Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Ильютко, Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 9, 53–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 04:05:36

УДК 515.16+519.17

Д. П. Илютко

Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы

Рассматриваются связные конечные четырехвалентные графы со структурой противоположных ребер в каждой вершине (оснащенные 4-графы). На любом таком графе существуют эйлеровы циклы, при движении вдоль которых в каждой вершине мы поворачиваем с ребра на противоположное ему ребро (поворачивающие обходы), в то время как не для каждого графа существует эйлеров цикл, переходящий в каждой вершине с ребра на противоположное ему ребро (гауссов цикл). Основной результат работы – явная формула, связывающая матрицы смежности гауссова цикла и любого эйлерова цикла. Из этой формулы сразу вытекает критерий существования гауссова цикла. Оказывается, что полученные результаты верны для всех симметричных матриц (не только для матриц, реализующих эйлеровыми циклами).

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: оснащенный 4-граф, эйлеров цикл, гауссов цикл, поворачивающий обход, матрицы смежности.

§ 1. Введение

1.1. В настоящей статье мы рассматриваем конечные связные *оснащенные 4-графы*, т.е. графы, у которых каждая вершина имеет степень 4 и в каждой вершине которых четыре исходящих из этой вершины полуребра разбиты на две пары формально противоположных полуребер. Два полуребра одной пары называются *противоположными* в данной вершине. Примером оснащенного 4-графа может служить диаграмма виртуального зацепления, где классические перекрестки играют роль вершин графа, а виртуальные перекрестки – это просто точки пересечения образов ребер при изображении графа на плоскости, причем ребра, образующие проход или переход, считаются противоположными друг другу. Граф, полученный из узлов (зацепления) таким образом, называется *проекцией узла (зацепления)*.

Каждый оснащенный 4-граф G имеет *эйлеров цикл* U , т.е. путь, проходящий по всем ребрам графа G и притом только по одному разу. В каждой вершине графа мы имеем две возможности ее прохождения: мы двигаемся с полуребра на противоположное ему полуребро или мы двигаемся с полуребра на противоположное ему полуребро. Среди всех эйлеровых циклов на оснащем

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.3704), Программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794) и Федерального агентства по образованию (грант № НК-421П/108).

4-графе G можно выделить два типа: в каждой вершине имеется только первая

возможность прохода через нее и в каждой вершине вторая возможность перехода с полуребра на полуребро реализуется. Нетрудно видеть, что эйлеровы циклы первого типа не всегда существуют, и если они существуют, то среди них существует единственный, который называется *гауссовым циклом*, а эйлеровы циклы второго типа (*поворачивающие обходы*) существуют на любом связном оснащённом 4-графе и число их может быть больше 1 (см. [1]–[3]). Проекция узла имеет гауссов цикл, а проекция зацепления больше чем с одной компонентой не имеет гауссова цикла.

1.2. В маломерной топологии оба подхода – подход с помощью гауссова цикла и подход с помощью поворачивающего обхода – широко используются. Подход с помощью гауссова цикла применяется в теории узлов, а именно в построении инвариантов конечного порядка, инвариантов Васильева (см. [4]–[6]) и в вопросах планарности погруженной кривой (см. [7]–[9]). Однако для определения планарности оснащённого 4-графа более удобно пользоваться поворачивающим обходом (см. [3], [9], [10]). Критерий планарности для погруженной кривой, которая является оснащённым 4-графом, формулируется очень просто: погруженная кривая планарна тогда и только тогда, когда хордовая диаграмма произвольного поворачивающего обхода является d -диаграммой, т.е. множество всех хорд хордовой диаграммы может быть разбито на два дизъюнктных подмножества, причем хорды из одного множества не зацеплены друг с другом (см. [9], [11]). Две хорды *зацеплены*, если их концы чередуются при обходе окружности хордовой диаграммы.

Если мы хотим обобщить понятие планарности и найти минимальный род двумерной замкнутой ориентируемой поверхности, в которую может быть вложен заданный оснащённый 4-граф, то подход с помощью поворачивающего обхода тоже более удобен. Существует критерий, дающий ответ на вопрос о минимальности рода (см. [3]).

Так как существует много поворачивающих обходов, соответствующих одному и тому же гауссову циклу, то любые свойства гауссова цикла могут быть найдены из любого поворачивающего обхода. Следовательно, эти свойства не зависят от способа выбора поворачивающего обхода. Например, если один из поворачивающих обходов является d -диаграммой, то остальные тоже являются d -диаграммами. Таким образом, возникает вопрос о нахождении явной формулы, позволяющей получить гауссов цикл из произвольного поворачивающего обхода и наоборот. Конечно, всегда можно сказать, существует или нет на данном оснащённом 4-графе гауссов цикл. Двигаясь вдоль графа согласно определению гауссова цикла, в каждой вершине мы имеем единственный способ прохода через нее. Следовательно, если по возвращению в точку отправления мы прошли все ребра графа, то на данном графе существует гауссов цикл. Но этот способ в случае большого количества вершин не отражает явно комбинаторику эйлеровых циклов.

В настоящей статье мы даем явную форму, которая зависит только от матрицы смежности эйлерова цикла: беря произвольный эйлеров цикл и строя его матрицу смежности, мы можем понять, имеет ли данный оснащённый 4-граф гауссов цикл, и в случае его существования найти его матрицу смежности. Матрица смежности эйлерова цикла является симметрической матрицей, причем не каждая симметрическая матрица является матрицей смежности некоторого

эйлерова цикла. Оказывается, что полученная формула верна для всех симметрических матриц. Исследуя данную формулу, мы получим некоторые интересные факты, касающиеся симметрических матриц.

1.3. Статья устроена следующим образом.

В § 2 даются основные определения, касающиеся 4-графов, оснащенных 4-графов, эйлеровых циклов, и формулируются первоначальные результаты о них.

В § 3 исследуется существование гауссова цикла на оснащем 4-графе в терминах его матрицы смежности и дается явная формула, связывающая матрицы смежности разных эйлеровых циклов. Используя эту формулу, мы получаем матрицу смежности гауссова цикла.

В § 4 мы обобщаем результаты § 3 на случай всех симметрических матриц.

§ 2. Основные определения и предварительные результаты

На протяжении всей статьи все рассматриваемые графы являются конечными, возможно, имеющими петли и/или кратные ребра, кроме того все 4-графы предполагаются связными.

2.1. 4-графы и эйлеровы циклы. Пусть G – произвольный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Под *ребром* мы будем понимать класс эквивалентности двух полуребер. Вершина $v \in V(G)$ имеет *степень* k , если v инцидентна k полуребрам. Граф, все вершины которого имеют степень k , называется *k -валентным* или просто *k -графом*. *Свободная петля*, т.е. граф без вершин с одним циклическим ребром, рассматривается как k -граф для любого k .

Пусть H – произвольный (связный) 4-граф с множеством вершин $V(H)$, и пусть U – эйлеров цикл на H , т.е. путь, проходящий по всем ребрам графа H и притом только по одному разу. Опишем связь между двумя эйлеровыми циклами на данном графе H .

Определим k -преобразование, которое было введено Коцигом (см. [12]). Для каждой вершины $v \in V(H)$ существуют в точности два замкнутых пути P_v и Q_v на U , не имеющих общих ребер, начинающихся и заканчивающихся в вершине v , и каждый из которых содержит по крайней мере по одному ребру. Существует единственный эйлеров цикл, отличный от U , также соединяющий пути P_v и Q_v (если мы зададим произвольную ориентацию на эйлеровом цикле U , то на новом эйлеровом цикле мы двигаемся вдоль P_v согласно ориентации на U , а вдоль Q_v – в противоположном направлении). Обозначим через $U * v$ новый эйлеров цикл, полученный из U . Преобразование $U \mapsto U * v$ называется *k -преобразованием*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [12]). *Любые эйлеровы циклы на 4-графе связаны последовательностью k -преобразований.*

Пусть $w = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$ – произвольное слово, т.е. конечная последовательность букв некоторого конечного алфавита. *Зеркальный образ* слова w – это слово $\tilde{w} = x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1$. Мы будем рассматривать классы эквивалентности слов, где любое слово из класса, порожденного словом $x_1 \dots x_k$, является или циклической перестановкой $w_i = x_i x_{i+1} \dots x_k x_1 \dots x_{i-1}$, $1 \leq i \leq k$, слова $x_1 \dots x_k$, или зеркальным образом циклической перестановки w_i . Мы обозначим этот класс через $(x_1 \dots x_k)$ и назовем его *циклическим словом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слово называется *словом с двойным вхождением*, если каждая его буква встречается в нем ровно два раза.

ПРИМЕР 1. Слово $abcsba$ является словом с двойным вхождением, а слово $abcsb$ не является словом с двойным вхождением.

Очевидно, что зеркальный образ и циклическая перестановка слова с двойным вхождением являются словами с двойным вхождением. Поэтому имеет смысл говорить о циклическом слове с двойным вхождением. Каждое циклическое слово с двойным вхождением удобно изображать хордовой диаграммой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Хордовая диаграмма* – это 3-граф, состоящий из выбранного неориентированного цикла (окружность) и неориентированных ребер (хорд), соединяющих точки на окружности.

Пусть X – произвольное конечное множество и t – произвольное циклическое слово с двойным вхождением, рассматриваемое над алфавитом X . Тогда слово t имеет представление с помощью хордовой диаграммы, которая строится последовательным расположением букв слова t вдоль окружности S^1 , выбором точек на S^1 около каждого появления буквы слова и соединением хордой каждой пары точек, соответствующих двум одинаковым буквам слова. Нетрудно видеть, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством циклических слов с двойным вхождением и множеством хордовых диаграмм.

ПРИМЕР 2. Слово $t = (abacdbcd)$ имеет представление с помощью хордовой диаграммы, изображенной на рис. 1.

Рис. 1. Хордовая диаграмма слова $(abacdbcd)$

На циклических словах с двойным вхождением определим операцию $*$, которая будет соответствовать k -преобразованию. Пусть $t = (vAvB)$, где A, B – подслова слова t , и буквы принадлежат некоторому конечному алфавиту. Тогда положим $t * v = (v\tilde{A}vB)$, где $\tilde{A}$ – зеркальный образ подслова A . На рис. 2 изображено преобразование $t \mapsto t * v$ для хордовых диаграмм (пунктирные дуги хордовых диаграмм содержат концы всех хорд, отличных от v). Мы считаем, что для каждого преобразования хордовых диаграмм меняются только фиксированные фрагменты хордовых диаграмм. Части хордовых диаграмм, не содержащие хорд, участвующих в преобразованиях, изображаем пунктирными дугами.

Пусть U – произвольный эйлеров цикл на 4-графе H с множеством вершин $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$, которое будет играть роль алфавита. Двигаясь вдоль U ,

 Рис. 2. Операция $*$ на хордовых диаграммах

мы встречаем каждую вершину дважды. Последовательно записывая встречающиеся вершины, мы получим циклическое слово $m(U)$ над $V(H)$. Очевидно, что в полученном слове каждая вершина встречается дважды, следовательно, эйлеровы циклы кодируются циклическими словами с двойным вхождением. Из определения следует, что $m(U * v) = m(U) * v$, и если имеется циклическое слово t с двойным вхождением или хордовая диаграмма, то можно построить 4-граф, имеющий такой эйлеров цикл U , что $m(U) = t$. Мы просто “сжимаем” каждую пару вершин (хорду) хордовой диаграммы, помеченных одной и той же буквой, в одну вершину и отождествляем новую вершину с этой буквой.

2.2. Оснащенные 4-графы и эйлеровы циклы. В этом пункте мы рассмотрим 4-графы с дополнительной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 4-граф называется *оснащенным*, если в каждой вершине графа четыре исходящих из нее полуребра разбиты на два семейства полуребер, каждое из которых содержит ровно по два полуребра. Полуребра из одного семейства называются (формально) *противоположными*.

Пусть H – произвольный оснащенный 4-граф и U – эйлеров цикл на нем. Построим оснащенное циклическое слово $m(U)$ с двойным вхождением (соответственно оснащенную хордовую диаграмму), соответствующее эйлерову циклу U . В каждой вершине v графа H мы имеем следующие три возможности прохождения вдоль U через вершину v .

Рис. 3. Переход через вершину

1. Переходим с полуребра на противоположное ему полуребро (рис. 3, а). Вершина v в этом случае будет называться *гауссовой вершиной* для U , а хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *гауссовой*.

2. Переходим с полуребра на непротивоположное ему полуребро, причем ориентации противоположных ребер различны (рис. 3, b). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 0 для U* , а хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 0*.
3. Переходим с полуребра на непротивоположное ему полуребро, причем ориентации противоположных ребер совпадают (рис. 3, c). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 1 для U* , а хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 1*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Эйлеров цикл, имеющий только гауссовы вершины, называется *гауссовым циклом*. Эйлеров цикл, содержащий только негауссовы вершины, называется *поворачивающим обходом* (см. [1]–[3], [9], [10]).

Двигаясь вдоль эйлерова цикла U , мы встречаем каждую вершину графа H дважды. Перейдем к построению оснащенного циклического слова $m(U)$ с двойным вхождением, соответствующего эйлерову циклу U . Слова будут рассматриваться над алфавитом $X = V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G$, где множество $V(H)^{-1}$ состоит из элементов вида v^{-1} для каждой вершины $v \in V(H)$, а множество $V(H)^G$ состоит из элементов вида v^G для каждой вершины $v \in V(H)$. Каждой гауссовой вершине будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H)^G$, т.е. каждому вхождению соответствующей вершины мы припишем верхний индекс G . Например, $m(U) = (Av^G Bv^G)$, если вершина v является гауссовой. Каждой негауссовой вершине с оснащением 0 будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т.е. каждому вхождению соответствующей вершины мы произвольным образом либо ничего не припишем, либо припишем оба раза верхний индекс -1 . Например, $m(U) = (AvBv)$ или $m(U) = (Av^{-1}Bv^{-1})$, если вершина v есть негауссова вершина с оснащением 0 (мы не делаем различие между этими двумя словами). Каждой негауссовой вершине с оснащением 1 будут соответствовать в $m(U)$ две разные буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т.е. двум вхождениям соответствующей вершины мы произвольным образом приписываем разные верхние индексы. Например, $m(U) = (Av^{-1}Bv)$ или $m(U) = (AvBv^{-1})$, если вершина v есть негауссова вершина с оснащением 1 (мы не делаем различие между этими двумя словами).

Таким образом, мы рассматриваем не просто оснащенные циклические слова, а классы эквивалентности оснащенных циклических слов, где эквивалентность порождается автоморфизмами алфавита, которые меняют буквы v и v^{-1} местами для некоторой буквы v . Для простоты изложения мы называем эти классы *оснащенными циклическими словами*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Построенное оснащенное слово не всегда будет являться словом с двойным вхождением каждой буквы. Мы можем рассмотреть проекцию $\pi: V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G \rightarrow V(H) \cup V(H)^G$, заданную правилом $v^{\pm 1} \mapsto v$, $v^G \mapsto v^G$. Образ построенного оснащенного слова при этой проекции является уже словом с двойным вхождением каждой буквы. Мы называем оснащенное слово *словом с двойным вхождением*, если образ слова при проекции π является словом с двойным вхождением.

Изображая оснащенное циклическое слово с двойным вхождением посредством оснащенной хордовой диаграммы, мы будем использовать хорды трех

типов: хорды с меткой G для гауссовых вершин, хорды без меток для негауссовых вершин с оснащением 0 и пунктирные хорды для негауссовых вершин с оснащением 1.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оснащенное циклическое слово с двойным вхождением $m = (ab^{-1}acd^Ge^{-1}d^Gb^{-1}c^{-1}e)$. Имеем: d – гауссова вершина, a, b – негауссовы вершины с оснащением 0 и c, e – негауссовы вершины с оснащением 1. Соответствующая оснащенная хордовая диаграмма изображена на рис. 4.

Рис. 4. Оснащенная хордовая диаграмма для $(ab^{-1}acd^Ge^{-1}d^Gb^{-1}c^{-1}e)$

Пусть V – произвольное конечное множество. Для оснащенного циклического слова m с двойным вхождением (оснащенной хордовой диаграммы) над $V \cup V^{-1} \cup V^G$ мы можем построить оснащенный 4-граф, имеющий такой эйлеров цикл U , что оснащенное слово $m(U)$ совпадает с m . Сначала построим 4-граф, а затем зададим оснащение, используя тип каждой вершины.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При рассмотрении циклического слова с двойным вхождением для нас будет важно лишь расположение букв, соответствующих одной и той же вершине, а не их обозначение (см. [13]).

Определим операцию *оснащенная звездочка* на множестве оснащенных циклических слов с двойным вхождением (обозначим эту операцию тем же символом $*$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. То же самое обозначение $*$ мы использовали для “простых” циклических слов с двойным вхождением. Далее мы будем рассматривать только оснащенные циклические слова с двойным вхождением, а одно и то же обозначение не приведет к противоречию.

Сначала мы определим операцию $\overline{w}$, где w – произвольное подслово (не обязательно слово с двойным вхождением) оснащенного циклического слова с двойным вхождением.

Пусть $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k}$. Тогда $\overline{w} = \overline{x_k^{\varepsilon_k}} \dots \overline{x_1^{\varepsilon_1}}$, где $\overline{x_l^{\varepsilon_l}} = x_l^{\varepsilon_l}$, если $\varepsilon_l = G$, и $\overline{a_l^{\varepsilon_l}} = a_l^{-\varepsilon_l}$, если $\varepsilon_l = \pm 1$. Далее, $m = (a^\varepsilon m_1 a^{\varepsilon'} m_2)$ – оснащенное циклическое слово с двойным вхождением. Положим: $m * a = (a \overline{m_1} a m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' = G$ (рис. 5, а); $m * a = (a^G \overline{m_1} a^G m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' \neq G$ (рис. 5, а); $m * a = (a \overline{m_1} a^{-1} m_2)$, если $\varepsilon = -\varepsilon'$ (рис. 5, б). Таким образом, в результате применения операции оснащенная звездочка к букве a мы получаем: если a являлась гауссовой буквой, то в новом слове она будет негауссовой буквой с оснащением 0; если a являлась негауссовой буквой с оснащением 0 (соответственно 1), то в новом слове она будет гауссовой буквой (соответственно негауссовой буквой с оснащением 1).

Рис. 5. Операция оснащенная звездочка

Используя предложение 1, сразу получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [1]–[3]). Любые два оснащенных циклических слова с двойным вхождением, полученные из оснащенного 4-графа, связаны между собой последовательным применением операции оснащенная звездочка.

Беря произвольный эйлеров цикл и применяя операцию оснащенная звездочка к гауссовым буквам, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каждый оснащенный 4-граф имеет поворачивающий обход.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно доказать предложение 3, используя другие методы, но мы хотим “привыкнуть” к операции оснащенная звездочка.

Очевидно, что существует много поворачивающих обходов и что не каждый оснащенный 4-граф имеет гауссов цикл (если имеет гауссов цикл, то он единствен). В §3 мы сформулируем критерий существования гауссова цикла, используя произвольный эйлеров цикл, и покажем, как его получить при условии существования. Следующее утверждение показывает, как связаны два поворачивающих обхода на оснащем 4-графе.

УТВЕРЖДЕНИЕ (см. [1]–[3]). Любые два поворачивающих обхода, заданные с помощью оснащенных циклических слов с двойным вхождением, получают друг из друга последовательностью следующих операций: оснащенная звездочка, примененная к негауссовым буквам с оснащением 1, и $((t * a) * b) * a$, где t – оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b – негауссовы буквы с оснащением 0, причем они чередуются в слове t , т.е. $t = (\dots a \dots b \dots a \dots b)$.

§ 3. Гауссовы циклы

В этом параграфе мы даем явную формулу, позволяющую найти матрицу смежности гауссова цикла из матрицы смежности произвольного эйлерова цикла (конечно, при условии, что гауссов цикл существует).

3.1. Существование гауссова цикла. Для формулирования критерия существования гауссова цикла нам потребуются два понятия – матрица смежности оснащенного циклического слова с двойным вхождением (оснащенной хордовой диаграммы) и перестройка множества хорд.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть D – оснащенная хордовая диаграмма, и пусть S^1 – ее окружность. Назовем две хорды *зацепленными*, если концы одной хорды лежат в разных связных компонентах множества, полученного из S^1 выбрасыванием концов другой хорды. Используя язык оснащенных циклических слов с двойным вхождением, две буквы a , b называем *чередующимися*, если при прочтении слова циклически мы их встречаем последовательно: $(\dots a^{\alpha_1} \dots b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_2} \dots b^{\beta_2} \dots)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если нарисовать хордовую диаграмму и расположить все хорды внутри окружности, то зацепленные хорды будут пересекать друг друга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Матрица смежности хордовой диаграммы D с пронумерованными n хордами – это $(n \times n)$ -матрица $A(D) = (a_{ij})$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) элемент a_{ii} равен оснащению хорды с номером i , т.е. или G , или 0, или 1;
- 2) $a_{ij} = 1$, $i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j зацеплены;
- 3) $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j не зацеплены.

ПРИМЕР 4. Пусть D – оснащенная хордовая диаграмма, изображенная на рис. 4. Пронумеруем все хорды из D : хорда aa имеет номер 1, хорда bb – номер 2 и т.д. Тогда

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & G & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется оснащенная хордовая диаграмма D , все хорды которой имеют оснащение 0 или 1 (без гауссовых хорд).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Определим *перестройку вдоль множества хорд* хордовой диаграммы D следующим образом: для каждой хорды, имеющей оснащение 0 (соответственно 1), рисуем параллельную (соответственно пересекающую) хорду около первоначальной хорды и удаляем дуги окружности между соседними концами, как показано на рис. 6. Незначительным шевелением картинка в $\mathbb{R}^2$ перестраивается в одномерное многообразие в $\mathbb{R}^3$. Это многообразие $M(D)$ и есть результат перестройки (рис. 7).

Оказывается, число компонент связности многообразия $M(D)$ может быть определено из матрицы смежности $A(D)$ диаграммы D .

ТЕОРЕМА 1 (см. [14]–[18]). Пусть D – оснащенная хордовая диаграммы, не содержащая гауссовых хорд. Тогда число компонент связности многообразия

Рис. 6. Перестройка окружности по хордам

Рис. 7. Многообразие $M(D)$

$M(D)$ равно $\text{corank } A(D) + 1$, где $A(D)$ – матрица смежности диаграммы D над $\mathbb{Z}_2$ и коранг вычисляется над $\mathbb{Z}_2$.

Напомним, что коранг равен размеру матрицы минус ее ранг.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Все матрицы, не содержащие G на диагонали, рассматриваются над $\mathbb{Z}_2$, и мы часто не будем указывать это явно.

Используя теорему 1, мы можем сформулировать критерий существования гауссова цикла.

Пусть D – оснащенная хордовая диаграмма с матрицей смежности $A(D)$. Построим матрицу $\hat{A}(D)$, выкидывая строки и столбцы матрицы $A(D)$, соответствующие гауссовым хордам.

Рис. 8. Структура оснащенной хордовой диаграммы

ТЕОРЕМА 2 (см. [1], [2]). Пусть H – оснащенный 4-граф, и пусть U – эйлеров цикл на H . Тогда H имеет гауссов цикл тогда и только тогда, когда $\text{corank}(\hat{A}(D) + E) = 0$, где D – оснащенная хордовая диаграмма, построенная из U , и E – единичная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО иллюстрируется с помощью рис. 8. Для того чтобы гауссов цикл, т.е. путь, двигаясь вдоль которого, мы переходим с ребра e_3 на ребро e_1 , существовал, мы должны удалить все гауссовы хорды, заменить все хорды с оснащением 0 на пересекающиеся хорды, а все хорды с оснащением 1 – на параллельные хорды.

3.2. Гауссов цикл. Пусть H – оснащенный 4-граф, имеющий гауссов цикл, и пусть U – эйлеров цикл на H . Используя предложение 3, мы можем считать, что $m(U)$ (соответственно хордовая диаграмма D) не имеет гауссовых вершин (соответственно гауссовых хорд), т.е. U – поворачивающий обход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{kl})$ равны с точностью до диагональных элементов, если $a_{ij} = b_{ij}$ при $i \neq j$.

Один из основных результатов статьи – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Матрица смежности гауссова цикла, рассматриваемая над $\mathbb{Z}_2$, с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.

Рис. 9. Уменьшающая операция

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Нетрудно показать, что следующие операции, примененные к D , уменьшают число негауссовых хорд:

- 1) оснащенная звездочка, примененная к негауссовой хорде с оснащением 0;
- 2) $m \mapsto (((m * a) * b) * a)$, где m – оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b – негауссовы буквы (хорды) с оснащением 1, которые чередуются в m (зацеплены).

Мы назовем эти операции *уменьшающими операциями*. Уменьшающие операции меняют эйлеров цикл U на 4-графе, и число негауссовых вершин в новом эйлеровом цикле меньше, чем в U (см. рис. 5, а и рис. 9).

Пусть D – оснащенная хордовая диаграмма, и пусть $A(D)$ – ее матрица смежности. Будем применять уменьшающие операции. Без ограничения общности можно считать, что уменьшающие операции применяются к хордам с наименьшими номерами в нашей нумерации. Тогда первая уменьшающая операция для первого элемента на языке матриц выглядит так:

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

а вторая для первых двух элементов – так:

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & A_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 \end{pmatrix};$$

здесь $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ указывают на вектор-столбцы, полностью состоящие из 0 и 1 соответственно; (1) – это матрица, полностью состоящая из единиц, а A_i – какие-то матрицы.

Мы будем последовательно применять эти операции к хордовой диаграмме D . Теперь покажем, что после применения уменьшающих операций к оснащенной хордовой диаграмме D , не имеющей гауссовых хорд, мы получим с точностью до диагональных элементов оснащенную хордовую диаграмму с матрицей смежности $(A(D) + E)^{-1}$.

Чтобы получить матрицу $(A(D) + E)^{-1}$, будем совершать элементарные преобразования над строками матрицы $B(D) = A(D) + E$ с $\det(A(D) + E) = 1$. Построим матрицу $(A(D) + E \mid E)$ размера $n \times 2n$. Обозначим через $\widehat{M}_{i,j \dots k}$ матрицу, полученную из матрицы M удалением строк и столбцов с номерами $i, j, \dots, k$.

Так как $\det B(D) = 1$, то или существует диагональный элемент, равный 1, или существуют два таких номера i и j , что $b_{ii} = b_{jj} = 0$, $b_{ij} = b_{ji} = 1$.

В первом случае без ограничения общности можно предположить, что $b_{11} = 1$. Совершая элементарные преобразования над матрицей $B(D)$ с помощью первой

строки, получаем

$$\begin{aligned}
 B(D) &= A(D) + E = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ 1 & A_1^\top & A_2 + E \end{pmatrix} \\
 &\rightsquigarrow B'(D) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) \end{pmatrix}, \\
 (B(D) \mid E) \\
 &\rightsquigarrow (B'(D) \mid E') = \left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & E & 0 \\ 1 & 0 & E \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

После применения первой уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорда, соответствующая вершине v_1 , становится гауссовой хордой, и смежности негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_1$, а другие смежности определяются первым столбцом матрицы E' (с точностью до диагональных элементов).

Во втором случае без ограничения общности можем предположить, что $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = b_{21} = 1$. Совершая элементарные преобразования с помощью первых двух строк матрицы $B(D)$, мы получим

$$\begin{aligned}
 B(D) &= A(D) + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & 1 & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 + E \end{pmatrix} \\
 &\rightsquigarrow B'(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{pmatrix}, \\
 (B(D) \mid E) &\rightsquigarrow (B'(D) \mid E') \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & E & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & E & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

После применения второй уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорды, соответствующие вершинам v_1 и v_2 , становятся гауссовыми хордами, смежности негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_{12}$, а оставшиеся смежности определяются первыми двумя столбцами матрицы E' .

Предположим, что мы совершили k уменьшающих операций. После этих преобразований матрица $(B(D) \mid E)$ преобразуется в матрицу

$$(B'(D) \mid E') = \left(\begin{array}{cc|cc} E & C & F & 0 \\ 0 & R & S & E \end{array} \right),$$

где F – это $(l \times l)$ -матрица, R – симметрическая матрица. Тогда новая оснащенная хордовая диаграмма содержит l гауссовых хорд, смежности негауссовых хорд определяются матрицей R , а все оставшиеся смежности – первыми l столбцами матрицы E' . Так как $\det B'(D) = 1$, то $\det R = 1$, и в матрице R существуют или диагональный элемент, равный 1, или два таких номера p и q , что $r_{pp} = r_{qq} = 0$, $r_{pq} = r_{qp} = 1$.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности считаем, что $r_{11} = 1$. В этом случае мы применим первую уменьшающую операцию; получим

$$\begin{aligned} (B'(D) \mid E') &= \left(\begin{array}{cc|cc} E & C & F & 0 \\ 0 & R & S & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & C_1 & C_2 & C_3 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & R_2^\top & R_3 & S_3 & \mathbf{0} & 0 & E \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & 0 & C'_2 & C'_3 & F'_1 & F'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_2^\top & R_3 + (1) & S'_3 & 1 & 0 & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} E & C' & F' & 0 \\ 0 & R' & S' & E \end{array} \right) \\ &= (B''(D) \mid E''), \end{aligned}$$

где F' – это $((l+1) \times (l+1))$ -матрица, R' – симметрическая матрица. Число гауссовых вершин равно $l+1$, смежности негауссовых вершин определяются матрицей R' , а все оставшиеся смежности – первыми $l+1$ столбцами матрицы E'' . Второй случай рассматривается аналогично.

В результате мы получим матрицу

$$(E \mid (A(D) + E)^{-1})$$

и оснащенную хордовую диаграмму только с гауссовыми хордами. Матрица смежности полученной хордовой диаграммы с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.

Мы доказали теорему для недиагональных элементов, а мы знаем, что на диагонали будут стоять буквы G . Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть H – произвольный (связный) ориентированный 4-граф, причем в каждую вершину входят и выходят из нее ровно два полуребра. Легко видеть, что на H существует ориентированный эйлеров цикл U . Зададим оснащение на H таким образом, что U является поворачивающим обходом на новом оснащённом 4-графе и каждая пара противоположных полуребер состоит из входящего и выходящего полуребер. Если на оснащённом ориентированном 4-графе H существует ориентированный гауссов цикл, то теорема 3 дает формулу для матрицы смежности гауссова цикла. Таким образом, теорема 3.4 из [19] является частным случаем теоремы 3.

Следующее следствие немедленно вытекает из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть U_1 и U_2 – два поворачивающих обхода, и пусть D_1 и D_2 – их оснащенные хордовые диаграммы такие, что $\det(A(D_i) + E) = 1$.

Рис. 10. Оснащенный 4-граф

Тогда матрицы $(A(D_1) + E)^{-1}$ и $(A(D_2) + E)^{-1}$ совпадают с точностью до диагональных элементов.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим оснащенный 4-граф, состоящий из четырех вершин v_i (рис. 10). Пусть U_1 и U_2 – два поворачивающих обхода, заданные оснащенными циклическими словами с двойными вхождениями

$$m(U_1) = (v_1 v_4 v_2 v_1^{-1} v_2 v_3 v_4 v_3), \quad m(U_2) = (v_1 v_4 v_3 v_4 v_2 v_3 v_1 v_2^{-1})$$

соответственно. Тогда

$$A(m(U_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(m(U_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем

$$(A(m(U_1)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A(m(U_2)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} G & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G & 1 & 1 \\ 1 & 1 & G & 1 \\ 1 & 1 & 1 & G \end{pmatrix}$$

– матрица смежности гауссова цикла, заданного с помощью циклического слова $(v_1 v_4 v_3 v_1 v_2 v_4 v_3 v_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Оснащенная хордовая диаграмма называется d -диаграммой (см. [20]), если все ее хорды являются негауссовыми хордами с оснащением 0, и множество всех ее хорд может быть разбито на два дизъюнктных подмножества, причем хорды из одного множества не зацеплены друг с другом.

Следующее следствие сразу следует из критерия планарности погруженной кривой и из теории атомов (см. [11], [21]).

СЛЕДСТВИЕ 2 (В. О. Мантуров). Пусть D – это оснащенная хордовая диаграмма, все хорды которой являются негауссовыми с оснащением 0, и $\det(A(D) + E) = 1$. Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_2$ таковы, что

$$\det((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 1,$$

то матрица $((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$ имеет единицы на диагонали. Кроме того, если D является d -диаграммой, то матрица $((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$ является матрицей смежности d -диаграммы. Здесь через $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ обозначена диагональная матрица с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали.

Геометрически первая часть следствия 2 означает следующее. Имея оснащенный 4-граф H и некоторый поворачивающий обход U на нем, мы можем задать ориентацию на H : ориентируем обход U произвольным образом и зададим с помощью него ориентацию на H . Мы скажем, что обход U задает структуру источник–сток, если каждая пара противоположных ребер состоит из двух входящих в вершину или двух исходящих из нее полуребер. Заметим, что структура источник–сток не зависит от ориентации обхода U . Оказывается, если какой-то поворачивающий обход задает на оснащем 4-графе структуру источник–сток, то и любой другой поворачивающий обход тоже будет задавать структуру источник–сток. Вторая часть следствия относится к вопросу планарности. Если у нас имеется планарный оснащенный 4-граф, т.е. вложенный в плоскость граф с сохранением структуры противоположных ребер, то все поворачивающие обходы задают d -диаграммы.

§ 4. Матрицы смежности

Хорошо известно, что существуют симметрические матрицы над $\mathbb{Z}_2$, которые могут не иметь реализацию в виде хордовых диаграмм (см. [22]), и симметрические матрицы, которые могут быть реализованы разными хордовыми диаграммами. При доказательстве теоремы 3 мы использовали только элементарные преобразования и матрицы смежности. Оказывается, что теорема 3 и следствия 1 и 2 могут быть переформулированы для произвольных симметрических матриц.

В данном параграфе все матрицы рассматриваются над полем $\mathbb{Z}_2$ с диагональными элементами, равными 0 или 1. Рассмотрим следующую операцию над множеством симметрических матриц. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная симметрическая $(n \times n)$ -матрица. Фиксируем произвольный элемент $a_{kk} = 1$ и построим новую матрицу $\text{Loc}(A, k) = (\tilde{a}_{ij})$; здесь $\tilde{a}_{pq} = a_{pq} + 1$, $p, q \neq k$, если $a_{pk} = 1$ и $a_{kq} = 1$, и $\tilde{a}_{pq} = a_{pq}$ в остальных случаях. Мы назовем преобразование $A \mapsto \text{Loc}(A, k)$ локальным дополнением матрицы A в элементе a_{kk} (эта операция является аналогом операции оснащенная звездочка).

Нетрудно показать, что если $a_{ij} = 1$, то матрицы

$$\text{Loc}(\text{Loc}(\text{Loc}(A, i), j), i), \quad \text{Loc}(\text{Loc}(\text{Loc}(A, j), i), j),$$

полученные из матрицы A , совпадают с точностью до диагональных элементов с номерами i, j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть A – произвольная симметрическая матрица с $a_{ii} = a_{jj} = 0$, $a_{ij} = a_{ji} = 1$. Шарнирное преобразование – это преобразование $A \mapsto \tilde{A}$,

где диагональные элементы матрицы $\tilde{A}$ совпадают с диагональными элементами матрицы A , а другие элементы матрицы $\tilde{A}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $\text{Loc}(\text{Loc}(\text{Loc}(A, i), j), i)$.

Обозначим через $\text{Sym}(n, \mathbb{Z}_2)$ множество всех симметрических $(n \times n)$ -матриц над $\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим два отношения эквивалентности на множестве $\text{Sym}(n, \mathbb{Z}_2)$. Первое отношение – это равенство с точностью до диагональных элементов (обозначим это отношение эквивалентности через $\sim_D$). Второе отношение эквивалентности определяется следующим образом: будем говорить, что две матрицы A и B получены друг из друга сменой обхода (обозначим это отношение эквивалентности через $A \sim_C B$), если A и B получаются друг из друга последовательностью преобразований – локальное дополнение и шарнирное преобразование.

Доказательство основного результата этой части основано на следующих пяти леммах.

ЛЕММА 1 (см. [1], [2]). Если $\det(A + E) = 1$ и $B \sim_C A$, то $\det(B + E) = 1$, где E – единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если симметрические матрицы A и B реализуются в виде хордовых диаграмм, то лемма 1 означает, что после применения подходящих операций оснащенная звездочка к поворачивающему обходу проекции узла на плоскость мы снова получим поворачивающий обход проекции узла, а не зацепления.

Обозначим через $\text{Sym}_+(n, \mathbb{Z}_2) \subset \text{Sym}(n, \mathbb{Z}_2)$ подмножество множества всех симметрических матриц, состоящее из всех матриц A с $\det(A + E) = 1$.

ЛЕММА 2. Отношение $\sim_C$ является отношением эквивалентности на множестве $\text{Sym}_+(n, \mathbb{Z}_2)$.

Рассмотрим два множества

$$\mathfrak{L}(n) = \text{Sym}(n, \mathbb{Z}_2) / \sim_D, \quad \mathfrak{G}(n) = \text{Sym}_+(n, \mathbb{Z}_2) / \sim_C.$$

ЛЕММА 3. Каждый элемент множества $\mathfrak{L}(n)$ имеет представитель с определителем, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по размерности матрицы.

База индукции. Для $n = 1$ утверждение леммы очевидно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы верно для $n - 1$, и пусть A – произвольная $(n \times n)$ -матрица. По предположению индукции мы можем считать, что $\det A^{11} = 1$, где A^{ij} – это алгебраическое дополнение до элемента a_{ij} . Тогда или

$$\det A = a_{11}A^{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}A^{1j} = a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}A^{1j} = 1,$$

или

$$\det \tilde{A} = (a_{11} + 1)A^{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}A^{1j} = a_{11} + 1 + \sum_{j=2}^n a_{1j}A^{1j} = 1,$$

где матрица $\tilde{A}$ отличается от A только одним элементом $\tilde{a}_{11}$.

ЛЕММА 4. Пусть B и $\tilde{B}$ – произвольные матрицы над $\mathbb{Z}_2$ с $\det B = \det \tilde{B} = 1$ и матрицы B и $\tilde{B}$ совпадают с точностью до одного диагонального элемента. Тогда матрицы $B^{-1} + E$ и $\tilde{B}^{-1} + E$ получаются друг из друга операцией локальное дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $B = (b_{ij})$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ – две $(n \times n)$ -матрицы и $\tilde{b}_{nn} = b_{nn} + 1 = 0$, $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$, $i \neq n$ или $j \neq n$. Найдем обратные матрицы B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$, совершая элементарные преобразования над строками матриц B и $\tilde{B}$, т.е. с помощью элементарных преобразований мы приведем матрицы B и $\tilde{B}$ к единичному виду, а затем, применяя те же самые преобразования к единичным матрицам, получим обратные.

Используя равенство $\det B = \det \tilde{B} = 1$, имеем

$$1 = \det \tilde{B} = \det B + \det \hat{B}_n^n = 1 + \det \hat{B}_n^n, \quad \det \hat{B}_n^n = 0,$$

$$\text{rank } B = n, \quad \text{rank } \hat{B}_n^n = n - 2;$$

здесь $\hat{B}_n^n$ – матрица, полученная из матрицы B удалением n -й строки и n -го столбца. Так как матрица $\hat{B}_n^n$ является симметрической, без ограничения общности можем считать, что $\det C = 1$, где C – матрица, полученная из $\hat{B}_n^n$ удалением $(n - 1)$ -й строки и $(n - 1)$ -го столбца.

Совершая элементарные преобразования над строками матриц B и $\tilde{B}$ (первые $n - 1$ строк матриц $\tilde{B}$ и B совпадают), мы приводим матрицы $\tilde{B}$ и B к виду

$$B \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \tilde{B} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \end{array} \right);$$

здесь F – это $((n - 2) \times (n - 2))$ -матрица, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – $(n - 2)$ -вектор-столбцы. Далее, совершая элементарные преобразования над строками, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{B} &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{0} & F_1 & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & F_2 & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{a}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}$ (обратная матрица к симметрической матрице является симметрической),

$$\begin{aligned} B &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{a} & \mathbf{b} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top & 1 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{a} & \mathbf{0} & F_1 & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top & 1 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & F_3 & \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top & 1 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что F_3 получена из F_2 добавлением строки $\mathbf{a}^\top$ к строке матрицы F_2 , которая соответствует строке матрицы B^{-1} , имеющей последний элемент, равный 1. Следовательно, матрица $B^{-1} + E$ получена из матрицы $\tilde{B}^{-1} + E$ с помощью операции локальное дополнение в элементе, соответствующем элементу $\tilde{b}_{nn}$.

ЛЕММА 5. Пусть B и $\tilde{B}$ – произвольные матрицы над $\mathbb{Z}_2$ с $\det B = \det \tilde{B} = 1$ и матрицы B и $\tilde{B}$ совпадают с точностью до двух элементов на диагонали с номерами i и j . Предположим, что $\det \hat{B}_i^i = \det \hat{B}_j^j = 1$; здесь $\hat{B}_k^k$ – матрица, полученная из B удалением k -й строки и k -го столбца. Тогда матрицы $B^{-1} + E$ и $\tilde{B}^{-1} + E$ получаются друг из друга шарнирным преобразованием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можем считать, что $B = (b_{ij})$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ – две $(n \times n)$ -матрицы и $\tilde{b}_{(n-1)(n-1)} = b_{(n-1)(n-1)} + 1$, $\tilde{b}_{nn} = b_{nn} + 1$, $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$ для $(i, j) \neq (n-1, n-1), (n, n)$. Найдем обратные матрицы B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$, совершая элементарные преобразования над строками матриц B и $\tilde{B}$.

Используя равенство $\det B = \det \tilde{B} = 1$, получаем

$$1 = \det \tilde{B} = \det B + \det \hat{B}_{n-1}^{n-1} + \det \hat{B}_n^n + \det \hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n} = 1 + \det \hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n},$$

$$\det \hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n} = 0, \quad \text{rank } \hat{B}_{n-1}^{n-1} = \text{rank } \hat{B}_n^n = n-1, \quad \text{rank } \hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n} = n-3;$$

здесь матрица $\hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n}$ получена из матрицы $\hat{B}_n^n$ удалением $(n-1)$ -й строки и $(n-1)$ -го столбца. Так как матрица $\hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n}$ является симметрической, без ограничения общности можно считать, что $\det C = 1$, где матрица C получена из $\hat{B}_{(n-1)n}^{(n-1)n}$ удалением $(n-2)$ -й строки и $(n-2)$ -го столбца. Нетрудно показать, что две матрицы, полученные из $\tilde{B}$ удалением n -й строки, n -го столбца для первой матрицы и $(n-1)$ -й строки, $(n-1)$ -го столбца для второй матрицы, невырождены.

Совершая элементарные преобразования над строками матриц B и $\tilde{B}$ (первые $n-2$ строк матриц $\tilde{B}$ и B совпадают), приводим матрицы B и $\tilde{B}$ к виду

$$B \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 & l & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & l & 0 & \mathbf{c}^\top & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\tilde{B} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & l & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & l & 1 & \mathbf{c}^\top & 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

здесь F – это $((n-3) \times (n-3))$ -матрица, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ – $(n-3)$ -вектор-столбцы, $l \in \{0, 1\}$. Далее, совершая элементарные преобразования над строками, имеем

$$B \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 & l & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & l & 0 & \mathbf{c}^\top & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & 0 & l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top & l & l & 1+l \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 0 & l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & l & 1 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 0 & 1 & (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & 1+l & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow (E \mid B^{-1}),$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} F_1 & l(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} & l\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} & (1+l)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top & l & l & 1+l \\ l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & l & 1 & 1 \\ (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & 1+l & 1 & 1 \end{array} \right)$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 1 & \mathbf{a}^\top & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & l & \mathbf{b}^\top & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 1 & l & 1 & \mathbf{c}^\top & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 & 0 & l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top & l & 1+l & l \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 & 0 & (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & 1+l & 1 & 1 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 0 & 1 & l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & l & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow (E \mid \tilde{B}^{-1}), \\
\tilde{B}^{-1} &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} F_2 & & & & l(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} & (1+l)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} & l\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} & \\ l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top & & & & l & 1+l & & l \\ (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & & & & 1+l & 1 & & 1 \\ l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top & & & & l & 1 & & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Исследуем более подробно матрицы F_1 и F_2 . Имеем четыре случая в зависимости от последних двух элементов строк.

1) Если последние два элемента строки матрицы B^{-1} равны 0, то и последние два элемента соответствующей строки матрицы $\tilde{B}^{-1}$ равны 0. Возможны следующие два случая: строки матриц F_1 и F_2 или получены из F добавлением суммы двух строк $l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$ и $(1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$ к соответствующей строке матрицы F , или равны соответствующей строке матрицы F . В обоих случаях мы получим равенство строк матриц B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$, последние два элемента которых равны 0.

2) Если последние два элемента строки матрицы B^{-1} равны 1, то и последние два элемента соответствующей строки матрицы $\tilde{B}^{-1}$ равны 1. Возможны следующие два случая: строки матриц F_1 и F_2 или получены из F добавлением строки $l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$, или добавлением строки $(1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$ к соответствующей строке матрицы F . В обоих случаях мы получим равенство строк матриц B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$, последние два элемента которых равны 1.

3) Если предпоследний элемент строки матрицы B^{-1} равен 0, а последний равен 1, то предпоследний элемент соответствующей строки матрицы $\tilde{B}^{-1}$ равен 1, а последний равен 0. Возможны следующие два случая: строки матриц F_1 и F_2 или получены из F добавлением суммы строк

$$l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top, \quad l(l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top)$$

для F_1 и суммы строк

$$l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top, \quad l((1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top)$$

для F_2 , или добавлением суммы трех строк

$$l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top, \quad (1+l)(l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top), \quad (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$$

для F_1 и суммы трех строк

$$l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top, \quad (1+l)((1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top), \quad l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$$

для F_2 к соответствующей строке матрицы F . В обоих случаях сумма соответствующих друг другу строк матриц B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$ равна $l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$.

4) Если предпоследний элемент строки матрицы B^{-1} равен 1, а последний равен 0, то предпоследний элемент соответствующей строки матрицы $\tilde{B}^{-1}$ равен 0, а последний равен 1. Возможны следующие два случая: строки матриц F_1 и F_2 или получены из F добавлением суммы строк

$$l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top, \quad (1+l)(l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top)$$

для F_1 и суммы строк

$$l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top, \quad (1+l)((1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top)$$

для F_2 , или добавлением суммы трех строк

$$l\mathbf{a}^\top + l\mathbf{b}^\top + (1+l)\mathbf{c}^\top, \quad l(l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top), \quad (1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$$

для F_1 и суммы строк

$$l(\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top) + \mathbf{b}^\top, \quad l((1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top), \quad l\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$$

для F_2 к соответствующей строке матрицы F . В обоих случаях сумма соответствующих друг другу строк матриц B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$ равна $(1+l)\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top + \mathbf{c}^\top$.

Следовательно, матрицы $B^{-1} + E$ и $\tilde{B}^{-1} + E$ получаются друг из друга шарнирным преобразованием.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если симметрическая матрица B реализуется в виде хордовой диаграммы, то и матрица $\tilde{B}$, равная B с точностью до диагональных элементов, тоже реализуется в виде хордовой диаграммы. В этом случае леммы 4 и 5 означают, что поворачивающие обходы, полученные из гауссова обхода разными способами, связаны преобразованиями, указанными в утверждении.

ТЕОРЕМА 4. 1) *Отображение $\chi: \mathfrak{G}(n) \rightarrow \mathfrak{L}(n)$, заданное формулой $\chi[A]_C = [(A + E)^{-1}]_D$, корректно определено.*

2) *Существует обратное отображение $\chi^{-1}: \mathfrak{L}(n) \rightarrow \mathfrak{G}(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E_{ij} матрицу, все диагональные элементы которой равны 1, элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен 1, остальные элементы равны 0.

1) Пусть $A \sim_C \tilde{A}$. Если матрицы A и $\tilde{A}$ получаются друг из друга шарнирным преобразованием для первых двух элементов, то

$$\begin{aligned} B = A + E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 + E \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} = \tilde{A} + E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{pmatrix} \\ &= BE_{1k_1} \dots E_{1k_p} E_{2(k_p+1)} \dots E_{2k_q} E_{1(k_q+1)} \dots E_{1n} E_{2(k_q+1)} \dots E_{2n} E_{12} E_{21} E_{12} \\ &= BM, \end{aligned}$$

здесь $k_1, \dots, k_p$, $k_1 > 2$, – номера тех столбцов, которые имеют 1 в первой строке и 0 во второй строке, $k_p + 1, \dots, k_q$ – номера тех столбцов, которые имеют 0 в первой строке и 1 во второй строке, и $k_q + 1, \dots, n$ – номера тех столбцов, которые имеют 1 в первых двух строках.

Получаем $\tilde{B}^{-1} = M^{-1}B^{-1}$. Последняя матрица получается из матрицы B^{-1} добавлением строк к первым двум ее строкам. Так как матрицы $\tilde{B}^{-1}$ и B^{-1} являются симметрическими, то матрица $\tilde{B}^{-1}$ может отличаться от B^{-1} только в четырех элементах, расположенных в первых двух строках и столбцах. Итак, мы должны доказать равенство $b^{12} = \tilde{b}^{12}$, $B^{-1} = (b^{ij})$, $\tilde{B}^{-1} = (\tilde{b}^{ij})$. Имеем

$$\begin{aligned}
 b^{12} &= \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 + E \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & A_9 + E + (1) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & A_9 + E + (1) \end{pmatrix}, \\
 \tilde{b}^{12} &= \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & A_9 + E + (1) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & A_9 + E + (1) \end{pmatrix} = b^{12}.
 \end{aligned}$$

Мы доказали, что $B^{-1} \sim_D \tilde{B}^{-1}$.

Если матрицы A и $\tilde{A}$ получаются друг из друга операцией локальное дополнение в первом элементе, то

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + E \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) + E \end{pmatrix} = (A(G_1) + E)E_{1m}E_{1(m+1)} \dots E_{1n};$$

здесь числа $m, m+1, \dots, n$ соответствуют номерам строк, содержащим 1 в первой строке.

Получаем $\tilde{B}^{-1} = E_{1n} \dots E_{1m} B^{-1}$. Матрица $\tilde{B}^{-1}$ получается из матрицы B^{-1} добавлением суммы строк с номерами от m до n к первой ее строке. Так как матрицы $\tilde{B}^{-1}$ и B^{-1} являются симметрическими, то матрица $\tilde{B}^{-1}$, возможно, отличается от матрицы B^{-1} только первым элементом на диагонали. Итак, мы доказали, что $B^{-1} \sim_D \tilde{B}^{-1}$.

Если матрицы A и $\tilde{A}$ получаются друг из друга последовательностью операций локальное дополнение и шарнирное преобразование, то, последовательно применяя два предыдущих случая, мы получим $(A + E)^{-1} \sim_D (\tilde{A} + E)^{-1}$.

2) Если $B \sim_D \tilde{B}$ и $\det B = \det \tilde{B} = 1$, то, применяя леммы 4 и 5, получаем $B^{-1} + E \sim_C \tilde{B}^{-1} + E$. Используя лемму 3, получаем, что существует некоторая матрица B с $\det B = 1$ в каждом классе $[C]_D$. Мы можем определить обратное отображение $\chi^{-1}: \mathfrak{L}(n) \rightarrow \mathfrak{G}(n)$, положив $\chi^{-1}([C]_D) = [B^{-1} + E]_C$. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если мы рассматриваем симметрические матрицы, реализуемые хордовыми диаграммами, то соответствующие элементы из $\mathfrak{G}(n)$ и $\mathfrak{L}(n)$ — это просто оснащенные 4-графы с точностью до мутации. Наш изоморфизм устанавливает соответствие между разными способами задания оснащенного 4-графа.

Отображение χ задает изоморфизм (см. [23]) между множеством гомотопических классов петлевых графов (см. [24]) и множеством граф-узлов (см. [1], [2]).

Автор выражает благодарность за внимание к работе В. О. Мантурову, А. Т. Фоменко, Д. М. Афанасьеву, И. М. Никонову и за плодотворные обсуждения работы [24] Л. Тральди.

Список литературы

- [1] D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Introduction to graph-link theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6 (2009), 791–823.
- [2] Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, “Граф-зацепления”, *Докл. РАН*, **428**:5 (2009), 591–594; англ. пер.: D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Graph-links”, *Dokl. Math.*, **80**:2 (2009), 739–742.
- [3] В. О. Мантуров, “Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности”, *Докл. РАН*, **424**:3 (2009), 308–310; англ. пер.: V. O. Manturov, “Embeddings of 4-valent framed graphs into 2-surfaces”, *Dokl. Math.*, **79**:1 (2009), 56–58.
- [4] D. Bar-Natan, “On the Vassiliev knot invariants”, *Topology*, **34**:2 (1995), 423–472.
- [5] S. V. Chmutov, S. V. Duzhin, S. K. Lando, “Vassiliev knot invariants. I. Introduction”, *Singularities and bifurcations*, Adv. Soviet Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 117–126; “II. Intersection graph conjecture for trees”, 127–134; “III. Forest algebra and weighted graphs”, 135–145.
- [6] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, “Finite-type invariants of classical and virtual knots”, *Topology*, **39**:5 (2000), 1045–1068.

- [7] G. Cairns, D. M. Elton, “The planarity problem for signed Gauss words”, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**:4 (1993), 359–367.
- [8] G. Cairns, D. M. Elton, “The planarity problem. II”, *J. Knot Theory Ramifications*, **5**:2 (1996), 137–144.
- [9] R. C. Read, P. Rosenstiehl, “843–876”, *Combinatorics* (Keszthely, Hungary, 1976), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **18**, North-Holland, Amsterdam–New-York, 1978.
- [10] В. О. Мантуров, “Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 169–178; англ. пер.: V. O. Manturov, “A proof of Vassiliev’s conjecture on the planarity of singular links”, *Izv. Math.*, **69**:5 (2005), 1025–1033.
- [11] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, М.–Ижевск, 2005; англ. пер.: V. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [12] A. Kotzig, “Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations”, *Theory of graphs* (Tihany, Hungary, 1966), Academic Press, New York, 1968, 219–230.
- [13] V. G. Turaev, “Cobordisms of words”, *Commun. Contemp. Math.*, **10**, suppl. 1 (2008), 927–972; arXiv: math.CO/0511513v2.
- [14] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, “On the Melvin–Morton–Rozansky conjecture”, *Invent. Math.*, **125**:1 (1996), 103–133.
- [15] M. Cohn, A. Lempel, “Cycle decomposition by disjoint transpositions”, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, **13**:1 (1972), 83–89.
- [16] G. Moran, “Chords in a circle and linear algebra over $GF(2)$ ”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **37**:3 (1984), 239–247.
- [17] E. Soboleva, “Vassiliev knot invariants coming from Lie algebras and 4-invariants”, *J. Knot Theory Ramifications*, **10**:1 (2001), 161–169.
- [18] L. Traldi, *Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials*, arXiv: abs/0903.4405.
- [19] J. Jonsson, “On the number of Euler trails in directed graphs”, *Math. Scand.*, **90**:2 (2002), 191–214.
- [20] В. О. Мантуров, “Скобочная полугруппа узлов”, *Матем. заметки*, **67**:4 (2000), 549–562; англ. пер.: V. O. Manturov, “The bracket semigroup of knots”, *Math. Notes*, **67**:4 (2000), 468–478.
- [21] A. T. Fomenko, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–35.
- [22] A. Bouchet, “Circle graph obstructions”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **60**:1 (1994), 107–144.
- [23] D. P. Ilyutko, *An equivalence between the set of graph-knots and the set of homotopy classes of looped graphs*, arXiv: abs/1001.0360.
- [24] L. Traldi, L. Zulli, *A bracket polynomial for graphs*, arXiv: abs/0808.3392.

Д. П. Ильютко (D. P. Ilyutko)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: ilyutko@yandex.ru

Поступила в редакцию
 01.06.2010