Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, О граничных значениях производной Шварца регулярной функции, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 5, 29–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:38:01

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

О граничных значениях производной Шварца регулярной функции

Рассматриваются регулярные в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функции f , удовлетворяющие асимптотическому разложению $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \gamma(z)z^3$, где $c_1 > 0$, $\text{Im } c_2 = 0$ и угловой предел $\angle \lim_{z \rightarrow 0} \gamma(z) = 0$. При различных ограничениях на функцию f устанавливаются неравенства для вещественной части производной Шварца $S_f(0) = 6(c_3/c_1 - c_2^2/c_1^2)$, дополняющие и уточняющие некоторые граничные версии леммы Шварца. Полученные результаты примыкают к известной теореме Бёрнса–Кранца о “жесткости” регулярных отображений и ее обобщениям, данным Таура-со, Влаччи и Шойхетом.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: производная Шварца, лемма Шварца, регулярная функция.

§ 1. Введение и формулировки основных утверждений

Пусть функция f регулярна в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и для некоторой конечной точки $z_0 \in \overline{D}$ справедливо разложение

$$f(z) = w_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \angle o((z - z_0)^3), \quad (1)$$

где $c_1 \neq 0$ и $\angle o((z - z_0)^3)$ означает бесконечно малую величину по сравнению с функцией $(z - z_0)^3$ при $z \rightarrow z_0$ в любом угле Штольца с вершиной в z_0 , лежащем в области D . Под производной Шварца (шварцианом) функции f в точке z_0 понимается величина

$$S_f(z_0) = 6 \left(\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right).$$

Если точка z_0 принадлежит области D , то справедлива формула

$$S_f(z_0) = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^2.$$

Шварциан $S_f(z_0)$, $z_0 \in \partial D$, естественным образом возникает при изучении граничных версий леммы Шварца. Действительно, пусть $D = U := \{z : |z| < 1\}$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00038) и ДВО РАН (грант № 09-П-СО-01-003).

функция f отображает круг U в себя и в разложении (1) $z_0 = w_0 = 1$. Согласно инвариантной форме леммы Шварца

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1 - |f(z)|^2 \quad (2)$$

для любых точек z круга U . Если теперь

$$2 \operatorname{Re} c_2 = c_1(c_1 - 1), \quad (3)$$

то, переходя в неравенстве (2) к пределу при $z \rightarrow 1$ вдоль отрезка вещественной оси, получаем

$$\operatorname{Re} S_f(1) \leq 0 \quad (4)$$

(см. концовку доказательства леммы из работы [1]). С другими версиями граничной леммы Шварца (не содержащими $S_f(1)$) можно ознакомиться, например, в работах [1]–[3], а в полном объеме – в недавних обзорах [4] и [5]. Важным толчком в исследовании данной тематики послужила замечательная теорема Бёрнса–Кранца (см. [6]) о единственности экстремальной функции в граничной лемме Шварца (о жесткости голоморфного отображения; см. [5]). Одно из обобщений этой теоремы означает, что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию f , включающих равенство (3), знак равенства в (4) имеет место только для автоморфизмов круга U (см. [7], [8]). Что касается самого неравенства (4), то оно и его обобщения встречаются в работах [7]–[9] и [10; с. 67] при различных ограничениях на f , “близких” к равенству (3). Особенно отметим интересную статью [8], в которой применяется теория однопараметрических непрерывных полугрупп. В настоящей работе неравенство (4) дополняется в различных направлениях. Кроме того, мы рассматриваем условия, при которых имеет место противоположное неравенство. Наиболее подходящей канонической областью в данной проблеме является, по-видимому, полуплоскость. Поэтому основные утверждения мы приводим для функций (1) с нормировкой $w_0 = z_0 = 0$, заданных в полуплоскости $H := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f регулярна в полуплоскости H , $f(H) \subset H$ и справедливо асимптотическое разложение

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^3), \quad z \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\operatorname{Im} c_2 = 0$. Тогда $\operatorname{Im} S_f(0) = 0$ и

$$\operatorname{Re} S_f(0) \geq 0, \quad (6)$$

причем равенство в (6) достигается только для функций $f(z) = cz/(1 + dz)$, где c – положительная, а d – произвольная вещественная постоянная. Кроме того, для любой точки $z \in H$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{6} S_f(0) \operatorname{Im} \frac{c_1 z f(z)}{c_1 f(z) - c_1^2 z - c_2 z f(z)} \leq \operatorname{Im} \frac{1}{z}. \quad (7)$$

Если дополнительно $S_f(0) \neq 0$, то равенство в (7) в какой-либо точке $z \in H$ влечет за собой равенство во всех точках $z \in H$ и выполняется в том и только том случае, когда

$$f(z) = \frac{c^2 z(abz - 1)}{(bc^2 - abd)z^2 + (abc + d)z - c}, \quad (8)$$

где c, b – положительные, а a и d – произвольные вещественные постоянные.

Можно показать, что неравенство (6) равносильно неравенству (4), а утверждение о равенстве в (6) совпадает по существу с упомянутой выше теоремой Бёрнса–Кранца (при замене углового предела на обычный). Оба факта приводятся здесь лишь для полноты изложения. Что касается теоремы 1 в целом, то она, по-видимому, может быть получена также методом (см. [8]), применимым к подходящей суперпозиции функций. В любом случае новизна состоит в прозрачности постановки вопроса и простоте доказательств (ср. теоремы 2, 4 и 7 из статьи [8]). Неравенство (7) является новой версией граничной леммы Шварца. Из доказательства теоремы 1 видно, что мнимые части в (7) неположительные. Следовательно, неравенство (7) дополняет (6) с учетом значений функции f в полуплоскости H .

Равенство нулю мнимой части коэффициента при z^2 в разложении (5) существенно даже в случае, когда функция f является однолистной. Действительно, функция

$$f(z) = \left[\frac{1}{z} - ih + \frac{h}{\pi} \log \frac{1-bz}{1+bz} \right]^{-1} = z + ihz^2 + \left(\frac{2bh}{\pi} - h^2 \right) z^3 + \dots$$

конформно и однолистно отображает полуплоскость H_z на полуплоскость H_w с разрезом вдоль дуги окружности

$$\left| w - \frac{i}{2h} \right| = \frac{1}{2h},$$

примыкающей к началу координат. Здесь h – произвольное положительное число, а b – некоторое отрицательное число, так что $S_f(0) < 0$.

На практике полезно знать геометрический смысл условия $\text{Im } c_2 = 0$, а также вид неравенства (6) в общем (не каноническом) случае. Рассмотрим односвязную область $D \subset \mathbb{C}_\zeta$ гиперболического типа и достижимую граничную точку ζ_0 этой области. Предположим, что конформное и однолистное отображение $G: H \rightarrow D$ удовлетворяет разложению вида

$$G(z) = \zeta_0 + \tau z + \frac{i\tau k}{2} z^2 - \left(\frac{\tau^3 S}{6} + \frac{\tau k^2}{4} \right) z^3 + o(z^3), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in H. \quad (9)$$

Можно считать, что $|\tau| = 1$ и $\text{Im } k = 0$. Числа τ, k и S являются характеристиками области D . Пусть D имеет на своей границе достаточно гладкую жорданову дугу γ , ни одна точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ , и пусть $\zeta_0 \in \gamma$. Тогда радиус-вектор τ направлен

вдоль касательной к кривой γ в точке ζ_0 , кривизна $k_\gamma(\zeta_0)$ (со знаком) кривой γ в точке ζ_0 равна

$$\operatorname{Im} \frac{G''(0)}{G'(0)|G'(0)|} = k,$$

а скорость изменения кривизны в точке ζ_0 равна

$$\frac{dk_\gamma(\zeta_0)}{dx} = \frac{\operatorname{Im} S_G(0)}{|G'(0)|} = \operatorname{Im} S_G(0) = -\operatorname{Im} \tau^2 S.$$

Если теперь области D_j , кривые γ_j , точки ζ_{0j} и функции G_j (с характеристиками τ_j, k_j и S_j), $j = 1, 2$, определены выше и функция $F: D_1 \rightarrow D_2$ регулярна в D_1 , причем

$$F(\zeta) = \zeta_{02} + a_1(\zeta - \zeta_{01}) + a_2(\zeta - \zeta_{01})^2 + a_3(\zeta - \zeta_{01})^3 + \angle o((\zeta - \zeta_{01})^3),$$

$\zeta \rightarrow \zeta_{01}$, $a_1 \neq 0$, то суперпозиция

$$f = G_2^{-1} \circ F \circ G_1$$

регулярна в полуплоскости H , $f(H) \subset H$ и для нее справедливо разложение (5), где

$$c_1 = a_1 \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (c_1 > 0), \quad c_2 = a_1 \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(\frac{ik_1}{2} + \tau_1 \frac{a_2}{a_1} - \frac{ik_2}{2} \frac{\tau_1}{\tau_2} a_1 \right). \quad (10)$$

Условие $\operatorname{Im} c_2 = 0$, т.е.

$$k_2 = \frac{k_1}{|a_1|} + \operatorname{Im} \frac{2a_2\tau_1}{a_1|a_1||\tau_1|},$$

в случае гладкости F на γ_1 означает, что кривизна кривой γ_2 в точке ζ_{02} совпадает с кривизной образа кривой γ_1 при отображении F в этой точке (ср. (3)). Неравенство (6) для суперпозиции f дает

$$\operatorname{Re} \tau_1^2 S_F(\zeta_{01}) \geq \operatorname{Re}(S_2 - S_1). \quad (11)$$

Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 1 для некоторых различных точек z_k вещественной оси справедливы разложения

$$f(z) = d_k(z - z_k) + \angle o(z - z_k), \quad z \rightarrow z_k, \quad (12)$$

$d_k > 0$, $z_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Тогда теорема 1 допускает уточнение с помощью следующего утверждения.

ЛЕММА 1. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1 и выполняются разложения (12), то функция*

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \left\{ \frac{1}{f(z)} - \sum_{k=1}^n \frac{z}{d_k z_k (z - z_k)} \right\}^{-1} \\ &= c_1 z + c_2 z^2 + \left(c_3 - \sum_{k=1}^n \frac{c_1^2}{d_k z_k^2} \right) z^3 + \angle o(z^3), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

также удовлетворяет условиям этой теоремы.

Неравенство (6) для функции f_n дает

$$\operatorname{Re} S_f(0) \geq 6 \sum_{k=1}^n \frac{c_1}{d_k z_k^2}$$

с равенством только для функции

$$f(z) = \left\{ \frac{1}{cz} + d + \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k(z - z_k)} \right\}^{-1},$$

где c – положительная, а d – произвольная вещественная постоянные. Кроме того, из (7) вытекает новое точное неравенство

$$\left[\frac{1}{6} S_f(0) - \sum_{k=1}^n \frac{c_1}{d_k z_k^2} \right] \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{f(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{c_1 z}{d_k z_k(z - z_k)} \right\}^{-1} \leq \operatorname{Im} \frac{1}{z}.$$

Естественно поставить вопрос: как сильно может быть ослаблено ограничение $f(H) \subset H$ в теореме 1, чтобы неравенство (6) по-прежнему имело место? Ответ общего характера дает

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функция f регулярна в полуплоскости H и выполняется асимптотическое разложение (5) с коэффициентами $c_1 > 0$, $\operatorname{Im} c_2 = 0$, а также разложения (12) для некоторых различных точек $z_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, на вещественной оси (последнее множество может быть пустым). Пусть Φ – преобразование области $f(H)$ в область $\Phi f(H)$, удовлетворяющее условию*

$$r(f(H), it) \leq r(\Phi f(H), it) \quad (13)$$

для достаточно малых $t > 0$, и пусть Ψ – регулярная функция, $\Psi: \Phi f(H) \rightarrow H$, для которой

$$\Psi(w) = w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + o(w^3), \quad w \rightarrow 0,$$

где $\operatorname{Im} b_2 = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}[S_f(0) + c_1^2 S_\Psi(0)] \geq 6 \sum_{k=1}^n \frac{c_1}{d_k z_k^2} \quad (14)$$

(если множество точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ пусто, то под суммой справа понимается ноль).

Обозначение $r(D, a)$ в (13) принято для внутреннего радиуса области D относительно точки a (см. § 2). Хорошо известно, что неравенству (13) удовлетворяют многие симметризационные преобразования Φ (см. [11]). Некоторые частные случаи неравенства (14) при выборе конкретных Φ и Ψ будут рассмотрены в § 3. Заметим, что если множество $\{z_k\}_{k=1}^n$ не пусто, то сумма справа положительная. Кроме того, если $\Phi f(H) \subset H$ и функция Ψ однолистно отображает $\Phi f(H)$ на H , то из теоремы 1, примененной к функции Ψ^{-1} , следует

$$S_\Psi(0) \leq 0,$$

что также дает усиление (6). Доказательства теоремы 2 и следующей ниже теоремы 3 основаны на принципах мажорации для регулярных функций, предложенных И. П. Митюком (см. [12], [13], а также [14]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция f регулярна в полуплоскости H и удовлетворяет условию $f(\partial H) \cap H = \emptyset$ (т.е. при стремлении точки z к границе области H все предельные значения функции $f(z)$ лежат в дополнении H). Пусть выполняются асимптотическое разложение (5) с $c_1 > 0$, $\text{Im } c_2 = 0$, а также разложения (12) для некоторых различных точек $z_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, на вещественной оси (последнее множество может быть пустым). Предположим, что при достаточно малых $t > 0$ число прообразов точки it при отображении f не превышает $n + 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\text{Re } S_f(0) \leq 6 \sum_{k=1}^n \frac{c_1}{d_k z_k^2}$$

(если множество точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ пусто, то под суммой справа понимается ноль).

§ 2. Доказательства

Нам понадобится следующий “принцип минимума”, имеющий самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2. Пусть функция v гармоническая в полуплоскости H и выполняются условия:

- (i) $\lim_{z \rightarrow \zeta} v(z) \geq 0$ для всех ζ , лежащих на границе $\partial_{\overline{C}} H$, за исключением, может быть, некоторой конечной точки z_0 ;
- (ii) существуют окрестность точки z_0 и вещественное число c такие, что

$$v(z) \geq \frac{c}{|z - z_0|}$$

для всех z из полуплоскости H , лежащих в указанной окрестности;

(iii)

$$v(z) = \angle o \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right) \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Тогда $v \geq 0$ в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $z_0 = 0$. Для заданных $r > 0$ и θ , $0 < \theta < \pi/2$, введем обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, \theta) &= \{z : |z| = r, 0 \leq \arg z \leq \theta \text{ либо } \pi - \theta \leq \arg z \leq \pi\}, \\ \gamma_2(r, \theta) &= \{z : |z| = r, \theta \leq \arg z \leq \pi - \theta\}, \\ D_r &= \{z : |z| > r, \text{Im } z > 0\}. \end{aligned}$$

Пусть $\omega(z, \gamma, D)$ означает гармоническую меру множества γ относительно области D в точке z (см. [15; гл. VI]). Из конформной инвариантности гармонической меры и хорошо известных свойств гармонической меры отрезка

относительно полуплоскости получаем для любой точки $z = x + iy \in H$ при достаточно малых r следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\omega(z, \gamma_1(r, \theta), D_r) &= \omega\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} + \frac{r}{z}\right), [-1, -\cos \theta], H\right) + \omega\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} + \frac{r}{z}\right), [\cos \theta, 1], H\right) \\ &\leq 2\omega\left(i \operatorname{Im} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} + \frac{r}{z}\right), \left[-\frac{1 - \cos \theta}{2}, \frac{1 - \cos \theta}{2}\right], H\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\frac{y}{2r} + O(r)} = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{2r}{y} \sin^2 \frac{\theta}{2} + O(r^3) \right\}, \quad r \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\omega(z, \gamma_2(r, \theta), D_r) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2r}{y} \cos \theta + O(r^3) \right\}, \quad r \rightarrow 0.$$

В силу условия (ii) леммы 2 существует вещественная константа c такая, что на дугах $\gamma_1(r, \theta)$ при достаточно малом r выполняется

$$v(z) \geq \frac{c}{r}.$$

Из условия (iii) имеем

$$M(r) := \max\{|v(z)| : z \in \gamma_2(r, \theta)\} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

при фиксированном θ и $r \rightarrow 0$. Следовательно, по принципу минимума с учетом условия (i) получаем

$$v(z) \geq \frac{c}{r} \omega(z, \gamma_1(r, \theta), D_r) - M(r) \omega(z, \gamma_2(r, \theta), D_r) \geq \frac{8c}{\pi y} \sin^2 \frac{\theta}{2} + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу по $r \rightarrow 0$, а затем по $\theta \rightarrow 0$, приходим к требуемому неравенству. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Применяя лемму 2 к функции

$$v_1(z) = \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{f(z)} + \frac{z}{d_1 z_1 (z - z_1)} \right]$$

и точке $z_0 = z_1$, заключаем, что $v_1(z) \geq 0$ в полуплоскости H . Затем применяем эту лемму к функции

$$v_2(z) = v_1(z) + \operatorname{Im} \frac{z}{d_2 z_2 (z - z_2)}$$

и точке $z_0 = z_2$, и т.д. В итоге получаем, что

$$\operatorname{Im} \left[-\frac{1}{f(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{z}{d_k z_k (z - z_k)} \right] \geq 0 \quad \text{в } H.$$

Отсюда $\operatorname{Im} f_n(z) \geq 0$. Остальные условия теоремы 1 легко проверяются. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу включения $f(H) \subset H$ и разложения (5) коэффициент c_1 больше нуля. Функция

$$g(z) = -\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{c_1 z} - \frac{c_2}{c_1^2}$$

регулярна в полуплоскости H , причем имеет место разложение

$$g(z) = bz + \angle o(z), \quad z \rightarrow 0,$$

где $b = S_f(0)/(6c_1)$. Мнимая часть этой функции $v_1(z) = \operatorname{Im} g(z)$, гармоническая в H и во всех точках вещественной оси, включая бесконечно удаленную точку, имеет неотрицательные предельные граничные значения. По принципу минимума $v_1(z) \geq 0$ в H , т.е. $g: H \rightarrow H$. Следовательно, $\operatorname{Im} b = 0$ и $\operatorname{Re} b \geq 0$. В случае $\operatorname{Re} b = 0$, применяя теорему Гарнака¹ к функции $v_1(z)$ в круге $|z - i| < 1$, заключаем, что $v_1(z) \equiv 0$ в H . Отсюда $g(z) \equiv 0$ и

$$f(z) = \frac{cz}{1 - dz},$$

где c – некоторая положительная, а d – произвольная вещественная постоянные. Нетрудно видеть, что любая такая функция f отображает H в H и $S_f(0) = 0$.

Пусть теперь $S_f(0) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$h(z) = -\frac{1}{g(z)} + \frac{1}{bz},$$

регулярную в полуплоскости H и удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$h(z) = \angle o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow 0,$$

где $g(z)$ и b определены выше. Учитывая доказанное ранее, приходим к выводу, что мнимая часть $v_2(z) = \operatorname{Im} h(z)$ во всех точках вещественной оси, включая $z = \infty$, но, возможно, исключая $z = 0$, имеет неотрицательные предельные граничные значения. Применяя лемму 2, получаем

$$v_2(z) \geq 0 \quad \text{в } H,$$

причем равенство в какой-либо точке $z \in H$ влечет за собой равенство во всех точках полуплоскости H . Выписанное неравенство равносильно (7). Если в (7) имеет место знак равенства, то

$$h(z) = -\frac{1}{g(z)} + \frac{1}{bz} \equiv a,$$

где a – вещественная постоянная. Отсюда

$$-\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{c_1 z} - \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{bz}{1 - abz}, \quad (15)$$

¹Идея применить в доказательстве единственности теорему Гарнака восходит к Боасу (см. [4]). Первоначально в данной проблеме применялась лемма Хопфа (см. [5] и [6]).

и мы имеем представление (8) при $c = c_1$ и $d = c_2$. Наоборот, если функция f определена равенством (8), то выполняется (15). Отсюда следует, что f регулярно отображает H в себя и в неравенстве (7) имеет место знак равенства для любых $z \in H$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Обозначим через $g_D(z, a)$ функцию Грина области D с полюсом в точке a (см. [15]). Внутренний радиус $r(D, a)$ области D относительно конечной точки a определяется соотношением

$$g_D(z, a) = -\log |z - a| + \log r(D, a) + o(1), \quad z \rightarrow a.$$

Неравенство (13) предполагает, что при достаточно малом $t > 0$ точка it принадлежит областям $f(H)$ и $\Phi f(H)$. Обозначим через $z_0(t)$ и $z_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, точки полуплоскости H , лежащие в окрестностях соответственно точек $z = 0$ и $z = z_k$ и удовлетворяющие равенствам

$$f(z_0(t)) = it, \quad f(z_k(t)) = it,$$

так что

$$\begin{aligned} z_0(t) &= \frac{1}{c_1}(it) - \frac{c_2}{c_1^3}(it)^2 + \left(2\frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4}\right)(it)^3 + o(t^3), \quad t \rightarrow 0, \\ z_k(t) &= z_k + \frac{1}{d_k}(it) + A_k(t), \end{aligned}$$

где $A_k(t) = o(t)$, $t \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, n$.

Неравенство И. П. Митюка (см. [12]) дает

$$r(f(H), it) \geq |f'(z_0(t))| r(H, z_0(t)) \exp \sum_{k=1}^n g_H(z_0(t), z_k(t)). \quad (16)$$

Применяя неравенство (13) и вновь неравенство И. П. Митюка (в этом частном случае оно восходит к Хейману; см. [16; с. 124]), имеем

$$\begin{aligned} r(f(H), it) &\leq r(\Phi f(H), it) \leq r(H, \Psi(it)) |\Psi'(it)|^{-1} \\ &= \frac{2 \operatorname{Im}(it - b_2 t^2 - i b_3 t^3 + o(t^3))}{|1 + 2b_2 it - 3b_3 t^2 + o(t^2)|} = 2t [1 + 2(\operatorname{Re} b_3 - b_2^2) t^2 + o(t^2)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Правая часть неравенства (16) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{r(H, z_0(t))}{|(f^{-1})'(it)|} \exp \sum_{k=1}^n \log \left| \frac{z_k(t) - \overline{z_0(t)}}{z_k(t) - z_0(t)} \right| \\ &= \frac{2 \operatorname{Im} \left[\frac{i}{c_1} t + \frac{c_2}{c_1^3} t^2 - \left(2\frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4} \right) it^3 + o(t^3) \right]}{\left| \frac{1}{c_1} - 2\frac{c_2}{c_1^3} it - 3 \left(2\frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4} \right) t^2 + o(t^2) \right|} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^n \left| \frac{z_k + \frac{i}{d_k} t + A_k(t) + \frac{i}{c_1} t - \frac{c_2}{c_1^3} t^2 + o(t^2)}{z_k + \frac{i}{d_k} t + A_k(t) - \frac{i}{c_1} t - \frac{c_2}{c_1^3} t^2 + o(t^2)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\left[\frac{1}{c_1}t + \left(-2\frac{c_2^2}{c_1^3} + \frac{\operatorname{Re} c_3}{c_1^4}\right)t^3 + o(t^3)\right]}{\frac{1}{c_1}\left\{\left[1 + 3\left(-2\frac{c_2^2}{c_1^3} + \frac{\operatorname{Re} c_3}{c_1^4}\right)t^2 + o(t^2)\right]^2 + 4\frac{c_2^2}{c_1^4}t^2 + o(t^2)\right\}^{1/2}} \\
&\quad \times \prod_{k=1}^n \left|1 + \frac{2}{c_1 d_k z_k^2}t^2 - \frac{2}{c_1^2 z_k^2}t^2 + \frac{2i}{c_1 z_k}t + o(t^2)\right| \\
&= 2t \left[1 + 2\left(\frac{c_2^2}{c_1^4} - \frac{\operatorname{Re} c_3}{c_1^3}\right)t^2 + o(t^2)\right] \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{2}{c_1 d_k z_k^2}t^2 + o(t^2)\right] \\
&= 2t \left[1 + 2\left(\frac{c_2^2}{c_1^4} - \frac{\operatorname{Re} c_3}{c_1^3} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_1 d_k z_k^2}\right)t^2 + o(t^2)\right].
\end{aligned}$$

Сравнивая полученную асимптотику с (16) и (17), приходим к неравенству (14). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Отличие состоит в том, что вместо неравенства (16) необходимо использовать другое неравенство И. П. Митюка

$$2t = r(H, it) \leq |f'(z_0(t))| r(H, z_0(t)) \exp \sum_{k=1}^n g_H(z_0(t), z_k(t))$$

(см. [13], а также [14]).

§ 3. Примеры

Ниже рассматриваются следствия теорем 1–3 в виде новых утверждений либо утверждений, полученных ранее другими авторами. Обозначим через U единичный круг $|\zeta| < 1$. Для данных σ , $|\sigma| = 1$, и $R > 0$ орицикл $D(\sigma, R)$ с центром в точке σ и гиперболическим радиусом R определяется аналитически как

$$D(\sigma, R) := \left\{ \zeta \in U : \frac{|\sigma - \zeta|^2}{1 - |\zeta|^2} < R \right\} = \left\{ \zeta : \left| \zeta - \frac{\sigma}{1 + R} \right| < \frac{R}{1 + R} \right\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [8; теорема 2]). Пусть функция F регулярна в круге U , $F(U) \subset U$ и справедливо разложение

$$F(\zeta) = 1 + a_1(\zeta - 1) + a_2(\zeta - 1)^2 + a_3(\zeta - 1)^3 + \mathcal{O}((\zeta - 1)^3), \quad \zeta \rightarrow 1. \quad (18)$$

Тогда:

- (А) $\operatorname{Re} a \geq 0$, где $a := (2a_2 + a_1(1 - a_1))/a_1^2$;
- (В) F является дробно-линейной функцией в U тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:
 - (i) $F(U) \subset D(1, 1/\operatorname{Re} a)$,
 - (ii) $S_F(1) = 0$.

Более того, если имеет место (ii), то F является автоморфизмом круга U в том и только том случае, когда $\operatorname{Re} a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дробно-линейная функция

$$G_1(z) = \frac{2i - z}{2i + z} = 1 + iz - \frac{1}{2}z^2 + \dots$$

конформно и однолистно отображает полуплоскость H на круг U . Рассмотрим суперпозицию

$$f(z) = G_1^{-1} \circ F \circ G_1(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^3), \quad z \rightarrow 0.$$

В силу (10)

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = \frac{i(2a_2 + a_1(1 - a_1))}{2} = \frac{iaa_1^2}{2}.$$

Неравенство $\operatorname{Re} a \geq 0$ равносильно неравенству $\operatorname{Im} c_2 \geq 0$, которое является следствием включения $f(H) \subset H$. Действительно, по принципу минимума для гармонических функций

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{c_1 z} \right) \geq 0 \quad \text{в } H.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} \frac{c_2}{c_1^2} = \angle \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{c_1 z} \right) \geq 0,$$

и утверждение (A) доказано. Пусть теперь выполняется (ii). Тогда

$$S_f(0) = 0.$$

Если при этом $\operatorname{Re} a = 0$ (т.е. $\operatorname{Im} c_2 = 0$), то по теореме 1 f есть автоморфизм H , а F – автоморфизм круга U . Наоборот, если F – автоморфизм U (f – автоморфизм H), то f сохраняет вещественную ось. Следовательно, $\operatorname{Im} c_2 = 0$ и $\operatorname{Re} a = 0$. Заключительная часть утверждения 1 доказана. Для доказательства (B) рассмотрим суперпозицию

$$\tilde{f}(z) = G_2^{-1} \circ F \circ G_1(z) = \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_2 z^2 + \tilde{c}_3 z^3 + \mathcal{O}(z^3), \quad z \rightarrow 0,$$

где G_2 является дробно-линейным отображением полуплоскости H на орицикл $D(1, 1/\operatorname{Re} a)$:

$$G_2(z) = G_1(z) \frac{1}{1 + \operatorname{Re} a} + \frac{\operatorname{Re} a}{1 + \operatorname{Re} a} = 1 + \frac{i}{1 + \operatorname{Re} a} z - \frac{1}{2(1 + \operatorname{Re} a)} z^2 + \dots$$

Соотношение (10) (либо прямой счет) дает

$$\operatorname{Im} \tilde{c}_2 = \operatorname{Im} a_1 \left(\frac{i}{2} + \frac{ia_2}{a_1} - \frac{i}{2} \operatorname{Re} \frac{2a_2 + a_1}{a_1^2} a_1 \right) = 0.$$

Если выполняются условия (i) и (ii), то $S_{\tilde{f}}(0) = 0$, и по теореме 1 получаем $\tilde{f}(z) = cz/(1 + dz)$, где c – положительная, а d – произвольная вещественная постоянные. Следовательно, F – дробно-линейная функция. Наоборот, если

F – дробно-линейная функция, $F(1) = 1$, то $S_F(1) = 0$ и образ круга U есть орицикл, касательный к U в точке $\zeta = 1$. Граница $F(U)$ имеет кривизну

$$\frac{1}{a_1} + \operatorname{Im} \frac{2a_2 i}{a_1^2} = 1 + \operatorname{Re} a.$$

Следовательно, $F(U) = D(1, 1/\operatorname{Re} a)$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (ср. [7; теорема 2.6]). Пусть функция F регулярна в круге U и выполняется асимптотическое разложение (18), а также разложения

$$F(\zeta) = 1 + \overline{\sigma_k} \beta_k (\zeta - \sigma_k) + \angle o(\zeta - \sigma_k), \quad \zeta \rightarrow \sigma_k, \quad (19)$$

для некоторых различных точек $\sigma_k \neq 1$ на окружности ∂U , $0 < \beta_k < \infty$, $k = 1, \dots, n$ (последнее множество может быть пустым). Предположим, что $F(U) \subset D(1, 1/\operatorname{Re} a)$, где $a = (2a_2 + a_1(1 - a_1))/a_1^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S_F(1) &= 0, \\ \operatorname{Re} S_F(1) &\leq -6 \sum_{k=1}^n \frac{a_1}{\beta_k |\sigma_k - 1|^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство в (20) имеет место только для функций вида $F = G_2 \circ f \circ G_1^{-1}$, где G_1 и G_2 определены при доказательстве утверждения 1, а

$$f(z) = \left\{ \frac{1}{cd} + d + \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k(z - z_k)} \right\}^{-1}, \quad (21)$$

$$z_k = G_1^{-1}(\sigma_k), \quad d_k = \frac{1}{4} \overline{\sigma_k} \beta_k (1 + \operatorname{Re} a)(1 + \sigma_k)^2 > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (22)$$

c – положительная, а d – произвольная вещественная постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\tilde{f}(z)$ из доказательства утверждения 1 удовлетворяет условиям теоремы 1. Кроме того, в силу (19) справедливы разложения

$$\tilde{f}(z) = d_k(z - z_k) + \angle o(z - z_k), \quad z \rightarrow z_k,$$

где d_k и z_k определены равенствами (22), $k = 1, \dots, n$. Применяя лемму 1 и теорему 1, приходим к выводу, что $\operatorname{Im} S_{\tilde{f}}(0) = 0$ и

$$\operatorname{Re} S_{\tilde{f}}(0) \geq 6 \sum_{k=1}^n \frac{a_1}{\beta_k |\sigma_k - 1|^2},$$

причем знак равенства достигается только в случае, когда $\tilde{f}$ тождественно совпадает с функцией (21). Отсюда вытекают соотношения (20) с соответствующим утверждением о знаке равенства.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть функция F регулярна в круге U и выполняются разложение (18) с $a_1 > 0$, а также разложения (19). Предположим, что $F(\partial U) \cap D(1, 1/\operatorname{Re} a) = \emptyset$, где $a = (2a_2 + a_1(1 - a_1))/a_1^2$, и при достаточно

малом $r > 0$ число прообразов точки $1 - r$ при отображении F не превышает $n + 1$. Тогда

$$\operatorname{Re} S_F(1) \geq -6 \sum_{k=1}^n \frac{a_1}{\beta_k |\sigma_k - 1|^2}.$$

Для доказательства применяем теорему 3 к функции $\tilde{f}(z)$ из доказательства утверждений 1 и 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть функция F регулярна в круге U , $F(U) \subset U$ и выполняются разложение (18) с $a_1 > 0$, $\operatorname{Re}(2a_2 + a_1(1 - a_1)) = 0$, а также разложения (19) для некоторых различных точек $\sigma_k \neq 1$ на окружности ∂U , $0 < \beta_k < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что для данного R , $0 < R < \infty$, дополнение $U \setminus F(U)$ содержит некоторый континуум, соединяющий орицикл $D(1, R)$ с окружностью ∂U . Тогда

$$\operatorname{Re} S_F(1) \leq -\frac{a_1}{8R^2} - 6 \sum_{k=1}^n \frac{a_1}{\beta_k |\sigma_k - 1|^2} \quad (23)$$

(если множество точек $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ пусто, то справа остается только слагаемое $-a_1/(8R^2)$). Знак равенства имеет место, например, для функций F , конформно и однолистно отображающих круг U на круг U с разрезом по отрезку $[-1, (1 - R)/(1 + R)]$, так что $F(1) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 2 к суперпозиции $f = G_1^{-1} \circ F \circ G_1$ из доказательства утверждения 1 и функции

$$\Psi(w) = 2R \left[\frac{(\frac{w}{2R})^2}{1 + (\frac{w}{2R})^2} \right]^{1/2} = w - \frac{1}{8R^2} w^3 + o(w^3), \quad w \rightarrow 0,$$

конформно и однолистно отображающей полуплоскость H_w с разрезом вдоль мнимой оси от точки $2iR$ до бесконечности на полуплоскость H_z . Преобразование Φ определим как суперпозицию

$$\Phi = G_\alpha^{-1} \circ \operatorname{Sym} \circ G_\alpha,$$

где $G_\alpha(z) \equiv (\alpha i - z)/(\alpha i + z)$ при некотором фиксированном достаточно малом $\alpha > 0$, а Sym означает круговую симметризацию областей относительно вещественной положительной полуоси (см. [11]). Учитывая предыдущие доказательства, остается проверить условие (13) и тот факт, что при достаточно малом $\alpha > 0$ луч $[2iR, +i\infty]$ на мнимой оси не принадлежит области $\Phi f(H)$. Неравенство (13) вытекает из принципа круговой симметризации Поля (см. [11]). По условию теоремы дополнение $H \setminus f(H)$ содержит некоторый континуум γ , соединяющий круг $|z - iR| < R$ с вещественной осью. Поэтому существует такое положительное число α , что прообраз окружности с центром в начале при отображении G_α , проходящий через точку $2iR$, пересекает γ . Следовательно, прообразы всех концентрических окружностей, пересекающие луч $[2iR, +i\infty]$, пересекают также континуум γ . По определению круговой симметризации заключаем, что луч $[2iR, +i\infty]$ не принадлежит $\Phi f(H)$. Итак, к функции f

можно применить теорему 2, где z_k определены соотношениями (22), а новые значения коэффициентов d_k отличаются от (22) лишь отсутствием множителя $(1 + \operatorname{Re} a)$. Неравенство (14) дает требуемое соотношение (23). Случай равенства проверяется непосредственно (см. [1]). Утверждение доказано.

Заметим, что если в утверждении 4 функция F однолистка, то для выполнения (23) достаточно, чтобы образ $F(U)$ не содержал окружность $\partial D(1, R)$. Кроме того, стандартные технические изменения доказательства утверждения 4 приводят к тому, что неравенство (23) справедливо также для произвольной регулярной функции F в том случае, когда для любого $R' > R$ окружность $\partial D(1, R')$ не принадлежит $F(U)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 (см. [8; теорема 4]). *Если функция F регулярна в круге U , выполняется разложение (18) и справедливо включение $F(U) \subset D(1, 1/\operatorname{Re} a)$, $a = (2a_2 + a_1(1 - a_1))/a_1^2$, то*

$$|F(\zeta) - G(\zeta)|^2 \leq -S_F(1)K(\zeta), \quad \zeta \in U, \quad (24)$$

где

$$G(\zeta) = T^{-1} \left(\frac{1 + \zeta}{a_1(1 - \zeta)} + a \right), \quad T(z) = \frac{1 + z}{1 - z},$$

а $K(\zeta)$ – некоторая неотрицательная непрерывная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$, а также их первые и вторые производные совпадают в точке $\zeta = 1$ (в случае функции F речь идет об угловых производных). Отсюда следует

$$G_2^{-1} \circ G \circ G_1(z) \equiv \frac{\tilde{c}_1 z}{1 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} z} = \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_2 z^2 + \dots,$$

где G_1, G_2 – функции, а $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – начальные коэффициенты разложения функции $\tilde{f}$ из доказательства утверждения 1 ($\operatorname{Im} \tilde{c}_2 = 0$). По теореме 1

$$-S_F(1) = S_{\tilde{f}}(0) \geq 0.$$

Если теперь $S_F(1) = 0$, то

$$\tilde{f}(z) \equiv \frac{\tilde{c}_1 z}{1 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} z}$$

и, следовательно, $F \equiv G$, что дает (24) с произвольной функцией $K(\zeta)$. В случае $-S_F(1) > 0$ из неравенства (7) получаем

$$-\frac{1}{6} S_F(1) \operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{\tilde{c}_1 z} - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1^2} - \frac{1}{\tilde{f}(z)}} \leq \tilde{c}_1 \operatorname{Im} \frac{1}{z}, \quad z \in H,$$

где мнимые части суть неположительные функции от z . После замены $z = G_1^{-1}(\zeta)$ приходим к неравенству

$$-\frac{1}{6} S_F(1) \operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{G_2^{-1} \circ F(\zeta)} - \frac{1}{G_2^{-1} \circ G(\zeta)}} \geq \left(\operatorname{Re} \frac{2a_2}{a_1} + 1 \right) \operatorname{Re} \frac{1 + \zeta}{2(1 - \zeta)}, \quad \zeta \in U.$$

Учитывая общий вид дробно-линейного отображения $1/G_2^{-1}$, легко получаем отсюда неравенство (24) с некоторой функцией $K(\zeta)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Предположим, что функция*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \angle o(z^3), \quad z \rightarrow 0,$$

регулярна в полуплоскости H , $c_1 > 0$, $\operatorname{Im} c_2 = 0$ и множество $f(H)$ пересекает каждую окружность $|w| = \rho$, $0 < \rho < \infty$, по семейству дуг суммарной угловой длины, не превышающей π . Тогда

$$\operatorname{Re}(c_3 c_1 - c_2^2) \geq 0$$

с равенством в случае $f(z) \equiv z$.

Доказательство вытекает из теоремы 2, где Φ есть круговая симметризация областей относительно мнимой “положительной” полуоси, а Ψ – тождественное отображение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Предположим, что функция*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \angle o(z^3), \quad z \rightarrow 0,$$

регулярна в полуплоскости H , $\operatorname{Im} c_2 = 0$, $f(H) \subset H$ и множество $f(H)$ пересекает каждую прямую $\operatorname{Im} w = c$, $c > 0$, по семейству интервалов суммарной длины, не превышающей $l > 0$. Тогда

$$\frac{c_3}{c_1^3} - \frac{c_2^2}{c_1^4} \geq \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2.$$

Равенство имеет место для функции

$$f(z) = \frac{l}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{l} z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 в левой части неравенства стоит вещественное неотрицательное число. Остается применить теорему 2 в случае, когда Φ – симметризация Штейнера относительно мнимой оси (см. [11]), а

$$\Psi(w) = \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} w = w - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 w^3 + \dots$$

Список литературы

- [1] В. Н. Дубинин, “Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 53–74; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Schwarz’s lemma and estimates of coefficients for regular functions with free domain of definition”, *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1605–1625.
- [2] R. Osserman, “A sharp Schwarz inequality on the boundary”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:12 (2000), 3513–3517.
- [3] В. Н. Дубинин, “К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*, т. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, **286**, ПОМИ, СПб., 2002, 74–84; англ. пер.: V. N. Dubinin, “The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disk”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **122**:6 (2004), 3623–3629.

- [4] H. P. Boas, “Julius and Julia: mastering the art of the Schwarz lemma”, *Amer. Math. Monthly*, **117**:9 (2010), 770–785.
- [5] S. G. Krantz, “The Schwarz lemma at the boundary”, *Complex Var. Elliptic Equ.* (to appear).
- [6] D. M. Burns, S. G. Krantz, “Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary”, *J. Amer. Math. Soc.*, **7**:3 (1994), 661–676.
- [7] R. Tauraso, F. Vlacci, “Rigidity at the boundary for holomorphic self-maps of the unit disk”, *Complex Variables Theory Appl.*, **45**:2 (2001), 151–165.
- [8] D. Shoikhet, “Another look at the Burns–Krantz theorem”, *J. Anal. Math.*, **105**:1 (2008), 19–42.
- [9] M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, Ch. Pommerenke, “Second angular derivatives and parabolic iteration in the unit disk”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 357–388.
- [10] P. S. Bourdon, J. H. Shapiro, “Cyclic phenomena for composition operators”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **125**, no. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [11] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.
- [12] И. П. Митюк, “Принцип симметризации для многосвязных областей”, *Докл. АН СССР*, **157**:2 (1964), 268–270; англ. пер.: I. P. Mityuk, “The symmetrization principle for multiply connected domains”, *Soviet Math. Dokl.*, **5**:1 (1964), 928–930.
- [13] И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы*, Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980.
- [14] В. Н. Дубинин, “О принципах мажорации для мероморфных функций”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 803–808; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Majorization principles for meromorphic functions”, *Math. Notes*, **84**:5–6 (2008), 751–755.
- [15] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 2, ИЛ, М., 1962; пер. с рум.: S. Stoilow, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, v. 2, Editura Academiei Republicii Populare Romine, Bucuresti, 1958.
- [16] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Институт прикладной математики ДВО РАН,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

24.05.2010