Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Пятков, О существовании максимальных семидефинитных инвариантных подпространств для J -диссипативных операторов, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 2, 87–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:02:04

УДК 517.98+517.982.224

С. Г. Пятков

О существовании максимальных семидефинитных инвариантных подпространств для J -диссипативных операторов

Для определенного класса операторов мы приводим некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы J -диссипативный оператор в пространстве Крейна имел максимальные семидефинитные инвариантные подпространства. Исследуются полугрупповые свойства сужений оператора на эти инвариантные подпространства. Даны приложения этих результатов к случаю, когда оператор допускает матричное представление относительно канонического разложения пространства. Основные условия формулируются в терминах теории интерполяции банаховых пространств.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: диссипативный оператор, пространство Понтрягина, пространство Крейна, инвариантное подпространство, аналитическая полугруппа.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о существовании инвариантных семидефинитных подпространств для J -диссипативных операторов, заданных в пространствах Крейна. Напомним, что пространство Крейна (см. [1]) – это гильбертово пространство H , где наряду с обычным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ задано также и индефинитное скалярное произведение (индефинитная метрика) $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = P^+ - P^-$ и $P^\pm$ – ортопроекторы в H , $P^+ + P^- = I$ (см. [1]). Положим $H^\pm = R(P^\pm)$. Оператор J называется канонической симметрией. Пространство Крейна называется пространством Понтрягина, если $\dim R(P^+) < \infty$ или $\dim R(P^-) < \infty$, а величина $\kappa = \min(\dim R(P^+), \dim R(P^-))$ называется рангом индефинитности пространства Понтрягина Π_κ . Говорим, что подпространство $M \subset H$ неотрицательно (положительно, равномерно положительно), если $[x, x] \geq 0$ ($[x, x] > 0$, $[x, x] > \delta \|x\|^2$, $\delta > 0$) для всех $x \in M$. Аналогичным образом определяем неположительные, отрицательные и равномерно отрицательные подпространства. Говорим, что M – максимальное неположительное (неотрицательное, положительное и т.д.) подпространство, если оно неположительно (неотрицательно, положительно) и не допускает нетривиальных неположительных (неотрицательных, положительных) расширений. Плотнo определенный оператор $A: H \rightarrow H$ назовем диссипативным (строго диссипативным, равномерно диссипативным), если $-\operatorname{Re}(Au, u) \geq 0$ ($-\operatorname{Re}(Au, u) > 0$, $-\operatorname{Re}(Au, u) \geq \delta \|u\|^2$, $\delta > 0$)

для всех $u \in D(A)$, и J -диссипативным (строго J -диссипативным, равномерно J -диссипативным), если оператор JA диссипативен (строго диссипативен, равномерно диссипативен). Оператор $A: H \rightarrow H$ назовем максимальным диссипативным (максимальным J -диссипативным), если он диссипативен (J -диссипативен) и не допускает нетривиальных диссипативных (J -диссипативных) расширений. Пусть L – J -диссипативный оператор. Назовем подпространство $M \subset H$ инвариантным подпространством L , если $M \cap D(L)$ плотно в M и $L(M \cap D(L)) \subset M$.

Основной вопрос, рассматриваемый в работе, есть вопрос о существовании у данного J -диссипативного оператора максимальных семидефинитных (т.е. знакоопределенных) инвариантных подпространств. Первые результаты в этом направлении появились сравнительно давно и были получены в работе Понтрягина [2], где было показано, что любой J -самосопряженный в пространстве Понтрягина (пусть, например, $\dim H^+ = \kappa < \infty$) оператор L имеет максимальное неотрицательное инвариантное подпространство M , $\dim M = \kappa$, такое, что спектр оператора $L|_M$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Работы Понтрягина обобщались для различных классов операторов разными авторами (см. [3]–[11]). Достаточно подробная библиография и ряд результатов имеется в книге [1]. Среди последних работ отметим работы [11]–[14], где и получены наиболее общие на сегодняшний день результаты. В этих работах все пространство H отождествлялось с декартовым произведением $H^+ \times H^-$, а оператор L – с матричным оператором $L: H^+ \times H^- \rightarrow H^+ \times H^-$ вида

$$L = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$A_{11} = P^+LP^+, \quad A_{12} = P^+LP^-, \quad A_{21} = P^-LP^+, \quad A_{22} = P^-LP^-.$$

В этом случае каноническая симметрия имеет вид $J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, I – тождественный оператор. Основное условие существования максимального неотрицательного инвариантного подпространства оператора L из работы [14] – это условие компактности оператора $A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}$ для некоторого μ из левой полуплоскости. Для операторов из определенного класса мы приводим как достаточные условия существования максимальных семидефинитных подпространств, так и необходимые. В отличие от вышеупомянутых работ, наши результаты основаны на теории интерполяции банаховых пространств, и эти условия связаны с выполнением некоторых интерполяционных равенств. Мы также исследуем свойства сужений оператора на эти инвариантные подпространства. Исследование последней проблемы было инициировано в работе [14]. Полученные результаты затем применяются для исследования операторов, представимых в виде (1.1). При этом условие компактности оператора $A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}$ не возникает, а возникают условия подчиненности (в определенном смысле) операторов A_{12} и A_{21} операторам A_{11} и A_{22} . Фактически, условие подчиненности – это условие диагонального преобладания (в определенном смысле) операторной матрицы в (1.1). В части достаточности результаты являются усилением результатов работы [15] (см. также [16], [17]).

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Для данных банаховых пространств X, Y через $L(X, Y)$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов, определенных на X со значениями в Y . Если $X = Y$, пишем $L(X)$ вместо $L(X, X)$. Через $\sigma(L)$, $\rho(L)$ обозначаем спектр и резольвентное множество оператора L , а через $D(L)$, $R(L)$ – область определения и область значений $L: X \rightarrow X$. Если $M \subset X$ – подпространство, то под сужением оператора L на M понимаем оператор $L|_M: M \rightarrow X$ с областью определения $D(L|_M) = D(L) \cap M$, совпадающий с L на $D(L|_M)$. Оператор A такой, что $-A$ диссипативен (максимально диссипативен), называется аккретивным (максимальным аккретивным). Поэтому, с учетом знака, утверждения, справедливые для аккретивного оператора, справедливы и для диссипативного оператора. Далее слово “максимальный” заменяем на букву m и, таким образом, пишем m -диссипативный вместо “максимальный диссипативный”. Если A – некоторый оператор в пространстве Крейна H , то через A^* обозначаем сопряженный оператор, а через A^c – сопряженный относительно индефинитной метрики в H , который обладает обычными свойствами сопряженного оператора (см. [1]). Пусть A_0 и A_1 – два банаховых пространства, непрерывно вложенных в отделимое топологическое линейное пространство E : $A_0 \subset E$, $A_1 \subset E$. Такая пара $\{A_0, A_1\}$ называется интерполяционной парой. Напомним определение интерполяционного пространства $(A_0, A_1)_{\theta, q}$. Опишем K -метод. Для всякого t , $0 < t < \infty$, функционал

$$K(t, a, A_0, A_1) = K(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a_0 \in A_0, \quad a_1 \in A_1,$$

определяет норму в пространстве $A_0 + A_1$, эквивалентную его стандартной норме, т.е. норме $\inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1})$, $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ (см. [18; п. 1.2.1]). Пусть $0 < \theta < 1$. При $1 \leq q < \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ a \mid a \in A_0 + A_1, \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Прежде всего опишем некоторые факты, которые мы будем использовать в работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H – гильбертово пространство (пространство Крейна).

1. Максимальный диссипативный (J -диссипативный) оператор A всегда замкнут, и если A m -диссипативен, то $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(A)$ (см. [19; предложение С.7.2]).

2. Если A m -диссипативен, то операторы $A + i\omega I$, $\omega \in \mathbb{R}$, и $A - \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, m -диссипативны (см. [19; предложение С.7.2]).

3. Если A m - J -диссипативен, то и оператор $A + i\omega I$, $\omega \in \mathbb{R}$, m - J -диссипативен. (Это свойство легко вытекает из определения.)

4. Если A m - J -диссипативен и $\ker A = \{0\}$, то и $\ker A^c = \{0\}$ (см. [1; гл. 2, § 2, следствие 2.17]; отметим, что в [1] используется другое определение J -диссипативного оператора: требуется, чтобы $\operatorname{Im}[Au, u] \geq 0$ для $u \in D(A)$).

5. Если A – максимальный равномерно диссипативный (J -диссипативный) оператор, то $i\mathbb{R} \in \rho(A)$ (см. [1; гл. 2, § 2, утверждение 2.32]).

6. Если A m -диссипативен (m - J -диссипативен), то оператор A инъективен тогда и только тогда, когда $R(A)$ плотна в H (см. [19; предложение 7.0.1]).

7. Если A m -диссипативен (m - J -диссипативен), то оператор A^* (A^c) также m -диссипативен (m - J -диссипативен) (см. [19; предложение C.7.2] или [1; гл. 2, § 2, предложение 2.7]).

Пусть H – комплексное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $L: H \rightarrow H$ – замкнутый плотно определенный оператор и $\rho(L) \neq \emptyset$. Возьмем $\lambda \in \rho(L)$. В пространстве $H_k = D((L - \lambda I)^k)$, где k – натуральное число, вводим норму $\|u\|_{H_k} = \|(L - \lambda I)^k u\|$. Если $k < 0$ – целое число, то через H_k обозначим пополнение H по норме $\|u\|_{H_k} = \|(L - \lambda I)^k u\|$. Используя резольвентное тождество Гильберта

$$(L - \lambda I)^{-1} - (L - \gamma I)^{-1} = (\lambda - \gamma)(L - \lambda I)^{-1}(L - \gamma I)^{-1}, \quad (2.1)$$

можно показать, что норма в H_k не зависит от параметра $\lambda \in \rho(L)$, и, таким образом, определение корректно. Пространства H_k были, по-видимому, впервые введены и описаны в работе [20; § 5]. В настоящее время пространства H_k при $k < 0$ часто называют экстраполяционными, а всю совокупность пространств $\{H_k\}$ – башней Соболева (см. [21]). Исходя из определений легко показать, что норма в пространстве H_{-k} , $k > 0$, совпадает с нормой

$$\|u\|_{H_{-k}} = \sup_{v \in D((L^* - \bar{\lambda} I)^k)} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{D((L^* - \bar{\lambda} I)^k)}}.$$

При дополнительном требовании, что оператор L позитивен, т.е. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \subset \rho(L)$, и справедливо неравенство

$$\|(L - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{1 + |\lambda|} \quad \forall \lambda \leq 0, \quad (2.2)$$

в работе [20] также описаны и интерполяционные пространства $(H_m, H_n)_{\theta, p}$. Описание эквивалентных норм в этих интерполяционных пространствах приведено, например, в [18; § 1.14.3]. Другие классы пространств, где по существу используется секториальность оператора, описаны, например, в [19] (см. также библиографию в [19] и [22]). Там также описаны и их интерполяционные свойства, и, в частности, другой класс эквивалентных норм. Напомним, что оператор $L: H \rightarrow H$ секториален, если найдется такое $\theta \in [0, \pi)$, что $\sigma(L) \subset \bar{S}_\theta$, $S_\theta = \{z : |\arg z| < \theta\}$, $\mathbb{C} \setminus \bar{S}_\theta \subset \rho(L)$ и для любого $\omega > \theta$ найдется постоянная $c(\omega)$ такая, что

$$\|(L - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_\omega. \quad (2.3)$$

Пусть L секториален и инъективен (не требуется, чтобы $0 \in \rho(L)$). Аналог пространства H_1 в этом случае есть пространство D_L – пополнение $D(L)$

по норме $\|Lu\| = \|u\|_{D_L}$, а пространства H_{-1} – пополнение $R(L)$ по норме $\|L^{-1}u\| = \|u\|_{R_L}$. Если $0 \in \rho(L)$, то $H_1 = D_L$, $H_{-1} = R_L$, иначе эти равенства не имеют места.

Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор в пространстве Крейна H с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где J – каноническая симметрия и $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H . Определим пространство F_1 как пополнение $D(L)$ по норме

$$\|u\|_{F_1}^2 = -\operatorname{Re}[Lu, u] + \|u\|^2, \quad \|u\| = \|u\|_H,$$

и пространство F_{-1} как пополнение H по норме

$$\|u\|_{F_{-1}} = \sup_{v \in F_1} \frac{|[u, v]|}{\|v\|_{F_1}}.$$

Пространство F_1 можно отождествить с плотным подпространством пространства H , если выполнено условие

$$\exists c > 0 : \quad |[Lu, v]| \leq c\|u\|_{F_1} \|v\|_{F_1} \quad \forall u, v \in D(L). \quad (2.4)$$

Доказательство может быть найдено в [16; § 4 гл. 1]. Оно также вытекает из рассуждений и утверждений [19; п. 7.3.2] (например, из утверждения 7.3.4, где достаточно взять $A = -JL + I$).

Отметим более или менее очевидный факт, что условие (2.4) эквивалентно условию

$$\exists c > 0 : \quad |\operatorname{Im}[Lu, u]| \leq c\|u\|_{F_1}^2 \quad \forall u \in D(L). \quad (2.5)$$

Достаточно взять полуторалинейную форму $a(u, v) = -[Lu, v] + (u, v)$ и применить предложение С.1.3 в [19].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть L – m -диссипативный оператор. Тогда $-L$ секториален с $\theta = \pi/2$ и

$$(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = H. \quad (2.6)$$

Если, дополнительно, он инъективен, то

$$(D_L, R_L)_{1/2,2} = H. \quad (2.7)$$

Утверждение о секториальности с $\theta = \pi/2$ приведено в [19; п. 7.1.1]. Равенство (2.7) – следствие теорем 2.2 и 4.2 в [22] и рассуждений после теоремы 2.2 (см. также п. 7.3.1, теорему 7.3.1 и равенство (7.18) в [19]). Рассмотрим в качестве оператора L оператор $L - \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, который m -диссипативен и $0 \in \rho(-L + \varepsilon I)$. Воспользовавшись (2.7), получим (2.6).

Пусть вложение $H_1 \subset H$ гильбертовых пространств плотно. По паре H_1, H можно построить негативное пространство H'_1 как пополнение H по норме

$$\|u\|_{H'_1} = \sup_{v \in H_1} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{H_1}},$$

где скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в H . В этой ситуации имеет место следующее известное утверждение (см. [23; гл. 1] и [24; равенство (2.2)]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пространство антилинейных непрерывных функционалов над H_1 можно отождествить с H'_1 , норма в H_1 эквивалентна норме $\sup_{v \in H'_1} |(v, u)| / \|v\|_{H'_1}$ и*

$$(H_1, H'_1)_{1/2,2} = H. \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор и выполнено условие (2.4). Тогда*

$$(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = H \quad (2.9)$$

тогда и только тогда, когда

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = H. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из m - J -диссипативности L вытекает m -диссипативность JL в H . Тогда и оператор $JL - \varepsilon I$ m -диссипативен (свойство 2, предложение 1) для любого $\varepsilon \geq 0$. Таким образом, операторы $L - \varepsilon J$ и, в частности, оператор $L_0 = L - J$ m - J -диссипативны и $D(L_0) = D(L)$. Более того, оператор L_0 равномерно J -диссипативен и

$$-\operatorname{Re}[L_0 u, u] = \|u\|_{F_1}^2 \quad \forall u \in D(L). \quad (2.11)$$

Тогда по свойству 5 предложения 1 имеем, что $i\mathbb{R} \in \rho(L_0)$. Запишем норму в пространстве H_{-1} для $u \in H$. Имеем

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{v \in D(L^*)} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{D(L^*)}} = \sup_{v \in D(L^*)} \frac{|((L - J)^{-1}u, (L^* - J)v)|}{\|v\|_{D(L^*)}}.$$

Используя тот факт, что нормы $\|(L^* - J)v\|$, $\|v\|_{D(L^*)}$ эквивалентны, из предыдущего равенства получим оценку вида $\|u\|_{H_{-1}} \leq c\|(L - J)^{-1}u\| \leq c_1\|u\|_{H_{-1}}$ для всех $u \in H$ и некоторых постоянных c, c_1 . Таким образом, в H_{-1} можем ввести эквивалентную норму $\|(L - J)^{-1}u\|$. Оператор L_0 удовлетворяет всем условиям леммы 4.2 в [16; гл. 1] (или леммы 4.6 в [17]), из которой и вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор, удовлетворяющий условию (2.4). Тогда L допускает продолжение до оператора $\tilde{L}$ класса $L(F_1, F_{-1})$ и*

$$D(L) = \{u \in F_1 : \tilde{L}u \in H\}. \quad (2.12)$$

Если L^c – сопряженный относительно индефинитной метрики оператор, то L^c – m - J -диссипативный оператор, удовлетворяющий условию (2.4), причем $D(L^c) \subset F_1$ и вложение плотно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.4) вытекает оценка

$$\|Lu\|_{F_{-1}} \leq c\|u\|_{F_1}. \quad (2.13)$$

Отсюда и из плотности $D(L)$ в F_1 получим, что оператор L допускает продолжение до оператора $\tilde{L} \in L(F_1, F_{-1})$ и справедливо неравенство $-\operatorname{Re}[\tilde{L}u, u] \geq 0$

для всех $u \in F_1$. Из максимальной J -диссипативности L вытекает (2.12). Действительно, пусть $D_0 = \{u \in F_1 : \tilde{L}u \in H\}$. Очевидно, что $D(L) \subset D_0$. Оператор $\tilde{L}: H \rightarrow H$ с областью определения D_0 J -диссипативен и является расширением L . В силу максимальной J -диссипативности L заключаем, что $\tilde{L} = L$ и значит выполнено (2.12). Рассмотрим оператор $L_0 = L - J$. Как уже было отмечено в предыдущей лемме, L_0 – максимальный равномерно J диссипативный оператор с $D(L_0) = D(L)$. По свойству 5 предложения 1 $i\mathbb{R} \in \rho(L_0)$. Покажем, что $\tilde{L}_0 = \tilde{L} - J$ – изоморфизм F_1 на F_{-1} . Действительно, если $f \in F_{-1}$, то выражение $[f, v]$ – антилинейный непрерывный функционал над F_1 , и из теоремы Лакса–Мильграма (см., например, [19; теорема С.5.3]) вытекает, что найдется $u \in F_1$ такое, что $[\tilde{L}_0 u, v] = [f, v]$ для всех $v \in F_1$. Далее обозначаем L_0 и $\tilde{L}_0$ одним и тем же символом L_0 . В силу утверждений, содержащихся в [1; гл. 2, § 1], $(L_0^{-1})^c = (L_0^c)^{-1}$. Отметим, что негативное пространство F'_1 , построенное по F_1 и H , есть пополнение H по норме $\|Ju\|_{F_{-1}}$, и, значит, J – изоморфизм F_{-1} на F'_1 с $J^{-1} = J$. Используя предложение 3, получим, что любой антилинейный непрерывный функционал над F_1 задается в виде $l(v) = [f, v]$, $f \in F_{-1}$, а любой линейный непрерывный функционал над F_{-1} может быть задан в виде $l(f) = [f, v]$, $v \in F_1$. Причем мы имеем, что норма в F_1 эквивалентна норме $\|v\|_{F_1} = \sup_{f \in F_{-1}} |[f, v]| / \|f\|_{F_{-1}}$. Имеем

$$[L_0^{-1}u, v] = [u, (L_0^c)^{-1}v] \quad \forall u, v \in H. \quad (2.14)$$

Поскольку L_0 – изоморфизм F_1 и F_{-1} , из этого равенства легко заключить, что $(L_0^c)^{-1}v \in F_1$. Действительно, левая часть в (2.14) – линейный непрерывный функционал $l(u)$ над F_{-1} . Следовательно, найдется элемент $g \in F_1$ такой, что

$$[L_0^{-1}u, v] = [u, g] \quad \forall u \in F_{-1}. \quad (2.15)$$

Тогда из (2.14) вытекает, что $[u, g] = [u, (L_0^c)^{-1}v]$ для всех $u \in H$. Следовательно, $g = (L_0^c)^{-1}v \in F_1$. Поскольку любой элемент из $D(L^c)$ может быть представлен в виде $(L_0^c)^{-1}v$, $v \in H$, то $D(L_0^c) \subset F_1$, и тогда из равенства (2.14) вытекает, что $D(L_0^c)$ плотно в F_1 . Действительно, если это не так, то найдется $u \in F_{-1}$ такой, что правая часть в (2.14) равна нулю для всех $v \in H$. Тогда и левая часть равна нулю, и, значит, $L_0^{-1}u = 0$, т.е. $u = 0$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор, выполнено условие (2.4) и найдется постоянная $m > 0$ такая, что

$$\|u\|^2 \leq m(-\operatorname{Re}[Lu, u] + \|u\|_{F_{-1}}^2) \quad \forall u \in D(L). \quad (2.16)$$

Тогда найдется $\omega_0 \geq 0$ такое, что

- а) $I_{\omega_0} = \{i\omega : |\omega| \geq \omega_0\} \subset \rho(L)$;
- б) если $i\omega \in \rho(L)$, $\omega \in \mathbb{R}$, то оператор $L - i\omega I: F_1 \rightarrow F_{-1}$ непрерывно обратим;
- с) найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|(L - i\omega I)^{-1}u\|_{F_{-1}} \leq \frac{c\|u\|_{F_{-1}}}{1 + |\omega|} \quad \forall \omega \in I_{\omega_0}, \quad \forall u \in F_{-1}; \quad (2.17)$$

д) если $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что оценка с) справедлива при всех $\omega \in \mathbb{R}$;

е) если выполнено одно из условий (2.9), (2.10), то найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|(L - i\omega I)^{-1}u\| \leq \frac{c\|u\|}{1 + |\omega|} \quad \forall \omega \in I_{\omega_0}, \quad \forall u \in H, \quad (2.18)$$

а если, кроме того, $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$, то

$$\exists c > 0 : \|(L - i\omega I)^{-1}u\| \leq \frac{c\|u\|}{1 + |\omega|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in H. \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$Lu - i\omega u = f, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

где $u \in D(L)$. Отсюда вытекает равенство $-\operatorname{Re}[Lu, u] = -\operatorname{Re}[f, u]$, которое ввиду (2.16) можно переписать в виде

$$-\operatorname{Re}[Lu, u] + \delta\|u\|^2 \leq -\operatorname{Re}[f, u] - \delta m \operatorname{Re}[Lu, u] + \delta m\|u\|_{F_{-1}}^2, \quad \delta > 0.$$

Выбирая $\delta = 1/(1 + m)$, получим

$$\|u\|_{F_1}^2 \leq -(m + 1) \operatorname{Re}[f, u] + m\|u\|_{F_{-1}}^2. \quad (2.21)$$

Из (2.13), (2.20) вытекает оценка

$$|\omega|^2 \|u\|_{F_{-1}}^2 \leq 2c^2\|u\|_{F_1}^2 + 2\|f\|_{F_{-1}}^2. \quad (2.22)$$

Поделив это неравенство на $4c^2$ и складывая его с предыдущим, получим

$$\frac{1}{2}\|u\|_{F_1}^2 + \delta_0|\omega|^2\|u\|_{F_{-1}}^2 \leq c_2\|f\|_{F_{-1}}^2 - (m + 1) \operatorname{Re}[f, u] + m\|u\|_{F_{-1}}^2, \quad \delta_0 > 0. \quad (2.23)$$

Имеет место неравенство Шварца $|\operatorname{Re}[f, u]| \leq \|f\|_{F_{-1}}\|u\|_{F_1}$. Воспользовавшись этим неравенством в правой части (2.23) и затем числовым неравенством

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q\varepsilon^{q/p}}, \quad \varepsilon \in (0, \infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p \in (1, \infty), \quad (2.24)$$

где возьмем $p = q = 2$, получим

$$\frac{1}{2}\|u\|_{F_1}^2 + \delta_0|\omega|^2\|u\|_{F_{-1}}^2 \leq c_3(\varepsilon)\|f\|_{F_{-1}}^2 + 2\varepsilon\|u\|_{F_1}^2 + m\|u\|_{F_{-1}}^2. \quad (2.25)$$

Выбрав $\varepsilon = 1/8$ и перенося слагаемое, содержащее $\|u\|_{F_1}$, в левую часть, придем к неравенству

$$\|u\|_{F_1}^2 + |\omega|^2\|u\|_{F_{-1}}^2 \leq c_4\|f\|_{F_{-1}}^2 + c_5\|u\|_{F_{-1}}^2, \quad (2.26)$$

где c_4, c_5 – некоторые постоянные, не зависящие от u . Выбирая теперь $\omega_0 = 2\sqrt{c_5 + 1}$, получим неравенство (2.17), из которого следует, что $\ker(L - i\omega I) = \{0\}$

при $\omega \in I_{\omega_0}$. Из свойства 6 предложения 1 вытекает, что $R(L - i\omega I)$ плотна в H и, следовательно, в F_{-1} . Из оценки (2.17) вытекает, что оператор $(L - i\omega I)^{-1}$, будучи определенным на плотном подмножестве F_{-1} , допускает продолжение по непрерывности на все F_{-1} . Отсюда следует, что оператор $\tilde{L} - i\omega I$ — изоморфизм F_1 на F_{-1} , где $\tilde{L}: F_1 \rightarrow F_{-1}$ — продолжение L до непрерывного отображения F_1 в F_{-1} . Из равенства (2.12) вытекает, что $i\omega \in \rho(L)$ для всех $\omega \in I_{\omega_0}$.

Пусть теперь $i\omega \in \rho(L)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Возьмем также произвольное число $\omega_1 \in I_{\omega_0}$. В силу (2.1) имеем, что

$$(L - i\omega I)^{-1} = (L - i\omega_1 I)^{-1} - i(\omega_1 - \omega)(L - i\omega I)^{-1}(L - i\omega_1 I)^{-1}.$$

Тогда для $f \in H$ имеем

$$\|(L - i\omega I)^{-1}f\|_{F_1} \leq \|(L - i\omega_1 I)^{-1}f\|_{F_1} + (|\omega| + |\omega_1|)\|(L - i\omega I)^{-1}(L - i\omega_1 I)^{-1}\|_{F_1}.$$

Поскольку $0 \in \rho(L - i\omega I)$, найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|u\|_{F_1} \leq c\|(L - i\omega I)u\| \quad \forall u \in D(L).$$

Воспользовавшись этим неравенством и вложением $F_1 \subset H$, получим

$$\|(L - i\omega I)^{-1}f\|_{F_1} \leq \|(L - i\omega_1 I)^{-1}f\|_{F_1} + c(|\omega| + |\omega_1|)\|(L - i\omega_1 I)^{-1}\|_{F_1}.$$

Поскольку $|\omega_1| \geq \omega_0$, в силу уже доказанного правая часть оценивается через $c\|f\|_{F_{-1}}$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|(L - i\omega I)^{-1}f\|_{F_1} \leq c\|f\|_{F_{-1}} \quad \forall f \in R(L - i\omega I).$$

Как и ранее, получим, что $\tilde{L} - i\omega I: F_1 \rightarrow F_{-1}$ непрерывно обратим.

Утверждение d) легко доказывается при помощи b), c). Утверждение e) получим при помощи интерполяции.

Далее отождествляем L и его расширение $\tilde{L}$. Оператор $(L - i\omega I)^{-1}$, $\omega \in I_{\omega_0}$, — непрерывное отображение F_{-1} в F_{-1} , причем справедливо неравенство

$$\|(L - i\omega I)^{-1}u\|_{F_{-1}} \leq \frac{c\|u\|_{F_{-1}}}{1 + |\omega|} \quad \forall \omega \in I_{\omega_0} \quad (2.27)$$

для некоторой постоянной $c > 0$ и всех $u \in F_{-1}$. Возьмем $u \in F_1$. Тогда

$$g = Lu - i\omega_0 u \in F_{-1}, \quad (L - i\omega I)^{-1}g \in F_1,$$

и, значит,

$$(L - i\omega_0 I)(L - i\omega I)^{-1}u = (L - i\omega I)^{-1}g \in F_1,$$

причем

$$\|(L - i\omega I)^{-1}u\|_{F_1} \leq c\|(L - i\omega I)^{-1}g\|_{F_{-1}} \leq \frac{c_1\|g\|_{F_{-1}}}{1 + |\omega|} \leq \frac{c_2\|u\|_{F_1}}{1 + |\omega|} \quad (2.28)$$

для всех $\omega \in I_{\omega_0}$ и $u \in F_1$. Таким образом, $(L - i\omega I)^{-1}|_{F_1} \in L(F_1)$. Как вытекает из обычных свойств интерполяционных пространств (см., например, утверждение а) теоремы 1.3.3 в [18]),

$$(L - i\omega I)^{-1}|_{(F_1, F_{-1})_{1/2,2}} \in L((F_1, F_{-1})_{1/2,2}),$$

и в силу оценок (2.27), (2.28) и равенства (2.10) имеем оценку (2.18). Последнее утверждение очевидно.

ЛЕММА 2.4. Пусть H – пространство Крейна и $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор такой, что:

1) найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$, инвариантные относительно оператора L такие, что $H = M^+ + M^-$, где сумма является прямой;

2) подпространство $(M^+ \cap D(L)) + (M^- \cap D(L))$ плотно в $D(L)$.

Тогда если $i\omega \in \rho(L)$, $\omega \in \mathbb{R}$, то $i\omega \in \rho(L|_{M^\pm})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_1^\pm = M^\pm \cap D(L)$ и $H_1 = D(L)$, где введем норму графика. Без ограничения общности считаем, что $\omega = 0$, иначе рассмотрим оператор $L - i\omega I$. По условию $L(H_1^\pm) \subset M^\pm$. Из условия 1) вытекает, что подпространства $M^\pm$ – замкнутые подпространства пространства H . Из определения легко вытекает, что $H_1^\pm$ – замкнутые подпространства пространства H_1 . Тогда, поскольку $0 \in \rho(L)$, то $L(H_1^\pm)$ – замкнутые подпространства пространства H . В силу 2) $L(H_1^+ + H_1^-)$ плотно в H . Но тогда подпространства $L(H_1^\pm)$ плотны в $M^\pm$. В силу их замкнутости имеем, что $L(H_1^\pm) = M^\pm$. Из теоремы об обратном отображении получим, что $0 \in \rho(L|_{M^\pm})$.

ЛЕММА 2.5. Пусть H – пространство Крейна и $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор такой, что условия (2.4), (2.16) выполнены, найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$, инвариантные относительно оператора L , такие, что $\overline{C^\pm} \subset \rho(L|_{M^\pm})$, $H = M^+ + M^-$, где сумма является прямой, и $C^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Re} z > 0\}$. Обозначим через $F_{-1}^\pm$ пополнения $M^\pm$ в норме пространства F_{-1} . Тогда найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|(L - zI)^{-1}u\|_{F_{-1}} \leq \frac{c\|u\|_{F_{-1}}}{1 + |z|} \quad \forall z \in \overline{C^\pm}, \quad \forall u \in F_{-1}^\pm, \quad (2.29)$$

где под L понимаем продолжение L до оператора класса $L(F_1, F_{-1})$. Операторы $\pm L|_{F_{-1}^\pm}$, рассматриваемые как операторы из $F_{-1}^\pm$ в $F_{-1}^\pm$ с областью определения $F_1^\pm = F_1 \cap M^\pm$ – генераторы аналитических полугрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 найдется $\omega_0 > 0$ такое, что $I_{\omega_0} \in \rho(L)$. Используя вложение $i\mathbb{R} \subset \rho(L|_{M^\pm})$, получим, что $D(L) = H_1^+ + H_1^-$, где $H_1^\pm = D(L) \cap M^\pm$. Из полученного равенства вытекает, что $i\mathbb{R} \in \rho(L)$. Из леммы 2.3 вытекает, что оценка (2.29) справедлива для всех z , лежащих на мнимой оси. Далее, для того чтобы получить оценку (2.29), мы просто повторяем рассуждения леммы 2.3 для операторов $L|_{M^\pm}$. При получении оценки

мы пользуемся неравенствами $\operatorname{Re} z[u, u] \geq 0$ для всех $u \in M^\pm$ и z таких, что $\pm \operatorname{Re} z \geq 0$. Последнее утверждение леммы вытекает из свойств аналитических полугрупп (см. [21; гл. 2, теорема 4.6 (е)]).

§ 3. Основные результаты

Большая часть утверждений следующей теоремы получена в работе [15] (см. также [16; гл. 1, теорема 4.1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L: H \rightarrow H$ — m - J -диссипативный оператор в пространстве Крейна H такой, что $i\mathbb{R} \in \rho(L)$ и выполнены условия (2.9) и (2.19). Тогда найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $H^\pm$, инвариантные относительно оператора L . При этом все пространство H представимо в виде прямой суммы $H = H^+ + H^-$, $\sigma(\mp L|_{H^\pm}) \subset \mathbb{C}^\pm$ и операторы $\pm L|_{H^\pm}$ — генераторы аналитических полугрупп.

Последнее утверждение теоремы о том, что $L|_{H^\pm}$ — генераторы аналитических полугрупп, не содержится в соответствующей теореме из [15]. Однако оно является простым следствием этой теоремы и фактически было получено в [24] (см. [24; следствие 3.3]).

В следующей теореме мы обобщаем теорему 4.2 в [16; гл. 1]: в отличие от [16] мы не требуем равномерной J -диссипативности оператора L и получаем и некоторые новые утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L: H \rightarrow H$ — m - J -диссипативный оператор, удовлетворяющий условию $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$ и условиям (2.4), (2.9). Тогда найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $H^\pm$, инвариантные относительно оператора L . При этом все пространство H представимо в виде прямой суммы $H = H^+ + H^-$, $\sigma(\mp L|_{H^\pm}) \subset \mathbb{C}^\pm$ и операторы $\pm L|_{H^\pm}$ — генераторы аналитических полугрупп. Если, в дополнение, L строго J -диссипативен или равномерно J -диссипативен, то соответствующие подпространства H^+ и H^- можно выбрать положительным и отрицательным или, соответственно, равномерно положительным и равномерно отрицательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.3 мы имеем оценку (2.19) (отметим, что условие (2.16) выполнено в силу равенства (2.10) леммы 2.1). Операторы параллельного проектирования $P^\pm$ на $H^\pm$ (см. [15]–[17]) такие, что $H = P^+H + P^-H$, $P^+P^- = P^-P^+ = 0$ строятся следующим образом. Как известно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$S = \mathbb{C} \setminus (S^+ \cup S^-) \subset \rho(L),$$

$$S^+ = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \delta, |z| > \delta \right\}, \quad S^- = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| > \frac{\pi}{2} + \delta, |z| > \delta \right\},$$

и для любого луча $\arg \lambda = \theta \subset S$ имеет место оценка резольвенты

$$\|(L - \lambda)^{-1}f\| \leq c_1 \|f\| (1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (3.1)$$

Имеем

$$P^\pm f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\pm} \frac{L(L+\lambda)^{-1}}{\lambda} f dz, \quad \Gamma^\pm = \partial S^\pm, \quad f \in D(L),$$

где интегрирование по $\Gamma^\pm$ совершается в положительном относительно областей $S^\pm$ направлении. Легко увидеть, что для $f \in D(L)$ интегралы нормально сходятся, и, значит, определены величины $P^\pm f$. Воспользовавшись леммой 2.1, можно показать, что операторы $P^\pm$ допускают расширение до операторов класса $L(H)$. Действительно, как следствие из теоремы 1.15.2 (см. также п. 1.15.4) в [18] и теоремы о реитерации (см. [18])

$$\begin{aligned} (H_1, H)_{\theta,2} &= (H_1, H_{-1})_{\theta/2,2}, & (H, H_{-1})_{1-\theta,2} &= (H_1, H_{-1})_{1-\theta/2,2}, \\ H &= (H_1, H_{-1})_{1/2,2} = ((H_1, H_{-1})_{\theta/2,2}, (H_1, H_{-1})_{1-\theta/2,2})_{1/2,2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первая половина последнего равенства здесь есть следствие (2.9). В то же время, проекторы $P^\pm$ допускают расширение до непрерывных отображений классов $L((H_1, H)_{\theta,2})$, $L((H, H_{-1})_{1-\theta,2})$ (см. [24; § 3]). Тогда последнее равенство в (3.2) гарантирует утверждение. Кроме того, в силу определений имеем, что $(P^+ + P^-)f = f$ для всех $f \in D(L)$, и, значит, для всех $f \in H$. Таким образом, пространство H представимо в виде прямой суммы $H = H^+ + H^-$, где $H^\pm = \{u \in H : P^\pm u = u\}$.

Покажем неотрицательность H^+ и неположительность H^- . Доказательство проводится по аналогии с соответствующими доказательствами в [15], [16]. Рассмотрим, например, H^+ . В силу плотности $D(L^k)$ в H для всех $k > 0$ (см. [18; п. 1.14.1]) и ограниченности оператора P^+ для любого $u \in H^+$ существует последовательность $u_n \in D(L^2) \cap H^+$ такая, что $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, операторы $P^\pm$ и L коммутируют в том смысле, что при $f \in D(L^k)$, $k \geq 1$, $P^\pm f \in D(L^k)$ и $L^k P^\pm f = P^\pm L^k f$. Найдём последовательность $v_n \in D(L^2)$ такую, что $\|v_n - u\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $u_n = P^+ v_n \in D(L^2) \cap H^+$. Тогда $\|u_n - u\| = \|P^+(v_n - u)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Определим оператор

$$Pu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{-\lambda t} \frac{L(L+\lambda)^{-1}}{\lambda} u d\lambda, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Возьмем $v_n(t) = Pu_n$. Используя (3.3), легко увидеть, что

$$\|v_n\|_{L_2(0,\infty;H)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{c\|u_n\|}{|\lambda|\sqrt{\operatorname{Re} \lambda}} |d\lambda| \leq c_1 \|u_n\|, \quad (3.4)$$

где постоянная c берется из неравенства $\|L(L+\lambda)^{-1}u_n\| \leq c\|u_n\|$, $\Gamma^\pm = \partial S^\pm$. Используя нормальную сходимость интегралов, полученных из (3.3) формальным дифференцированием по t и формальным применением оператора L , которая доказывается аналогично, мы можем сказать, что $v_n(t) \in L_2(0,\infty;F_1)$, причем обобщенная производная в смысле теории распределений $v'(t)$ обладает

свойством $v'_n(t) \in L_2(0, \infty; H)$. Отсюда вытекает, что после, может быть, изменения на множестве меры нуль $v_n(t) \in C([0, \infty); H)$, т.е. $v_n(t)$ есть непрерывная функция со значениями в H . Легко показывается, что

$$v_n(0) = u_n, \quad (3.5)$$

$$Sv_n = v'_n - Lv_n = 0. \quad (3.6)$$

Используя равенства (3.5), (3.6) и интегрирование по частям, будем иметь

$$0 = \operatorname{Re} \int_0^\infty [Sv_n(t), v_n(t)] dt = -[v_n(0), v_n(0)]_0 - \int_0^\infty \operatorname{Re} [Lv_n, v_n](\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Отсюда получим, что

$$[u_n, u_n]_0 = - \int_0^\infty \operatorname{Re} [Lv_n, v_n](\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

т.е. $[u_n, u_n] \geq 0$. Переходя к пределу по n в этом неравенстве, получим, что $[u, u] \geq 0$, т.е. H^+ – неотрицательное подпространство. Аналогично показываем неположительность H^- .

Покажем максимальность H^+ . Предположим противное, т.е. найдется неотрицательное подпространство M такое, что $H^+ \subset M$ и $H^+ \neq M$. Возьмем элемент $\varphi \in M \setminus H^+$. Тогда $\varphi + \psi \in M$ и $[\varphi + \psi, \varphi + \psi]_0 \geq 0$ для всех $\psi \in H^+$. Представим φ в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in H^+$, $\varphi_2 \in H^-$. Взяв $\psi = -\varphi_1$, получим, что $\varphi_2 \in M$ и $[\varphi_2, \varphi_2]_0 \geq 0$. Но $\varphi_2 \in H^-$. Тогда $[\varphi_2, \varphi_2]_0 = 0$. Поскольку $[\varphi, \varphi] \geq 0$ для всех $\varphi \in M$, и $-[\varphi, \varphi] \geq 0$ для всех $\varphi \in H^-$, то справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|[\varphi, \psi]| \leq |[\varphi, \varphi]|^{1/2} |[\psi, \psi]|^{1/2} \quad (3.9)$$

для всех $\varphi, \psi \in M$ и для всех $\varphi, \psi \in H^-$, из которого в свою очередь вытекает, что $[\varphi_2, \psi]_0 = 0$ для всех $\psi \in H^+ \subset M$ и для всех $\psi \in H^-$. Отсюда получим, что $\varphi_2 = 0$. Аналогично доказываем максимальность H^- .

Покажем, что если оператор L строго (равномерно) J -диссипативен, то и подпространства $H^\pm$ строго (или, соответственно, равномерно) дефинитны. Пусть L равномерно J -диссипативен. Поскольку оператор L равномерно J -диссипативен, в качестве нормы в F_1 можем использовать эквивалентную норму $\|u\|_{F_1}^2 = -\operatorname{Re}[Lu, u]$. Тогда из (3.6), (3.8) вытекает неравенство

$$[u_n, u_n] \geq \delta_0 (\|v'_n\|_{L_2(0, \infty; F_{-1})}^2 + \|v_n\|_{L_2(0, \infty; F_1)}^2), \quad (3.10)$$

где δ_0 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от n . Из (3.10), примененного к разности $u_n - u_m$, и сходимости в себе последовательности u_n в H вытекает, что последовательность v_n сходится в себе в $L_2(0, \infty; F_1)$, и, значит, сходится к некоторой функции $v(t) \in L_2(0, \infty; F_1)$, причем $v'_n(t) \rightarrow v'(t)$ в $L_2(0, \infty; F_{-1})$. В силу теоремы о следах (см. [18; теорема 1.8.3]) и равенства (2.10) $v_n(0) \rightarrow v(0)$ в H и найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\|v'_n\|_{L_2(0, \infty; F_{-1})}^2 + \|v_n\|_{L_2(0, \infty; F_{-1})}^2 \geq \delta \|u_n\|_H^2.$$

Из этого неравенства и (3.10) вытекает неравенство $[u_n, u_n] \geq \delta \|u_n\|_H^2/2$, переходя к пределу по n в котором, получим неравенство $[u, u] \geq \delta \|u\|_H^2/2$, справедливое для всех $u \in H^+$, из которого и вытекает равномерная положительность подпространства H^+ . Аналогично доказывается равномерная отрицательность подпространства H^- .

Пусть оператор L строго J -диссипативен. Покажем, что полученные подпространства $H^\pm$ дефинитны. Рассмотрим, например, подпространство H^+ . Предположим противное, что оно вырождено, т.е. $H_0^+ = H^+ \cap (H^+)^{\perp} \neq \{0\}$, где знак $[\perp]$ означает ортогональное дополнение относительно индефинитной метрики. Имеем, что $[\varphi, \varphi] = 0$ для всех $\varphi \in H_0^+$. Из неравенства (3.9) вытекает, что

$$[\varphi, \psi] = 0$$

для всех $\varphi \in H_0^+$, $\psi \in H^+$. Возьмем $v \in H_0^+$. По построению подпространства $H^\pm$ удовлетворяют условиям леммы 2.4. Используя лемму 2.4, получим, что $L^{-1}v \in H^+$ и, значит, $[L^{-1}v, v] = 0$ для всех $v \in H_0^+$. Отсюда и из диссипативности вытекает, что $v \in \ker(L^{-1} + (L^{-1})^c) = \ker(L^{-1} + (L^c)^{-1})$ для таких v (см. [1; гл. 2, § 1]). Тогда для $u = L^{-1}v$ имеем, что $u = -(L^c)^{-1}Lu$, и, значит, $u \in D(L) \cap D(L^c)$. Более того, $Lu + L^cu = v - v = 0$. Следовательно, $\operatorname{Re}[Lu, u] = 0$, что противоречит строгой диссипативности L .

Перейдем к необходимым условиям. По существу мы покажем, что условия теоремы 2 являются и необходимыми, для того чтобы ее утверждение имело место, и приведем ряд других утверждений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L: H \rightarrow H$ — t - J -диссипативный оператор такой, что:

- 1) найдется $\omega \in \mathbb{R} : i\omega \in \rho(L)$;
- 2) найдутся максимальные равномерно положительное и равномерно отрицательное подпространства $M^\pm$, инвариантные относительно оператора L такие, что $H = M^+ + M^-$, где сумма является прямой;
- 3) подпространство $(M^+ \cap D(L)) + (M^- \cap D(L))$ плотно в $D(L)$.

Тогда выполнено равенство (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $\omega = 0$. Определим проекторы $P^\pm$ параллельного проектирования на $M^\pm$ соответственно, отвечающие разложению $H = M^+ + M^-$. Таким образом, $P^+ + P^- = I$, $P^+P^- = P^-P^+ = 0$, $P^\pm u = u$ для всех $u \in M^\pm$. В силу леммы 2.4 $L^{-1}\varphi \in M^\pm \cap H_1$, $H_1 = D(L)$, для всех $\varphi \in M^\pm$. Тогда

$$P^\pm L^{-1}u = L^{-1}P^\pm u \quad (3.11)$$

для всех $u \in H$. Отсюда вытекает, что $P^\pm|_{H_1} \in L(H_1)$ и справедливы равенства $P^\pm Lu = LP^\pm u$ для всех $u \in H_1$ и $H_1 = H_1^+ + H_1^-$, $H_1^\pm = R(P^\pm)$. Из (3.11) также вытекает, что $P^\pm$ допускают продолжение до операторов класса $L(H_{-1})$, и в силу равенства $P^+ + P^- = I$ имеем, как и ранее, что $H_{-1} = H_{-1}^+ + H_{-1}^-$, $H_{-1}^\pm = R(P^\pm)$. Тогда

$$P^\pm \in L(H_{1-2\theta}) \quad \forall \theta \in (0, 1), \quad H_{1-2\theta} = (H_1, H_{-1})_{\theta, 2},$$

а теорема 1.17.1 в [18] влечет, что

$$H_{1-2\theta}^\pm = (H_1^\pm, H_{-1}^\pm)_{\theta,2} = \{u \in H_{1-2\theta} : P^\pm u = u\} = P^\pm H_{1-2\theta}.$$

В частности, также имеем, что

$$H_{1-2\theta} = P^+ H_{1-2\theta} + P^- H_{1-2\theta} = H_{1-2\theta}^+ + H_{1-2\theta}^- \quad (\text{сумма прямая}). \quad (3.12)$$

Пусть $[\cdot, \cdot]$ — индефинитная метрика в H . Поскольку подпространства $M^\pm$ равномерно дефинитны, то выражение $(u, v)_\pm = \pm[u, v]$ есть эквивалентное скалярное произведение на $M^\pm$ соответственно. Рассмотрим оператор $L|_{M^+} : M^+ \rightarrow M^+$. Относительно этого нового скалярного произведения оператор $L|_{M^+}$ m -диссипативен. По предложению 2 $H_0^+ = (H_1^+, H_{-1}^+)_{1/2,2} = M^+$. Аналогично, получим, что $H_0^- = (H_1^-, H_{-1}^-)_{1/2,2} = M^-$. Тогда утверждение следует из равенства (3.12) при $\theta = 1/2$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $L : H \rightarrow H$ — m - J -диссипативный оператор такой, что выполнено условие (2.4) и найдется максимальное равномерно положительное (или равномерно отрицательное) подпространство M , инвариантное относительно оператора L такое, что $i\mathbb{R} \cap \rho(L|_M) \cap \rho(L) \neq \emptyset$. Тогда выполнено равенство (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_1^+ = H_1 \cap M$, $H_1 = D(L)$, $F_1^+ = F_1 \cap M$ (пространства F_1 , F_{-1} были построены перед предложением 2). Для определенности считаем, что M равномерно положительно и $0 \in \rho(L|_M) \cap \rho(L)$. Поскольку M максимально и равномерно положительно, то M проекционно полно, т.е., все пространство H представимо в виде прямой суммы $H = M + N$, $N = M^{[\perp]}$, N равномерно отрицательно (см. [1; гл. 1, следствие 7.17]) и соответствующий проектор P на M параллельно N J -самосопряжен. Введем оператор $L_0 = L - PJP - (I - P)J(I - P)$, положив $D(L_0) = D(L)$. Имеем, что

$$-\operatorname{Re}[L_0 u, u] = -\operatorname{Re}[Lu, u] + \|Pu\|^2 + \|(I - P)u\|^2 \geq \|u\|_{F_1}^2/2.$$

Таким образом, величина $-\operatorname{Re}[L_0 u, u]$ — квадрат эквивалентной нормы в F_1 . Оператор L удовлетворяет условию (2.4), и, следовательно, по лемме 2.2 допускает продолжение $\tilde{L}$ до оператора класса $L(F_1, F_{-1})$. Положим

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L} - PJP - (I - P)J(I - P) \in L(F_1, F_{-1}).$$

По построению оператор L_0 также удовлетворяет условию (2.4). Как и в лемме 2.2, устанавливаем, что $\tilde{L}_0$ — изоморфизм F_1 на F_{-1} . Покажем, что $0 \in \rho(L_0)$. Рассмотрим сужение оператора $\tilde{L}_0$ на $D_0 = \{u \in F_1 : \tilde{L}_0 u \in H\}$. С одной стороны, $D(L) \subset D_0$. Действительно, если $u \in D(L)$, то $u \in F_1$, $Lu \in H$, $PJPu, (I - P)J(I - P)u \in H$ и, значит, $u \in D_0$. Пусть $u \in D_0$. Тогда $u \in F_1$, значит, $PJPu, (I - P)J(I - P)u \in H$, и тогда $\tilde{L}u \in H$. Таким образом, $D_0 \subset \{u \in F_1 : \tilde{L}u \in H\} = D(L)$ (см. равенство (2.12)). Значит, $D_0 = D(L)$. Из того, что $\tilde{L}_0$ — изоморфизм F_1 на F_{-1} и определения класса D_0 немедленно вытекает, что $0 \in \rho(L_0)$. Далее вместо $\tilde{L}$, $\tilde{L}_0$ пишем L, L_0 соответственно. Положим

$F_1^+ = F_1 \cap M$. Поскольку $0 \in \rho(L|_M) \cap \rho(L)$, L отображает $D(L) \cap M$ на M . Имеем, для $u \in D(L) \cap M$, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{F_1} &\leq \sqrt{2}(\operatorname{Re}[-L_0 u, u])^{1/2} \leq 2 \sup_{v \in F_1^+} \frac{|[L_0 u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \\ &\leq 2 \sup_{v \in F_1} \frac{|[L_0 u, v]|}{\|v\|_{F_1}} = 2\|L_0 u\|_{F_{-1}} \leq 2c\|u\|_{F_1}, \end{aligned}$$

где c – не зависящая от u постоянная. Отсюда вытекает, что

$$\sup_{v \in F_1^+} \frac{|[L_0 u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \leq \sup_{v \in F_1} \frac{|[L_0 u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \leq 2c \sup_{v \in F_1^+} \frac{|[L_0 u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \quad (3.13)$$

для всех $u \in D(L) \cap M$. Отсюда, в частности, получим неравенство

$$\sup_{v \in F_1^+} \frac{|[u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \leq \sup_{v \in F_1} \frac{|[u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \leq 2c \sup_{v \in F_1^+} \frac{|[u, v]|}{\|v\|_{F_1}} \quad \forall u \in M. \quad (3.14)$$

Обозначим через F_{-1}^+ пополнение M по норме $\sup_{v \in F_1^+} |[u, v]|/\|v\|_{F_1}$. В силу (3.14) эта норма эквивалентна обычной норме пространства F_{-1} , и, значит, F_{-1}^+ можно отождествить с замкнутым подпространством пространства F_{-1} . Оператор L_0 – изоморфизм F_1^+ на F_{-1}^+ . В силу равномерной положительности M выражение $[\cdot, \cdot]$ определяет скалярное произведение на M , эквивалентное исходному. Тогда пространство F_{-1}^+ совпадает с негативным пространством, построенным по паре F_1^+ , M , и по предложению 3

$$(F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2} = M.$$

Покажем, что подпространство N инвариантно относительно оператора L^c , который, как и L , m - J -диссипативен и $0 \in \rho(L^c)$ (см. [1; гл. 2, § 1, теорема 1.16]). По лемме 2.2 $D(L^c)$ плотно вложено в F_1 , и тогда, как и сам оператор L , L^c допускает расширение до непрерывного отображения F_1 в F_{-1} . По предложению 1.11 в [1; гл. 2, § 1] $L^c(D(L^c) \cap N) \subset N$. Поскольку $0 \in \rho(L|_M)$, то $L^{-1}M \subset M$, и снова имеем, что $(L^c)^{-1}N \subset N$, поскольку $(L^{-1})^c = (L^c)^{-1}$ (см. [1; гл. 2, § 1, предложение 1.6]). Из этих двух включений и того факта, что $0 \in \rho(L^c)$ вытекает, что $0 \in \rho(L^c|_N)$. Плотность $D(L^c) \cap N$ в N очевидна. Действительно, предположим, что это не так. Тогда найдется элемент $\varphi \in D(L^c) \cap N$ такой, что $[\varphi, \psi] = 0$ для всех $\psi \in N$. Возьмем $\psi = (L^c)^{-1}v$, $v \in N$. Тогда $0 = [\varphi, (L^c)^{-1}v] = [L^{-1}\varphi, v]$, откуда вытекает, что $L^{-1}\varphi \in D(L) \cap M$ и, значит, $\varphi \in M$. То есть $\varphi \in M \cap N = \{0\}$. Положим $F_{-1}^- = F_1 \cap N$. Обозначим через F_{-1}^- пополнение N по норме $\sup_{v \in F_{-1}^-} |[u, v]|/\|v\|_{F_1}$. Повторяя приведенные выше рассуждения для подпространства M , заключаем, что эта норма эквивалентна обычной норме пространства F_{-1} , и, значит, F_{-1}^- можно отождествить с замкнутым подпространством пространства F_{-1} . Кроме того, имеем

$$(F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2} = N.$$

Покажем, что

$$F_i = F_i^+ + F_i^-, \quad P \in L(F_i), \quad i = 1, -1, \quad (3.15)$$

где сумма является прямой. Пусть $i = -1$ и $u = u^+ + u^-$, $u^+ \in M$, $u^- \in N$. В силу (3.14)

$$\begin{aligned} \|u^+\|_{F_{-1}} &\leq 2c \sup_{v \in F_1^+} \frac{|[u^+, v]|}{\|v\|_{F_1}} = 2c \sup_{v \in F_1^+} \frac{|[u^+ + u^-, v]|}{\|v\|_{F_1}} \\ &\leq 2c \sup_{v \in F_1} \frac{|[u^+ + u^-, v]|}{\|v\|_{F_1}} \leq 2c \|u\|_{F_{-1}}. \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство $\|u^-\|_{F_{-1}} \leq 2c \|u\|_{F_{-1}}$, и, таким образом,

$$\|u\|_{F_{-1}} \geq \delta(\|u^+\|_{F_{-1}} + \|u^-\|_{F_{-1}}).$$

Из этого неравенства вытекает, что проекторы P и $(I - P)$ допускают продолжения до операторов класса $L(F_{-1})$, и, таким образом, справедливо (3.15) при $i = -1$. Покажем, что $P|_{F_1} \in L(F_1)$. Действительно, для $v \in M$ и $u \in F_1$ имеем

$$|[v, Pu]| = |[v, u]| \leq \|v\|_{F_{-1}} \|u\|_{F_1}.$$

Следовательно, выражение $[v, Pu]$ допускает продолжение до линейного непрерывного функционала над F_{-1}^+ , и, следовательно, найдется $u^+ \in F_1^+$ такой, что $[v, Pu] = [v, u^+]$ для всех $v \in M$. Отсюда заключаем, что $Pu = u^+ \in F_1^+$ и справедлива оценка

$$\|Pu\|_{F_1} \leq c_1 \sup_{v \in F_{-1}^+} \frac{|[v, Pu]|}{\|v\|_{F_{-1}}} \leq c_1 \sup_{v \in F_{-1}^+} \frac{|[v, u]|}{\|v\|_{F_{-1}}} \leq c_1 \|u\|_{F_1}.$$

Таким образом, $P, (I - P) \in L(F_1)$ и, значит, справедливо равенство (3.15) при $i = 1$. Теорема 1.17.1 в [18] влечет, что

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2} + (F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2} = M + N = H.$$

Из леммы 2.1 вытекает, что также $(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = H$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $L: H \rightarrow H$ — m - J -диссипативный оператор такой, что $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$, выполнены условия (2.4), (2.16) и найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$ пространства H , инвариантные относительно L такие, что

$$\overline{C^\pm} \subset \rho(L|_{M^\pm}), \quad H = M^+ + M^-,$$

где сумма является прямой. Тогда выполнено равенство (2.9). Если L строго J -диссипативен или равномерно J -диссипативен, то и подпространства M^+ и M^- дефинитны или равномерно дефинитны соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 2.5, определим подпространства $F_1^\pm \subset F_1$ и $F_{-1}^\pm \subset F_{-1}$. По лемме 2.5 операторы $\pm L|_{F_{-1}^\pm} : F_{-1}^\pm \rightarrow F_{-1}^\pm$ – генераторы аналитических полугрупп. Рассмотрим, например, оператор $L^+ = L|_{F_{-1}^+}$. Возьмем $T > 0$. Как следствие теоремы о следах (см. [18; теорема 1.8.3]) для данного элемента $u_0 \in (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}$ найдется функция $v(t)$ такая, что $v_t \in L_2(0, T; F_{-1}^+)$, $v \in L_2(0, T; F_1^+)$ и $v(0) = u_0$. В силу известных результатов (см., например, следствие 1.7 в [25]) задача Коши

$$u_t - L^+ u = f, \quad u(0) = 0 \quad (3.16)$$

обладает свойством максимальной регулярности, т.е. для любой функции $f \in L_2(0, T; F_{-1}^+)$ существует единственное решение этой задачи такое, что $u_t, L^+ u \in L_2(0, T; F_{-1}^+)$. Используя замену $u = v(t) + V(t)$, сведем задачу

$$u_t - L^+ u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (3.17)$$

к задаче вида (3.16), и, таким образом, задача (3.17) имеет единственное решение такое, что $u_t, L^+ u \in L_2(0, T; F_{-1}^+)$ для всех $u_0 \in (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}$. Возьмем $u_0 \in F_1^+ \subset (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}$. Как известно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$S_\delta = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \subset \rho(L^+)$$

и на любом луче $\arg \lambda = \theta \in S_\delta$ имеет место оценка резольвенты

$$\|(L^+ - \lambda I)^{-1} f\|_{F_{-1}} \leq c_1 \|f\|_{F_{-1}} (1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (3.18)$$

Тогда решение задачи (3.17) представимо в виде (см., например, [25])

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (L - \lambda I)^{-1} u_0 dz,$$

где интегрирование по $\Gamma = \partial S^\delta$, $S^\delta = S_\delta \cup \{z : |z| < \varepsilon\}$, совершается в положительном относительно области S^δ направлении и параметр ε настолько мал, что $\{z : |z| < \varepsilon\} \subset \rho(L^+)$. Используя оценку резольвенты из леммы 2.5 и оценивая интеграл как и в доказательстве теоремы 2, получим оценку

$$\|u(t)\|_{L_2(0, T; F_{-1})} \leq c \|u_0\|. \quad (3.19)$$

Из (3.17) имеем, что $[u_t, u](t) - [Lu, u] = 0$. Интегрируя по t от 0 до T и используя неотрицательность выражения $[u, u]$, получим неравенство

$$-2 \int_0^T \operatorname{Re}[Lu, u](t) dt \leq [u_0, u_0]. \quad (3.20)$$

Используя неравенство (2.16) и оценки (3.19), (3.20), получим неравенство

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq c \left(- \int_0^T \operatorname{Re}[Lu, u](t) dt + \|u(t)\|_{L_2(0, T; F_{-1})}^2 \right) \leq c_1 \|u_0\|^2. \quad (3.21)$$

Вновь используя оценку (3.20), приходим к неравенству

$$\|u(t)\|_{L_2(0,T;F_1)}^2 \leq c_2 \|u_0\|^2. \quad (3.22)$$

Из этой оценки и из уравнения (3.17) вытекает оценка

$$\|u_t\|_{L_2(0,T;F_{-1})}^2 \leq c_3 \|u_0\|^2. \quad (3.23)$$

Тогда оценки (3.22), (3.23) влекут оценку

$$\|u_t\|_{L_2(0,T;F_{-1})}^2 + \|u(t)\|_{L_2(0,T;F_1)}^2 \leq c_4 \|u_0\|^2. \quad (3.24)$$

Однако, по теореме о следах (см. [18; теорема 1.8.3]) левая часть этого неравенства оценивается снизу через $\delta \|u_0\|_{(F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}}^2$, где δ – положительная постоянная, не зависящая от u_0, u . Из полученного неравенства вытекает вложение $M^+ \subset (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}$ и оценка

$$\|u_0\|_{(F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}} \leq c_5 \|u_0\|. \quad (3.25)$$

Аналогичными рассуждениями мы получим, что справедливо вложение $M^- \subset (F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2}$ и оценка

$$\|v_0\|_{(F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2}} \leq c_6 \|v_0\| \quad \forall v_0 \in M^-. \quad (3.26)$$

В этом случае вместо вспомогательной задачи (3.17) мы используем задачу

$$u_t + L^- u = 0, \quad u|_{t=0} = v_0 \in F_1^-, \quad L^- = L|_{M^-}. \quad (3.27)$$

Пусть $u_0 \in F_1^+, v_0 \in F_1^-$. Поскольку $F_1^\pm, F_{-1}^\pm$ – замкнутые подпространства пространств F_1, F_{-1} с теми же нормами, имеем, что

$$K(t, u_0, F_1, F_{-1}) \leq K(t, u_0, F_1^+, F_{-1}^+), \quad K(t, v_0, F_1, F_{-1}) \leq K(t, v_0, F_1^-, F_{-1}^-).$$

Тогда определение нормы в интерполяционном пространстве дает оценки

$$\|u_0\|_{(F_1, F_{-1})_{1/2,2}} \leq \|u_0\|_{(F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}}, \quad \|v_0\|_{(F_1, F_{-1})_{1/2,2}} \leq \|v_0\|_{(F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2}}. \quad (3.28)$$

Из этих неравенств, неравенства треугольника и оценок (3.25), (3.26) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|u_0 + v_0\|_{(F_1, F_{-1})_{1/2,2}} &\leq \|u_0\|_{(F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2}} + \|v_0\|_{(F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2}} \\ &\leq c(\|u_0\| + \|v_0\|) \leq c_1 \|u_0 + v_0\|_H, \end{aligned}$$

где c, c_1 – положительные постоянные, не зависящие от u_0, v_0 . Последнее неравенство вытекает из факта, что прямая сумма пространств M^+, M^- есть все H . Из последнего неравенства следует, что $H \subset (F_1, F_{-1})_{1/2,2}$. Из этого вложения вытекает равенство (см. [16; гл. 1, лемма 3.17]) $H = (F_1, F_{-1})_{1/2,2}$ и, следовательно, справедливо (2.9).

Покажем, что подпространство M^+ положительно, если L строго J -диссипативен, и равномерно положительно, если L равномерно J -диссипативен. Аналогичные утверждения справедливы и для подпространства M^- .

Пусть вначале L строго J -диссипативен. Предположим противное, что M^+ вырождено, т.е. существует ненулевой элемент $\psi \in M^+$ такой, что $[\psi, \psi] = 0$. Из неравенства Коши–Буняковского для формы $[\cdot, \cdot]$ на M^+ вытекает, что $\psi \in M^+ \cap (M^+)^{[\perp]}$, т.е. $[\psi, v] = 0$ для всех $v \in M^+$. Поскольку $0 \in \rho(L|_{M^+})$, имеем, что $[L^{-1}\psi, \psi] = 0$. С другой стороны, $\operatorname{Re}[Lu, u] > 0$ для всех $u \in D(L)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\operatorname{Re}[L^{-1}u, u] > 0$ для всех $u \in H$ и, значит, $\operatorname{Re}[L^{-1}\psi, \psi] > 0$, противоречие. Пусть теперь L равномерно J -диссипативен. Возьмем $u_0 \in F_1^+$ и рассмотрим решение $u(t)$ задачи (3.17). Оно удовлетворяет оценке (3.20). В силу равномерной J -диссипативности L из оценки (3.20) вытекает неравенство

$$\|u\|_{L_2(0,T;F_1)}^2 \leq c[u_0, u_0],$$

где c – некоторая не зависящая от u постоянная. Тогда из уравнения (3.17) вытекает неравенство

$$\|u_t\|_{L_2(0,T;F_{-1})}^2 \leq c_1 \|u\|_{L_2(0,T;F_1)}^2 \leq c_2[u_0, u_0].$$

Последние два неравенства и теорема о следах (см. [18; теорема 1.8.3]) влекут, что

$$\|u_0\|_{(F_1, F_{-1})_{1/2,2}}^2 \leq c_3[u_0, u_0].$$

Но по доказанному $(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = H$. Таким образом, M^+ равномерно положительно. Аналогично получим, что M^- равномерно отрицательно.

Как следствие теорем 2 и 5 мы имеем, например, следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $L: H \rightarrow H$ – максимальный равномерно J -диссипативный оператор, удовлетворяющий условию (2.4). Тогда если выполнено (2.9), то существуют максимальные равномерно положительное и равномерно отрицательное подпространства $M^\pm$ пространства H , инвариантные относительно L такие, что

$$\overline{C^\pm} \subset \rho(L|_{M^\pm}), \quad H = M^+ + M^-,$$

где сумма является прямой, и операторы $\pm L|_{M^\pm}$ – генераторы аналитических полугрупп. Если существуют максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$ пространства H , инвариантные относительно L такие, что

$$\overline{C^\pm} \subset \rho(L|_{M^\pm}), \quad H = M^+ + M^-,$$

где сумма является прямой, то выполнено равенство (2.9) и подпространство M^+ равномерно положительно, а M^- равномерно отрицательно.

Таким образом, равенство (2.9) является в этом случае необходимым и достаточным условием существования искомых подпространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все теоремы этого параграфа могут быть усилены в том смысле, что условие $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$ может быть ослаблено. Можно предполагать, что $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$ за исключением конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности оператора L . Используя проекторы Рисса, мы можем свести задачу к уже исследованному случаю $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$.

Приведем некоторые следствия в случае, если оператор $L: H \rightarrow H$ (H – пространство Крейна с канонической симметрией $J = P^+ - P^-$) представлен в виде (1.1). Все пространство H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ отождествим с декартовым произведением $H^+ \times H^-$, $H^\pm = R(P^\pm)$, а оператор L – с матричным оператором $L: H^+ \times H^- \rightarrow H^+ \times H^-$ вида

$$L = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = P^+LP^+, \quad A_{12} = P^+LP^-, \quad A_{21} = P^-LP^+, \quad A_{22} = P^-LP^-. \quad (3.29)$$

В этом случае каноническая симметрия перепишется в виде $J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$. Пусть $u = (u^+, u^-) \in H$, $v = (v^+, v^-) \in H$. Скалярное произведение (u, v) в H запишем в виде $(u^+, v^+) + (u^-, v^-)$, $u^\pm, v^\pm \in H^\pm$, тогда $(Ju, v) = (u^+, v^+) - (u^-, v^-)$. Вначале опишем условия, гарантирующие выполнение условий теоремы 1. Положим $L_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор в пространстве Крейна $H = H^+ \times H^-$ такой, что $i\mathbb{R} \in \rho(L) \cap \rho(L_0)$ и выполнены условие (2.19) и условие: $D(L) = D(L_0)$ и существуют $\lambda \in \rho(L)$, $\mu \in \rho(L_0)$ такие, что оператор $(L - \lambda I)^{-1}(L_0 - \mu I): D(L_0) \rightarrow D(L)$ допускает продолжение до изоморфизма H на H . Тогда найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$, инвариантные относительно оператора L . При этом все пространство H представимо в виде прямой суммы $H = M^+ + M^-$, $\sigma(\mp L|_{M^\pm}) \subset \mathbb{C}^\pm$ и операторы $\pm L|_{M^\pm}$ – генераторы аналитических полугрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что условие теоремы влечет, что операторы $A_{11}: H^+ \rightarrow H^+$, $-A_{22}: H^- \rightarrow H^-$ m -диссипативны. Чтобы сослаться на теорему 1, достаточно доказать, что выполнено интерполяционное равенство (2.9). По условию имеем, что $D(L) = D(L_0) = H_1 = H_1^+ \times H_1^-$, где $H_1^+ = D(A_{11})$, $H_1^- = D(A_{22})$. Последнее условие теоремы влечет, что найдутся постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \|(L - \lambda I)^{-1}u\| \leq \|(L_0 - \mu I)^{-1}u\| \leq c_2 \|(L - \lambda I)^{-1}u\| \quad \forall u \in H,$$

и, значит, пространство H_{-1} – пополнение H по норме $\|(L - \lambda I)^{-1}u\|$ – совпадает с таким же пространством, построенным по оператору L_0 , т.е. с пространством $H_{-1}^+ \times H_{-1}^-$, где $H_{-1}^\pm$ – пополнения $H^\pm$ соответственно по нормам $\|(A_{11} - \mu I)^{-1}u^+\|$ и $\|(A_{22} - \mu I)^{-1}u^-\|$. Из предложения 2 вытекает, что

$$(H_1^+, H_{-1}^+)_{1/2,2} = H^+, \quad (H_1^-, H_{-1}^-)_{1/2,2} = H^-,$$

а теорема 1.17.1 в [18] влечет, что

$$(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = (H_1^+, H_{-1}^+)_{1/2,2} \times (H_1^-, H_{-1}^-)_{1/2,2},$$

и, значит,

$$(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = H^+ \times H^- = H.$$

В следующей теореме мы предполагаем, что $A_{11}, -A_{22}$ – m -диссипативные операторы, удовлетворяющие условию

$$\exists c > 0 : |(A_{11}u^+, v^+)| \leq c \|u^+\|_{F_1^+} \|v^+\|_{F_1^+}, \quad |(A_{22}u^-, v^-)| \leq c \|u^-\|_{F_1^-} \|v^-\|_{F_1^-} \quad (3.30)$$

для всех $u^\pm, v^\pm \in H_1^\pm$, где $H_1^+ = D(A_{11})$, $H_1^- = D(A_{22})$,

$$\|u^+\|_{F_1^+}^2 = \operatorname{Re}(-A_{11}u^+, u^+) + \|u^+\|^2, \quad \|u^-\|_{F_1^-}^2 = \operatorname{Re}(A_{22}u^-, u^-) + \|u^-\|^2.$$

Через $F_1^\pm$ обозначаем пополнения $D(A_{11})$ и $D(A_{22})$ по нормам $\|\cdot\|_{F_1^+}$, $\|\cdot\|_{F_1^-}$ соответственно. Через $F_{-1}^\pm$ обозначаем негативные пространства, построенные по парам $F_1^\pm$, $H^\pm$. Мы также предположим, что операторы A_{12} и A_{21} в некотором смысле подчинены операторам A_{11} , A_{22} : $D(A_{22}) \subset D(A_{12})$, $D(A_{11}) \subset D(A_{21})$ и

$$\exists c > 0 : \|A_{12}u^-\|_{F_{-1}^+} \leq c \|u^-\|_{F_1^-}, \quad \|A_{21}u^+\|_{F_{-1}^-} \leq c \|u^+\|_{F_1^+} \quad \forall u^\pm \in H_1^\pm; \quad (3.31)$$

$$\exists c_0 > 0 : \|u^+\|_{F_1^+}^2 + \|u^-\|_{F_1^-}^2 \leq c_0 (\operatorname{Re}[-L\vec{u}, \vec{u}] + \|\vec{u}\|^2) \quad (3.32)$$

для всех $\vec{u} = (u^+, u^-) \in H_1 = H_1^+ \times H_1^-$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $L: H \rightarrow H$ – m - J -диссипативный оператор такой, что $i\mathbb{R} \subset \rho(L)$ и выполнены условия (3.30)–(3.32). Тогда найдутся максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $M^\pm$, инвариантные относительно оператора L . При этом все пространство H представимо в виде прямой суммы $H = M^+ + M^-$, $\sigma(\mp L|_{M^\pm}) \subset \mathbb{C}^\pm$ и операторы $\pm L|_{M^\pm}$ – генераторы аналитических полугрупп. Если, в дополнение, L строго J -диссипативен или равномерно J -диссипативен, то соответствующие подпространства M^+ и M^- можно выбрать положительным и отрицательным или, соответственно, равномерно положительным и равномерно отрицательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.32) легко выводится, что норма в пространстве F_1 совпадает с нормой $\|u\|_{F_1}^2 = \|u^+\|_{F_1^+}^2 + \|u^-\|_{F_1^-}^2$, $u = (u^+, u^-)$. Из определения пространства F_{-1} и индефинитной метрики в H вытекает, что $F_{-1} = F_{-1}^+ \times F_{-1}^-$. Из утверждения 3 и теоремы 1.17.1 в [18] имеем, что

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = (F_1^+, F_{-1}^+)_{1/2,2} \times (F_1^-, F_{-1}^-)_{1/2,2} = H^+ \times H^- = H.$$

Утверждение вытекает из теоремы 2.

Список литературы

- [1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986; англ. пер.: Т. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov, *Linear operators in space with an indefinite metric*, Pure Appl. Math. (N. Y.), Wiley, Chichester, 1989.
- [2] Л. С. Понтрягин, “Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:6 (1944), 243–280.
- [3] М. Г. Крейн, “Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой”, *УМН*, **5**:2 (1950), 180–190.
- [4] М. Г. Крейн, “Новое применение принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой”, *Докл. АН СССР*, **154**:5 (1964), 1023–1026; англ. пер.: M. G. Krejn, “A new application of the fixed-point principle in the theory of operators on a space with indefinite metric”, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 224–228.
- [5] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, “О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:2 (1971), 59–71; “О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, окончание статьи, **5**:3, 54–69; англ. пер.: M. G. Krein, G. K. Langer, “Defect subspaces and generalized resolvents of an Hermitian operator in the space $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **5**:2 (1971), 136–146; “Defect subspaces and generalized resolvents of an Hermitian operator in the space $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, end of the paper, **5**:3, 217–228.
- [6] Г. К. Лангер, “О J -эрмитовых операторах”, *Докл. АН СССР*, **134**:2 (1960), 263–266; англ. пер.: H. Langer, “On J -Hermitian operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 1052–1055.
- [7] H. Langer, “Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin”, *Math. Ann.*, **152**:5 (1963), 434–436.
- [8] H. Langer, “Invariant subspaces for a class of operators in spaces with indefinite metric”, *J. Functional Analysis*, **19**:3 (1975), 232–241.
- [9] Т. Я. Азизов, “Инвариантные подпространства и критерии полноты системы корневых векторов J -диссипативных операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, *Докл. АН СССР*, **200**:5 (1971), 1015–1017; англ. пер.: Т. Ja. Azizov, “Invariant subspaces and completeness criteria for the root vector system of J -dissipative operators in the Pontrjagin space $\Pi_{\mathcal{K}}$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1513–1516.
- [10] Т. Я. Азизов, “Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 639–662; англ. пер.: Т. J. Azizov, “Dissipative operators in a Hilbert space with an indefinite metric”, *Math. USSR-Izv.*, **7**:3 (1973), 639–660.
- [11] Т. Ya. Azizov, V. A. Khatskevich, “A theorem on existence of invariant subspaces for J -binoncontractive operators”, *Recent advances in operator theory in Hilbert and Krein spaces* (TU Berlin, Germany, 2007), Oper. Theory Adv. Appl., **198**, Birkhäuser, Basel, 2010, 41–49.
- [12] Т. Я. Азизов, И. В. Гриднева, “Об инвариантных подпространствах J -диссипативных операторов”, *Український Матем. Вісник*, **6**:1 (2009), 1–15; англ. пер.: Т. Ya. Azizov, I. V. Gridneva, “On invariant subspaces of J -dissipative operators”, *Ukr. Math. Bull.*, **6**:1 (2009), 1–13.
- [13] А. А. Шкаликов, “Об инвариантных подпространствах у диссипативных операторов в пространстве с индефинитной метрикой”, *Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям*, Тр. МИАН, **248**, Наука, М., 2005, 294–303; англ. пер.: A. A. Shkalikov, “Invariant subspaces of dissipative operators in a space with indefinite metric”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **248** (2005), 287–296.

- [14] А. А. Шкаликов, “Диссипативные операторы в пространстве Крейна. Инвариантные подпространства и свойства сужений”, *Функц. анализ и его прил.*, **41**:2 (2007), 93–110; англ. пер.: A. A. Shkalikov, “Dissipative operators in the Krein space. Invariant subspaces and properties of restrictions”, *Funct. Anal. Appl.*, **41**:2 (2007), 154–167.
- [15] S. G. Pyatkov, “Maximal semidefinite invariant subspaces for some classes of operators”, *Conditionally well-posed problems*, TVP/TSP, Utrecht, 1993, 336–338.
- [16] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические операторно-дифференциальные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.
- [17] S. G. Pyatkov, *Operator theory. Nonclassical problems*, VSP, Utrecht, 2002.
- [18] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
- [19] M. Haase, *The functional calculus for sectorial operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **169**, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [20] P. Grisvard, “Commutativite de deux foncteurs d’interpolation et applications”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **45**:2 (1966), 143–206.
- [21] К.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [22] P. Ausher, A. McIntosh, A. Nahmod, “Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **46**:2 (1997), 375–403.
- [23] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965; англ. пер.: Yu. M. Berezans’kii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [24] P. Grisvard, “An approach to the singular solutions of elliptic problems via the theory of differential equations in Banach spaces”, *Differential equations in Banach spaces* (Bologna, Italy, 1985), Lecture Notes in Math., **1223**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 131–156.
- [25] P. C. Kunstmann, L. Weis, “Maximal L_p -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ -functional calculus”, *Functional analytic methods for evolution equations* (Levico Terme, Trento, Italy, 2001), Lecture Notes in Math., **1855**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 65–311.

С. Г. Пятков (S. G. Pyatkov)

Югорский государственный университет,

г. Ханты-Мансийск;

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: pyatkov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

29.05.2010 и 09.04.2011