Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев, Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с градиентным стоком, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 4, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:39:10

УДК 517.946

В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев

Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с градиентным стоком

В работе изучаются качественные свойства решений задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина и градиентным стоком с плотностью, зависящей не только от пространственных переменных, но и от времени. Получены точные по времени оценки диаметра носителя решения и максимума решения. Найдено условие, указывающее на наличие или отсутствие эффекта убывания тотальной массы решения к нулю.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: оператор типа Баоуенди–Грушина, квазилинейное параболическое уравнение, градиентный сток, убывание тотальной массы решения, оценка носителя решения.

§ 1. Введение

В статье исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) - a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q, \quad (1.1)$$

$$(z, t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T),$$

$$u(z, 0) = u_0(z) \in L_1(\mathbb{R}^{M+N}), \quad u_0(z) \geq 0 \text{ п.в.}, \quad (1.2)$$

$$z = (x, y), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad y \in \mathbb{R}^M.$$

Здесь $\lambda > 1$, $1 < q < \lambda + 1$, $\nu q > \lambda$, а $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_M)$ – произвольные точки евклидовых пространств $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^M$ соответственно, $N \geq 1$, $M \geq 1$. Пусть $f(t)$, $a(\rho(z))$ – неотрицательные и измеримые функции. И кроме того,

$$a(s) \text{ – непрерывная неубывающая функция такая,} \quad (H_1)$$

$$\text{что для всех } s > 0 \text{ функция } s^q/a(s) \text{ также не убывает.}$$

Функция $\rho(z) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2)^{1/2(\alpha+1)}$ является аналогом функции расстояния между точками евклидова пространства и будет более подробно описана в § 2.

$$f(t) \text{ – непрерывная неубывающая функция такая,} \quad (H_2)$$

$$\text{что для всех } t > 0 \text{ найдется такое число } \mu,$$

$$0 < \mu < (\nu q - \lambda)/\lambda, \text{ что функция } t^\mu/f(t) \text{ также не убывает.}$$

Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right).$$

Векторное поле, соответствующее этому вектору, часто называют векторным полем Баоуенди–Грушина (см. [1], [2]). По аналогии оператор, определенный при помощи этих векторных полей, будем называть оператором типа Баоуенди–Грушина. В дальнейшем считаем, что $\alpha > 0$, поскольку теоремы вложения, которые мы будем существенно использовать, доказаны для этого случая. Далее,

$$|D_L u| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + |x|^{2\alpha} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)^2},$$

$$\operatorname{div}_L \vec{F}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^M \frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}.$$

Слагаемое $-a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q$ с физической точки зрения оказывает демпфирующий эффект и в дальнейшем будет называться *демпфирующим* членом уравнения.

Определим действие $L_{\lambda, \alpha}[u]$ оператора типа Баоуенди–Грушина на произвольную функцию

$$L_{\lambda, \alpha}[u] := \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u).$$

Уравнение с оператором типа Баоуенди–Грушина представляет независимый интерес. Если рассмотреть (1.1) без демпфирования и положить $\alpha = 0$, уравнение описывает процесс с медленной диффузией (см. обзор [3]). Операторы типа $L_{1, \alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$, где символы Δ_x и Δ_y обозначают операторы Лапласа по переменным x и y соответственно, впервые исследовались в работах [4] и [5]. В работах [6] и [7] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda, \alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) при отсутствии демпфирования (см. также [1] и имеющуюся там литературу). В работе [8] при отсутствии демпфирующего члена были изучены вопросы существования решения задачи Коши, получены точные оценки максимума решения и скорость распространения носителя. В [9], [10] доказана локальная гёльдеровость решения.

Интерес к задаче (1.1), (1.2) вызван тем, что наличие демпфирующего члена в виде градиентной абсорбции при определенных условиях может сильно менять свойства решения. А именно: создает эффект убывания массы решения с течением времени. В случае $\alpha = 0$, $a(s) = f(t) = 1$ свойства решений уравнения (1.1) были исследованы в множестве работ, например, [11]–[17] для обычного оператора Лапласа и [18]–[22] для оператора λ -Лапласа.

В статье [23] рассматривалась задача Коши для уравнения с двойной нелинейностью и источником

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(u^{m-1} |Du|^{\lambda-1} Du) - \varepsilon |Du^\nu|^q + \delta u^p,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^N), \quad (1.3)$$

$(x, t) \in S_T = \mathbb{R}^N \times (0, T)$, $T > 0$, $p > 1$, с неотрицательной начальной функцией из $L_1(\mathbb{R}^N)$ при условии $\varepsilon, \delta \geq 0$, $m + \lambda - 2 > 0$, $\lambda > 0$, $1 < q < \lambda + 1$, $\nu q > m + \lambda - 1$.

Это уравнение, как легко видеть, при $\delta = 0$, $m = 1$ является частным случаем (1.1) и совпадает с (1.1) при $\alpha = 0$, $a(s) = \varepsilon$, $f(t) = 1$. В этой работе было найдено критическое условие на q , при котором тотальная масса решения стремится к нулю. Ранее такого сорта результаты для почти линейных уравнений были установлены во многих работах, например в [11], [13], [15], [17]. Результаты, полученные при рассмотрении уравнения с демпфирующим членом, хотя и имеют самостоятельную ценность, были использованы авторами работы [23] для исследования вопроса существования решения задачи Коши для уравнения с источником и демпфированием.

Целью настоящей работы является получение условия на параметры задачи, при которых гарантируется наличие или отсутствие эффекта убывания к нулю тотальной массы решения. Более того, наши подходы позволяют нам найти скорость убывания тотальной массы. Получены оценки сверху максимума решения и радиуса носителя решения задачи Коши (1.1), (1.2). По-видимому, найденные оценки точны. Однако имеет смысл доказать аналогичные оценки снизу. Также найден предельный показатель q^* и найдена зависимость показателя, характеризующая порядок убывания массы решения, для специального случая нелинейного веса типа $a(s) = s^\gamma$, $f(t) = t^\beta$ при демпфирующем члене.

Введем теперь понятие слабого решения задачи (1.1), (1.2). Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неотрицательную функцию $u(z, t) \in L_{\infty, \text{loc}}(S_T)$ будем называть *слабым решением уравнения (1.1)* в $S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T)$, если для любого t , $T > t > 0$, $R > 0$,

$$u \in C((0, T), L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^{N+M})), \\ |D_L u|^{\lambda+1}, a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q \in L_{1, \text{loc}}(S_T)$$

и u удовлетворяет (1.1) в смысле интегрального тождества

$$\iint_{B_R \times (t, T)} -u\eta_\tau + (|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) D_L \eta + \eta a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^\nu|^q dx dy d\tau = 0, \quad (1.4)$$

где $\eta(x, y, t)$ – произвольная гладкая функция с носителем из $B_R \times (t, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слабое решение уравнения (1.1) $u(z, t) \in L_{\infty, \text{loc}}(S_T)$ будем называть *слабым решением задачи (1.1), (1.2)*, если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\eta(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \eta(z) dz \quad \forall \eta(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M}). \quad (1.5)$$

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем необходимые обозначения. Здесь и далее

$$K = Q(\lambda - 1) + \lambda + 1, \quad K_{1+\theta} = Q(\lambda - 1) + (\lambda + 1)(1 + \theta), \\ H = (\lambda + 1)(\nu q - 1) - q(\lambda - 1) > 0, \quad Q = N + M(\alpha + 1), \\ B_R = \{z \in \mathbb{R}^{N+M} : \rho(z, 0) \leq R\},$$

где $\rho(z) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha + 1)^2 |y|^2)^{1/2(\alpha+1)}$ уже было определено выше. Параметр K можно сравнить с показателем Баренблатта, и при $\alpha = 0$ он играет ключевую роль в описании качественных свойств решения вырождающихся уравнений (см. [3]), Q – однородная размерность в пространствах Карно–Каратеодори

(подробнее см. [1]). Наконец, B_R является естественным расширением понятия открытого шара в пространствах Карно–Каратеодори. Более подробное описание отнесено к § 2. На протяжении всей работы символами C , C_i , C'_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметров λ , N , M , α , ν , q .

Радиусом носителя решения будем называть величину

$$Z(t) = \inf\{\rho : u(\cdot, t) = 0 \text{ для п.в. } (x, y) \in \mathbb{R}^{N+M} \setminus B_\rho\}.$$

Обозначим $\varphi(s)$ функцию, обратную к $a(s)^{\lambda-1}s^H$.

Важную роль в работе играет функция

$$\omega(t) \equiv \frac{\varphi(t^{\nu q - \lambda}/f(t)^{\lambda-1})}{t^{1/K}}. \quad (1.6)$$

Приступим к формулировке основных результатов работы. Нам потребуются следующие асимптотические условия на $\omega(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0, \quad (1.7)$$

$$\exists C_1 > 0 : \quad C_1 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t), \quad (1.8)$$

для достаточно больших t

$$\exists C_2, \epsilon > 0 : \quad C_2 t^\epsilon \leq \omega(t). \quad (1.9)$$

На примере специального веса условие (1.8) превратится в условие на предельный показатель q^* .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) . Тогда существует u – слабое решение (1.1), (1.2), и если $\omega(t)$ – функция, определенная в (1.6), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, то для достаточно больших t имеем

$$Z(t) \leq C_3 \omega(t) t^{\frac{1}{K}}. \quad (1.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вопрос единственности решения задачи (1.1), (1.2) остается открытым. Трудность доказательства единственности связана с наличием градиентного стока в уравнении и может быть преодолена, например, с помощью равномерных оценок градиента решения, что, в свою очередь, является нетривиальной задачей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если выполняется (1.7), то из (1.10) следует, что при достаточно больших t оценка (1.10) сильнее оценки носителя для решения того же уравнения без стока, т.е. для $a(s) = f(t) = 0$ (см. предложение 7 далее или [8]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2) и выполнены условия (H_1) , (H_2) , $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. И пусть $0 < \alpha < M(\nu q - 1)/q$. Тогда для достаточно больших t имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} u \, dz \leq C_4 \omega^{\frac{K}{K-1}}(t), \quad (1.11)$$

$$\|u\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}} \leq C_5 \omega^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(t) t^{-\frac{Q}{K}}. \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае, если выполняется (1.7), неравенство (1.11) обеспечивает убывание к нулю тотальной массы решения $\|u\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}$.

Рассмотрены также два случая, при которых можно получить оценку массы решения без предположения компактности носителя начальной функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2) и выполнены условия (H₁), (H₂). Тогда для достаточно больших t при условии, что $\nu = 1$, $\lambda > 1$ и $0 < \alpha < M(q-1)/q$, справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \leq \int_{\rho > \omega(t)t^{\frac{1}{K}}} u_0 dz + C_6 \omega^{\frac{K}{\lambda-1}}(t). \quad (1.13)$$

Если же $\lambda = 1$ и $0 < \alpha < M(\nu q - 1)/q$, то справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \leq \int_{\rho > \sqrt{t}} u_0 dz + C'_6 \frac{t^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2}{2(\nu q - 1)}}}{a(\sqrt{t})^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q - 1}}}. \quad (1.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, если выполняется (1.7), неравенство (1.13) обеспечивает убывание к нулю тотальной массы решения $\|u\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}$.

Из оценки (1.14) следует, например, что в случае, если

$$q < \frac{Q + 2}{\nu Q + 1},$$

тотальная масса решения стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Заметим также, что при $\alpha = 0$, $\nu = 1$, $a = f = 1$ критическим показателем является $q = (M + N + 2)/(M + N + 1)$ (см., например, [12]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2) и выполнены условия (H₁), (H₂), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Если выполняется условие (1.8), тогда для достаточно больших t , $t \geq t_0 = \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\lambda-1}/R_0^K$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz \leq C_7 \left(\int_{t_0}^t \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}}) f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q - 1) + q}{K}}} d\tau \right)^{-\frac{1}{\nu q - 1}}. \quad (1.15)$$

В частности, из (1.15) следует, что если существуют $C > 0$, $\varrho \in (0, 1)$ такие, что $C\varrho \leq \omega(t) \leq C$, то для достаточно больших t , $t \geq t_0 = \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\lambda-1}/R_0^K$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz \leq C_8 \left(\ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \right)^{-\frac{1}{\nu q - 1}}. \quad (1.16)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2) и выполнены условия (H₁), (H₂), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Если выполняется условие (1.9), тогда для достаточно больших t имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \geq C_9 > 0, \quad (1.17)$$

где C_9 – положительная постоянная, зависящая только от параметров задачи и $\|u_0\|_1$.

ПРИМЕР. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Пусть $a(s) = s^\gamma$, $\gamma < q$, $f(t) = t^\beta$, $\beta < \frac{\nu q - \lambda}{\lambda}$,

$$q^* = \frac{Q + \gamma + K(1 + \beta)}{\nu Q + 1}, \quad A = \frac{(q^* - q)(\nu Q + 1)}{H + \gamma(\lambda - 1)}. \quad (1.18)$$

Тогда $\omega(t) = t^{-\frac{A(\lambda-1)}{K}}$. Отметим, что q^* является критическим показателем, поскольку если $q < q^*$, тогда выполняется условие (1.7), оценки (1.10), (1.11), (1.12) справедливы и имеют вид

$$Z(t) \leq C_{10} t^{\frac{1}{K} - \frac{A(\lambda-1)}{K}}, \quad (1.19)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \leq C_{11} t^{-A}, \quad (1.20)$$

$$\|u(t)\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}} \leq C_{12} t^{-\frac{Q}{K} - \frac{A(\lambda+1)}{K}}. \quad (1.21)$$

Следует добавить, что неравенство (1.8) превращается в равенство в случае, когда $q = q^*$, и оценка (1.16) остается неизменной. Таким образом, эффект убывания массы решения к нулю сохраняется при $q \leq q^*$.

В случае, когда $q^* < q < \lambda + 1$, выполняется условие (1.9), масса убывает, но ограничена снизу положительной константой, как показывает оценка теоремы 5.

Найденный критический показатель совпадает с полученными в работах [23] при условии $\alpha = 0$, $a(s)f(t) \equiv \varepsilon > 0$, и [24] при условии $\alpha = 0$, $f(t) \equiv 1$.

Параграф 2 посвящен вспомогательным предложениям, которые приведены без доказательства. Параграфы 3, 4, 5, 6, 7 посвящены доказательству теорем 1, 2, 3, 4, 5 соответственно.

В доказательстве теорем 1–5 мы используем подходы работ [23], [24] и [8].

В доказательстве оценок размеров носителя решения мы использовали идеи работ [25]–[27], а также существенно опирались на работы [23], [24] и [8], где эти методы получили дальнейшее развитие.

§ 2. Вспомогательные предложения

Символом $D_L u$ выше обозначен вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right).$$

Векторное поле, образующее этот вектор, называется векторным полем Баоунди–Грушина. Введем вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= X_1, & \frac{\partial u}{\partial x_2} &= X_2, & \dots, & \frac{\partial u}{\partial x_N} &= X_N, \\ |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1} &= Y_1, & |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2} &= Y_2, & \dots, & |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} &= Y_M. \end{aligned}$$

Известно, что если α – четное положительное целое число, то C^∞ -векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_M$ удовлетворяют условию ранга Хёрмандера

$$\text{rank Lie}[X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_M] = M + N.$$

Для данного набора C^∞ -векторных полей определяется метрическое пространство Карно–Каратеодори (см. [1], [28]–[30]), где расстояние можно ввести по формуле $\rho(z, z^0) = (|x - x^0|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2 |y - y^0|^2)^{1/2(\alpha+1)}$, $z = (x, y)$, $z^0 =$

(x^0, y^0) . Действительно, введенная функция удовлетворяет стандартным требованиям однородности и симметричности. Неравенство треугольника также выполняется, но с константой C больше единицы, т.е.

$$\forall z^1, z^2, z^3 \in \mathbb{R}^{N+M} \quad \rho(z^1, z^2) \leq C(\rho(z^1, z^3) + \rho(z^3, z^2)).$$

Определим анизотропное растяжение, применимое к $L_{\lambda, \alpha}$, следующим образом:

$$\delta_\mu(z) = (\mu x, \mu^{\alpha+1} y), \quad \mu > 0, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N+M}.$$

Введенное расстояние называется однородным, поскольку для всех $z \in \mathbb{R}^{N+M}$ выполняется тождество

$$\rho(\delta_\mu(z)) = \mu \rho(z).$$

Очевидно, что замена переменных в интеграле Лебега дает

$$d \circ \delta_\mu(x, y) = \mu^Q dx dy, \quad Q = N + (\alpha + 1)M,$$

где Q есть однородная размерность в пространствах Карно–Каратеодори.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ – произвольное ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{N+M}$ с достаточно гладкой границей. Определим пространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ для $1 \leq p < \infty$ как замыкание $C^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|D_L f|^p + |f|^p) dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

которая эквивалентна норме

$$\left(\int_{\Omega} |D_L f|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |f|^r dx dy \right)^{\frac{1}{r}}$$

для $0 < r \leq p$.

Обозначим через $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ подпространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$, которое получается как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$. Пространства $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ и $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ включаются в класс пространств Карно–Каратеодори, для которых достаточно полно изучены теоремы вложения типа С. Л. Соболева и мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга. Читателя, интересующегося теорией пространств Карно–Каратеодори, мы отсылаем к обзорной работе [1], где можно найти дальнейшую литературу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (неравенство типа Гальярдо–Ниренберга; см. [1]). *Для любой функции $f \in \mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(\mathbb{R}^{N+M})$ справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |f|^{\lambda+1} dz \leq C_{14} \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |D_L f|^{\lambda+1} dz \right)^{\beta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |f|^{\beta_2} dz \right)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\beta_1 = \frac{Q(\lambda-1)}{K_{1+\theta}}$, $\beta_2 > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (неравенство типа Пуанкаре; см. [1]). *Для любой функции $\omega \in \mathring{\mathfrak{L}}_{1,q}(\mathbb{R}^{N+M})$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} |\omega|^q dz \leq C_{15} \text{mes}\{\text{supp } \omega\}^{\frac{q}{Q}} \int_{\Omega} |D_L \omega|^q dz. \quad (2.2)$$

Следующее предложение не следует из работы [2], но его легко доказать аналогичными методами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (неравенство типа Харди). Пусть $a(s)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что $s^q/a(s)$ также монотонно возрастает. Тогда для любой функции $\omega \in \mathfrak{L}_{1,q}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} a(\rho(z)) \frac{|D_L \rho|^q}{\rho^q} |\omega|^q dz \leq \left(\frac{q}{Q} \right)^q \int_{\Omega} a(\rho) |D_L \omega|^q dz. \quad (2.3)$$

Для любой функции $\omega \in \mathfrak{L}_{1,q}(\mathbb{R}^{N+M})$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) \frac{|D_L \rho|^q}{\rho^q} |\omega|^q dz \leq \left(\frac{q}{Q} \right)^q \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho) |D_L \omega|^q dz. \quad (2.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (о замене переменных). Пусть

$$\rho(z, 0) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2 |y|^2)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}.$$

Следуя формулам

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-1} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-2} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_2 \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_1, \\ x_2 = \rho \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-1} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-2} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_2 \sin^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_1, \\ \dots \\ x_M = \rho \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-1} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M+N-2} \cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_M \sin^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_{M-1}, \\ y_1 = \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cos \varphi_{M+N-1} \cos \varphi_{M+N-2} \cos \varphi_{M+1} \sin \varphi_M, \\ y_2 = \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cos \varphi_{M+N-1} \cos \varphi_{M+N-2} \cos \varphi_{M+2} \sin \varphi_{M+1}, \\ \dots \\ y_N = \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sin \varphi_{M+N-1}, \end{cases} \quad (2.5)$$

заменяем координаты (x, y) на (ρ, φ) . Якобиан замены равен

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} &= \frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_2 \cos^{\frac{2}{\alpha+1}} \varphi_3 \dots \cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}} \varphi_{M-1} \cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}} \varphi_M \cos^{\frac{M}{\alpha+1}} \varphi_{M+1}}{(\cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_M)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \\ &\times \frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1} \varphi_{M+2} \dots \cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2} \varphi_{M+N-1}}{(\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В дальнейшем нам потребуется итерационная лемма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см. [31; лемма 5.6] при $b > 1$). Пусть последовательность y_h , $h = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_{h+1} \leq C_{16} b^h y_h^{1+\varepsilon}, \quad h = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

с какими-либо положительными постоянными C_{16} , $\varepsilon > 0$ и $b > 1$. Тогда, если

$$y_0 \leq C_{16}^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}, \quad \text{то } y_h \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (см. [32; гл. I, лемма 4.3]). Пусть последовательность y_h , $h = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_h \leq C_{17} b^h y_{h+1}^{1-\varepsilon}, \quad h = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

с какими-либо положительными постоянными C_{17} , $\varepsilon > 0$ и $b < 1$. Тогда, если

$$y_h \leq C_{18} \text{ сразу для всех } h, \text{ то } y_0^\varepsilon \leq C_{19}. \quad (2.10)$$

Для любой локально суммируемой функции $f(z)$ обозначим

$$\|f\|_r = \sup_{\rho \geq r} \left(\rho^{-\frac{K}{\lambda-1}} \int_{B_\rho} |f| dx dy \right).$$

Поскольку решение задачи (1.1), (1.2) является субрешением задачи без демпфирования при $a(\rho) = f(t) = 0$, то (см. [8]) справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $u_0 \in L_{1,\text{loc}}(R^{N+M})$ и для некоторого заданного $r > 0$

$$\|u_0\|_r < \infty.$$

Тогда существуют такие положительные постоянные $C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}$, зависящие лишь от параметров λ, N, M, α , что для решения (обобщенного) задачи (1.1), (1.2) при всех $0 < t < T_r$ и $R > r$, где $T_r = C_{20} \|u_0\|_r^{-\frac{1}{\lambda-1}}$, справедливы оценки

$$\|u(t)\|_r \leq C_{21} \|u_0\|_r, \quad (2.11)$$

$$\|u(t)\|_{L_\infty(B_R)} \leq C_{22} t^{-\frac{Q}{K}} R^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \|u_0\|_r^{\frac{\lambda+1}{K}}. \quad (2.12)$$

Пусть $u_0 \in L_1(R^{N+M})$ и $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Тогда для всех $t > 0$

$$Z(t) = \inf \{ \rho : u(t) = 0 \text{ для н.в. } (x, y) \in R^{N+M} \setminus B_\rho \} \leq 4R_0 + C_{23} t^{\frac{1}{K}} \|u_0\|_1^{\frac{\lambda-1}{K}}. \quad (2.13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 (см. [8; лемма 3.3]). Если предположения предложения 7 выполняются, то для любого $t \in (0, T)$ и $R \geq r$

$$\|u(t)\|_{\infty, B_R \times (t/2, t)} \leq \frac{C_{24}}{t^{\frac{Q}{K}}} \left(\int_{t/4}^t \int_{B_{2R}} u dx \right)^{\frac{\lambda+1}{K}}. \quad (2.14)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Прежде всего докажем существование решения задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим последовательность задач

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \text{div}_L(|D_L u_n|^{\lambda-1} D_L u_n) - \min\{a(\rho(z))f(t)|D_L u_n^\nu|^q, n\}, \quad (3.1)$$

$$(z, t) \in S_{T,n} = B_n \times (0, T), \quad B_n \equiv \{z \in \mathbb{R}^{N+M} : \rho(z, 0) \leq n\},$$

$$u_n(z, t) = 0 \quad \text{на } \partial B_n \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$u_n(z, 0) = u_{0n}(z) \in C_0^\infty(B_n), \quad u_{0n}(z) \geq 0, \quad \text{где } \|u_{0n}\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \leq \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}, \quad (3.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_{0n} \eta(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \eta(z) dz \quad \forall \eta(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M}).$$

Методом монотонности и компактности Лионса [33] для каждого фиксированного n доказывается, что существует решение u_n из класса $C(0, T; L_2(B_n)) \cap L_{\lambda+1}(0, T; \mathfrak{L}_{1, \lambda+1}(B_n))$. Теперь докажем, что решения u_n задачи (3.1)–(3.3) сходятся к решению исходной задачи Коши. Необходимо перейти к пределу в интегральном тождестве для u_n при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что наличие демпфирующего слагаемого в уравнении делает такой предельный переход нетривиальным. Ниже мы будем следовать схеме, предложенной в работах [34], [35]. Для этой цели нам потребуются сходимости почти всюду градиентов решения. Мы докажем сильную сходимость градиентов в $L_{\lambda+1}(0, T; \mathfrak{L}_{1, \lambda+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^{N+M}))$. Выберем произвольное компактное множество $\mathfrak{K} \subset S_T$. Существует такое n_0 , что $\mathfrak{K} \subset (0, T) \times B_{n_0}$. Прежде всего покажем, что для всех u_n выполняется неравенство

$$\int_{B_{n_0}} u_n(t) dz \leq \int_{B_{n_0}} u_{0n} dz.$$

Умножим уравнение (3.1) на финитную функцию $u_n/(u_n + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{n_0}} \int_0^{u_n(t)} \frac{s}{s + \varepsilon} ds dz + \varepsilon \int_0^t \int_{B_{n_0}} \frac{|D_L u_n|^{\lambda+1}}{(u_n + \varepsilon)^2} dz d\tau \\ + \int_0^t \int_{B_{n_0}} \frac{a(z)f(\tau)|D_L u_n^\nu|^q u_n}{u_n + \varepsilon} dz d\tau \leq \int_{B_{n_0}} \int_0^{u_{n_0}} \frac{s}{s + \varepsilon} ds dz. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим полезное и в дальнейшем неравенство

$$\int_{B_{n_0}} u_n(t) dz + \int_0^t \int_{B_{n_0}} a(z)f(\tau)|D_L u_n^\nu|^q dz d\tau \leq \int_{B_{n_0}} u_{0n} dz. \quad (3.4)$$

Равномерная ограниченность для u_n следует из предложения 8 и в силу (3.4):

$$\|u_n(\cdot, t)\|_{\infty, B_n} \leq Ct^{-\frac{Q}{K}} \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}} \quad \forall t > 0. \quad (3.5)$$

Очевидно, что добавление к уравнению положительного демпфирующего слагаемого не приводит к выходу решения из гёльдеровского класса. Поскольку константа Гёльдера зависит от $\|u_n\|_\infty$, которая в силу (3.5) не зависит от n , то на компакте $\mathfrak{K}$ последовательность $\{u_n\}$ локально непрерывна по Гёльдеру сразу для всех n . Следовательно, можно извлечь равномерно сходящуюся к u подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{u_n\}$, $n \geq n_0$. Кроме того, для $\{u_n\}$, $n \geq n_0$, справедлива еще одна априорная оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \int_{B_{n_0}} u_n^2(t) dz + \iint_{S_{T, n_0}} |D_L u_n|^{\lambda+1} dz d\tau \\ + \iint_{S_{T, n_0}} \min\{a(\rho(z))f(t)|D_L u_n^\nu|^q, n\} u_n dz d\tau \leq \int_{B_{n_0}} u_{0n}^2 dz. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Откуда следует

$$\iint_{\mathfrak{K}} |D_L u_n|^{\lambda+1} dz d\tau \leq C(\mathfrak{K}, u_0). \quad (3.7)$$

Используя равномерную сходимость $\{u_n\}$, докажем фундаментальность последовательности $\{D_L u_n\} \in L_{\lambda+1}(0, T; \mathfrak{L}_{1, \lambda+1}(\mathfrak{K}))$. Выберем два произвольных

члена последовательности $\{u_n\}$: u_j и u_k , $k, j > n_0$. Тогда для разности $u_j - u_k$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_j - u_k)}{\partial t} - (\operatorname{div}_L(|D_L u_j|^{\lambda-1} D_L u_j) - \operatorname{div}_L(|D_L u_k|^{\lambda-1} D_L u_k)) \\ + \min\{a(\rho(z))f(t)|D_L u_j^\nu|^q, j\} - \min\{a(\rho(z))f(t)|D_L u_k^\nu|^q, k\} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Умножим полученное уравнение на $(u_j - u_k)\xi^2$, где $\xi(z, \tau)$ – стандартная срезающая функция, финитная на всем цилиндре S_{T, n_0} , такая, что $0 \leq \xi \leq 1$,

$$\begin{aligned} \xi &= 1 \quad \text{на } B_{R/2}, \quad \xi = 0 \quad \text{на } B_R, \\ \xi(z, \tau) &= 0 \quad \text{при } \tau \leq \frac{t}{2}, \quad \xi(z, \tau) = 1 \quad \text{при } \tau \geq t, \\ |D_L \xi| &\leq \frac{C}{R}, \quad 0 \leq D_\tau \xi \leq \frac{C}{\tau}. \end{aligned}$$

Пользуясь сильной монотонностью оператора $A(u) = -\operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u)$ и неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{S_{T, n_0}} |D_L u_j - D_L u_k|^{\lambda+1} \xi^2 dz d\tau &\leq C \iint_{S_{T, n_0}} |u_j - u_k|^2 \xi |\xi_\tau| dz d\tau \\ &+ C \iint_{S_{T, n_0}} (|D_L u_j|^\lambda + |D_L u_k|^\lambda) \xi |D_L \xi| |u_j - u_k| dz d\tau \\ &+ C \iint_{S_{T, n_0}} |a(\rho(z))f(t)|D_L u_j^\nu|^q + |a(\rho(z))f(t)|D_L u_k^\nu|^q| |u_j - u_k| \xi^2 dz d\tau \\ &\leq C \iint_{S_{T, n_0}} |u_j - u_k|^2 \xi |\xi_\tau| dz d\tau \\ &+ C \left(\iint_{S_{T, n_0}} |D_L u_j|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(\iint_{S_{T, n_0}} |u_j - u_k|^{\lambda+1} \xi^{\lambda+1} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &+ C \left(\iint_{S_{T, n_0}} |D_L u_k|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(\iint_{S_{T, n_0}} |u_j - u_k|^{\lambda+1} \xi^{\lambda+1} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &+ \left(\int_{B_{n_0}} u_{0j} dz + \int_{B_{n_0}} u_{0k} dz \right) \sup_{B_{n_0} \times (t/2, T)} |u_j - u_k|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } j, k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Переходя к пределу, мы использовали равномерную сходимост $\{u_n\}$, а также оценки (3.4) и (3.7). Теперь можно выделить подпоследовательность, для которой

$$\begin{aligned} D_L u_n &\rightarrow D_L u \quad \text{п.в. на любом компакте } \mathfrak{K}, \\ D_L u_n &\rightarrow D_L u \quad \text{сильно в } L_{\lambda+1}(0, T; \mathfrak{L}_{1, \lambda+1}(B_{n_0})). \end{aligned}$$

В интегральном тождестве для u_n можно перейти к пределу. Таким образом, можно считать доказанным, что u_n стремится равномерно к решению уравнения (1.1) на любом компакте внутри S_T . Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, видим, что оценки (3.4), (3.5) справедливы и для u . Чтобы доказать, что слабое решение уравнения является слабым решением задачи Коши (1.1), (1.2),

нам необходимо проследить поведение u при $t \rightarrow 0$. Очевидно, что оценка (3.5) не дает равномерной ограниченности при $t \rightarrow 0$. Поэтому мы не можем использовать равномерную сходимост $\{u_n\}$, как раньше. Сначала получим вспомогательную оценку. Умножим уравнение (1.1) на $t^\beta u^\theta \xi^{\lambda+1}(z)$; $R, \beta, \theta > 0$ выберем позднее. В качестве срезающей возьмем функцию из пространства $C_0^1(\mathbb{R}^{N+M})$ такую, что

$$\xi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) > R, \\ 1 & \text{при } \rho(z) < \frac{R}{2}, \end{cases} \quad |D_L \xi| \leq C \frac{2}{R}. \quad (3.10)$$

Проинтегрировав по $B_R \times (0, t)$ стандартным способом, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta+1} \int_{B_R} t^\beta \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z, t) dz + \theta \iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ & + (\lambda+1) \iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^\lambda u^\theta |D_L u|^{\lambda-1} D_L u D_L \xi dz d\tau \\ & + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u|^\nu \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^\theta dz d\tau \\ & = \frac{\beta}{\theta+1} \iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z, t) dz d\tau. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя неравенство Юнга и неравенство (3.5), оценим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta+1} \int_{B_R} t^\beta \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z, t) dz + \theta \iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ & + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u|^\nu \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^\theta dz d\tau \\ & \leq C \iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\theta+1} (1 + \tau R^{-(\lambda+1)} u^{\lambda-1}) dz d\tau \leq C \iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\theta+1} dz d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, если $\theta = (\lambda-1)/\lambda$, $0 < \beta < 1/\lambda$, R фиксировано, получена оценка

$$\iint_{S_{t,R}} \tau^\beta u^{-\frac{1}{\lambda}} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \leq C \iint_{S_{t,2R}} \tau^{\beta-1} u^{\frac{\lambda-1}{\lambda}+1} dz d\tau. \quad (3.13)$$

Последний интеграл можно оценить, пользуясь предложением 8 и неравенством (3.5):

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\frac{\lambda-1}{\lambda}+1} dz d\tau \leq \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_R} u dz \right) \int_0^t \tau^{\beta-1} \|u\|_{\infty, B_R}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} d\tau \\ & \leq C t^{\beta - \frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_R} u dz \right)^{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}} \leq C t^{\beta - \frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}} \|u_0\|_1^{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь можно непосредственно доказать, что u есть решение исходной задачи. Для произвольного компакта $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^{N+M}$ найдется $R > 0$ такое, что $\mathfrak{K} \subset B_{R/2}$.

Умножив уравнение (1.1) на срезку ξ , определенную в (3.10), и проинтегрировав по $B_R \times (0, t)$ стандартным способом, получим

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} u(t) \xi \, dz + \iint_{S_{t,R}} |D_L u|^{\lambda-1} D_L u D_L \xi \, dz \, d\tau \\ & \quad + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q \xi \, dz \, d\tau = \int_{B_R} u_0 \xi \, dz, \\ & \left| \int_{B_R} u(t) \xi \, dz - \int_{B_R} u_0 \xi \, dz \right| \\ & \leq \frac{C}{R} \iint_{S_{t,R}} |D_L u|^\lambda \, dz \, d\tau + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q \xi \, dz \, d\tau \equiv \frac{C}{R} I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оценим последние интегралы

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_{t,R}} |D_L u|^\lambda \, dz \, d\tau \\ &\leq \left(\iint_{S_{t,R}} \tau^\beta u^{-\frac{1}{\lambda}} |D_L u|^{\lambda+1} \, dz \, d\tau \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(\iint_{S_{t,R}} \tau^{-\beta \lambda} u \, dz \, d\tau \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &\leq \left(C t^{\beta - \frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2R}} u \, dz \right)^{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(t^{1-\beta\lambda} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2R}} u \, dz \right) \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &\leq C t^{\frac{1}{K}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2R}} u \, dz \right)^{1 + \frac{\lambda-1}{K}} \leq \frac{C}{R} t^{\frac{1}{K}} \|u_0\|_1^{1 + \frac{\lambda-1}{K}} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 ограничен сверху (см. (3.5)) и стремится к нулю вместе с t . Следовательно, (1.2) доказано.

Переходим к доказательству оценки (1.10).

ЛЕММА 3.1. Пусть u – неотрицательное решение уравнения (1.1), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, тогда для любых $0 \leq t_1 \leq t_2$ и $R > 2R_0$, $R_i = R(1 - 2^{-i-1})$, $\tilde{R}_i = (R_i + R_{i+1})/2$, $R_i < \tilde{R}_i$, $U_i = \{\rho(z) > R_i\}$, $\tilde{U}_i = \{\rho(z) > \tilde{R}_i\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1 < \tau < t_2} \int_{\tilde{U}_i} u^{\theta+1} \, dz + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{U}_i} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} \, dz \, d\tau \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{U}_i} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u^\nu|^q \, dz \, d\tau \leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{U_i \setminus \tilde{U}_i} u^{\lambda+\theta} \, dz \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение на $u^\theta \xi_i^{\lambda+1}(z)$; $\theta > 0$ выберем позднее. Выберем в качестве срезающей функцию из пространства $C^1(\mathbb{R}^{N+M})$ такую, что

$$\xi_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < R_i, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > \tilde{R}_i, \end{cases} \quad |D_L \xi_i| \leq C \frac{2^i}{R}.$$

Проинтегрировав по $\tilde{U}_i \times (0, t_2)$ стандартным способом, используя неравенство Юнга, получим требуемое неравенство. Заметим, что отсутствие в неравенстве

члена $\sup \int_{\tilde{U}_i} u_0^{\theta+1} dz$ объясняется тем, что интегрирование идет по области, в которой не содержится носитель u_0 .

ЛЕММА 3.2. Пусть u – неотрицательное решение уравнения (1.1), $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, тогда для любых $0 \leq t$ и $R > 2R_0$, $R_i = R(1 - 2^{-i-1})$, $\tilde{R}_i = (R_i + R_{i+1})/2$, $R_i < \tilde{R}_i$, $U_i = \{\rho(z) > R_i\}$, $\tilde{U}_i = \{\rho(z) > \tilde{R}_i\}$ справедливо неравенство

$$y_{i+1} \leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} t^{\frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}} \frac{1 + \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}}{y_i}, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} y_{i+1} \equiv & \sup_{0 < \tau < t} \int_{\tilde{U}_{i+1}} u^{\theta+1} dz + \int_0^t \int_{\tilde{U}_{i+1}} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\tilde{U}_{i+1}} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u|^\nu dz d\tau + \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_{i+1} \setminus \tilde{U}_{i+1}} u^{\lambda+\theta} dz d\tau. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\bar{\xi}_{i+1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < \tilde{R}_i, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > R_{i+1}, \end{cases} \quad |D_L \bar{\xi}_i| \leq C \frac{2^i}{R}.$$

В неравенстве (2.1) положим $f = v_{i+1} = (u \bar{\xi}_{i+1}(z))^\omega$, $\omega = (\lambda + \theta)/(\lambda + 1)$, $\beta_1 = Q(\lambda - 1)/K_{1+\theta}$, $\beta_2 = (\theta + 1)/\omega > 1$. Проинтегрируем неравенство (2.1) от 0 до t по $d\tau$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{U_{i+1} \setminus \tilde{U}_{i+1}} u^{\lambda+\theta} dz d\tau &= \int_0^t \int_{U_{i+1} \setminus \tilde{U}_{i+1}} v_{i+1}^{\lambda+1} dz d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |D_L v_{i+1}|^{\lambda+1} dz \right)^{\beta_1} \left(\int_{\tilde{U}_i} v_{i+1}^{\beta_2} dz \right)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}} d\tau \\ &\leq C t^{1-\beta_1} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} |D_L v_{i+1}|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\beta_1} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{\tilde{U}_i} v_{i+1}^{\beta_2} dz \right)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}} \\ &\leq C t^{1-\beta_1} y_i^{\beta_1 + \frac{\lambda+1}{\beta_2}(1-\beta_1)} = C t^{1-\beta_1} y_i^{1+(1-\beta_1)(\frac{\lambda+1}{\beta_2}-1)}. \end{aligned}$$

Применив лемму 3.1, получим требуемую оценку.

Используем демпфирующую часть уравнения, чтобы получить вспомогательное рекурсивное неравенство.

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и

$$Z(t) = \inf \{ \rho : u(\cdot, t) = 0 \text{ для п.в. } z \in \mathbb{R}^{N+M} \setminus B_\rho \}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$y_{i+1} \leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} R^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - q \frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta} \frac{t^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}} y_i^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}}. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = u^{\frac{\nu q + \theta}{q}}$. В силу предложения 7 ясно, что $Z(t)$ конечно для каждого t . Следовательно, $\omega \in \tilde{\mathcal{L}}_{1,p}(B_{Z(t)})$ для каждого $t > 0$. Используя обозначения и результаты лемм 3.1 и 3.2, (2.2), неравенство Гёльдера и свойства весовых функций $a(\rho)$ и $f(t)$, получаем

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_{i+1} \setminus \tilde{U}_{i+1}} u^{\lambda+\theta} dz d\tau \\ &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \left(\int_{B_{Z(t)} \setminus B_{R_{i+1}}} \omega^q dz \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \text{mes}\{U_{i+1} \setminus \tilde{U}_{i+1}\}^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}} d\tau \\ &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} R_{i+1}^{-q \frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \\ &\quad \times \int_0^t \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))f(\tau)} \int_{B_{Z(t)} \setminus B_{R_{i+1}}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L \omega|^q dz \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \tilde{R}_i^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} d\tau \\ &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} R^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - q \frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} y_i^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{f(\tau)} \right]^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q - \lambda}} d\tau \right)^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}} \\ &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} R^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - q \frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta} \frac{t^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} y_i^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}}. \end{aligned}$$

Здесь появляется условие на θ . Выберем его достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $-\mu \frac{\lambda+\theta}{\nu q - \lambda} + 1 > 0$.

ЛЕММА 3.4. Если существует последовательность $\{y_i\}$ такая, что

$$y_{i+1} \leq C 2^{i(\lambda+1)} A y_i^{\frac{1}{a}}, \quad a < 1, \quad y_{i+1} \leq C 2^{i(\lambda+1)} B y_i^{\frac{1}{b}}, \quad b > 1, \quad (3.19)$$

и если достаточно мала величина

$$(y_0 B^b)^{\frac{1-a}{b}} A^a \leq C^{-\frac{1}{(1-a)/b}} 2^{-\frac{(\lambda+1)(a+b)}{((1-a)/b)^2}} \equiv C_0, \quad (3.20)$$

где $C_0 < 1$ – фиксированное число, тогда $y_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы имеем

$$y_{i+1}^a \leq C 2^{i(\lambda+1)a} A^a y_i, \quad y_{i+1}^b \leq C 2^{i(\lambda+1)b} B^b y_i,$$

откуда следует, что

$$\frac{y_{i+1}^a}{A^a} + \frac{y_{i+1}^b}{B^b} \leq C 2^{i(\lambda+1)(a+b)} y_i.$$

Используя неравенство Юнга с показателями

$$\frac{1}{p} = \frac{b}{b+1-a}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-a}{b+1-a},$$

получим

$$\frac{y_{i+1}^{\frac{b}{b+1-a}}}{A^{\frac{ab}{b+1-a}} B^{\frac{b(1-a)}{b+1-a}}} = \frac{y_{i+1}^{\frac{1}{p}} y_{i+1}^{\frac{b}{p'}}}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{b}{p'}}} \leq \frac{y_{i+1}^a}{A^a} + \frac{y_{i+1}^b}{B^b}.$$

Если обозначить $b/(b+1-a) = \varepsilon_1 < 1$, тогда

$$\frac{y_{i+1}^{\varepsilon_1}}{A^{\varepsilon_1} B^{b(1-\varepsilon_1)}} \leq C 2^{i(\lambda+1)(a+b)} y_i,$$

и по итерационной лемме (предложение 5), если выполняется (3.20), имеет место стремление к нулю.

Введем вспомогательные обозначения

$$\begin{aligned} A &\equiv R^{-(\lambda+1)} t^{\frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}}, \quad a = \frac{1}{1 + (\lambda-1)(\lambda+1)/K_{1+\theta}} < 1, \\ B &\equiv R^{Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - (\lambda+1) - q \frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}} \frac{t^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}}, \quad b = \frac{\nu q + \theta}{\lambda + \theta} > 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнены условия лемм 3.1, 3.2, тогда условие (3.20) справедливо, если

$$\left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\lambda-1} R^{-2q(\lambda-1)-H} \frac{t^{\nu q - \lambda}}{f(t)^{\lambda-1}} \leq \delta, \quad (3.22)$$

где δ – фиксированное число и достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3.3, 3.2 следует, что (3.19) выполнено. В формулировке 3.1 положим для произвольного $\hat{R}$: $\hat{R} \geq 2R \geq 4R_0$

$$\tilde{R}_i = \hat{R}_i, \quad R_i = \hat{R}_{i+1}, \quad R_i < \tilde{R}_i, \quad \text{где } \hat{R}_i = \frac{\hat{R}}{4}(1 + 2^{-i}), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = t.$$

Лемма 3.1 дает

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < \tau < t} \int_{\rho \geq \hat{R}_i} u^{\theta+1} dz + \int_0^t \int_{\rho \geq \hat{R}_i} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\rho \geq \hat{R}_i} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u|^\nu dz d\tau \\ &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho \leq \hat{R}_i} u^{\lambda+\theta} dz d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Повторим доказательство леммы 3.3 до некоторой степени. Пусть $\omega = u^{\frac{\nu q + \theta}{q}} \in \dot{\mathfrak{L}}_{1,p}(B_{Z(t)})$ для каждого $t > 0$. Оценим правую часть (3.23), используя неравенство Гёльдера и неравенство Пуанкаре (2.2)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho \leq \hat{R}_i} u^{\lambda+\theta} dz d\tau = \int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho \leq \hat{R}_i} \omega^{\frac{(\lambda+\theta)q}{\nu q + \theta}} dz d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t)) f(\tau)} \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho \leq Z(t)} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L \omega|^q dz \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \hat{R}_{i+1}^{-q \frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \hat{R}_i^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} d\tau \\ &\leq C \hat{R}^{Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - q \frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L \omega|^q dz d\tau \right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}} \frac{t^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q + \theta}}}. \end{aligned}$$

Здесь опять появляется требование к θ . Мы выбрали его достаточно малым, чтобы $-\mu \frac{\lambda+\theta}{\nu q-\lambda} + 1 > 0$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} y^{(i)}(\hat{R}) &\equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{\rho \geq \hat{R}_i} u^{\theta+1} dz + \int_0^t \int_{\rho \geq \hat{R}_i} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\rho \geq \hat{R}_i} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u^\nu|^q dz d\tau + \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1} \leq \rho \leq \hat{R}_i} u^{\lambda+\theta} dz d\tau, \\ \varepsilon &= \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}. \end{aligned}$$

Аналогично лемме 3.3 получим оценку

$$\begin{aligned} y^{(i)}(\hat{R}) &\leq C \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} R^Q \frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta} - q \frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta} \frac{t^{\frac{\nu q - \lambda}{\nu q + \theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}} y^{(i+1)}(\hat{R})^{\frac{\lambda + \theta}{\nu q + \theta}} \\ &= C 2^{i(\lambda+1)} B [y^{(i+1)}(\hat{R})]^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Имея оценки (2.11)–(2.13) и (3.23) можем утверждать, что для $\tau \in (0, t)$

$$y^{(i)}(\hat{R}) \leq C'_1(\hat{R}, t, \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}) \quad \text{сразу для всех } i,$$

откуда по итерационной лемме (предложение 6) имеем

$$[y^{(0)}(\hat{R})]^\varepsilon \leq CB.$$

Оценим с помощью полученного неравенства y_0 из условия (3.20)

$$\begin{aligned} y_0 &\equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{\tilde{U}_0} u^{\theta+1} dz + \int_0^t \int_{\tilde{U}_0} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\tilde{U}_0} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u^\nu|^q dz d\tau + \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_0 \setminus \tilde{U}_0} u^{\lambda+\theta} dz d\tau \\ &\leq y^{(0)} \left(\frac{5R}{4} \right) + y^{(0)}(R) \leq CB^{\frac{1}{\varepsilon}} = CB^{\frac{\nu q + \theta}{\nu q - \lambda}}. \end{aligned}$$

Радиусы подобраны с учетом того, что $\tilde{R}_0 = 5R/8$, $R_0 = R/2$, $\hat{R}_0 = \hat{R}/2$, $\hat{R}_1 = 3\hat{R}/8$. Для доказательства леммы требуется найти условие, при котором справедливо (3.20). С учетом полученной оценки нам потребуется доказать, что

$$(B^{\frac{\nu q + \theta}{\nu q - \lambda}} B^b)^{\frac{1-a}{b}} A^a \leq \delta.$$

Используя второй раз обозначения (3.21) и возведя неравенство в степень

$$\frac{[(\nu q - \lambda)(K_{1+\theta} + \lambda^2 - 1)]}{[(\lambda + 1)(\lambda + \theta)]},$$

получим условие в виде

$$\left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))} \right)^{\lambda-1} R^{(\lambda+1)(1-\nu q)-q(\lambda-1)} \frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}} \leq \delta. \quad (3.24)$$

Доказательство леммы завершено, поскольку $(\lambda + 1)(1 - \nu q) = -q(\lambda - 1) - H$.

Если выбрать R достаточно большим, чтобы выполнялось равенство в условии (3.24), по итерационной лемме (предложение 5) $y_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Откуда следует, что $u = 0$ п.в. вне B_R , $Z(t) \leq R$. Значит, из условия (3.24) следует

$$\frac{t^{\nu q - \lambda}}{f(t)^{\lambda - 1}} \leq \delta[a(R)]^{\lambda - 1} R^H,$$

и справедливо

$$Z(t) \leq \varphi \left(\frac{t^{\nu q - \lambda}}{f(t)^{\lambda - 1}} \right).$$

По определению (1.6) ясно, что верно (1.10). Доказательство теоремы 1 завершено.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Докажем оценку (1.11). Умножим обе части уравнения (1.1) на u^θ , $\theta > 0$, и проинтегрируем на шаре $B_{Z(t)}$. Для $0 < \tau < t$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \theta} \frac{d}{d\tau} \int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz &\leq - \int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u^\nu|^q dz \\ &\leq -C \int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^{\frac{\nu q + \theta}{q}}|^q dz. \end{aligned}$$

Рассмотрим два интеграла. Первый:

$$\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \leq \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\nu q + \theta} |D_L \rho|^q dz \right)^{\frac{1+\theta}{\nu q + \theta}} \left(\int_{B_{Z(t)}} |D_L \rho|^{-q \frac{1+\theta}{\nu q - 1}} dz \right)^{\frac{\nu q - 1}{\nu q + \theta}}.$$

Используем замену переменных из предложения 4. Множество

$$B_R \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi_2 < \pi \\ \dots \\ 0 \leq \varphi_{M+N-1} < \pi \end{array} \right\}, \quad (4.1)$$

обозначим

$$\Psi \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi_2 < \pi \\ \dots \\ 0 \leq \varphi_{M+N-1} < \pi \end{array} \right\}, \quad (4.2)$$

и мы получим оценку второго множителя:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D_L \rho|^{-q \frac{1+\theta}{\nu q - 1}} dz &= \int_{B_R} \left(\frac{\rho^\alpha}{|x|^\alpha} \right)^{q \frac{1+\theta}{\nu q - 1}} J(\rho, \varphi) d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{M+N-1} \\ &= \int \frac{J(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{((\cos \varphi_{M+N-1} \dots \cos \varphi_1)^2 + \dots + (\cos \varphi_{M+N-1} \dots \sin \varphi_{M-1})^2)^{\frac{\alpha q (\theta + 1)}{2(\alpha + 1)(\nu q - 1)}}} \\ &= \int_0^R \rho^{Q-1} d\rho \int \dots \int_\Psi \Phi(\varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_{M+N-1} \leq C R^Q, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\varphi) = \frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_2 \cos^{\frac{2}{\alpha+1}} \varphi_3 \cdots \cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}} \varphi_{M-1} \cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}} \varphi_M \cos^{\frac{M}{\alpha+1}} \varphi_{M+1}}{(\cos \varphi_{M+N-1} \cdots \varphi_{M+1})^{\frac{\alpha q(1+\theta)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}} (\sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \\ \times \frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1} \varphi_{M+2} \cdots \cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2} \varphi_{M+N-1}}{\cos \varphi_M^{\frac{\alpha q(1+\theta)}{(\alpha+1)(\nu q-1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1}} (\cos \varphi_1 \cdots \cos \varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}.$$

Действительно, интеграл по $d\varphi$ может иметь особенности только для $\varphi_j = \varphi_{01j}$, поскольку $\sin \varphi_{01j} = 0$, $j = \overline{M-1, M+N-1}$, и $\varphi_j = \varphi_{02j}$, поскольку $\cos \varphi_{02j} = 0$, $j = \overline{M, M+N-1}$. Рассмотрим эти случаи. В окрестности точки φ_{01j} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна

$$\frac{1}{\sin(\varphi_j - \varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \sim \frac{1}{(\varphi_j - \varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}},$$

т.е. имеет устранимую особенность. В окрестности точки φ_{02M} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна $(\varphi_M - \varphi_{02M})^{\frac{M-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha q(\theta+1)}{(\alpha+1)(\nu q-1)} - \frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима, если

$$M - \frac{\alpha q}{\nu q - 1} > 0, \quad 0 < \theta \leq \frac{M(\nu q - 1) - \alpha q}{\alpha q}.$$

В окрестности точки φ_{02j} , $j = \overline{M+1, M+N-1}$, функция под интегралом

$$\Phi(\varphi) \sim (\varphi_j - \varphi_{02j})^{\frac{M}{\alpha+1} + (j-M-1) - \frac{\alpha q(\theta+1)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}},$$

особенность устранима, если условие

$$M - \frac{\alpha q}{\nu q - 1} > 0, \quad 0 < \theta \leq \frac{M(\nu q - 1) - \alpha q}{\alpha q}$$

в силе. В окрестности точки φ_{02j} , $j = \overline{1, M-1}$, функция под интегралом $\Phi(\varphi) \sim (\varphi_j - \varphi_{02j})^{\frac{j-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима. Значит, интеграл по $d\varphi$ сходится к некоторой постоянной величине. Имеем теперь

$$\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \leq C \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\nu q + \theta} |D_L \rho|^q dz \right)^{\frac{1+\theta}{\nu q + \theta}} Z(t)^{Q \frac{\nu q - 1}{\nu q + \theta}}.$$

Рассмотрим второй интеграл.

$$\begin{aligned} -C \int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^{\frac{\nu q + \theta}{q}}|^q dz &\leq -C \int_{B_{Z(t)}} \frac{a(\rho(z))}{\rho^q} f(\tau) |D_L \rho|^q |u^{\frac{\nu q + \theta}{q}}|^q dz \\ &\leq -C Z(t)^{-q} a(Z(t)) f(\tau) \int_{B_{Z(t)}} |D_L \rho|^q |u^{\frac{\nu q + \theta}{q}}|^q dz \\ &= -C Z(t)^{-q} a(Z(t)) f(\tau) \int_{B_{Z(t)}} |D_L \rho|^q u^{\nu q + \theta} dz. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство типа Харди (2.3). Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \right) \leq -C Z(t)^{-q} a(Z(t)) f(\tau) Z(t)^{-\frac{Q(\nu q - 1)}{1+\theta}} \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \right)^{\frac{\nu q + \theta}{1+\theta}}. \quad (4.3)$$

Решив это дифференциальное неравенство, получим

$$\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \leq CZ(t)^{\frac{q(1+\theta)}{\nu q-1}+Q} a(Z(t))^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}} t^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}} f(t)^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}}.$$

Оценим массу решения

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz &= \int_{B_{Z(t)}} u dz \leq \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1} dz \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \text{mes}^{\frac{\theta}{1+\theta}} \{B_{Z(t)}\} \\ &\leq C \frac{Z(t)^{Q+\frac{q}{\nu q-1}}}{a(Z(t))^{\frac{1}{\nu q-1}} t^{\frac{1}{\nu q-1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

По определению (1.6) ясно, что

$$\begin{aligned} \omega(t)t^{\frac{1}{K}} &= \varphi\left(\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}\right), \quad a(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})^{\lambda-1}(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})^H = \frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}, \\ a(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})f(t) &= \frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\lambda-1}-\frac{H}{K(\lambda-1)}}}{\omega^{\frac{H}{\lambda-1}}(t)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя (4.4), из неравенства (4.5) легко получить (1.11). Получим соответствующую оценку L_∞^{-K} -нормы решения. Известно, следуя предложению 8, что для $t > t_0 = R_0^{-K} \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\lambda-1}$

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}} &\leq C \|u\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}} t^{-\frac{Q}{K}} \leq C \|u\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}} Z(t)^{\frac{Q(\lambda+1)}{K}} t^{-\frac{Q}{K}}, \\ \|u\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}}^{1-\frac{\lambda+1}{K}} &\leq CZ(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} t^{-\frac{1}{\lambda-1}}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

В этой теореме исследуются два случая $\lambda = 1$ и $\nu = 1$, где можно получить оценку массы решения без использования компактности носителя начальной функции.

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz = \int_{B_R} u dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M} \setminus B_R} u dz := E_1(t) + E_2(t).$$

Здесь R – фиксированное число, которое будет выбрано позднее.

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \int_{B_R} u dz \leq \left(\int_{B_R} u^{\nu q} |D_L \rho|^q dz \right)^{\frac{1}{\nu q}} \left(\int_{B_R} |D_L \rho|^{-q \frac{1}{\nu q-1}} dz \right)^{\frac{\nu q-1}{\nu q}} \\ &= I_1^{\frac{1}{\nu q}} I_2^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}. \end{aligned}$$

Используем предложение 3:

$$I_1 \leq \frac{R^q}{a(R)} \int_{B_R} \frac{u^{\nu q} |D_L \rho|^q a(\rho)}{\rho^q} dz \leq C \frac{R^q}{a(R)} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) |D_L u^\nu|^q dz.$$

Рассмотрим второй множитель, используя замену переменных (2.5) из предложения 4. Мы получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B_R} |D_L \rho|^{-q \frac{1}{\nu q - 1}} dz = \int_{B_R} \left(\frac{\rho^\alpha}{|x|^\alpha} \right)^{q \frac{1}{\nu q - 1}} J(\rho, \varphi) d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{M+N-1} \\ &= \int \frac{J(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{((\cos \varphi_{M+N-1} \cdots \cos \varphi_1)^2 + \cdots + (\cos \varphi_{M+N-1} \cdots \sin \varphi_{M-1})^2)^{\frac{\alpha q}{2(\alpha+1)(\nu q - 1)}}} \\ &= \int_0^R \rho^{Q-1} d\rho \iint_{\Psi} \Phi(\varphi) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{M+N-1} \leq CR^Q, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi_2 \cos^{\frac{2}{\alpha+1}} \varphi_3 \cdots \cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}} \varphi_{M-1} \cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}} \varphi_M \cos^{\frac{M}{\alpha+1}} \varphi_{M+1}}{(\cos \varphi_{M+N-1} \cdots \cos \varphi_{M+1})^{\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q - 1)}} (\sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \\ &\quad \times \frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1} \varphi_{M+2} \cdots \cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2} \varphi_{M+N-1}}{\cos \varphi_M^{\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q - 1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1}} (\cos \varphi_1 \cdots \cos \varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}. \end{aligned}$$

Действительно, интеграл по $d\varphi$ может иметь особенности только для $\varphi_j = \varphi_{01j}$, поскольку $\sin \varphi_{01j} = 0$, $j = \overline{M-1, M+N-1}$, и $\varphi_j = \varphi_{02j}$, поскольку $\cos \varphi_{02j} = 0$, $j = \overline{M, M+N-1}$. Рассмотрим эти случаи. В окрестности точки φ_{01j} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна

$$\frac{1}{\sin(\varphi_j - \varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \sim \frac{1}{(\varphi_j - \varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}},$$

т.е. имеет устранимую особенность. В окрестности точки φ_{02M} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна $(\varphi_M - \varphi_{02M})^{\frac{M-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q - 1)} - \frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима, если $M - \alpha q / (\nu q - 1) > 0$. В окрестности точки φ_{02j} , $j = \overline{M+1, M+N-1}$, функция под интегралом

$$\Phi(\varphi) \sim (\varphi_j - \varphi_{02j})^{\frac{M}{\alpha+1} + (j-M-1) - \frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q - 1)}},$$

особенность устранима, если условие $M - \alpha q / (\nu q - 1) > 0$ в силе. В окрестности точки φ_{02j} , $j = \overline{1, M-1}$, функция под интегралом $\Phi(\varphi) \sim (\varphi_j - \varphi_{02j})^{\frac{j-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима. Значит, интеграл по $d\varphi$ сходится к некоторой постоянной величине. В итоге имеем

$$E_1(t) \leq C \left(\frac{R^q}{a(R)f(t)} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q dz \right)^{\frac{1}{\nu q}} R^{Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}. \quad (5.1)$$

Если проинтегрировать уравнение по $\mathbb{R}^{N+M}$ и перебросить производные во втором слагаемом, получим

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz = - \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^\nu|^q dz. \quad (5.2)$$

Тогда имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau) dz \leq C \frac{R^{\frac{q}{\nu q} + Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}} a(R)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(- \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau) dz \right)^{\frac{1}{\nu q}} + E_2(\tau). \quad (5.3)$$

Оценим $E_2(\tau)$ для случая $\nu = 1$. Уравнение примет вид

$$u_t = \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) - a(\rho(z))f(t)|D_L u|^q, \\ (z, t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T_r), \quad \lambda < q < \lambda + 1.$$

Выберем срезающую функцию

$$\xi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < \frac{R}{2}, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > R, \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad |D_L \xi| \leq \frac{C}{R}.$$

Умножим уравнение на ξ^s , где $s = q/(q - \lambda) > \lambda + 1$, и проинтегрируем по частям на множестве $\mathbb{R}^{N+M}$. Затем получим неравенство

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u \xi^s dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u|^q \xi^s dz \leq \frac{C}{R} \int_{\frac{R}{2} \leq \rho \leq R} |D_L u|^\lambda \xi^{s-1} dz.$$

Оценим правую часть, используя неравенство Гёльдера с показателем $p = q/\lambda = s/(s - 1)$ и неравенство Юнга.

$$\begin{aligned} & \frac{C}{R} \int_{\frac{R}{2} \leq \rho \leq R} |D_L u|^\lambda \xi^{s-1} dz \\ & \leq \frac{C}{R} \left(\int_{\frac{R}{2} \leq \rho \leq R} a(\rho)f(\tau)|D_L u|^q \xi^s dz \right)^{\frac{q}{\lambda}} \left(\int_{\frac{R}{2} \leq \rho \leq R} [a(\rho)f(\tau)]^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} dz \right)^{\frac{q-\lambda}{q}} \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u|^q \xi^s dz + \frac{C}{R^{\frac{q}{q-\lambda}}} \int_{\frac{R}{2} \leq \rho \leq R} [a(\rho)f(\tau)]^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} dz. \end{aligned}$$

Получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u \xi^s dz \leq C \frac{R^{Q-\frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}} f(\tau)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}}.$$

Проинтегрируем его на множестве $(0, \tau)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(z, \tau) \xi^s dz & \leq \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \xi^s dz + C \frac{R^{Q-\frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}} \int_0^\tau f(\eta)^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} d\eta \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \xi^s dz + C \frac{\tau R^{Q-\frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}} f(\tau)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}} \equiv \Upsilon(R, \tau) \leq \Upsilon(R, t), \quad 0 < t_1 < \tau < t. \end{aligned}$$

Значит, получаем

$$E_2(R, \tau) \leq \Upsilon(R, t). \quad (5.4)$$

Объединяя оценки E_1 , E_2 , имеем

$$E(\tau) \leq \Upsilon(R, t) + C \frac{R^{\frac{q}{\nu q} + Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}} a(R)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(-\frac{d}{d\tau} E(\tau) \right)^{\frac{1}{\nu q}}. \quad (5.5)$$

Оценим $E_2(\tau)$ для случая $\lambda = 1$. Уравнение примет вид

$$u_t = \operatorname{div}_L(D_L u) - a(\rho(z))f(t)|D_L u|^\nu, \\ (z, t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T_r), \quad 1 < q < 2, \quad \nu q > 1.$$

Выберем срезающую функцию

$$\xi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < R, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > 2R, \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad |D_L \xi| \leq \frac{C}{R}, \quad |\operatorname{div}_L(D_L \xi)| \leq \frac{C}{R^2}.$$

Умножим уравнение на ξ^2 и проинтегрируем по частям на множестве $\mathbb{R}^{N+M} \times (0, \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau) \xi^2 dz + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\eta) |D_L u^\nu|^q \xi^2 dz d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \xi^2 dz + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u \cdot \operatorname{div}_L(D_L \xi^2) dz d\eta \\ &\leq \int_{\rho > R} u_0 dz + \frac{C}{R} \int_0^\tau \int_{2R > \rho > R} u dz d\eta. \end{aligned}$$

Используя (5.1), получим оценку

$$\begin{aligned} & \frac{C}{R^2} \int_0^\tau \int_{2R > \rho} u dz d\eta \\ &\leq \frac{C}{R^2} \int_0^\tau \left(\frac{R^q}{a(R) f(\eta)} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\eta) |D_L u^\nu|^q dz \right)^{\frac{1}{\nu q}} R^Q \frac{\nu q - 1}{\nu q} d\eta \\ &\leq C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q}} \tau^{\frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\eta) |D_L u^\nu|^q dz d\eta \right)^{\frac{1}{\nu q}}. \end{aligned}$$

Применим неравенство Юнга, чтобы получить

$$\begin{aligned} & \int_{\rho > 2R} u(\tau) dz \leq \int_{\rho > R} u_0 dz \\ &+ C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q}} \tau^{\frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\eta) |D_L u^\nu|^q dz d\eta \right)^{\frac{1}{\nu q}} \\ &\leq \int_{\rho > R} u_0 dz + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\eta) |D_L u^\nu|^q dz d\eta + C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q - 1}} \tau^{\frac{1}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q - 1}}} \\ &\leq \int_{\rho > R} u_0 dz + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau) dz - \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 dz \right) + C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q - 1}} \tau^{\frac{1}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q - 1}}}. \end{aligned}$$

Если использовать обозначения, имеем

$$E_2(\tau) \leq \frac{1}{2} \int_{\rho > R} u_0 dz + \frac{1}{2} E(\tau) + C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q - 1}} \tau^{\frac{1}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q - 1}}}.$$

Аналогично предыдущему случаю обозначим

$$\Upsilon(R, \tau) \equiv \frac{1}{2} \int_{\rho > R} u_0 dz + C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q - 1}} \tau^{\frac{1}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(\tau)^{\frac{1}{\nu q - 1}}} \leq \Upsilon(R, t), \quad 0 < t_1 < \tau < t.$$

Объединяя оценки E_1 , E_2 , получим

$$E(\tau) \leq \frac{1}{2} E(\tau) + \Upsilon(R, t) + C \frac{R^{\frac{q}{\nu q} + Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}} a(R)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(-\frac{d}{d\tau} E(\tau) \right)^{\frac{1}{\nu q}}.$$

В обоих случаях ($\lambda = 1$ и $\nu = 1$) справедлива оценка (5.5). Переобозначим в ней $y(\tau) = E(\tau) - \Upsilon(R, t)$. Полученное проинтегрируем от 0 до t и решим

$$y(\tau) \leq C \frac{R^{\frac{q}{\nu q} + Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}} a(R)^{\frac{1}{\nu q}}} (-y_\tau(\tau))^{\frac{1}{\nu q}}, \quad y(t) \leq C \frac{R^{Q + \frac{q}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} t^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q - 1}}}.$$

Отсюда для случая $\nu = 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \leq \int_{\rho > R} u_0 dz + C \frac{t R^{Q - \frac{q}{q - \lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q - \lambda}} f(t)^{\frac{\lambda}{q - \lambda}}} + C \frac{R^{Q + \frac{q}{q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{q - 1}} t^{\frac{1}{q - 1}} f(t)^{\frac{1}{q - 1}}}.$$

Последние два слагаемых совпадают с точностью до константы, если

$$R = R(t): R^H a(R)^{\lambda - 1} = \frac{t^{q - \lambda}}{f(t)^{\lambda - 1}}.$$

Доказательство неравенства (1.13) для случая $\nu = 1$ закончено. Для случая, когда $\lambda = 1$, получается

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t) dz \leq \int_{\rho > R} u_0 dz + C \frac{R^{\frac{Q(\nu q - 1) + q - 2\nu q}{\nu q - 1}} t}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q - 1}}} + C \frac{R^{Q + \frac{q}{\nu q - 1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q - 1}} t^{\frac{1}{\nu q - 1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q - 1}}}.$$

Последние два слагаемых совпадают с точностью до константы, если $R = \sqrt{t}$. Доказательство теоремы 3 закончено.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Проинтегрируем (1.1) по шару $B_{Z(t)}$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{B_{Z(t)}} u dz = - \int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z)) f(t) |D_L u^\nu|^q dz.$$

Используя неравенство (5.1), которое справедливо, если $M - \alpha q / (\nu q - 1) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{Z(t)}} u(z, t) dz &\leq \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\nu q} |D_L \rho|^q dz \right)^{\frac{1}{\nu q}} \left(\int_{B_{Z(t)}} |D_L \rho|^{-q \frac{1}{\nu q - 1}} dz \right)^{\frac{\nu q - 1}{\nu q}} \\ &\leq C Z(t)^{Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}} \left(\frac{Z(t)^q}{a(Z(t)) f(t)} \int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z)) f(t) |D_L u^\nu|^q dz \right)^{\frac{1}{\nu q}}. \end{aligned}$$

Объединив полученные оценки, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{B_{Z(t)}} u dz \leq -C \left(\int_{B_{Z(t)}} u dz \right)^{\nu q} a(Z(t)) Z(t)^{-Q(\nu q - 1) - q} f(t).$$

Обозначим $y(t) = \int_{B_{Z(t)}} u(z, t) dz$, тогда

$$\frac{dy(t)}{dt} y^{-\nu q}(t) \leq -C a(Z(t)) Z(t)^{-Q(\nu q - 1) - q} f(t).$$

Проинтегрировав неравенство на отрезке (t_0, t) , получим

$$y(t) \leq C \left(\int_{t_0}^t \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} d\tau \right)^{-\frac{1}{\nu q-1}},$$

$$\int_{B_{Z(t)}} u dz \leq C \left(\int_{t_0}^t \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} d\tau \right)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

Под интегралом находится произведение двух функций: $f(\tau)$ и убывающей по Z функции $a(Z)/Z^{Q(\nu q-1)+q}$.

Пусть выполняется оценка (1.8), тогда для достаточно больших t справедлива оценка $Z(t) \leq Ct^{\frac{1}{K}}$, откуда

$$\frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} \geq \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}}.$$

Используя последнее неравенство, получим,

$$\int_{t_0}^t \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} d\tau \geq C \int_{t_0}^t \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}} d\tau,$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u dz \leq C \left(\int_{t_0}^t \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}} d\tau \right)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

В случае, если существуют $C > 0$, $\varrho \in (0, 1)$ такие, что $C\varrho \leq \omega(t) \leq C$ для достаточно больших t , $t \geq t_0 = \|u_0\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}^{\lambda-1}/R_0^K$, имеем

$$\frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} \geq C \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}} = C \frac{1}{\tau}, \quad \int_{B_{Z(t)}} u dz \leq C \left(\int_{t_0}^t \tau^{-1} d\tau \right)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

Теорема доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 5

ЛЕММА 7.1. Пусть u – решение уравнения (1.1). Тогда $u(z, t_0) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^{N+M}$ и для любого конечного $t_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует t_0 такое, что $\|u(t_0)\|_1 = 0$, $\|u(t)\|_1 > 0$ для $t < t_0$. Пусть ϑ , $0 < \vartheta < 1$, – параметр. Введем обозначение

$$E_\vartheta(t) = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)^{1+\vartheta} dz.$$

Тогда интегрирование по частям уравнения по всему $\mathbb{R}^{N+M}$ дает (5.2), оценим интеграл справа, используя неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^\nu|^q dz &= \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(t)|\nu u^{\nu-1} D_L u|^q u^{\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} u^{-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} dz \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz \right)^{\frac{q}{\lambda+1}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} [u^{(\nu-1)q - \frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} dz \right)^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}} \\ &= CH_1^{\frac{q}{\lambda+1}} H_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}. \end{aligned}$$

Оценим каждый множитель. Умножим уравнение (1.1) на u^ϑ и, проинтегрировав по $\mathbb{R}^{N+M}$, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{1+\vartheta} dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(t) |D_L u^\nu|^q u^\vartheta dz = 0. \quad (7.1)$$

Откуда имеем

$$H_1 \leq -C \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{1+\vartheta} dz.$$

Для оценки второго множителя используем предложение 7.

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} u^{\frac{(\nu-1)q(\lambda+1)}{\lambda+1-q} - \frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1-q} - 1 + 1} dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(z, t) a(C \|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}} t^{\frac{1}{K}}) f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \|u\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}} dz \\ &= \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} a(C \|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}} t^{\frac{1}{K}}) f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} (C \|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}} t^{-\frac{Q}{K}})^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}} \\ &\leq C(t_0, \|u_0\|_1) \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} H_1^{\frac{q}{\lambda+1}} H_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}} &\leq C \left(-\frac{d}{dt} E_\vartheta(t) \right)^{\frac{q}{\lambda+1}} (C \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}})^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}} \\ &\leq C_\sigma \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} - \sigma \frac{d}{dt} E_\vartheta(t), \end{aligned}$$

σ будет выбрана позднее. Имеем

$$\frac{d}{d\tau} \|u(\tau)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \geq \sigma \frac{d}{d\tau} E_\vartheta(\tau) - C_\sigma \|u(\tau)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}.$$

Проинтегрируем полученное неравенство по интервалу (t, t_0) , где t близко к t_0 , $t < t_0$.

$$\|u(t_0)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} - \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \geq \sigma E_\vartheta(t_0) - \sigma E_\vartheta(t) - C_\sigma \int_t^{t_0} \|u(\tau)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} d\tau.$$

Поскольку очевидно, что $\|u(\tau)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}$ убывает, так как производная отрицательна (см. (5.2)), имеем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} &\leq \sigma E_\vartheta(t) + C_\sigma(t_0 - t) \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \\ &\leq \sigma C^\vartheta \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} + C_\sigma(t_0 - t) \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}. \end{aligned}$$

Выберем σ , $\sigma C(t_0, \|u_0\|, 1)^\vartheta < 1$, и разделим неравенство на $\|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} > 0$. Получим $1 \leq \sigma C(t_0, \|u_0\|, 1)^\vartheta + C_\sigma(t_0 - t)$, при $t \rightarrow t_0$ приходим к противоречию. Лемма доказана.

Проинтегрируем уравнение (1.1) на множестве $\mathbb{R}^{N+M} \times (t_1, t)$. Аналогично доказанному в лемме 7.1, получим

$$\|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} - \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} = \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q dz d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\tau) |\nu u^{\nu-1} D_L u|^q u^{\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} u^{-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} dz d\tau \\
 &\leq C \left(\int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{q}{\lambda+1}} \\
 &\quad \times \left(\int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} [u^{(\nu-1)q - \frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} dz d\tau \right)^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}} \\
 &= CP_1^{\frac{q}{\lambda+1}} P_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}.
 \end{aligned}$$

Используя (7.1), имеем

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dz d\tau \leq C \|u^{1+\vartheta}(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \\
 &\leq C \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \|u_0\|_1^{\frac{(\lambda+1)\vartheta}{K}} t_1^{-\frac{Q\vartheta}{K}}.
 \end{aligned}$$

Пусть выполняется оценка (1.8), тогда для достаточно больших t справедлива оценка $Z(t) \leq Ct^{\frac{1}{K}} \leq C\omega(t)t^{\frac{1}{K}}$. Используя предложение 8 и закон сохранения массы для суперзадачи без демпфирования, имеем

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} u^{\frac{(\nu-1)q(\lambda+1)}{\lambda+1-q} - \frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1-q}} dz d\tau \\
 &\leq \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \int_{t_1}^t Ca(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \|u(\tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}} d\tau \\
 &\leq \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \int_{t_1}^t Ca(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Используя равенство (4.5), получим

$$a(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}} = \frac{\tau^{\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}}}{\tau \omega^{\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}}(\tau)}.$$

Если ϑ выбрать достаточно маленьким, то

$$\begin{aligned}
 &a(\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}} \\
 &= \tau^{-1-\epsilon \frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}} \tau^{\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}} = \tau^{-1-\left(\epsilon \frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)} - \frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\right)}, \\
 &\quad -\left(\epsilon \frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)} - \frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\right) < 0, \\
 &P_2 \leq \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} C(\|u_0\|_1) t_1^{-\left(\epsilon \frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)} - \frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\right)}, \\
 &\|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \leq \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} + C\|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} t_1^{-\epsilon \frac{H}{\lambda-1}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, при достаточно больших t_1 , имеем

$$\|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \leq \|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} + \frac{1}{2} \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}.$$

Иначе говоря, мы доказали, что $\|u(t)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \geq \frac{1}{2} \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}}$, $t > t_1$. По лемме 7.1

$$\frac{1}{2} \|u(t_1)\|_{1, \mathbb{R}^{N+M}} \equiv C > 0,$$

так как $t_1 > 0$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] N. Garofalo, D.-M. Nhieu, “Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49:10** (1996), 1081–1144.
- [2] I. Kombe, *Hardy and Rellich type inequalities with remainders for Baouendi–Grushin vector fields*, 2007, arXiv:0704.1343.
- [3] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42:2** (1987), 135–176; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, “Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **42:2** (1987), 169–222.
- [4] В. В. Грушин, “Об одном классе гипоеллиптических операторов”, *Матем. сб.*, **83(125):3(11)** (1970), 456–473; англ. пер.: V. V. Grušin, “On a class of hypoelliptic operators”, *Math. USSR-Sb.*, **12:3** (1970), 458–476.
- [5] M. S. Baouendi, “Sur une classe d’opérateurs elliptiques dégénérés”, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 45–87.
- [6] B. Franchi, E. Lanconelli, “Une métrique associée à une classe d’opérateurs elliptiques degeneres”, *Conference on linear partial and pseudodifferential operators* (Torino, 1982), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Università e Politecnico, Toronto*, 1984, 105–114.
- [7] B. Franchi, E. Lanconelli, “Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **10:4** (1983), 523–541.
- [8] В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев, “Локальные и глобальные оценки решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина”, *Матем. заметки*, **85:3** (2009), 395–407; англ. пер.: V. A. Markasheva, A. F. Tedeev, “Local and global estimates of the solutions of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations with a nonlinear operator of Baouendi–Grushin type”, *Math. Notes*, **85:3** (2009), 385–396.
- [9] В. А. Маркашева, “Локальная гёльдеровость решений квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина, I”, *Тр. ИПММ*, **16**, ИПММ НАН Украины, Донецк, 2008, 124–135.
- [10] В. А. Маркашева, “Локальная гёльдеровость решений квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина, II”, *Тр. ИПММ*, **17**, ИПММ НАН Украины, Донецк, 2008, 128–143.
- [11] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, “Asymptotic estimates of solutions of $u_t - \frac{1}{2} \Delta u = -|\nabla u|$ in $R_+ \times R^d$, $d \geq 2$ ”, *J. Funct. Anal.*, **144:2** (1997), 301–324.
- [12] Th. Gallay, Ph. Laurencot, “Asymptotic behavior for a viscous Hamilton–Jacobi equation with critical exponent”, *Indiana Univ. Math. J.*, **56:1** (2007), 459–479.
- [13] M. Ben-Artzi, “Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation”, *Nonlinear Anal.*, **19:8** (1992), 763–768.
- [14] G. Barles, F. Da Lio, “On the generalized Dirichlet problem for viscous Hamilton–Jacobi equations”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **83:1** (2004), 53–75.

- [15] L. Amour, M. Ben-Artzi, “Global existence and decay for viscous Hamilton–Jacobi equations”, *Nonlinear Anal.*, **31**:5–6 (1998), 621–628.
- [16] S. Benachour, Ph. Laurençot, “Global solutions to viscous Hamilton-Jacobi equations with irregular initial data”, *Comm. Partial Differential Equations*, **24**:11–12 (1999), 1999–2021.
- [17] M. Ben-Artzi, H. Koch, “Decay of mass for a semilinear parabolic equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **24**:5–6 (1999), 869–881.
- [18] A. Dall’Aglio, D. Giachetti, S. Segura de León, “Global existence for parabolic problems involving the p -Laplacian and a critical gradient term”, *Indiana Univ. Math. J.*, **58**:1 (2009), 1–48.
- [19] Ph. Laurençot, J. Vázquez, “Localized non-diffusive asymptotic patterns for nonlinear parabolic equations with gradient absorption”, *J. Dynam. Differential Equations*, **19**:4 (2007), 985–1005.
- [20] S. Snoussi, S. Tayachi, “Large time behavior of solutions for parabolic equations with nonlinear gradient terms”, *Hokkaido Math. J.*, **36**:2 (2007), 311–344.
- [21] J.-Ph. Bartier, Ph. Laurençot, “Gradient estimates for a degenerate parabolic equation with gradient absorption and applications”, *J. Funct. Anal.*, **254**:3 (2008), 851–878.
- [22] Ch. Stinner, “Convergence to steady states in a viscous Hamilton-Jacobi equation with degenerate diffusion”, *J. Differential Equations*, **248**:2 (2010), 209–228.
- [23] D. Andreucci, A. F. Tedeev, M. Ughi, “The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping”, *Укр. матем. журн.*, **1**:1 (2004), 1–19; англ. пер.: D. Andreucci, A. F. Tedeev, M. Ughi, “The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping”, *Ukr. Math. Bull.*, **1**:1 (2004), 1–23.
- [24] А. Ф. Тедеев, “Начально-краевые задачи для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений с демпфированием. Задача Неймана”, *Укр. матем. журн.*, **58**:2 (2006), 272–282; англ. пер.: A. F. Tedeev, “Initial-boundary value problems for quasilinear degenerate parabolic equations with damping. The Neumann problem”, *Ukrainian Math. J.*, **58**:2 (2006), 304–317.
- [25] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity”, *Interfaces Free Bound.*, **3**:3 (2001), 233–264.
- [26] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity”, *Adv. Differential Equations*, **5**:7–9 (2000), 833–860.
- [27] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary”, *J. Math. Anal. Appl.*, **231**:2 (1999), 543–567.
- [28] D. S. Jerison, “The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group. II”, *J. Funct. Anal.*, **43**:2 (1981), 224–257.
- [29] S. K. Vodopyanov, “Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2007, 303–344.
- [30] Е. А. Плотникова, “Интегральные представления и обобщенное неравенство Пуанкаре на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:2 (2008), 420–436; англ. пер.: E. A. Plotnikova, “Integral representations and the generalized Poincare inequality on Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **49**:2 (2008), 339–352.
- [31] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [32] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [33] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [34] D. Andreucci, “Degenerate parabolic equations with initial data measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:10 (1997), 3911–3923.
- [35] H. Shang, F. Li, “On the Cauchy problem for the evolution p -Laplacian equations with gradient term and source and measures as initial data”, *Nonlinear Anal.*, **72**:7–8 (2010), 3396–3411.

В. А. Маркашева (V. A. Markasheva)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: w9071981@yandex.ru

Поступила в редакцию

26.05.2010 и 26.08.2011

А. Ф. Тедеев (A. F. Tedeev)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: tedeev@iamm.ac.donetsk.ua