Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский, Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 9, 77–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:20:19

УДК 517.538.52

Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский

Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана

Для положительных чисел p и μ через $A_{p,\mu}$ обозначим пространство Бергмана аналитических в полуплоскости $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций. Для $f \in A_{p,\mu}$ введем $R_n(f)_{p,\mu}$ – наилучшее приближение рациональными функциями степени не выше n . Пусть, кроме того, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$ таковы, что $\alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0$ и $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. Тогда согласно основному результату работы множество функций $f \in A_{p,\mu}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha+\mu} R_n(f)_{p,\mu})^{\tau} < \infty,$$

совпадает с пространством Бесова B_{τ}^{α} аналитических в Π функций.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: прямые и обратные теоремы рациональной аппроксимации, неравенства типа Бернштейна, неравенства типа Джексона, пространства Бергмана, пространства Бесова.

§ 1. Введение. Основные результаты

Через $L_p(\mathbb{R})$ обозначим пространство комплексных измеримых в смысле Лебега функций f на $\mathbb{R}$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Введем также $L_{p,\mu}(\Pi)$ – пространство комплексных измеримых относительно плоской меры Лебега m_2 в полуплоскости

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

функций f , для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{L_{p,\mu}(\Pi)} = \left(\int_{\Pi} (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \mu > 0.$$

Подпространство $L_{p,\mu}(\Pi)$, состоящее из аналитических в Π функций, – пространство Бергмана, обозначим через $A_{p,\mu} := A_{p,\mu}(\Pi)$. При этом для $f \in A_{p,\mu}$ полагаем $\|f\|_{A_{p,\mu}} = \|f\|_{L_{p,\mu}(\Pi)}$.

Для $0 < \tau < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ введем пространство Бесова B_{τ}^{α} аналитических в Π функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_{\tau}^{\alpha}} = \|f^{(s)}\|_{A_{\tau,s-\alpha}} < \infty, \quad s = [\alpha] + 1, \quad (1.1)$$

где $[\alpha]$ – целая часть α . Здесь, как обычно, $f^{(0)} = f$, $f^{(s)}$ при $s \geq 1$ есть s -я производная f , а $f^{(s)}$ при $s < 0$ есть $(-s)$ -я первообразная функции f , однозначно определяемая условием $f^{(s)}(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$. Функционал $\|\cdot\|_{B_\tau^\alpha}$ на B_τ^α задает квазинорму при $[\alpha] + 1 \leq 0$, т.е. при $\alpha < 0$. Если же $[\alpha] + 1 \geq 1$, т.е. $\alpha \geq 0$, то функционал $\|\cdot\|_{B_\tau^\alpha}$ на B_τ^α является полуквазинормой, так как $\|f\|_{B_\tau^\alpha} = 0$ тогда и только тогда, когда f является алгебраическим многочленом степени не выше $[\alpha]$. В § 2 будет показано, что при $\alpha \in [0, \frac{1}{\tau})$ функционал $\|\cdot\|_{B_\tau^\alpha}$ также будет квазинормой, если ограничиться функциями f такими, что $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$. В настоящей статье именно это и предполагается. То есть в определении пространства B_τ^α при $\alpha \in [0, \frac{1}{\tau})$ считаем $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$. Как известно, если $f \in B_\tau^\alpha$, то $s = [\alpha] + 1$ в (1.1) можно заменить на любое $s > \alpha$. Получаемые при этом квазинормы будут эквивалентны.

Для пространств B_τ^α имеет место следующее непрерывное некомпактное вложение (см., например, [1], [2]):

$$B_{\tau_1}^{\alpha_1} \hookrightarrow B_{\tau_0}^{\alpha_0} \quad \text{при} \quad \alpha_1 - \alpha_0 = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0} > 0. \quad (1.2)$$

В частности,

$$B_\tau^\alpha \hookrightarrow A_{p,\mu} \quad \text{при} \quad \alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0. \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем запись $X \hookrightarrow Y$ означает непрерывное вложение пространства X в пространство Y .

Обозначим через $\mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, множество алгебраических полиномов степени не выше n ; $\mathcal{R}_n = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathcal{P}_n, q \not\equiv 0\}$ – множество рациональных функций степени не выше n . Для $f \in A_{p,\mu}$ введем наилучшее рациональное приближение

$$R_n(f)_{p,\mu} := R_n(f)_{A_{p,\mu}} = \inf\{\|f - r\|_{A_{p,\mu}} : r \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}\}.$$

Как известно, множество всех рациональных функций является всюду плотным в $A_{p,\mu}$. Поэтому из (1.3) следует, что для $f \in B_\tau^\alpha$ выполняется соотношение $R_n(f)_{p,\mu} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Основной результат настоящей статьи – теорема 1 – включает в себя прямую и обратную теоремы рациональной аппроксимации в $A_{p,\mu}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть положительные числа p, μ, τ и действительное α таковы, что $\alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0$ и $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. Тогда функция $f \in A_{p,\mu}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha+\mu} R_n(f)_{p,\mu})^\tau < \infty$$

в том и только том случае, когда $f \in B_\tau^\alpha$.

Достаточность из теоремы 1 (прямая теорема) имеет место и при $\frac{1}{p} + \mu \in \mathbb{N}$. Доказать достаточность можно методом из работы [3], в которой получены прямые теоремы рациональной аппроксимации в пространствах Харди. Можно также применить атомическое представление (см. [4], [1]) функций из пространства Бергмана. В [4], [1] атомическое представление применяется, в частности,

для доказательства прямой теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Блоха. При доказательстве достаточности из теоремы 1 нами также получено неравенство типа Джексона – теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть α – действительное и p, μ, τ – положительные числа такие, что $\alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0$. Если $f \in B_\tau^\alpha$, то

$$R_n(f)_{A_{p,\mu}} \leq \frac{c}{n^{\alpha+\mu}} \|f\|_{B_\tau^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $c > 0$ и не зависит от n и f .

Необходимость из теоремы 1 (обратная теорема) доказывается методом С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем теории аппроксимации и основана в данном случае на приведенной ниже теореме 4. Кроме того, в случае $1 < \tau < \infty$ мы используем метод вещественной интерполяции. Теорема 4 доказывается с использованием теоремы 3, представляющей также самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. Пусть p и μ – положительные числа такие, что $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. Тогда для $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p,\mu}(\Pi)$, $n \geq 1$, выполняется неравенство

$$\|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})} \leq cn^\mu \|r\|_{L_{p,\mu}(\Pi)}, \quad c = c(p, \mu) > 0.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть p и μ – положительные числа такие, что $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. Тогда для $\alpha > -\mu$, $\frac{1}{\tau} = \alpha + \mu + \frac{1}{p}$ и $r \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}$, $n \geq 1$, выполняется неравенство

$$\|r\|_{B_\tau^\alpha} \leq cn^{\alpha+\mu} \|r\|_{A_{p,\mu}}, \quad c = c(p, \mu, \alpha) > 0.$$

Ограничение $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$ в теоремах 3 и 4, а также в случае необходимости из теоремы 1 является существенным.

Теоремы 1–4 имеют свои аналоги и для круга. В случае $\mu + \frac{1}{p} < 1$ аналоги теорем 1–4 для круга были получены ранее Е. Дынькиным (см. [5]). В частном случае $\mu = \frac{1}{p}$ и $p > 2$ также для круга необходимость из теоремы 1, а также теоремы 3 и 4 были установлены В. Р. Мисюком (см. [6]) одновременно с Е. Дынькиным и независимо от него. Теорема 3 для $\mu = \frac{1}{p}$ и $0 < p < 1$ была получена недавно первым из авторов (см. [7]). При этом в [7] существенным образом использовались некоторые результаты и приемы из [8]. Этим методы работ [7] и настоящей работы существенным образом отличаются от методов работ [5] и [6]. Доказательства теорем 3 и 4 основаны на дальнейшем развитии методов работ [8], [7].

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [9].

§ 2. Доказательство прямой теоремы и неравенства типа Джексона

Условимся через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров. Иногда значения параметров будем опускать.

В § 5 будут приведены некоторые результаты, касающиеся пространства Бергмана $A_{p,\mu}(G)$ в области $G \neq \mathbb{C}$. В частности, согласно лемме 10 для $f \in$

$A_{p,\mu}(\Pi)$ имеет место неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{c(p, \mu)}{(\operatorname{Im} z)^{\mu+1/p}} \|f\|_{A_{p,\mu}}, \quad z \in \Pi. \quad (2.1)$$

Из (2.1) вытекает, что требование $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ является корректным для функций $f \in B_\tau^\alpha(\Pi)$, если $\alpha < \frac{1}{\tau}$.

Для доказательства прямой теоремы и неравенства типа Джексона мы применим полученное Р. Р. Койфманом и Р. Рочбергом (см. [4]) атомическое разложение функций класса $A_{p,\mu}$. Об атомических разложениях и их приложениях также см. работы [1], [2]. Нужным результатам из [4], [1] мы придадим удобную для нас форму и сформулируем в виде теорем 5 и 6. С этой целью введем следующие обозначения.

Для каждого $\theta \in (0, 1)$ введем множество $\mathcal{F}_\theta$ замкнутых квадратов

$$Q = \{z : \theta^{p+1} \leq \operatorname{Im} z \leq \theta^p; q\theta^p(1-\theta) \leq \operatorname{Re} z \leq (q+1)\theta^p(1-\theta)\}, \quad \text{где } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, эти квадраты могут пересекаться лишь по границам и объединение их всех есть Π . Квадраты семейства $\mathcal{F}_\theta$ будем нумеровать в каком-либо порядке с помощью натуральных чисел: $\mathcal{F}_\theta = \{Q_k\}_{k=1}^\infty$. Через z_k обозначим центр квадрата Q_k .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\theta \in (0, 1)$, $p > 0$, $\mu > 0$ и

$$\varkappa > \max\left\{1, \frac{1}{p}\right\} + \mu.$$

Тогда для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p < \infty,$$

ряд

$$\sum_{k=1}^\infty u_k \frac{(\operatorname{Im} z_k)^{\varkappa-(\mu+1/p)}}{(z - \bar{z}_k)^\varkappa}, \quad z \in \Pi, \quad (2.2)$$

сходится в $A_{p,\mu}$, а также он сходится равномерно и абсолютно на компактных подмножествах Π . При этом сумма $f(z)$ ряда (2.2) удовлетворяет условию

$$\|f\|_{A_{p,\mu}}^p \leq c_1 \sum_{k=1}^\infty |u_k|^p, \quad c_1 = c_1(p, \mu, \varkappa, \theta) > 0.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть p, μ и $\varkappa$ такие же, как в теореме 5. Тогда существует $\theta_0 = \theta_0(p, \mu, \varkappa) \in (0, 1)$ такое, что при каждом $\theta \in (\theta_0, 1)$ любая функция $f \in A_{p,\mu}$ представима с помощью ряда (2.2) с коэффициентами $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p \leq c_2 \|f\|_{A_{p,\mu}}^p, \quad c_2 = c_2(p, \mu, \varkappa, \theta) > 0.$$

Из теорем 5 и 6 следуют, в частности, вложения (1.2) и (1.3). Используя эти теоремы, легко показать, что квазинормы $\|f\|_{A_{p,\mu}}$ и $\|f^{(s)}\|_{A_{p,\mu+s}}$, $s \in (-\mu, +\infty) \cap \mathbb{Z}$, эквивалентны для $f \in A_{p,\mu}$. Следовательно, заменив $s = [\alpha] + 1$ в (1.1) на любое целое $s > \alpha$, получим эквивалентную квазинорму для пространства B_τ^α .

Нам также понадобятся следующие леммы 1 и 2. Лемма 1 является фрагментом доказательства теоремы 1.3.1 из [10]. Лемма 2 следует из неравенства

$$(x + y)^\theta \leq x^\theta + y^\theta, \quad \text{где } x \geq 0, y \geq 0, 0 < \theta \leq 1.$$

ЛЕММА 1. Пусть $0 < q < 1$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ – невозрастающая последовательность неотрицательных чисел и $\sum a_n^q < \infty$. Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^\infty a_k \right)^q \leq c(q) \sum_{n=1}^\infty a_n^q.$$

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$, $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность неотрицательных чисел и $\sum a_k^\alpha < \infty$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^\beta \right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Достаточность из теоремы 1 (прямая теорема), а также теорема 2 являются очевидными следствиями теоремы 7.

ТЕОРЕМА 7. Пусть положительные числа p, μ, τ и действительное α таковы, что

$$\alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0. \quad (2.3)$$

Если $f \in B_\tau^\alpha$, то

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (n^{\alpha+\mu} R_n(f)_{p,\mu})^\tau \leq c \|f\|_{B_\tau^\alpha}^\tau, \quad c = c(p, \mu, \tau, \alpha) > 0. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $s = \max\{0, [\alpha] + 1\}$, где $[\alpha]$ – целая часть числа α . Далее, выберем $\varkappa \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $\varkappa > 1 + \mu + s + \frac{1}{p}$. Очевидно, будет выполнено также неравенство $\varkappa > \max\{1, \frac{1}{\tau}\} + s - \alpha$. Поскольку $f \in B_\tau^\alpha$, то $f^{(s)} \in A_{\tau,s-\alpha}$. Согласно теореме 6 функцию $f^{(s)}$ при некотором $\theta_1 \in (0, 1)$ можно представить в виде ряда

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=1}^\infty u_k \frac{(\operatorname{Im} z_k)^{\varkappa-(s-\alpha)-1/\tau}}{(z - \bar{z}_k)^\varkappa}, \quad z \in \Pi. \quad (2.5)$$

Здесь $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ – соответственно центры квадратов $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ семейства $\mathcal{F}_{\theta_1}$. При этом коэффициенты u_k ряда (2.5) таковы, что

$$\sum_{k=1}^\infty |u_k|^\tau \leq c_1 \|f^{(s)}\|_{A_{\tau,s-\alpha}}^\tau \leq c_2 \|f\|_{B_\tau^\alpha}^\tau. \quad (2.6)$$

Будем считать, что квадраты Q_k пронумерованы таким образом, что последовательность $\{|u_k|\}_{k=1}^\infty$ не возрастает.

Из (2.1) находим, что

$$|f^{(s)}(z)| \leq \frac{c_3}{(\operatorname{Im} z)^{s-\alpha+1/\tau}} \|f\|_{B_\tau^\alpha}, \quad z \in \Pi.$$

Из этого неравенства и теоремы 5 следует, что ряд (2.5) можно почленно проинтегрировать s раз вдоль вертикальных лучей $[z, z + i\infty)$, $z \in \Pi$. С учетом условия (2.3) получим

$$f(z) = b \sum_{k=1}^{\infty} u_k \frac{(\operatorname{Im} z_k)^{(\kappa-s)-(\mu+1/p)}}{(z - \bar{z}_k)^{\kappa-s}}, \quad z \in \Pi, \quad (2.7)$$

где $b = (-1)^s \frac{(\kappa-s-1)!}{(\kappa-1)!}$.

Поскольку $p > \tau$, то из (2.6) и леммы 2 следует сходимость ряда $\sum |u_k|^p$. Тогда согласно теореме 5 ряд (2.7) сходится в $A_{p,\mu}$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $r_n(z) = 0$ при $n < \kappa - s$ и

$$r_n(z) = b \sum_{1 \leq k \leq n/(\kappa-s)} u_k \frac{(\operatorname{Im} z_k)^{(\kappa-s)-(\mu+1/p)}}{(z - \bar{z}_k)^{\kappa-s}} \quad \text{при } n \geq \kappa - s.$$

Очевидно, $r_n \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}$ и, следовательно, $R_n(f)_{p,\mu} \leq \|f - r_n\|_{A_{p,\mu}}$. Для оценки последней квазинормы применим теорему 5. В результате получим

$$R_n(f)_{p,\mu} \leq c_5 \left(\sum_{k > n/(\kappa-s)} |u_k|^p \right)^{1/p}. \quad (2.8)$$

Далее, положим $a_k = |u_{[k/(\kappa-s)]+1}|$, $k = 1, 2, \dots$. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательна, не возрастает и согласно (2.6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\tau \leq c_6 \|f\|_{B_\tau^\alpha}^\tau. \quad (2.9)$$

Из (2.8) получим также, что

$$R_n(f)_{p,\mu} \leq c_7 \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}. \quad (2.10)$$

В силу (2.3) имеем $\frac{\tau}{p} < 1$. Поэтому, используя лемму 1 и соотношения (2.9) и (2.10), получим (2.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha+\mu} R_n(f)_{p,\mu})^\tau \leq c_8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\tau/p} \leq c_9 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\tau \leq c_{10} \|f\|_{B_\tau^\alpha}^\tau.$$

Теорема доказана.

§ 3. Сравнение квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер

Здесь мы докажем теорему 3. Нам понадобится пространство Харди $H_p = H_p(\Pi)$ в полуплоскости Π . Согласно определению (см. [11]) аналитическая в полуплоскости Π функция f принадлежит H_p , $0 < p < \infty$, если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Как известно, если $f \in H_p$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует $\lim f(z) =: f(x)$, когда $z \in \Pi$ стремится к x по некасательным по отношению к $\mathbb{R}$ путям. При этом $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}$. Отметим также для $f \in H_p$ неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{c(p)}{(\operatorname{Im} z)^{1/p}} \|f\|_{H_p}, \quad z \in \Pi. \quad (3.1)$$

Утверждения типа следующей условной леммы 3 имеются также в работах [8], [7].

ЛЕММА 3. Пусть положительные числа p, μ и λ удовлетворяют условию $\frac{1}{\lambda} = \mu + \frac{1}{p}$. Предположим, что для некоторого $p = p_1 < 1$ неравенство

$$\|r\|_{H_\lambda} \leq c_1(p, \mu) n^\mu \|r\|_{A_{p, \mu}} \quad (3.2)$$

выполняется для любой функции $r \in \mathcal{R}_n \cap A_{p, \mu}$, $n \geq 1$, с действительными коэффициентами и с полюсами лишь на $\mathbb{R}$. Тогда для всех $p = kp_1$, $k \in \mathbb{N}$, и всех $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p, \mu}(\Pi)$, $n \geq 1$, выполняется неравенство

$$\|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})} \leq c_2(p, \mu) n^\mu \|r\|_{L_{p, \mu}(\Pi)} \quad (3.3)$$

с некоторой константой $c_2(p, \mu)$ вместо $c_1(p, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Пусть $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p, \mu}(\Pi)$ и не все ее полюсы лежат на $\mathbb{R}$. Через b_+ и b_- обозначим соответственно произведения Бляшке, полюсами которых с учетом кратности являются полюсы r , лежащие в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. Если, например, r не имеет полюсов в $\operatorname{Im} z < 0$, то полагаем $b_-(z) \equiv 1$. Очевидно, что ∞ полюсом r не может быть. Для каждого фиксированного $\zeta \in T$, $T := \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, все полюсы рациональной функции

$$r(z, \zeta) := r(z)(b_+(z) - \zeta b_-(z))^{-1}$$

лежат на $\mathbb{R}$ и ее степень равна степени r . Несложно убедиться (или см. [12; теорема 1.7], [7; лемма 1]), что функция

$$J(p, z) := \int_T |b_+(z) - \zeta b_-(z)|^{-p} |d\zeta|$$

ограничена в $\mathbb{C}$, т.е. $J(p, z) \leq \omega(p)$ при $z \in \mathbb{C}$, где $\omega(p)$ больше нуля и зависит лишь от $p = p_1 \in (0, 1)$. Используя теорему Фубини, находим, что

$$\begin{aligned} & \int_T \left(\int_\Pi (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |r(z, \zeta)|^p dm_2(z) \right) |d\zeta| \\ &= \int_\Pi (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |r(z)|^p J(p, z) dm_2(z) \leq \omega(p) \|r\|_{L_{p, \mu}(\Pi)}^p. \end{aligned}$$

Следовательно, существует $\zeta_0 \in T$ такое, что функция $r_0(z) := r(z, \zeta_0)$ удовлетворяет условию

$$\|r_0\|_{A_{p, \mu}} \leq c_3(p) \|r\|_{L_{p, \mu}(\Pi)}, \quad c_3(p) = \left(\frac{\omega(p)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Положим $r_1(x) = \operatorname{Re} r_0(x)$ и $r_2(x) = \operatorname{Im} r_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для r_j , $j = 1, 2$, выполняется соотношение

$$\|r_j\|_{A_{p,\mu}} \leq c_3(p) \|r\|_{L_{p,\mu}(\Pi)}. \quad (3.4)$$

Для r_j согласно предположению выполняется неравенство (3.2). С учетом (3.2), (3.4) и очевидного неравенства $|b_+(x) - \zeta_0 b_-(x)| \leq 2$, $x \in \mathbb{R}$, находим

$$\begin{aligned} \|r_j(b_+ - \zeta_0 b_-)\|_{L_\lambda(\mathbb{R})} &\leq 2\|r_j\|_{L_\lambda(\mathbb{R})} \leq 2c_1(p, \mu)n^\mu \|r_j\|_{A_{p,\mu}} \\ &\leq 2c_1(p, \mu)c_3(p)n^\mu \|r\|_{L_{p,\mu}(\Pi)}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку $r = (r_1 + ir_2)(b_+ - \zeta_0 b_-)$ и $0 < \lambda < 1$, то в силу (3.5) неравенство (3.3) для любой функции $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p,\mu}(\Pi)$ будет выполняться с константой $c_2(p, \mu) = 2^{1/\lambda} c_1(p, \mu)c_3(p)$ вместо $c_1(p, \mu)$.

Покажем сейчас справедливость (3.3) для показателей $p = p_k := kp_1$, $k = 2, 3, \dots$. Пусть $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p,\mu}(\Pi)$. Тогда $r^k \in \mathcal{R}_{nk} \cap L_{p_1, k\mu}(\Pi)$ и, следовательно, согласно рассмотренному случаю $k = 1$ выполняется неравенство

$$\|r^k\|_{L_{\sigma_k}(\mathbb{R})} \leq c_2(p_1, k\mu)(nk)^{k\mu} \|r^k\|_{L_{p_1, k\mu}(\Pi)}, \quad \frac{1}{\sigma_k} := k\mu + \frac{1}{p_1}. \quad (3.6)$$

Далее, положим $\frac{1}{\lambda_k} = \mu + \frac{1}{kp_1}$ и заметим, что

$$\|r^k\|_{L_{\sigma_k}(\mathbb{R})} = \|r\|_{L_{\lambda_k}(\mathbb{R})}^k, \quad \|r^k\|_{L_{p_1, k\mu}(\Pi)} = \|r\|_{L_{p_k, \mu}(\Pi)}^k.$$

Таким образом, из (3.6) следует нужное неравенство

$$\|r\|_{L_{\lambda_k}(\mathbb{R})} \leq c_4(p_k, \mu)n^\mu \|r\|_{L_{p_k, \mu}(\Pi)}$$

с константой $c_4(p_k, \mu) = k^\mu c_2(p_1, k\mu)$. Лемма доказана.

Далее мы следуем схеме рассуждений, примененной в [8] и [7]. С этой целью введем дополнительные обозначения. Пусть n и l – натуральные числа такие, что $n \geq l + 1$. Через $\mathcal{R}_n^l$ обозначим множество функций $r \in \mathcal{R}_n$ с действительными коэффициентами и с полюсами лишь на $\mathbb{R}$, причем кратность каждого полюса не выше l и

$$r(z) = O(z^{-l-1}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Через Π_m^l , $m \geq 2$, $l \geq 1$, обозначим множество финитных кусочно полиномиальных на $\mathbb{R}$ функций φ степени не выше $l - 1$ с m свободными узлами. А именно, $\varphi \in \Pi_m^l$, если существует m точек (узлов φ) $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_m < +\infty$ таких, что $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_{l-1}$, $k = 1, 2, \dots, m - 1$, и $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_m]$. Значения $\varphi(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, выбираются произвольно. Ради удобства считаем $\Pi_1^l = \{0\}$.

ЛЕММА 4 (см. [8]). Если $r \in \mathcal{R}_n^l$, то существует действительная функция $\varphi \in \Pi_m^l$, $m \leq n$, такая, что

$$r(z) = \frac{l!}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{(t - z)^{l+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \varphi.$$

При этом узлами φ являются полюсы r .

ЛЕММА 5 (см. [8]). Пусть $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda = (k + \frac{1}{q})^{-1}$, $\varphi \in \Pi_m^l$ и

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in \Pi.$$

Тогда $f^{(k)} \in H_\lambda$ и выполняется неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{H_\lambda} \leq c(k, q, l) \cdot m^k \cdot \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Мы будем использовать также пространства Бергмана $A_{p,\mu}(G)$ и В. И. Смирнова $E_p(G)$ в ограниченной области G , граница которой ∂G является спрямляемой кривой Жордана. Определения этих пространств и некоторые связанные с ними неравенства приводятся в § 5. Методом, применяемым при доказательстве теоремы 10, можно получить также следующее известное вложение. Пусть p , q и μ – положительные числа такие, что

$$\mu + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} =: l \in \mathbb{N}, \quad p < q. \quad (3.7)$$

Если f аналитична в Π , $f(z) \rightarrow 0$ при $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ и $f^{(l)} \in A_{p,\mu}(\Pi)$, то $f \in H_q(\Pi)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{H_q} \leq c(p, q, \mu) \|f^{(l)}\|_{A_{p,\mu}}. \quad (3.8)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, функция f аналитична в Π и $f(z) = O((\text{Im } z)^{-l-\varepsilon})$ при $\text{Im } z \rightarrow \infty$. В этом случае через $f^{(-l)}$ будем обозначать l -ю первообразную функции f , однозначно определяемую условием $f^{(-l)}(z) \rightarrow 0$ при $\text{Im } z \rightarrow \infty$. В начале § 2 было показано, что $f^{(-l)}$ определена корректно для $f \in A_{p,\mu}$ при $\mu + \frac{1}{p} > l$. Из (3.1) следует, что $f^{(-l)}$ определена корректно для $f \in H_p$ при $\frac{1}{p} > l$.

ЛЕММА 6. Пусть p , q , μ и l такие же, как в (3.7), и $f \in A_{p,\mu}(\Pi)$. Тогда $f^{(-l)} \in H_q$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\psi \in \Pi_k^l$ такая, что

$$\|\text{Im } f^{(-l)} - \psi\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \frac{c}{k^{l-\mu}} \|f\|_{A_{p,\mu}},$$

где c больше нуля и не зависит от f и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.8) при $k = 1$ можем положить $\psi \equiv 0$. Далее считаем $k \geq 2$ и $f \not\equiv 0$. Из (3.8) следует существование $x_1, x_k \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_k$, удовлетворяющих условию

$$\|f^{(-l)}\|_{L_q(\mathbb{R} \setminus (x_1, x_k))} \leq \frac{1}{k^{1/p}} \|f\|_{A_{p,\mu}}. \quad (3.9)$$

Далее, можем определить $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{k-1} < x_k$, такие, что

$$\int_{D_j} (\text{Im } z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z) \leq \frac{2}{k} \int_D (\text{Im } z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z), \quad (3.10)$$

где $D \subset \Pi$ – квадрат со стороной (x_1, x_k) , а $D_j \subset D$ – квадрат со стороной $J_j := (x_j, x_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. Через $\Delta_j \subset D_j$ обозначим правильный треугольник

с основанием J_j . Используя лемму 12 и неравенство (3.10), получим следующее соотношение:

$$\|f\|_{A_{p,\mu}(\Delta_j)}^p \leq \frac{c_1}{k} \int_D (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z). \quad (3.11)$$

Через $p_j(z)$ обозначим многочлен Тейлора порядка $l-1$ функции $f^{(-l)}$ с начальной точкой в центре Δ_j . Используя теорему 10 с замечанием 2 и соотношение (3.11), находим

$$\|f^{(-l)} - p_j\|_{L_q(J_j)} \leq \frac{c_2}{k^{1/p}} \|f\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}. \quad (3.12)$$

Введем функцию $\psi \in \Pi_k^l$, полагая $\psi(x) = \operatorname{Im} p_j(x)$ при $x \in J_j$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, и $\psi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_k]$. Функция ψ является искомой. Действительно, из (3.9) и (3.12) получаем

$$\|\operatorname{Im} f^{(-l)} - \psi\|_{L_q(\mathbb{R})}^q \leq \frac{c_3}{k^{q/p-1}} \|f\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^q = \frac{c_3}{k^{q(l-\mu)}} \|f\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^q.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно лемме 3 нам достаточно получить теорему 3 для $p \in (0, 1)$ с $\mu + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$ и функцией $r \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}(\Pi)$ с действительными коэффициентами и полюсами лишь на $\mathbb{R}$. Несложно убедиться, что такие функции r принадлежат $\mathcal{R}_n^l$ при $l = [\mu + \frac{1}{p}]$. В силу сделанных ограничений можем определить $q \in (1, +\infty)$, удовлетворяющие условию $\mu + \frac{1}{p} = l + \frac{1}{q}$. Используя лемму 4, находим, что существует действительная функция $\varphi \in \Pi_m^l$, $m \leq n$, удовлетворяющая условию

$$r^{(-l)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad z \in \Pi. \quad (3.13)$$

В силу теоремы М. Рисса $r^{(-l)} \in H_q(\Pi)$. Очевидно, $\operatorname{Im} r^{(-l)}(z)$ – интеграл Пуассона функции φ в Π . Следовательно, $\operatorname{Im} r^{(-l)}(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, исключая лишь полюсы r (узлы φ).

Введем наименьшее натуральное ν , для которого $2^\nu \geq m$. Согласно лемме 6 для каждого $s = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$ найдется действительная функция $\psi_s \in \Pi_{2^s}^l$ такая, что

$$\|\varphi - \psi_s\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \frac{c_1}{(2^s)^{l-\mu}} \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}. \quad (3.14)$$

Положим $\varphi_s = \psi_s - \psi_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, \nu$, где считаем $\psi_\nu = \varphi$. Напомним также, что $\varphi_0 \equiv 0$. Очевидно, $\varphi_s \in \Pi_{2^{s+1}}^l$ и

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_\nu \quad (3.15)$$

всюду на $\mathbb{R}$. Из (3.14) находим также, что

$$\|\varphi_s\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \frac{c_2}{(2^s)^{l-\mu}} \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}. \quad (3.16)$$

Сейчас мы можем получить нужную оценку $\|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})}$. Действительно, согласно (3.13) и (3.15) получаем

$$\|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})}^\lambda = \|r\|_{H_\lambda(\Pi)}^\lambda = \|(r^{(-l)})^{(l)}\|_{H_\lambda(\Pi)}^\lambda \leq \sum_{s=1}^{\nu} \left\| \frac{l}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_s(t) dt}{(t-z)^{l+1}} \right\|_{H_\lambda(\Pi)}^\lambda.$$

Мы продолжим оценку, применив лемму 5 при $k = l$ и неравенство (3.16). В итоге получим

$$\begin{aligned} \|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})}^\lambda &\leq c_3 \sum_{s=1}^{\nu} \frac{(2^{s+1})^{l\lambda}}{(2^s)^{\lambda(l-\mu)}} \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^\lambda = c_4 \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^\lambda \sum_{s=1}^{\nu} (2^{\lambda\mu})^s \\ &\leq c_5 (2^\nu)^{\lambda\mu} \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^\lambda \leq c_6 n^{\lambda\mu} \|r\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}^\lambda. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 4. Неравенства типа Бернштейна для квазинорм производных рациональных функций и доказательство обратной теоремы

Некоторые частные случаи следующей теоремы 8 получены в [5]–[7].

ТЕОРЕМА 8. Пусть p, μ – положительные числа такие, что $\mu + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{\lambda} = \mu + s + \frac{1}{p}$. Если $r \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}(\Pi)$, то

$$\|r^{(s)}\|_{H_\lambda} \leq c(p, \mu, s) n^{\mu+s} \|r\|_{A_{p,\mu}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $r \in A_{p,\mu}$, то (см. § 2) $r^{(s)} \in A_{p,\mu+s}$ и

$$\|r^{(s)}\|_{A_{p,\mu+s}} \leq c_1(p, \mu, s) \|r\|_{A_{p,\mu}}. \quad (4.1)$$

Очевидно также, что $r^{(s)}$ – рациональная функция степени не выше $(s+1)n$. Остается применить к функции $r^{(s)}$ теорему 3 с $\mu + s$ вместо μ и воспользоваться неравенством (4.1).

Квадраты семейства $\mathcal{F}_{1/2}$ (см. § 2) будем нумеровать в каком-либо порядке: $\mathcal{F}_{1/2} = \{Q_k\}_{k=1}^\infty$. Через $d(Q_k)$ (в соответствии с п. 5.1) обозначаем длину диагонали квадрата Q_k .

ЛЕММА 7. Пусть $f \in H_p(\Pi)$, $0 < p < \infty$. Тогда последовательность

$$\delta_k(f, p) := d(Q_k)^{1/p} \|f\|_{C(Q_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

является бесконечно малой. При этом если квадраты Q_k семейства $\mathcal{F}_{1/2}$ пронумерованы таким образом, что указанная последовательность не возрастает, то

$$\delta_k(f, p) \leq \frac{c(p)}{k^{1/p}} \|f\|_{H_p}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Лемма 7 для круга имеется в [13], [5] и [14]. Ее доказательство для полуплоскости аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $s = \max\{1, [\alpha] + 1\}$, $\frac{1}{\lambda} = \mu + s + \frac{1}{p}$ и, кроме того,

$$\delta_k = \delta_k(r^{(s)}, \lambda) = d(Q_k)^{1/\lambda} \|r^{(s)}\|_{C(Q_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Используя неравенство (4.1) и лемму 11, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^p \leq c_1 \|r\|_{A_{p,\mu}}^p.$$

Значит, последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесконечно малой, и мы можем считать, что квадраты Q_k семейства $\mathcal{F}_{1/2}$ пронумерованы так, что указанная последовательность не возрастает. В таком случае

$$\delta_k \leq \frac{c_2}{k^{1/p}} \|r\|_{A_{p,\mu}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Используя теорему 8 и лемму 7, находим также, что

$$\delta_k = c_3 \frac{n^{\mu+s}}{k^{1/\lambda}} \|r\|_{A_{p,\mu}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{\tau} \leq c_4 n^{\tau(\alpha+\mu)} \|r\|_{A_{p,\mu}}^{\tau}.$$

Снова применяя лемму 11, убеждаемся, что последнее неравенство равносильно утверждению теоремы 4.

При доказательстве необходимости из теоремы 1 (обратной теоремы) будет применяться метод вещественной интерполяции. Необходимые сведения имеются в [10].

Для $\theta \in (0, 1)$ и $0 < q \leq \infty$ через $(\cdot, \cdot)_{\theta, q}$ обозначаем интерполяционный функтор Я. Петре.

Введем $\mathfrak{R}_q^{\beta}$, $\beta > 0$, $q > 0$, – аппроксимационное пространство функций $f \in A_{p,\mu}(\Pi)$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{\mathfrak{R}_q^{\beta}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (k^{\beta} R_n(f)_{p,\mu})^q \right]^{1/q}.$$

В обозначении пространства $\mathfrak{R}_q^{\beta}$ мы опускаем p и μ , так как эти параметры до конца данного параграфа считаются фиксированными.

ЛЕММА 8. Пусть $0 < \beta_0 < \beta_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta = (1 - \theta)\beta_0 + \theta\beta_1$ и $q, q_0, q_1 \in (0, \infty)$. Тогда

$$(\mathfrak{R}_{q_0}^{\beta_0}, \mathfrak{R}_{q_1}^{\beta_1})_{\theta, q} = \mathfrak{R}_q^{\beta}.$$

Эта лемма является частным случаем теоремы 7.1.8 из [10].

ЛЕММА 9. Пусть $1 < \tau_0 < \tau_1 < \infty$, $\alpha_0 < \frac{1}{\tau_0}$, $\alpha_1 < \frac{1}{\tau_1}$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$, $0 < \theta < 1$ и

$$\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1 - \theta}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1}.$$

Тогда $(B_{\tau_0}^{\alpha_0}, B_{\tau_1}^{\alpha_1})_{\theta, \tau} = B_{\tau}^{\alpha}$.

Лемма 9 является частным случаем теоремы 6.4.5 из [10]. Читателей не должно смущать то обстоятельство, что теория пространств Бесова в [10] изложена с иной точки зрения, чем в настоящей статье.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Согласно введенным выше обозначениям нам нужно доказать, что

$$\mathfrak{R}_{\tau}^{\alpha+\mu} \hookrightarrow B_{\tau}^{\alpha}. \quad (4.4)$$

Применяя теорему 4 и метод С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем теории аппроксимации, легко убедиться в справедливости вложения

$$\mathfrak{R}_{\min\{\tau, 1\}}^{\alpha+\mu} \hookrightarrow B_{\tau}^{\alpha}. \quad (4.5)$$

Вложения (4.4) и (4.5) совпадают при $0 < \tau \leq 1$.

Пусть сейчас $\tau > 1$. Выберем $-\mu < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$ и $0 < \theta < 1$, удовлетворяющие условиям $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\frac{1}{\tau_1} = \alpha_1 + \mu + \frac{1}{p} < 1$. Тогда будем иметь также, что $\frac{1}{\tau_0} = \alpha_0 + \mu + \frac{1}{p} < 1$ и

$$\alpha + \mu = (1 - \theta)(\alpha_0 + \mu) + \theta(\alpha_1 + \mu), \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1 - \theta}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1}.$$

Согласно (4.5) выполняются вложения

$$\mathfrak{R}_1^{\alpha_s + \mu} \hookrightarrow B_{\tau_s}^{\alpha_s}, \quad s = 0, 1.$$

Следовательно,

$$(\mathfrak{R}_1^{\alpha_0 + \mu}, \mathfrak{R}_1^{\alpha_1 + \mu})_{\theta, \tau} \hookrightarrow (B_{\tau_0}^{\alpha_0}, B_{\tau_1}^{\alpha_1})_{\theta, \tau}.$$

Остается воспользоваться леммами 8 и 9. Теорема 1 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существенность ограничения $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$ в теореме 3 подтверждается на примере семейства рациональных функций степени $2l$

$$r_{\varepsilon}(z) = [(z + i)(z + i\varepsilon)]^{-l}, \quad l := \frac{1}{p} + \mu \in \mathbb{N},$$

зависящих от параметра $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Несложные вычисления показывают (случай $\mu = \frac{1}{p}$ рассмотрен в [7]), что при $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$

$$\|r_{\varepsilon}\|_{L_{\lambda}(\mathbb{R})} \asymp \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p+\mu}, \quad \|r_{\varepsilon}\|_{A_{p,\mu}(\Pi)} \asymp \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

Поскольку $\|r_{\varepsilon}\|_{L_{\lambda}(\mathbb{R})}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ растет существенно быстрее, чем $\|r_{\varepsilon}\|_{A_{p,\mu}(\Pi)}$, то теорема 3 не выполняется при $\frac{1}{p} + \mu \in \mathbb{N}$.

Аналогично можно показать, что ограничение $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$ существенно и в теоремах 4 и 8. Отсюда следует существенность ограничения $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$ и для необходимости из теоремы 1.

§ 5. Приложение. Некоторые результаты о пространствах Бергмана и Смирнова

Цель настоящего параграфа – получить вспомогательные утверждения о пространствах Бергмана и В. И. Смирнова в области. Эти утверждения применялись нами при доказательстве основных результатов этой статьи. Теоремы 9 и 10 (см. ниже) получены в большей общности, чем требовалось для доказательства теоремы 3, так как они представляют самостоятельный интерес.

5.1. Пространства Бергмана в области и разбиение типа Уитни.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – область, отличная от $\mathbb{C}$; ∂G – граница G ; $\bar{G} = G \cup \partial G$ – замыкание области G ; $\rho(z, \partial G)$ – расстояние от точки z до границы ∂G . В § 1 для положительных чисел p и μ введены пространства Лебега $L_{p,\mu}(\Pi)$ и Бергмана $A_{p,\mu}(\Pi)$. Аналогично вводятся пространства Лебега $L_{p,\mu} = L_{p,\mu}(G)$ и Бергмана $A_{p,\mu} = A_{p,\mu}(G)$ в области G . При этом $\text{Im } z$ заменяется на $\rho(z, \partial G)$.

ЛЕММА 10. Если $f \in A_{p,\mu}(G)$, то

$$|f(z)| \leq c(p, s, \mu) \frac{\|f\|_{A_{p,\mu}}}{(\rho(z, \partial G))^{\mu+1/p}}, \quad z \in G.$$

Доказательство основано на субгармоничности функции $|f(z)|^p$ (см., например, утверждение 1.1 из [12]).

С использованием леммы 10 доказывается, в частности, полнота пространства $A_{p,\mu}(G)$. Если G – жорданова область со спрямляемой границей, то, как следует из теоремы 1 работы [15], множество алгебраических многочленов всюду плотно в $A_{p,\mu}(G)$.

Пусть K, Γ – некоторые множества в $\mathbb{C}$ и $\rho(K, \Gamma)$ – расстояние между K и Γ , т.е. $\rho(K, \Gamma) = \inf\{|z - \xi| : z \in K, \xi \in \Gamma\}$. Через $d(K)$ и $d_0(K)$ обозначим соответственно диаметр наименьшего замкнутого круга, содержащего K , и диаметр наибольшего открытого круга, содержащегося в K .

Пусть G – область, отличная от $\mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{Z}$ односвязных замкнутых областей Q с кусочно гладкой границей называется *разбиением типа Уитни* области G , если выполняются следующие условия:

- (i) любые две области семейства $\mathcal{Z}$ могут пересекаться лишь по границам;
- (ii) объединение всех областей семейства $\mathcal{Z}$ есть G ;
- (iii) существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что для любой области $Q \subset \mathcal{Z}$ выполняются неравенства

$$c_1 \rho(Q, \partial G) \leq d_0(Q) \leq d(Q) \leq c_2 \rho(Q, \partial G). \quad (5.1)$$

Пример такого разбиения области G дают квадраты Уитни (см. [16; гл. VI]) с $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}$ и $c_2 = 1$. Если $G = \Pi$, то построенное в § 2 семейство $\mathcal{F}_\theta$, $0 < \theta < 1$, является разбиением типа Уитни с $c_1 = \frac{1}{\theta} - 1$, $c_2 = \sqrt{2}(\frac{1}{\theta} - 1)$.

Если K – компакт в $\mathbb{C}$, то $C(K)$ обозначает множество комплексных непрерывных функций на K . Для $f \in C(K)$ полагаем $\|f\|_{C(K)} = \max_{z \in K} |f(z)|$.

ЛЕММА 11. Пусть p и μ – положительные числа и $f \in A_{p,\mu}(G)$. Тогда

$$c_3 \|f\|_{A_{p,\mu}}^p \leq \sum_{Q \in \mathcal{Z}} (d(Q)^{\mu+1/p} \|f\|_{C(Q)})^p \leq c_4 \|f\|_{A_{p,\mu}}^p,$$

где c_3 и c_4 зависят от p, μ и постоянных c_1, c_2 из (5.1).

Доказательство основано (как и в случае леммы 10) на субгармоничности функции $|f(z)|^p$. Для круга лемма 11 получена в [17].

ЛЕММА 12. Пусть p, a и μ – положительные числа, D – открытый квадрат с вершинами в точках $0, a, ia, a + ia$ и $\Delta \subset D$ – правильный треугольник

с основанием $(0, a)$. Если функция f аналитична в D и $(\operatorname{Im} z)^{p\mu-1}|f(z)|^p$ суммируема в D , то

$$\int_{\Delta} \rho(z, \partial\Delta)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z) \leq c(p, \mu) \int_D (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\rho(z, \partial\Delta) \leq \operatorname{Im} z$ при $z \in \Delta$, то для $p\mu \geq 1$ неравенство (5.2) выполняется с $c(p, \mu) = 1$. Поэтому далее считаем, что $p\mu < 1$. Ради удобства будем рассматривать случай $a = 2$, так как общий случай сводится к указанному с помощью замены переменной интегрирования в (5.2).

Пусть z_0 – центр треугольника Δ ; Δ_0 – треугольник с вершинами в точках z_0 , 0 и 2; $\Lambda = \Delta \setminus \Delta_0$; Λ_+ и Λ_- – соответственно правая и левая половины Λ , получаемые рассечением Λ прямой $x = 1$.

Очевидно, $\rho(z, \partial\Delta) = \operatorname{Im} z$ при $z \in \Delta_0$ и, следовательно, для доказательства (5.2) нам достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\int_{\Lambda_{\pm}} \rho(z, \partial\Delta)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z) \leq c_1(p, \mu) \int_D (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z). \quad (5.3)$$

Докажем, например, (5.3) для Λ_- . Треугольник $\Lambda_- \setminus \{0\}$ представим в виде объединения замкнутых трапеций T_k , основания которых лежат на прямых $x = \frac{1}{2^{k-1}}$ и $x = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, а боковые стороны – на наклонных сторонах треугольника Λ_- . Используя тот же метод, что и при доказательстве леммы 11, несложно убедиться в справедливости неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (d(T_k))^{p\mu+1} \|f\|_{C(T_k)}^p \leq c_2(p, \mu) \int_D (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p dm_2(z). \quad (5.4)$$

Из (5.4) немедленно следует (5.3) для Λ_- . Этим лемма доказана.

5.2. Квазиконформное отражение. Здесь будем считать, что G – односвязная ограниченная область, граница которой ∂G является кривой М. А. Лаврентьева. А именно, ∂G – спрямляемая кривая Жордана и для любых точек $\xi_1, \xi_2 \in \partial G$ выполняется неравенство

$$|\Gamma(\xi_1, \xi_2)| \leq \varkappa |\xi_1 - \xi_2|, \quad (5.5)$$

где $\varkappa > 1$ – некоторая постоянная, а $|\Gamma(\xi_1, \xi_2)|$ – длина наименьшей $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ из двух дуг ∂G с концами ξ_1 и ξ_2 .

Приведем необходимые нам сведения из теории квазиконформных отображений (см. [18], [19]). Будем считать, что $0 \in G$. Через $*$ будем обозначать квазиконформную инволюцию $\mathbb{C}$, удовлетворяющую условиям: $\xi^{**} = \xi$ при всех $\xi \in \mathbb{C}$, $0^* = \infty$, $\xi^* = \xi$ при $\xi \in \partial G$. Отображение $*$ не единственно и его можно выбрать так, чтобы выполнялись условия:

- (i) для каждой окрестности $U \subset G$ точки 0 отображение $\xi \mapsto \xi^*$ квазиконформно из $\mathbb{C} \setminus (U \cup U^*)$ в себя;
- (ii) отображение $\xi \mapsto \xi^*$ непрерывно дифференцируемо в $\mathbb{C} \setminus (0 \cup \partial G)$ и для всех $\xi \in \mathbb{C} \setminus (U \cup U^* \cup \partial G)$ выполняются соотношения

$$\left| \frac{\partial \xi^*}{\partial \xi} \right| \leq c_1, \quad c_2 \leq \left| \frac{\partial \xi^*}{\partial \bar{\xi}} \right| \leq \frac{1}{c_2},$$

где c_1 и c_2 зависят лишь от $\varkappa$ из (5.5) и окрестности $U \subset G$ точки 0.

Отметим, что для любого множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ мы полагаем $D^* = \{\xi^* : \xi \in D\}$. В дальнейшем будем считать, что отображение $*$ выбрано так, что условия (i), (ii) выполняются. Например, если G – круг $|\xi| < 1$, то $\xi^* = \frac{1}{\bar{\xi}}$.

Мы будем использовать разбиение $\mathcal{X} = \{Q_k\}_{k=0}^\infty$ области G на области типа Уитни Q_k , для которого $Q_0 = \{\xi \in G : |\xi| \leq \frac{1}{2}\rho(0, \partial G)\}$. Такое разбиение легко построить, используя квадраты Уитни.

Из перечисленных свойств отображения $*$ и соотношений (5.1) следует, что последовательности $\rho(Q_k, \partial G)$, $\rho(Q_k^*, \partial G)$, $d(Q_k)$, $d(Q_k^*)$, $d_0(Q_k)$, $d_0(Q_k^*)$ при $k = 1, 2, 3, \dots$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

5.3. Интегральное представление. Здесь предполагается, что область G и отображение $*$ такие, как указано в п. 5.2. Рассмотрим замкнутые кривые $\Gamma_s = \{\xi^* : |\xi| = \frac{1}{2^{2-s}}\rho(0, \partial G)\}$, $s = 0, 1$. Через Ω_0 , Ω_1 обозначим соответственно замкнутые двусвязные области, заключенные между кривыми Γ_0 и Γ_1 , Γ_1 и ∂G . Положим $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Введем какую-либо гладкую функцию $\eta : \Omega \mapsto [0, 1]$, удовлетворяющую условиям: $\eta(\xi) = 1$ при $\xi \in \Omega_1$, $\eta(\xi) = 0$ при $\xi \in \Gamma_0$. Существование такой функции легко обосновать, используя усреднения в смысле В. А. Стеклова. Тогда образ Ω под действием отображения $\theta(\xi) := \xi^* \cdot \eta(\xi)$ совпадает с $\overline{G}$, причем $\theta(\xi) = \xi^*$ при $\xi \in \Omega_1$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть функция f аналитична в G , $f^{(s)} \in A_{1,s}(G)$, $s \in \mathbb{N}$, и

$$T_{s-1}(z) = T_{s-1}(z, f) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Тогда для $z \in G$ имеет место равенство

$$f(z) = T_{s-1}(z) - \frac{1}{\pi(s-1)!} \int_{\Omega} f^{(s)}(\theta(\xi)) (\xi - \theta(\xi))^{s-1} \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{dm_2(\xi)}{\xi - z}.$$

Эта теорема доказывается точно так же, как лемма 2.3 из [20]. Отличие заключается лишь в том, что вместо замкнутости всех алгебраических многочленов в пространстве В. И. Смирнова $E_{1/(s+1)}(G)$ следует использовать их же замкнутость в $A_{1,s}(G)$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [21] или [20]).

ЛЕММА 13. Пусть область G удовлетворяет указанным выше условиям и $\beta > 0$. Тогда для любого $\xi \in \mathbb{C} \setminus \partial G$ выполняется неравенство

$$\int_{\partial G} \frac{|dz|}{|\xi - z|^{\beta+1}} \leq \frac{c}{\rho(\xi, \partial G)^\beta},$$

где c больше нуля и зависит лишь от β и постоянной κ из условия (5.5).

5.4. Пространство В. И. Смирнова. Для спрямляемой кривой Γ в $\mathbb{C}$ и $0 < p < \infty$ через $L_p(\Gamma)$ обозначаем пространство Лебега комплексных измеримых функций f на Γ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}.$$

Пусть $G = G_+$ – односвязная ограниченная область, граница которой ∂G является спрямляемой кривой Жордана; $G_- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Для $0 < p < \infty$ через

$E_p^\pm = E_p(G_\pm)$ обозначим пространство В.И. Смирнова функций, аналитических в $G_\pm$ (определение и свойства $E_p^\pm$ см. в [22] и [23]). Если G – круг $|z| < 1$, то $E_p^\pm$ совпадает с пространством Харди $H_p^\pm$. Многие свойства пространства $H_p^\pm$ справедливы и для $E_p^\pm$. В частности, если $f \in E_p^\pm$, то для почти всех $\xi \in \partial G$ существует $\lim f(z) =: f(\xi)$, когда z принадлежит $G_\pm$ и стремится к ξ по некасательным по отношению к ∂G путям. В соответствии с этим функции из $E_p^\pm$ будем считать определенными как в $G_\pm$, так и почти всюду на ∂G . При этом квазинорма $f \in E_p^\pm$ определяется так: $\|f\|_{E_p^\pm} = \|f\|_{L_p(\partial G)}$. Отметим, что $f(\infty) = 0$ для $f \in E_p^-$.

Следующая лемма 14 является следствием теоремы Г. Давида (см., например, [21]) о сингулярном интеграле типа Коши.

ЛЕММА 14. Пусть граница ∂G области G является кривой Лаврентьева и $g \in L_u(\partial G)$, $1 < u < \infty$. Тогда существуют и единственны функции $g_\pm \in E_u(G_\pm)$ такие, что $g = g_+ + g_-$ почти всюду на ∂G и $\|g_\pm\|_{E_u^\pm} \leq c\|g\|_{L_u}$, где c больше нуля и зависит лишь от u и постоянной $\varkappa$ из (5.5).

В лемме 15 используется конструкция, описанная в п. 5.2. Эта лемма следует из леммы 2.1 работы [20] и свойств областей Q_k и Q_k^* , $k = 0, 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 15. Пусть $h \in E_u(G_-)$, $0 < u < \infty$, и

$$\delta_0 = \|h\|_{C(Q_0^*)}, \quad \delta_k = (d(Q_k^*))^{1/u} \|h\|_{C(Q_k^*)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда:

- (i) $\delta_0 \leq c_1(G, u) \|h\|_{E_u^-}$;
- (ii) последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ является бесконечно малой, и если области Q_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, перенумерованы так, что эта последовательность невозрастающая, то

$$\delta_k \leq \frac{c_2(G, u)}{k^{1/u}} \|g\|_{E_u^-}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

5.5. Теорема вложения. Сейчас все подготовлено для доказательства теоремы 10, которая применялась для доказательства теоремы 3 – одного из основных результатов статьи.

ТЕОРЕМА 10. Пусть p, q и μ – положительные числа такие, что

$$0 < p < q < \infty, \quad \mu + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} =: l \in \mathbb{N}$$

и G – односвязная ограниченная область, граница которой является кривой Лаврентьева. Если функция f аналитична в G и $f^{(l)} \in A_{p,\mu}(G)$, то $f \in E_q(G)$. Кроме того, если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(l-1)}(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in G$, то

$$\|f\|_{E_q} \leq c \|f^{(l)}\|_{A_{p,\mu}}, \quad (5.6)$$

где c больше нуля и не зависит от f .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Анализ приведенного далее доказательства теоремы 10 показывает, что если z_0 – центр наибольшего круга, вписанного в $\bar{G}$ (или один из таких центров, если их несколько), то можно считать, что постоянная в (5.6) зависит лишь от p, q, μ и постоянной $\varkappa$ из (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in G$ и $z_0 = 0$. В силу замкнутости множества всех алгебраических многочленов в E_q и $A_{p,\mu}$ нам достаточно получить неравенство (5.6) для любого алгебраического многочлена f , удовлетворяющего условиям $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(l-1)}(0) = 0$. При таком ограничении на функцию f включения $f \in E_q$ и $f^{(l)} \in A_{p,\mu}$ очевидны. Мы будем применять теорему 9 и построенные в п. 5.2 множества Q_k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим сначала случай $1 < q < \infty$. Через q' обозначим показатель, сопряженный q , т.е. $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$. В силу двойственности $(L_q(\partial G))' = L_{q'}(\partial G)$ существует функция $g \in L_{q'}(\partial G)$ такая, что $\|g\|_{L_{q'}} = 1$ и

$$\|f\|_{E_q(G)} = \|f\|_{L_q(\partial G)} = \int_{\partial G} f(z)g(z) dz. \quad (5.7)$$

Согласно лемме 14 существуют функции $g_{\pm} \in E_q(G_{\pm})$, удовлетворяющие условиям: $\|g_{\pm}\|_{E_q} \leq c_1$ и $g = g_+ + g_-$ почти всюду на ∂G . Поскольку $f g_+ \in E_1(G_+)$, то в силу обобщенной теоремы Коши (см. [22], [23]) $\int_{\partial G} f(z)g_+(z) dz = 0$. Поэтому с учетом (5.7) получим

$$\|f\|_{E_q} = \int_{\partial G} f(z)g_-(z) dz.$$

Используя последнее равенство, теорему 9 при $s = l$, теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получим

$$\|f\|_{E_q} = \frac{2i}{l!} \int_{\Omega} f^{(l)}(\theta(\xi))g_-(\xi)(\xi - \theta(\xi))^{l-1} \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial \bar{\xi}} dm_2(\xi). \quad (5.8)$$

Далее мы применим лемму 15 при $h = g_-$ и $u = q'$. Будем считать, что области $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумерованы таким образом, что соответствующая последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая. Учитывая, что равномерно по $\xi \in Q_k$ и $k = 1, 2, 3, \dots$ выполняются соотношения $|\xi - \theta(\xi)| \asymp d(Q_k) \asymp d(Q_k^*)$, из (5.8) получим

$$\|f\|_{E_q} \leq c_1(d(Q_0))^{l+1/q} \|f^{(l)}\|_{C(Q_0)} + c_2 \sum_{k=1}^{\infty} (d(Q_k))^{l+1/q} \|f^{(l)}\|_{C(Q_k)} \cdot k^{-1/q'}.$$

Заметим, что согласно условию $l + \frac{1}{q} = \mu + \frac{1}{p}$ и согласно лемме 10 первое слагаемое из правой части последнего неравенства не превышает $c_3 \|f^{(l)}\|_{A_{p,\mu}}$. Поэтому для завершения рассматриваемого случая $1 < q < \infty$ нам достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (d(Q_k))^{\mu+1/p} \|f^{(l)}\|_{C(Q_k)} \cdot k^{-1/q'} \leq c_4 \|f^{(l)}\|_{A_{p,\mu}}. \quad (5.9)$$

В случае $0 < p \leq 1 < q < \infty$ это неравенство следует из лемм 2 и 11. Если же $1 < p < q < \infty$, то к левой части (5.9) необходимо применить неравенство Гёльдера с показателями p и p' , $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, и снова воспользоваться леммой 11.

Рассмотрим сейчас случай $0 < q \leq 1$. Положим $\nu = [\frac{1}{q}] + 1$. Тогда для $z \in \overline{G}$ справедливо равенство

$$f(z) = -\frac{\nu!}{\pi(l + \nu - 1)!} \int_{\Omega} f^{(l)}(\theta(\xi))(\xi - \theta(\xi))^{l+\nu-1} \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{dm_2(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}. \quad (5.10)$$

Для получения (5.10) при $z \in G$ нужно применить теорему 9 к $f^{(-\nu)}$ (т.е. к ν -й первообразной функции f) и $s = l + \nu$, затем полученное интегральное представление для $f^{(-\nu)}$ продифференцировать ν раз. Тогда справедливость равенства (5.6) для $z \in \overline{G}$ следует из непрерывности f в $\overline{G}$ и равномерной ограниченности по $z \in G$ и $\xi \in \Omega$ подынтегральной функции из правой части (5.10).

Выберем какие-либо точки $\xi_0 \in \Omega_0$ и $\xi_k \in Q_k^*$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда из (5.10) получим, что при $z \in \overline{G}$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq c_5 \sum_{k=0}^{\infty} (d(Q_k))^{l+\nu+1} \|f^{(l)}\|_{C(Q_k)} \cdot \frac{1}{|\xi_k - z|^{\nu+1}}. \quad (5.11)$$

Согласно построению множеств Q_k и выбору точек ξ_k имеем $d(Q_k) \asymp \rho(\xi_k, \partial G)$ при $k = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому, учитывая, что $0 < q \leq 1$, $q(\nu + 1) > 1$, и используя (5.11) и лемму 13, получим

$$\int_{\partial G} |f(z)|^q |dz| \leq c_6 \sum_{k=0}^{\infty} ((d(Q_k))^{l+1/q} \|f^{(l)}\|_{C(Q_k)})^q. \quad (5.12)$$

Поскольку $0 < p < q$, то, используя леммы 2 и 11, из (5.12) получаем (5.6). Теорема 10 полностью доказана.

Список литературы

- [1] R. Rochberg, “Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications”, *Operators and function theory* (Lancaster, 1984), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **153**, Reidel, Dordrecht, 1985, 225–277.
- [2] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Grad. Texts in Math., **226**, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [3] А. А. Пекарский, “Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p ”, *Матем. сб.*, **127(169)**:1(5) (1985), 3–20; англ. пер.: А. А. Pekarskii, “Classes of analytic functions determined by best rational approximations in H_p ”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:1 (1986), 1–18.
- [4] R. R. Coifman, R. Rochberg, “Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p ”, *Representation theorems for Hardy spaces*, Astérisque, **77**, Soc. Math. France, Paris, 1989, 11–66.
- [5] Е. Dyn’kin, “Rational functions in Bergman spaces”, *Complex analysis, operators, and related topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **113**, Birkhäuser, Basel, 2000, 77–94.
- [6] В. Р. Мисюк, “Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры”, *Тр. ИМ НАН Беларуси*, **9** (2001), 105–108.
- [7] Т. С. Мардвилко, “Неравенство для квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер и его приложения”, *Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, **1** (2010), 41–48.
- [8] А. А. Пекарский, Г. Шталь, “Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций в пространствах L_p при $p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **186**:1 (1995), 119–130; англ. пер.: А. А. Pekarskii, H. Stahl, “Bernstein type inequalities for derivatives of rational functions in L_p spaces for $p < 1$ ”, *Sb. Math.*, **186**:1 (1995), 121–131.
- [9] Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский, “Рациональная аппроксимация в пространстве Бергмана в полуплоскости”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 15-й Саратовской зимней школы, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 2010, 113–115.

- [10] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [11] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
- [12] Н. Hedenmalm, В. Korenblum, К. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] А. А. Пекарский, “Обобщенная рациональная аппроксимация в круге”, *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, **6** (1990), 9–14.
- [14] А. А. Pekarskii, “Approximation by rational functions with free poles”, *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 227–319; “Corrigendum”, *East J. Approx.*, **13**:4 (2007), 483.
- [15] J. E. Brennan, “Point evaluations, invariant subspaces and approximation in the mean by polynomials”, *J. Funct. Anal.*, **34**:3 (1979), 407–420.
- [16] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: Е. М. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [17] Ф. А. Шамоян, “Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < \infty$ ”, *Матем. сб.*, **107**(149):3(11) (1978), 446–462; англ. пер.: F. A. Šamojan, “Embedding theorems and a characterization of traces in the spaces $H^p(U^n)$, $0 < p < \infty$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **35**:5 (1979), 709–725.
- [18] Л. В. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Toronto, ON–New York–London, 1966.
- [19] В. И. Белый, “Современные методы геометрической теории функции комплексного переменного в задачах аппроксимации”, *Алгебра и анализ*, **9**:3 (1997), 3–40; англ. пер.: V. I. Belyi, “Modern methods of the geometric theory of functions of a complex variable in approximation problems”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:3 (1998), 421–453.
- [20] А. А. Пекарский, “Рациональные приближения функций с производными из пространства В. И. Смирнова”, *Алгебра и анализ*, **13**:2 (2001), 165–190; англ. пер.: А. А. Pekarskii, “Rational approximation of functions with derivatives in a V. I. Smirnov space”, *St. Petersburg Math. J.*, **13**:2 (2002), 281–300.
- [21] G. David, “Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **17**:1 (1984), 157–189.
- [22] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [23] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York–London, 1970.

Т. С. Мардвилко (Т. S. Mardvilko)

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: mardvilko@mail.ru

Поступила в редакцию

17.05.2010

А. А. Пекарский (А. А. Pekarskii)

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: pekarskii@gmail.com