta|,$
- 3) $\iint_T |Q(x, y) - g(x, y)| dx dy < \delta^2,$
- 4)
$$\begin{aligned} & \max_{N \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M} \left(\iint_E \left| \sum_{k, n=N}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & + \max_{\sqrt{2} N \leq R \leq \sqrt{2} M} \left(\iint_E \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & \leq 16|\gamma| |\Delta|^{1/p} + \delta \quad \forall p \geq 1, \end{aligned}$$
- 5)
$$\begin{aligned} & \max_{N \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M} \iint_T \left| \sum_{k, n=N}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & + \max_{\sqrt{2} N \leq R \leq \sqrt{2} M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & \leq 36|\gamma| |\Delta|, \end{aligned}$$
- 6)
$$\sum_{k, n=N}^M |c_{k, n}|^{2+\delta} < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 2, полагая в ее формулировке

$$f(x) = \gamma \chi_{\Delta_1}(x), \quad N_0 = N, \quad \varepsilon_0 = \frac{\delta}{4}$$

($\chi_G(t)$ – характеристическая функция множества G). Тогда определяются измеримое множество $E_1 \subset [0, 1]$, функция $g_1(x)$, полином $Q_1(x)$ вида

$$Q_1(x) = \sum_{k=N}^{N_1} a_k \omega_k(x)$$

и перестановка $\sigma_1(N), \dots, \sigma_1(N_1)$ натуральных чисел $N, \dots, N_1$, удовлетворяющие условиям:

- 1') $g_1(x) = \gamma \chi_{\Delta_1}(x) \quad \forall x \in E_1, \quad |E_1| > 1 - \frac{\delta}{2},$
- 2') $\int_0^1 |g_1(x)| dx \leq 3|\gamma| |\Delta_1|,$
- 3')
$$\max_{N \leq k \leq N_1} \left(\int_{E_1} \left| \sum_{k=N}^{\bar{k}} a_{\sigma_1(k)} \omega_{\sigma_1(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq |\gamma| |\Delta_1|^{1/p} + \frac{\delta}{4} \quad \forall p \geq 1,$$

$$4') \quad \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)| dx < \frac{\delta}{4},$$

$$5') \quad \max_{N \leq \bar{k} \leq N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{\bar{k}} a_{\sigma_1(k)} \omega_{\sigma_1(k)}(x) \right| dx \leq 3|\gamma| |\Delta_1|,$$

$$6') \quad \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} < \frac{\delta}{4}.$$

Положим

$$M_0 = 2(N_1^2 + 1). \quad (2.35)$$

Снова применим лемму 2, полагая в ее формулировке

$$f(y) = \chi_{\Delta_2}(y), \quad N_0 = M_0, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{4(|\gamma| + 1)}.$$

Тогда определяются измеримое множество $E_2 \subset [0, 1]$, функция $g_2(y)$, полином $Q_2(y)$ вида

$$Q_2(y) = \sum_{n=M_0}^M b_n \omega_n(y)$$

и перестановка $\sigma_2(M_0), \dots, \sigma_2(M)$ натуральных чисел $M_0, \dots, M$, удовлетворяющие условиям:

$$1'') \quad g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y) \quad \forall y \in E_2, \quad |E_2| > 1 - \frac{\delta}{2},$$

$$2'') \quad \int_0^1 |g_2(y)| dy \leq 3|\Delta_2|,$$

$$3'') \quad \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)| dy < \frac{\delta}{4(|\gamma| + 1)},$$

$$4'') \quad \max_{M_0 \leq \bar{n} \leq M} \left(\int_{E_2} \left| \sum_{n=M_0}^{\bar{n}} b_{\sigma_2(n)} \omega_{\sigma_2(n)}(y) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ \leq |\Delta_2|^{1/p} + \frac{\delta}{4(|\gamma| + 1)} \quad \forall p \geq 1,$$

$$5'') \quad \max_{M_0 \leq \bar{n} \leq M} \int_0^1 \left| \sum_{n=M_0}^{\bar{n}} b_{\sigma(n)} \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dy \leq 3|\Delta_2|,$$

$$6'') \quad \sum_{n=M_0}^M |b_n|^{2+\delta} < \delta.$$

Определим множество E , функцию $g(x, y)$, полином $Q(x, y)$ и перестановку $\sigma(N), \sigma(N+1), \dots, \sigma(M)$ натуральных чисел $N, N+1, \dots, M$ следующим образом:

$$g(x, y) = g_1(x)g_2(y), \quad E = E_1 \times E_2, \quad (2.36)$$

$$Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y) = \sum_{k, n=M_0}^M c_{k,n} \omega_k(x) \omega_n(y), \quad (2.37)$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} a_k b_n, & N \leq k \leq N_1, \quad M_0 \leq n \leq M, \\ 0, & k \notin [N, N_1], \quad n \notin [M_0, M], \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma_1(n), & N \leq n \leq N_1, \\ n, & N_1 \leq n \leq M_0, \\ \sigma_2(n), & M_0 \leq n \leq M. \end{cases} \quad (2.39)$$

Отсюда и из условий $1')$, $1'')$, $4')$, $4'')$, $6')$, $6'')$ вытекает, что

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \gamma \chi_\Delta(x, y), \quad (x, y) \in E, \quad |E| > 1 - \delta, \\ \sum_{k, n=M_0}^M |c_{k,n}|^{2+\delta} &< \delta, \\ \iint_T |Q(x, y) - g(x, y)| dx dy &< \delta, \\ \iint_T |g(x, y)| dx dy &\leq 9|\gamma| |\Delta|. \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение утверждений 4) и 5) леммы 2. Пусть $N^2 + M_0^2 < R^2 < N_1^2 + M^2$, тогда для некоторого m_0 имеем $m_0 \leq R < m_0 + 1$. Из (2.35) следует $R^2 - N_1^2 \geq (m_0 - 1)^2$ и, следовательно, из $5')$, $5'')$ и (2.36)–(2.39) получим

$$\begin{aligned} & \max_{\sqrt{2} N \leq R \leq \sqrt{2} M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & \leq \iint_T \left| \sum_{k=N}^{N_1} \sum_{n=m_0}^{m_0-1} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & \quad + \max_{N \leq s \leq N_1} \iint_T \left| \sum_{k=N}^s c_{\sigma(k), \sigma(m_0)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(m_0)}(y) \right| dx dy \\ & = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{N_1} a_{\sigma(k)} \omega_{\sigma(k)}(x) \right| dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m_0-1} b_{\sigma(n)} \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dy \right) \\ & \quad + \left(\int_0^1 |b_{\sigma(m_0)} \omega_{\sigma(m_0)}(y)| dy \right) \cdot \left(\max_{N \leq s \leq N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^s a_{\sigma(k)} \omega_{\sigma(k)}(x) \right|^q dx \right) \\ & < 12|\gamma| |\Delta|. \end{aligned}$$

Аналогично в силу условий $3')$, $3'')$ и (2.36)–(2.39) для всех $p \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} & \max_{\sqrt{2} N \leq R \leq \sqrt{2} M} \left(\iint_E \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & \leq 12|\gamma| |\Delta|^{1/p} + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения 3'), 5'), 3''), 5'') и (2.36)–(2.39) при $N \leq \bar{k} \leq N_1$, $M_0 \leq \bar{n} \leq M$, получаем

$$\iint_T \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{n},\bar{m}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \leq 9|\gamma| |\Delta|,$$

$$\left(\iint_E \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \leq 4|\gamma| |\Delta|^{1/p} + \frac{\delta}{4} \quad \forall p \geq 1.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система, $\|\omega_n\|_{p_0} \leq \text{const}$, $k \geq 1$, при некотором $p_0 > 2$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L(T)$ и для любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 1$ можно найти измеримое множество $E \subset T = [0,1]^2$, функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ вида

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^M c_{k,n} \omega_k(x) \omega_n(y)$$

и перестановку $\sigma(N), \sigma(N+1), \dots, \sigma(M)$ натуральных чисел $N, N+1, \dots, M$ такие, что

- 1) $g(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E, \quad |E| > 1 - \varepsilon,$
- 2) $\iint_T |g(x,y)| dx dy \leq 10 \iint_T |f(x,y)| dx dy,$
- 3) $\iint_T |Q(x,y) - g(x,y)| dx dy < \varepsilon,$
- 4)
$$\begin{aligned} & \max_{N \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M} \left(\iint_e \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & + \sqrt{2} \max_{N \leq R \leq \sqrt{2} M} \left(\iint_e \left| \sum_{2N^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & \leq 2 \left(\iint_e |f(x,y)|^p dx dy \right)^{1/p} + \varepsilon \quad \forall e \subset E, \quad \forall p \geq 1, \end{aligned}$$
- 5)
$$\begin{aligned} & \max_{N \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M} \iint_T \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & + \sqrt{2} \max_{N \leq R \leq \sqrt{2} M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ & \leq 4 \iint_T |f(x,y)| dx dy + \varepsilon, \end{aligned}$$
- 6)
$$\sum_{k,n=N}^M |c_{k,n}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \geq 1$ – любое число. Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x, y) \quad (2.40)$$

такую, что

$$\max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} (|\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/p} + \|f(x, y) - \varphi(x, y)\|_{L^1[0,1]}) < \frac{\varepsilon^2}{4^4}, \quad (2.41)$$

Δ_ν , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, – прямоугольная область постоянства функции $\varphi(x, y)$.

Если ν , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, – заранее заданное натуральное число, $\delta = \varepsilon/(16\nu_0)$, то в силу леммы 3 существуют множество $E_\nu \subset T$, функция $g_\nu(x, y)$, полином по системе $\{\omega_k(t)\}_{k=1}^\infty$ вида

$$Q_\nu(x, y) = \sum_{k, n=N_\nu}^{M_\nu} c_{k, n}^{(\nu)} \omega_k(x) \omega_n(y) \quad (2.42)$$

и перестановка $\sigma(N_\nu), \dots, \sigma(M_\nu)$ натуральных чисел $N_\nu, \dots, M_\nu$, удовлетворяющие условиям:

$$g_\nu(x, y) = \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x, y) \quad \forall (x, y) \in E_\nu, \quad |E_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{4\nu_0}, \quad (2.43)$$

$$\iint_T |g_\nu(x, y)| dx dy \leq 9|\gamma_\nu| |\Delta_\nu|, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} & \max_{\sqrt{2} N_\nu \leq R \leq \sqrt{2} M_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{2N_\nu^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma_\nu(k), \sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x) \omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & + \max_{N_\nu \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{k, n=N_\nu}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma_\nu(k), \sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x) \omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & \leq 16|\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2\nu_0}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\iint_T |Q_\nu(x, y) - g_\nu(x, y)| dx dy < \left(\frac{\varepsilon}{16\nu_0} \right)^2, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & \max_{\sqrt{2} N_\nu \leq R \leq \sqrt{2} M_\nu} \iint_T \left| \sum_{2N_\nu^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma_\nu(k), \sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x) \omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dx dy \\ & + \max_{N_\nu \leq \bar{k}, \bar{n} \leq M_\nu} \iint_T \left| \sum_{k, n=N_\nu}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma_\nu(k), \sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x) \omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dx dy \\ & \leq 36|\gamma_\nu| |\Delta_\nu|, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\sum_{N_\nu}^{M_\nu} |c_{k, n}^{(\nu)}|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2\nu_0}. \quad (2.48)$$

Таким образом, для фиксированного ν , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, определяются множество $E_\nu \subset T$ и полином $Q_\nu(x, y)$ вида (2.42), удовлетворяющие условиям (2.43)–(2.48), при этом можно взять

$$N_1 = N, \quad N_\nu = M_{\nu-1} + 1, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0. \quad (2.49)$$

Определим множество E , функцию $g(x, y)$, полином $Q(x, y)$ и перестановку $\sigma(N), \dots, \sigma(M)$ натуральных чисел $N, \dots, M$ следующим образом:

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu \right) \cap \left(\bigcap_{\nu=0}^{\nu_0} G_\nu \right), \quad (2.50)$$

где

$$\begin{aligned} G_0 &= \left[(x, y) \in T : |f(x, y) - \varphi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} \right], \\ G_\nu &= \left[(x, y) \in T : |Q_\nu(x, y) - g_\nu(x, y)| < \frac{\varepsilon}{\nu_0} \right], \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0; \\ g(x, y) &= \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x, y) + [f(x, y) - \varphi(x, y)], \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$Q(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x, y) = \sum_{k, n=N}^M c_{k, n} \omega_k(x) \omega_n(y), \quad M = M_{\nu_0}, \quad (2.52)$$

где

$$c_{k, n} = \begin{cases} c_{k, n}^{(\nu)}, & N_\nu \leq k, n \leq M_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \\ 0, & k, s \notin [N_\nu, M_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \end{cases} \quad (2.53)$$

$\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$ при $N_{\nu-1} \leq k < N_\nu$, $1 \leq \nu \leq \nu_0$.

Из условий (2.40)–(2.44), (2.46) и (2.50)–(2.53) следует:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in E, \quad |E| > 1 - \varepsilon, \\ \iint_T |g(x, y)| dx dy &\leq 10 \iint_T |f(x, y)| dx dy, \\ \sum_{k, n=N}^M |c_{k, n}|^{2+\varepsilon} &< \varepsilon, \\ \iint_T |Q(x, y) - g(x, y)| dx dy &< \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. утверждения 1), 2), 3) и 6) леммы 4 выполнены.

Теперь проверим выполнение утверждений 4) и 5). Прежде всего заметим, что для всех $\nu \in [1, \nu_0]$ справедливы следующие неравенства (см. (2.40) и (2.41)):

$$\begin{aligned} \left(\iint_e \left| \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \chi_{\Delta_i}(x, y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} &\leq \left(\iint_e |\varphi(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\iint_e |f(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $e \subset G$ – любое измеримое множество,

$$\begin{aligned} \iint_T \left| \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \chi_{\Delta_i}(x, y) \right| dx dy &\leq \iint_T |\varphi(x, y)| dx dy \\ &\leq \iint_T |f(x, y)| dx dy + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Пусть $R \in [\sqrt{2} N, \sqrt{2} M]$, тогда $\sqrt{2} N_\nu \leq R \leq \sqrt{2} M_\nu$ для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$, следовательно, из (2.51)–(2.53) будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \\ &= \sum_{s=1}^{\nu-1} Q_s(x, y) + \sum_{2N_\nu^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Отсюда и из соотношений (2.41), (2.44) и (2.45) для всех $(x, y) \in E$ получим

$$\begin{aligned} &\left(\iint_e \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\iint_e \left| \sum_{s=1}^{\nu-1} (Q_s(x, y) - \gamma_s \chi_{\Delta_s}(x, y)) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\iint_e \left| \sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \chi_{\Delta_s}(x, y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\iint_e \left| \sum_{2N_\nu^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)}^{(\nu)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\iint_e |f(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Из (2.47), (2.49), (2.55) и (2.56) будем иметь

$$\begin{aligned} &\iint_T \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ &\leq \sum_{s=1}^{\nu-1} \iint_T |Q_s(x, y) - \gamma_s \chi_{\Delta_s}(x, y)| dx dy + \iint_T \left| \sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \chi_{\Delta_s}(x, y) \right| dx dy \\ &\quad + \iint_T \left| \sum_{2N^2 \leq k^2 + n^2 \leq R^2} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \\ &\leq 2 \iint_T |f(x, y)| dx dy + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично для всех $\bar{k}, \bar{n} \in [N, M]$ и для любого измеримого множества $e \subset G$ получим

$$\begin{aligned} & \left(\iint_e \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx dy \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\iint_e |f(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{4}, \\ & \iint_T \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k}, \bar{n}} c_{\sigma(k), \sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy \leq 2 \iint_T |f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $p_n \nearrow \infty$,

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \equiv F \quad (3.1)$$

— последовательность алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами; если последовательно применить лемму 2, то можно найти последовательности ограниченных функций $\{\bar{g}_n(x)\}$, множеств $\{G_n\}$ и полиномов

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}(x), \quad (3.2)$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ для каждого фиксированного n — некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1} + 1, \dots, m_n - 1$, такие, что

$$\bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad (3.3)$$

$$|G_n| > 1 - 2^{-n-2}, \quad (3.4)$$

$$\int_0^1 |\bar{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad |\bar{g}_n(x)| \geq |f(x)|, \quad x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

$$\int_0^1 |\bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x)| dx < 2^{-8(n+1)}, \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^N |a_k^{(n)}|^{2+2^{-n}} < 2^{-n}, \quad (3.7)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=m_{n-1}}^N a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}(x) \right| dx \leq 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \left(\int_G \left| \sum_{k=m_{n-1}}^N a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_G |f_n(x)|^p dx \right)^{1/p} + 2^{-8(n+1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

для всех $p \in [2, p_n]$ и при любом измеримом подмножестве $G \subset G_n$.

Положим

$$E_n = \{x \in [0, 1] : |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)| < 2^{-4(n+1)}\}. \quad (3.10)$$

В силу неравенства Чебышёва из (3.6) будем иметь

$$|E_n| > 1 - 2^{-4(n+1)}. \quad (3.11)$$

Определим перестановку натуральных чисел следующим образом:

$$\sigma(k) = \sigma_n(k), \quad m_{n-1} \leq n < m_n. \quad (3.12)$$

Покажем, что переставленная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ искомая.

Пусть ε — любое положительное число. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \bigcap_{s=n}^{\infty} (G_s \cap E_s), \quad n = 1, 2, \dots, \\ E &= \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} (G_s \cap E_s), \quad n_0 = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1, \\ B &= \Omega_{n_0} \cup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Очевидно, что (см. (3.4), (3.11), (3.13))

$$|B| = 1, \quad |E| > 1 - \varepsilon.$$

Определим функцию $\mu(x)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x)$ следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cup ([0, 1] \setminus B), \\ \mu_n, & x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \quad (3.14)$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n \cdot p_n} \cdot \prod_{s=1}^n h_s \right]^{-1}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} h_k &= \sup_{1 \leq p \leq p_k} \left(1 + \int_0^1 |\overline{g}_k(x)|^p dx + \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p dx \right); \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}(x) \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$c_k = a_k^{(n)}, \quad k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq 1. \quad (3.17)$$

Из (3.7) и (3.16) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} |a_k^{(n)}|^r \right) < \infty \quad \forall r > 2.$$

В силу (3.13)–(3.15) для всех $k \geq n_0$ и $p \in [1, p_k]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |\bar{g}_k(x)|^p \mu(x) dx &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |\bar{g}_k(x)|^p \mu_n dx \right) \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2n} \left(\int_0^1 |\bar{g}_k(x)|^p dx \right) h_k^{-1} \\ &< \frac{1}{3} 2^{-2kp} \quad \forall p \leq p_k. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогично для всех $k \geq n_0$ получим

$$\max_{m_{k-1} \leq m < m_n} \left(\int_{[0,1] \setminus G_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^{p_k} \mu(x) dx \right)^{1/p_k} < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \quad (3.19)$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.6), (3.5), (3.10), (3.13), (3.18) и (3.19), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\bar{g}_k(x)|^p \mu(x) dx &= \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |\bar{g}_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &\leq \int_0^1 |f_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx + 2^{-2kp_k}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |\bar{Q}_k(x) - \bar{g}_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &= \int_{\Omega} |\bar{Q}_k(x) - \bar{g}_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &\quad + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |\bar{Q}_k(x) - \bar{g}_k(x)|^{p_k} \mu(x) dx \\ &\leq 2 \cdot 2^{-4(k+1)p_k} + 2 \cdot \frac{1}{3} 2^{-2kp_k} \leq 2^{-2kp_k}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В силу условий (3.9), (3.13)–(3.15) и (3.19) для $m \in [m_{k-1}, m_k]$, для каждого

$k \geq n_0$ и для всех $p \leq p_k$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx \\
&= \int_{\Omega_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p dx \right] \cdot \mu_n \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[2^{-2(k+1)} + \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p dx \right)^{1/p} \right]^p \cdot \mu_n \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^k \left[\frac{\mu_n^{1/p}}{2^{2(k+1)}} + \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \mu_n dx \right)^{1/p} \right]^p \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2kp} + \sum_{n=n_0+1}^k 2^p \cdot \left[\frac{\mu_n}{2^{2p(k+1)}} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \mu_n dx \right] \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2kp} + 2^p \cdot 2^{-2p(k+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^k \mu_n + 2^p \cdot \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \mu(x) dx \\
&\leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x) dx \right).
\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $p \leq p_k$, $k \geq n_0$ получим

$$\begin{aligned}
& \max_{m_{k-1} \leq m < m_k} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=m_{k-1}}^m a_i^{(k)} \varphi_{\sigma_k(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq 2 \left(\int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} + 2^{-2k} \quad \forall p \in [2, p_k].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Пусть $f(x) \in \bigcap_{p>2} L_\mu^p[0, 1]$, т.е. $\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty$ для всех $p > 2$.

Положим

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases} \tag{3.23}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - \bar{f}(x) \right|^{p_n} dx = 0, \tag{3.24}$$

$$\int_0^1 |f_{k_n}(x)|^{p_n} dx < 2^{-8np_n}, \quad n \geq 2, \quad k_1 > n_0. \tag{3.25}$$

Полагая $g_1(x) = \bar{g}_{k_1}(x)$, $Q_1(x) = \bar{Q}_{k_1}(x)$ и принимая во внимание (3.2)–(3.12), легко убедиться в том, что функция $g_1(x)$ и полином $Q_1(x)$ удовлетворяют условиям (3.26)–(3.31) при $n = 1$.

Предположим, что уже определены функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $g_{\nu_1}(x), \dots, g_{\nu_{q-1}}(x)$, а также полиномы

$$\bar{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{k=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} c_k^{(\nu_n)} \varphi_{\sigma(k)}(x), \quad (3.26)$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E, \quad n \leq q-1, \quad (3.27)$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 2^{-(n+1)}, \quad (3.28)$$

$$\left(\int_0^1 |g_n(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 2^{-(n+1)} \quad \forall p \leq p_n, \quad (3.29)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)]^{p_{n+1}} \mu(x) \right| dx < 2^{-2np_{n+1}} \quad \forall n \leq q-1, \quad (3.30)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)] \right| dx < 2^{-(n+1)}, \quad (3.31)$$

$$\max_{m_{\nu_n-1} \leq m \leq m_{\nu_n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_n-1}}^m c_i^{(\nu_n)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx < 2^{-np} \quad \forall p \leq p_n. \quad (3.32)$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_{q+1}} \mu(x) dx < 2^{-8qp_{q+1}}, \quad (3.33)$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right| dx < 2^{-8q}. \quad (3.34)$$

В силу (3.25), (3.30) и (3.31) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2 \cdot 2^{-2q}, \quad (3.35)$$

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right| dx < 2 \cdot 2^{-q}. \quad (3.36)$$

Из (3.33)–(3.36) вытекает

$$\left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 3 \cdot 2^{-2q}, \quad (3.37)$$

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 3 \cdot 2^{-q}. \quad (3.38)$$

Положим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)]. \quad (3.39)$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.6), (3.13), (3.21), (3.30), (3.31), (3.33), (3.34) и (3.39), получаем

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_q(x)| dx &\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx \\ &\quad + \int_0^1 |\bar{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx < 2^{-q-1}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 |g_q(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &\leq \left(\int_0^1 |\bar{g}_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} + \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2^{-q-1}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^{p_{q+1}} \mu(x) dx \right)^{1/p_{q+1}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |\bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x)|^{p_{q+1}} \mu(x) dx \right)^{1/p_{q+1}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} < 2^{-2q}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Аналогично из (3.6) и (3.34) следует

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx < 2^{-2q}. \quad (3.44)$$

В силу (3.8), (3.22), (3.37) и (3.38) имеем

$$\begin{aligned} &\max_{m_{\nu_q-1} \leq m < m_{\nu_q}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_q}}^m c_i^{(\nu_q)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^{p_q} \mu(x) dx \right)^{1/p_q} + 2^{-8(\nu_q+1)} < 2^{-q}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\max_{m_{\nu_q-1} \leq m < m_{\nu_q}} \int_0^1 \left| \sum_{i=m_{\nu_q}}^m c_i^{(\nu_q)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right| dx < 2^{-q}. \quad (3.46)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$, множеств $\{G_q\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (3.40)–(3.46) для всех $q \geq 1$. Из (3.41) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |g_q(x)| dx < \infty. \quad (3.47)$$

Определим функцию $g(x)$ и последовательность чисел $\{\delta_i\}$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \quad (3.48)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & m_{\nu_q-1} \leq i < m_{\nu_q}, \\ 0, & i \notin [m_{\nu_q-1}, m_{\nu_q}). \end{cases} \quad (3.49)$$

Из (3.24), (3.40) и (3.47) следует:

$$g(x) \in L_{[0,1]}^1, \quad g(x) = f(x), \quad x \in E.$$

Пусть $p > 2$ – произвольное число. Тогда для некоторого числа q_0 будем иметь

$$p < p_k, \quad q > q_0. \quad (3.50)$$

Пусть далее произвольное натуральное число $n > m_{k_0}$, тогда для некоторого $q > q_0$ имеем $m_{\nu_q-1} \leq n < m_{\nu_q}$ и из соотношений (3.16), (3.17), (3.22), (3.37), (3.42), (3.43) и (3.48)–(3.50) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \delta_i c_i \varphi_{\sigma(i)}(x) - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [Q_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} + \sum_{i=q}^{\infty} \left(\int_0^1 |g_i(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \\ & \quad + \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=m_{\nu_q-1}}^n c_i^{(\nu_q)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 2^{-q}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \delta_i c_i \varphi_{\sigma(i)}(x) - g(x) \right| dx < 2^{-q}$$

и, следовательно,

$$\delta_i c_i = \int_0^1 g(x) \varphi_{\sigma(i)}(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. первая часть теоремы 4 доказана.

Точно такими же рассуждениями получим доказательство п. 2) теоремы 4.

Теорема 4 доказана.

Применяя лемму 4 вместо леммы 2 в доказательстве теоремы 4, получаем доказательство теоремы 7.

Список литературы

1. *Grigorian M. G.* On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 // Anal. Math. 1991. V. 17. № 3. P. 211–237.
2. *Григорян М. Г.* О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 8. С. 1011–1030.
3. *Григорян М. Г.* Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 5. С. 35–43.
4. *Григорян М. Г.* О некоторых свойствах ортогональных систем // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 75–105.
5. *Grigorian M. G.* On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces // Studia Math. 1999. V. 134. № 3. P. 207–216.
6. *Grigorian M. G., Kazarian K. S., Soria F.* Mean convergence of orthonormal Fourier series of modified functions // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 8. P. 3777–3799.
7. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления // Матем. сб. 1912. Т. 28. № 2. С. 266–294.
8. *Меньшов Д. Е.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1942. Т. 53. № 2. С. 67–96.
9. *Талалян А. А.* О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 5. С. 715–722.
10. *Осколков К. И.* Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228. № 2. С. 304–306.
11. *Талалян А. А.* О рядах по системе Хаара // Докл. АН Арм.ССР. 1966. Т. 42. № 3. С. 134–140.
12. *Кашин Б. С., Кошелева Г. Г.* Об одном подходе к теоремам об исправлении // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 1. С. 6–8.
13. *Церетели О. Д.* О сходимости почти всюду рядов Фурье // Сообщ. АН Груз.ССР. 1970. Т. 57. № 1. С. 21–24.
14. *Price J. J.* Walsh series and adjustment of functions on small sets // Illinois J. Math. 1969. V. 13. P. 131–136.
15. *Осипов Р. И.* О сходимости рядов по системе Уолша // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. 1966. Т. 1. № 4. С. 270–283.
16. *Хеладзе Ш. В.* Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L^1 // Матем. сб. 1978. Т. 107. № 2. С. 245–258.
17. *Казарян К. С.* О некоторых вопросах теории ортогональных рядов // Матем. сб. 1982. Т. 119. № 2. С. 278–298.
18. *Кашин Б. С.* Об одной полной ортонормированной системе // Матем. сб. 1976. Т. 99. С. 356–365.
19. *Гулисашвили А. Б.* Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 107. С. 45–59.
20. *Гоголадзе Л. Д., Зерекидзе Т. Ш.* О сопряженных функциях нескольких переменных // Сообщ. АН Груз.ССР. 1979. Т. 94. № 3. С. 541–544.
21. *Garsia-Guerva I., Kazarian K. S., Kazarian S. S.* On Men'shov's C -strong property // Acta Sci. Math. (Szeged). 1993. V. 58. P. 253–260.
22. *Меньшов Д. Е.* О рядах Фурье от суммируемых функций // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 5–38.
23. *Меньшов Д. Е.* О рядах Фурье непрерывных функций // Ученые записки МГУ. Матем. 1951. Т. 148. № 4. С. 108–132.
24. *Ульянов П. Л.* О рядах по переставленной тригонометрической системе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 4. С. 515–542.
25. *Талалян А. А.* Представление измеримых функций рядами // УМН. 1960. Т. 15. № 5. С. 567–604.
26. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // УМН. 1972. Т. 25. № 2. С. 3–52.

27. *Жижишвили Л. В.* О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1973. Т. 28. №2. С. 65–119.
28. *Голубов Б. И.* Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов // УМН. 1992. Т. 47. №5. С. 97–162.
29. *Дьяченко М. И.* Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов // УМН. 1992. Т. 47. №5. С. 97–162.
30. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–157.
31. *Riss M.* Sur les fonctions conjuguées // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.
32. *Kolmogoroff A. N.* Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les de Fourier séries // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 23–28.
33. *Fefferman C.* The multiple problem for the ball // Ann. of Math. (2). 1971. V. 94. №2. P. 330–336.
34. *Конягин С. В.* О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье // Тезисы докладов Всесоюзной школы по теории функций. Ереван, 1987. С. 54.
35. *Кашиш Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
36. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: gmarting@ysu.am

Поступила в редакцию
24.10.2002