Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Перемешивающие преобразования с однородным спектром, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:19:44

УДК 517.987

С. В. Тихонов

Перемешивающие преобразования с однородным спектром

В работе доказано существование перемешивающих сохраняющих меру преобразований с однородным спектром любой кратности.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: однородный спектр, перемешивающие преобразования, действия сохраняющими меру преобразованиями.

§ 1. Введение

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – пространство Лебега. Множество обратимых сохраняющих меру преобразований этого пространства будем обозначать буквой $\mathcal{A}$. *Спектральным типом, спектральной кратностью* и т.д. преобразования T называется спектральный тип, спектральная кратность и т.д. унитарного оператора $f \mapsto f \circ T^{-1}$, действующего на пространстве квадратично интегрируемых функций с нулевым средним.

Преобразование T называется *перемешивающим* (иногда говорят *перемешиванием*), если для любых множеств $A, B \in \mathcal{B}$ имеем

$$\mu(T^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad k \rightarrow \infty.$$

В работе изучаются возможные функции кратности спектров перемешивающих преобразований.

По определению подмножество полного метрического пространства имеет в слабой топологии *тип* G_δ , если оно представляется как счетное пересечение открытых множеств. Всюду плотные G_δ -множества называются *массивными*.

Свойство в полном метрическом пространстве называется *типичным*, если оно выполнено для элементов массивного множества. Выражение “типичный элемент пространства обладает свойством ...” означает, что рассматриваемое свойство является типичным. Типичный элемент обладает любым заранее фиксированным счетным набором типичных свойств.

Проблема существования преобразований с однородным непрерывным спектром конечной кратности $n > 1$ (проблема В. А. Рохлина) в случае кратности, равной двум, решена независимо О. Н. Агеевым в [1] и В. В. Рыжиковым в [2]. Они показали, что такие спектры имеют декартовы квадраты некоторых преобразований, подтвердив гипотезу Катка. Кроме того, преобразования в примерах, построенных Рыжиковым, являются перемешивающими. Декартовы кубы

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6849.2006.1)

и большие степени преобразований имеют неоднородные спектры и поэтому не годятся для решения задачи при $n > 2$. Для перемешивающих преобразований случай $n > 2$ решен Агеевым в [3] с помощью изучения групповых действий и категорных методов (иными словами, соображений типичности).

В дальнейшем, используя несколько иные группы, А. И. Даниленко в [4] построил явные примеры преобразований с однородным непрерывным спектром кратности n . Рыжиков в [5] показал, что преобразования с таким спектром могут обладать различными типичными свойствами.

Для перемешивающих преобразований ситуация оказалась сложнее: перемешивание не является типичным свойством, поэтому при построении сложно использовать категорные соображения. В основном использовалась схема, предложенная в [2]. Она позволила получить различные наборы спектральных кратностей в случае неоднородного спектра (см. [5]–[8]).

Тем не менее, работа [9] показывает, что множество перемешивающих преобразований является полным сепарабельным пространством относительно некоторой метрики. Таким образом, категорные методы к перемешиваниям все же применимы, хотя при этом приходится рассматривать довольно сложную топологию.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого натурального числа n существуют перемешивающие преобразования с однородным спектром кратности n .*

Это – ответ на вопрос, поставленный в [5], где автор предложил использовать для решения полную метрику на множестве перемешивающих преобразований. Именно такой подход используется в настоящей работе. Ради простоты изложения доказательство теоремы 1 будет дано только для простого n .

Пусть $\mathcal{G}$ – группа с двумя образующими g_1 и g_0 со следующими коммутационными соотношениями: $g_0^n = e$, а элементы $g_1, (g_0^{-1}g_1g_0), \dots, (g_0^{1-n}g_1g_0^{n-1})$ коммутируют между собой.

$\mathcal{G}$ -действием называется любое отображение из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{A}$, сохраняющее групповые операции. Действия и их элементы мы будем обозначать буквами с крышечками. Для записи $\mathcal{G}$ -действий будем использовать каллиграфический шрифт ($\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}, \dots$). Кроме того, для некоторых элементов действия вводятся специальные обозначения, а именно, соответствующая малая буква с индексом внизу: через $\widehat{t}_0$ будем обозначать элемент $\widehat{\mathcal{T}}(g_0)$, через $\widehat{t}_1$ – элемент $\widehat{\mathcal{T}}(g_1)$, через $\widehat{t}_2$ – элемент $\widehat{\mathcal{T}}(g_1g_0^{-1}g_1^{-1}g_0)$, через $\widehat{t}_3$ – элемент $\widehat{\mathcal{T}}(g_0g_1)$, через $\widehat{t}_4$ – элемент $\widehat{\mathcal{T}}((g_0g_1)^n)$.

Рыжиков в [5] показал, что если $\mathcal{G}$ -действие $\widehat{\mathcal{T}}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{t}_1$ имеет простой спектр;
- 2) $\widehat{t}_2$ имеет непрерывный спектр;
- 3) $\widehat{t}_3$ имеет простой спектр;
- 3') $\widehat{t}_3$ имеет непрерывный спектр;

то $\widehat{t}_4$ имеет однородный спектр кратности n .

Мы получим действие $\widehat{\mathcal{T}}$, обладающее всеми этими свойствами и такое, что

- 4) $\widehat{t}_4$ перемешивает.

Заметим, что свойство 3') следует из свойства 4) (так как $\widehat{t}_3^n = \widehat{t}_4$), поэтому проверять его выполнение излишне.

Для доказательства введем метрику, относительно которой множество действий со свойством 4) образует полное сепарабельное пространство. Далее, покажем, что каждое из свойств 1)–3) типично в этом пространстве и, следовательно, типичное действие обладает всеми тремя свойствами.

Работа имеет следующую структуру: в §2 изложены необходимые факты о топологиях в пространствах действий и преобразований и адаптирована для наших целей метрика, построенная в [9]. Затем, на основе ряда вспомогательных утверждений доказана теорема 1. Сами вспомогательные утверждения доказаны в §4. В §5 приведены некоторые замечания и сформулирован ряд вопросов.

§ 2. Метрика

Напомним некоторые факты о пространстве $\mathcal{A}$. Более подробное изложение можно найти в [9]–[11].

Зафиксируем счетный набор измеримых множеств $\{A_i\}$, порождающий $\mathcal{B}$. Через $q = \{q_i\} \subset \mathcal{B}$ будем обозначать какой-нибудь (не фиксированный заранее) конечный набор измеримых множеств.

Слабая топология в $\mathcal{A}$ задается базой окрестностей вида

$$\mathcal{U}(T, q, \varepsilon) = \{S \mid \forall A, B \in q : |\mu(TA \cap B) - \mu(SA \cap B)| < \varepsilon\}.$$

Эта топология метризуема, соответствующая метрика

$$d(T, S) = \sum_i \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \triangle SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \triangle S^{-1}A_i)),$$

превращает пространство $\mathcal{A}$ в полную сепарабельную *топологическую группу* (последнее означает, что умножение и взятие обратного элемента – непрерывные операции).

Множества преобразований с непрерывным и простым спектром имеют в слабой топологии тип G_δ (см., например, [12]).

Поводок-топологии в пространстве преобразований, сохраняющих меру, называется топология с базой окрестностей

$$\mathcal{V}(T, q, \{\varepsilon_{ij}\}) = \{S \mid \forall q_i, q_j \in q, l \in \mathbb{N} : |\mu(T^l q_i \cap q_j) - \mu(S^l q_i \cap q_j)| < \varepsilon_{ij}\}.$$

В частном случае, когда все $\{\varepsilon_{ij}\}$ равны некоторому числу ε , будем писать $\mathcal{V}(T, q, \varepsilon)$ вместо $\mathcal{V}(T, q, \{\varepsilon_{ij}\})$.

Метрика поводок-топологии задается формулой

$$w(T, S) = \sup_k \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(A_i \cap T^k A_j) - \mu(A_i \cap S^k A_j)|.$$

Множество перемешивающих преобразований с этой метрикой сепарабельно. Заметим также, что, как показано в [9], метрика $w + d$ задает на множестве перемешивающих преобразований ту же топологию и относительно нее это множество полно.

Преобразование T назовем Δ -перемешивающим, если

$$\sum \frac{1}{2^{i+j}} \limsup_{k \rightarrow \infty} |\mu(A_i \cap T^k A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| \leq \Delta.$$

При $\Delta = 0$ получается просто перемешивающее преобразование, что оправдывает выбранное название.

Расстояние $d(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}) = d(\widehat{t}_1, \widehat{s}_1) + d(\widehat{t}_0, \widehat{s}_0)$ задает на множестве $\mathcal{G}$ -действий $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ структуру полного сепарабельного пространства. Топология, порожденная этим расстоянием, также называется *слабой* и имеет базу окрестностей

$$\mathcal{O}(\widehat{\mathcal{T}}, q, \varepsilon) = \{\widehat{\mathcal{S}} \mid \widehat{s}_1 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_1, q, \varepsilon), \widehat{s}_0 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_0, q, \varepsilon)\}.$$

Сильная топология на пространстве $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ задается метрикой

$$u(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}) = \mu(\{x : \widehat{t}_1 x \neq \widehat{s}_1 x\} \cup \{x : \widehat{t}_0 x \neq \widehat{s}_0 x\}).$$

Сходимость в сильной топологии естественным образом влечет сходимость и в слабой топологии.

Если орбита почти всех точек X инъективна под действием $\widehat{\mathcal{T}}$, то такое действие называется *свободным*. Действие называется *эргодическим*, если любое инвариантное относительно него множество имеет либо нулевую, либо полную меру. Это выполнено, например, если у действия есть перемешивающий элемент. Следующий факт следует из почтиабелевости группы $\mathcal{G}$ (см. [13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $\widehat{\mathcal{T}}$ – свободное эргодическое действие, то множество $\{U^{-1}\widehat{\mathcal{T}}U\}_{U \in \mathcal{A}}$ плотно среди свободных эргодических $\mathcal{G}$ -действий относительно сильной топологии и плотно в $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ относительно слабой топологии.

Основная метрика, которую мы будем использовать для $\mathcal{G}$ -действий, следующая:

$$D(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}) = d(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}) + w(\widehat{t}_4, \widehat{s}_4).$$

Через $\mathcal{M}_{\Delta}$ обозначим множество $\mathcal{G}$ -действий $\widehat{\mathcal{T}}$, элемент $\widehat{t}_4$ которых Δ -перемешивает. При $\Delta = 0$ получаем множество $\mathcal{M}_0$ действий, обладающих свойством 4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Множество $\mathcal{M}_0$ с метрикой $D(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}})$ является полным сепарабельным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\widehat{\mathcal{T}}_i\}$ – последовательность, фундаментальная в метрике D . Тогда она является фундаментальной и в метрике d . Обозначим слабый предел этой последовательности через $\widehat{\mathcal{S}}$. Надо показать, что элемент $\widehat{s}_4$ предельного действия перемешивает и является пределом соответствующих элементов действий $\{\widehat{\mathcal{T}}_i\}$ в w -метрике.

Это утверждение является частным случаем следующего утверждения о преобразованиях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\{S_i\}$ – последовательность перемешивающих преобразований, слабо сходящихся к преобразованию S , и фундаментальная в метрике w . Тогда S перемешивает и последовательность $\{S_i\}$ сходится к S в w -метрике.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\{S_i\}$ – фундаментальная последовательность в метрике w , то

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(A_i \cap S_l^k A_j) - \mu(A_i \cap S_m^k A_j)| \rightarrow 0, \quad m, l \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при любых фиксированных i, j

$$\sup_k |\mu(A_i \cap S_l^k A_j) - \mu(A_i \cap S_m^k A_j)|$$

также стремится к нулю. Выберем номер l такой, что при каждом $m > l$ это выражение не превышает $\frac{\varepsilon}{2}$. При каждом фиксированном k выберем число $m = m(k)$, $m > l$, такое, что

$$|\mu(A_i \cap S_m^k A_j) - \mu(A_i \cap S^k A_j)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это можно сделать, так как S_m^k сходится к S^k в слабой топологии. Так как S_l перемешивает, то при некотором K выполнена импликация

$$|k| > K \implies |\mu(A_i \cap S_l^k A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда при $|k| > K$ имеем

$$\begin{aligned} |\mu(A_i \cap S^k A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| &\leq |\mu(A_i \cap S_{m(k)}^k A_j) - \mu(A_i \cap S^k A_j)| \\ &+ |\mu(A_i \cap S_{m(k)}^k A_j) - \mu(A_i \cap S_l^k A_j)| + |\mu(A_i \cap S_l^k A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это в силу произвольности i, j и ε означает, что предельное преобразование (в нашем случае $S = \widehat{s}_4$) перемешивает и является w -пределом последовательности $\{S_i\}$.

Сепарабельность немедленно следует из того, что слабая топология на $\mathcal{A}$ и поводок-топология на множестве перемешивающих преобразований имеют счетные базы окрестностей. Действительно, если $\{\mathcal{O}_i\}$ – счетная база окрестностей в слабой топологии, $\{\mathcal{V}_i\}$ – в поводок-топологии, то $\{\mathcal{O}_i \cap \{\mathcal{T} \mid \widehat{t}_4 \in \mathcal{V}_j\}\}_{i,j}$ – счетная база окрестностей для метрики D .

В дальнейшем, если не оговорено противное, $\mathcal{A}$ мы будем рассматривать с метрикой d , а $\mathcal{M}_0$ – с метрикой D .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Множества $\mathcal{G}$ -действий $\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_0$, обладающих свойствами 1)–3), имеют тип G_δ .

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что все эти множества являются прообразами множеств такого типа при непрерывных отображениях $\widehat{\mathcal{T}} \mapsto \widehat{t}_1$, $\widehat{\mathcal{T}} \mapsto \widehat{t}_2$, $\widehat{\mathcal{T}} \mapsto \widehat{t}_3$.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\Delta_{ij}\}$ – набор неотрицательных чисел. Положим

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} \Delta_{ij}.$$

Тогда для любых преобразований T, S и числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие конечный набор множеств q и число $\delta > 0$, что

$$T \in \mathcal{V}(S, q, \{\Delta_{ij} + \delta\}) \implies w(T, S) < \Delta + \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такое m , что

$$\sum_{(i,j) \notin [1,m]^2} \frac{1}{2^{i+j}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем набор множеств $q = \{A_1, \dots, A_m\}$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{V}(S, q, \{\Delta_{ij}\}) &\implies w(T, S) \leq \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} \sup_k |\mu(A_i \cap T^k A_j) - \mu(A_i \cap S^k A_j)| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in [1,m]^2} \sup_k \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(A_i \cap T^k A_j) - \mu(A_i \cap S^k A_j)| + \sum_{(i,j) \notin [1,m]^2} \frac{1}{2^{i+j}} \\ &< \sum_{(i,j) \in [1,m]^2} \frac{\Delta_{ij} + \varepsilon/8}{2^{i+j}} + \frac{\varepsilon}{2} < \Delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

§ 3. Спектр

Преобразование и связанный с ним унитарный оператор мы будем обозначать одной и той же буквой.

По определению преобразование имеет *простой спектр*, если оно имеет *циклический вектор*, т.е. существует вектор f такой, что линейная оболочка $\langle T^k f \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ всюду плотна в L_2^0 .

Известно, что множество циклических векторов у преобразования с простым спектром всюду плотно (В. М. Алексеев; см., например, [14; § 3]).

По определению преобразование T имеет *непрерывный спектр*, если существует возрастающая последовательность $\{m_i\}$ натуральных чисел такая, что для каждых $A, B \in \{A_i\}$ имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{m_i} B) = \mu(A)\mu(B)$$

(о спектральных свойствах преобразований см., например, [15]).

При доказательстве теоремы мы будем использовать следующие две леммы и замечание, которые будут доказаны далее.

ЛЕММА 2. Пусть $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathcal{M}_0$. Тогда для любых $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется действие $\widehat{\mathcal{Y}} \in \mathcal{M}_\Delta$ такое, что $D(\widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{Y}}) < \Delta + \varepsilon$ и $\widehat{y}_3$ имеет простой спектр.

ЛЕММА 3. Для чисел $\varepsilon > 0$, $\Delta \geq 0$ и произвольного действия $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathcal{M}_\Delta$ существует $\widehat{\mathcal{Y}} \in \mathcal{M}_0$ такое, что $\widehat{y}_1$ перемешивает, имеет простой спектр и выполняются неравенства

$$d(\widehat{y}_1, \widehat{s}_1) + d(\widehat{y}_0, \widehat{s}_0) < \varepsilon, \quad w(\widehat{y}_4, \widehat{s}_4) < \Delta + \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Зафиксируем конечный набор множеств q . В условиях предыдущей леммы можно обеспечить выполнение следующего условия: для любых $A, B \in q$

$$\mu(\widehat{y}_2^l A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad l \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По предложению 1 пространство $\mathcal{M}_0$ является полным сепарабельным метрическим пространством, поэтому в нем можно применять категорные методы. Покажем плотность в $\mathcal{M}_0$ действий, обладающих каждым из свойств 1)–3).

Плотность действий $\widehat{\mathcal{T}}$, для которых $\widehat{y}_1$ имеет простой спектр (свойство 1)), сразу следует из леммы 3, примененной при $\Delta = 0$.

Множество действий $\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_0$, для которых $\widehat{y}_2$ имеет непрерывный спектр (свойство 2)), представляется как счетное пересечение открытых множеств

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{i, j \in \{1, \dots, k\}} \left(\bigcup_{l > |k|} \left\{ \widehat{\mathcal{T}} \mid |\mu(A_i \cap \widehat{y}_2^l A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| < \frac{1}{k} \right\} \right).$$

Согласно замечанию 1, примененному при $\Delta = 0$, все множества в скобках плотны в $\mathcal{M}_0$. Поэтому их пересечение есть всюду плотное G_δ -множество.

Докажем, что плотно множество действий $\widehat{\mathcal{T}}$, для которых $\widehat{y}_3$ имеет простой спектр (свойство 3)). Для этого рассмотрим декартово произведение $\mathcal{M}_0 \times L_2^0$ с расстоянием, равным сумме расстояний в сомножителях. Так как проекция плотного множества на любой из сомножителей декартова произведения плотна, достаточно показать, что множество пар $(\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_0, v \in L_2^0)$, где v – циклический вектор для $\widehat{s}_3$, плотно в $\mathcal{M}_0 \times L_2^0$.

Пусть $\{u_i\}$ – счетный всюду плотный в единичной сфере L_2^0 набор векторов. Через $\langle U, v \rangle_j$, $U \in \mathcal{A}$, $v \in L_2^0$, $j \in \mathbb{N}$, обозначим линейную оболочку векторов $\{U^k v\}_{k=-j, \dots, j}$, а через $\|\cdot\|$ обозначим расстояние в L_2^0 .

Для каждой пары $(\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_0, v \in L_2^0)$ из множества

$$\bigcap_{i, k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ (\widehat{\mathcal{T}}, v) \mid \|\langle \widehat{s}_3, v \rangle_j, u_i\| < \frac{1}{k} \right\}$$

v является циклическим вектором преобразования $\widehat{s}_3$. Поэтому достаточно показать, что при фиксированных $i, k \in \mathbb{N}$ множество

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ (\widehat{\mathcal{T}}, v) \mid \|\langle \widehat{s}_3, v \rangle_j, u_i\| < \frac{1}{k} \right\}$$

массивно. Оно открыто, так как является объединением открытых множеств. Для доказательства того, что оно всюду плотно, используется метод Хоббита (“Хоббит” или “туда и обратно”). Мы на время покинем пространство $\mathcal{M}_0 \times L_2^0$ и затем вернемся в него.

Пусть зафиксированы действие $\widehat{\mathcal{T}}$, вектор u и число $\delta > 0$. Найдём пару $(\widehat{\mathcal{T}}, v)$ из рассматриваемого множества такую, что $D(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{T}}) + \|u, v\| < \delta$.

“Туда.” В $\frac{\delta}{3}$ -окрестности $\widehat{\mathcal{T}}$ по лемме 2 можно выбрать действие $\widehat{\mathcal{T}}' \in \mathcal{M}_{\delta/4}$ такое, что $\widehat{y}_3$ имеет простой спектр. Поскольку множество циклических векторов для $\widehat{y}_3$ всюду плотно, выберем из них вектор v , отличающийся от u меньше,

чем на $\frac{\delta}{3}$. Зафиксируем j , при котором расстояние между $\langle \widehat{y}_3, v \rangle_j$ и u_i меньше, чем $\frac{1}{k}$.

“Обратно.” Так как множество

$$\left\{ \widehat{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}_g \mid \|\langle \widehat{h}_3, v \rangle_j, u_i\| < \frac{1}{k} \right\}$$

открыто в слабой топологии пространства $\mathcal{A}_g$, то оно содержит какую-либо слабую окрестность $\widehat{\mathcal{Y}}$. Согласно лемме 3 в полученной окрестности можно выбрать действие $\widehat{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}_0$ такое, что $D(\widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{Y}}) < \frac{\delta}{3}$.

Из плотности, а также из того, что множества действий со свойствами 1)–3) имеют тип G_δ (утверждение 3), следует типичность свойств 1)–3). Значит, типичное действие обладает всеми этими свойствами.

§ 4. Доказательство вспомогательных утверждений

Введем следующее обозначение: выражения типа $|a - b| < \varepsilon$ мы будем записывать как $a \stackrel{\varepsilon}{\sim} b$. В цепочке неравенств сравнение происходит с изначальной величиной, т.е. выражение $a \stackrel{\varepsilon}{\sim} b \stackrel{\varepsilon}{\sim} d$ означает, что $a \stackrel{\varepsilon}{\sim} d$. Используется также следующее свойство этого сравнения: для конечных числовых наборов $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ имеем

$$\forall i : a_i \stackrel{\varepsilon_i}{\sim} b_i \implies \sum c_i a_i \stackrel{\sum c_i \varepsilon_i}{\sim} \sum c_i b_i.$$

Доказательства лемм используют нижеследующие модели G -действий, аналогичные использованным в [5]. С ними потребуется выполнить дополнительные операции, которые будут приведены в рамках некоторой общей конструкции.

Возьмем перемешивающее преобразование C такое, что декартово произведение

$$C \times C^2 \times C^3 \times \dots$$

имеет простой спектр (о существовании такого преобразования см. [8; теорема 8.4]).

Модель 1. Действие $\widehat{\mathcal{H}}$ задается преобразованием

$$\widehat{h}_1 = (C \times C^2 \times \dots \times C^n)$$

и циклической перестановкой координат

$$\widehat{h}_0(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1).$$

Модель 2. Пусть $Z = \{z_{ij}\}$ – матрица размера $n \times n$, состоящая из натуральных чисел, с ненулевым определителем и такая, что суммы чисел в каждом столбце различны и не равны $n(n+1)$ и $n(n+2)$. Рассмотрим пространство $\mathbb{Z}_n \times X_1 \times \dots \times X_n$. Действие $\widehat{\mathcal{F}}$ определим преобразованиями

$$\widehat{f}_1(i, x_1, \dots, x_n) = (i, C^{a_{i1}}x_1, \dots, C^{a_{in}}x_n), \quad \widehat{f}_0(i, x) = (i \oplus 1, x)$$

(напомним, что символом $\oplus$ обозначено сложение по модулю n).

Несколько громоздкие условия на матрицу используются для того, чтобы действие оказалось свободным и чтобы преобразование $\widehat{f}_3 \times C^{n+1} \times C^{n+2}$ имело простой спектр.

Можно явно выписать элементы моделей со специальными обозначениями:

$$\begin{aligned}\widehat{h}_2 &= C^{-1} \times C^{-1} \times \dots \times C^{n-1}, & \widehat{h}_3(x_1, \dots, x_n) &= (C^2 x_2, \dots, C^n x_n, C x_1), \\ \widehat{h}_4 &= C^{n(n+1)/2} \times C^{n/(n+1)2} \times \dots \times C^{m(n+1)/2}, \\ \widehat{f}_3(i, x) &= (i \oplus 1, C^{z_{i,1}} x_1, \dots, C^{z_{i,n}} x_n), \\ \widehat{f}_4(i, x_1, \dots, x_n) &= (i, C^{\sum_i z_{i,1}} x_1, \dots, C^{\sum_i z_{i,n}} x_n).\end{aligned}$$

Отметим также следующие свойства моделей:

- а) построенные действия свободны и эргодичны;
- б) в первой модели $\widehat{h}_2$ и $\widehat{h}_4$ перемешивают, а $\widehat{h}_1$ имеет простой спектр;
- в) во второй модели $\widehat{f}_3$ имеет простой спектр.

Формально модели заданы не на пространстве X , а на пространствах $X \times \dots \times X$ и $\mathbb{Z}_n \times X_1 \times \dots \times X_n$. Однако все эти пространства изоморфны между собой.

Таким образом, модели дают примеры свободных действий со свойствами 1), 2), 3) и 3'). Для доказательства существования эргодических преобразований с однородным спектром кратности n этого уже достаточно. Действительно, из существования одного свободного действия с тем или иным свойством, используя утверждение 1, следует плотность действий с этим свойством. Из утверждения 3 получаем и типичность действий со всеми упомянутыми свойствами, откуда следует, что спектр имеет требуемый вид.

Если же рассматривать действия со свойством 4), то возникают две проблемы: во-первых, действие $\widehat{\mathcal{F}}$ не может обладать свойством 4) и, более того, явных примеров действий со свойствами 3) и 4) одновременно неизвестно; во-вторых, в пространстве $\mathcal{M}_0$ недостаточно наличия одного действия с любым из свойств 1)–3), чтобы утверждать, что такие действия всюду плотны. Причина в том, что для этого пространства не известен хороший аналог утверждения 1. Чтобы обойти первую проблему, рядом в поводок-топологии с каждым действием из $\mathcal{M}_0$ рассматривается не перемешивающее действие со свойством 3). Близкие к последнему в слабой топологии действия (в том числе и из $\mathcal{M}_0$) обладают некоторой “конечной версией” свойства 3). Таким образом, показывается, что действия с любой из этих “конечных версий” плотны и типичны в $\mathcal{M}_0$, откуда следует уже типичность свойства 3).

Для решения второй проблемы оказывается возможным использовать декартовы произведения действий $\widehat{\mathcal{H}}$ или $\widehat{\mathcal{F}}$ на несвободное действие $\widehat{\mathcal{R}}$, порожденное преобразованиями $\widehat{r}_1 = C^{n+1} \times C^{n+2}$ и $\widehat{r}_0 = I$. Такие произведения оказываются всюду плотными в $\mathcal{M}_0$, но свойство 2) при этом теряется. Тем не менее, как и в случае со свойством 3), некоторая “конечная версия” свойства 2) сохраняется.

Для удобства дальнейшего изложения обозначим через X^i множество $\{i\} \times X$, $i = 0, \dots, n-1$. Верхним индексом при множестве обозначим пересечение этого множества с $\{i\} \times X$, например, $A^0 = A \cap X^0$.

Заметим, что для выбранного $\widehat{\mathcal{R}}$ преобразования $\widehat{h}_1 \times \widehat{r}_1$ и $\widehat{f}_3 \times \widehat{r}_3 = \widehat{f}_3 \times \widehat{r}_1$ имеют простой спектр, а $\widehat{h}_1 \times \widehat{r}_1$, кроме того, перемешивает.

При фиксированном $\gamma \in \mathcal{G}$ вместо преобразований $\widehat{\mathcal{H}} \times \widehat{\mathcal{R}}(\gamma)$ и $\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{R}}(\gamma)$ удобно рассматривать изоморфные им косые произведения, в базе которых действует преобразование $\widehat{\mathcal{R}}(\gamma)$. Степени преобразования K , построенного в следующем предложении, будут играть роль коциклов, а определенный позже раскрой даст набор множеств, на которых коциклы постоянны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть зафиксировано число $\delta > 0$ и конечный набор множеств r . Тогда

- 1) существует преобразование K , коммутирующее с $\widehat{\mathcal{H}}$ и такое, что при каждом фиксированном $l \in \mathbb{N}$, любых $A, B \in r$, для всех $c \in \mathbb{Z}$, кроме, быть может, одного, имеем

$$\mu(\widehat{h}_4^l K^c A \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B);$$

- 2) существует преобразование K , коммутирующее с $\widehat{\mathcal{F}}$, такое, что при каждом фиксированном $l \in \mathbb{N}$, любых $A, B \in r$, для всех $c \in \mathbb{Z}$, кроме, быть может, одного, имеем

$$\mu(\widehat{f}_4^l K^c A^i \cap B^i) \stackrel{\delta/n}{\sim} n\mu(A^i)\mu(B^i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В качестве K возьмем $\widehat{h}_4^m$, где m таково, что при $A, B \in r$ и $|l| \geq \frac{m}{2}$

$$\mu(\widehat{h}_4^l A \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B).$$

Это значит, что

$$\mu(\widehat{h}_4^l K^c A \cap B) = \mu(\widehat{h}_4^{l+mc} A \cap B)$$

не более чем на δ отличается от $\mu(A)\mu(B)$ при $|l + mc| \geq \frac{m}{2}$. Последнее неравенство при фиксированном l может не выполняться не более чем для одного целого c .

- 2) В качестве K берем $\widehat{f}_4^m$, где m таково, что

$$\mu(\widehat{f}_4^l A^i \cap B^i) \stackrel{\delta}{\sim} n\mu(A^i)\mu(B^i)$$

при всех $A, B \in r$, $|l| \geq \frac{m}{2}$ и $i = 0, 1, \dots, n-1$.

В этом случае

$$\mu(\widehat{f}_4^l A^i \cap B^i) = \mu(\widehat{f}_4^{l+mc} A^i \cap B^i) \stackrel{\delta}{\sim} n\mu(A^i)\mu(B^i),$$

как только $|l + mc| \geq \frac{m}{2}$. Последнее неравенство может не выполняться не более чем для одного целого c .

В дальнейшем мы зафиксируем обозначения $\widehat{\mathcal{H}}$, $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widehat{\mathcal{R}}$ для соответствующих действий.

Следующая лемма является специальным случаем леммы 2.1 из [16].

ЛЕММА 4. Пусть T – перемешивающее преобразование, $\{B_i\}$ – последовательность множеств одинаковой меры таких, что

$$\mu(TB_i \cap B_i) \rightarrow \mu(B_i), \quad i \rightarrow \infty.$$

Тогда для любого множества A имеем

$$\mu(A \cap B_i) \rightarrow \mu(A)\mu(B_i), \quad i \rightarrow \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, действия $\widehat{\mathcal{F}}$ и конечного набора множеств q существует преобразование V такое, что $V^{-1}\widehat{\mathcal{F}}V \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{F}}, q, \varepsilon)$ и $\mu((VA)^m) \stackrel{\delta}{\sim} \frac{\mu(VA)}{n}$ для каждого $A \in q$ и $m = 0, 1, \dots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{s}_1$ перемешивает, так как действия с таким свойством плотны в слабой топологии (см. утверждение 1). Зафиксируем A и m . Поскольку $\widehat{\mathcal{F}}$ – свободное эргодическое действие, существует последовательность преобразований $\{V_i\}$ таких, что $V_i^{-1}\widehat{\mathcal{F}}V_i$ сходится в сильной топологии к $\widehat{\mathcal{F}}$ при $i \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что сильная топология инвариантна относительно сопряжений. Поэтому из сходимости последовательности $V_i^{-1}\widehat{\mathcal{F}}V_i$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ следует сходимость последовательности $V_i\widehat{\mathcal{F}}V_i^{-1}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ и, как следствие, сходимость $V_i\widehat{s}_1V_i^{-1}$ к $\widehat{s}_1$.

Рассмотрим множества $V_i^{-1}X^m$. При $i \rightarrow \infty$ имеем

$$\mu(\widehat{s}_1V_i^{-1}X^m \cap V_i^{-1}X^m) = \mu(V_i\widehat{s}_1V_i^{-1}X^m \cap X^m) \rightarrow \mu(\widehat{s}_1X^m \cap X^m) = \mu(X^m).$$

Согласно предыдущей лемме для достаточно больших i выполнено

$$\mu(A \cap V_i^{-1}X^m) \stackrel{\delta}{\sim} \frac{\mu(A)}{n}.$$

Остается выбрать i , подходящее для всех $A \in q$ и m , и положить $V = V_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть R – перемешивающее преобразование, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Назовем *раскроем* пространства X набор непересекающихся множеств $\mathbb{E}_{R,\varepsilon,k} = \{E_i\}_{i=1,\dots,k}$ одинаковой меры $\frac{1}{k}$ таких, что для всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$ имеем

$$\mu(R^l E_i \cap E_j) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{если } |l| > k, \\ \frac{k - |l|}{k^2} + \frac{|l|}{k^3}, & \text{если } |l| \leq k, i = j, \\ \frac{|l|}{k^3}, & \text{если } |l| \leq k, i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что для любого набора пар индексов $B \subset [1, k] \times [1, k]$ мера множества

$$\mu\left(\bigcup_{(i,j) \in B} (R^l E_i \cap E_j)\right)$$

с точностью до ε оценивается суммой приближительных значений мер для соответствующих (i, j) , задаваемых формулой (1).

Задача о существовании раскроя для фиксированного перемешивания R близка к задаче о существовании множества A попарно почти независимого со множествами $\{R^i A\}_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, сформулированной в [9] и решенной в несколько более общем виде в [17]. Обе их можно рассматривать как частные случаи вопроса о плотности преобразований, сопряженных R , в пространстве перемешиваний, снабженном поводок-топологией. Частичный ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть перемешивание R представляется как декартово произведение некоторых перемешивающих преобразований. Тогда $\{U^{-1}RU\}_{U \in \mathcal{A}}$ всюду плотно в множестве перемешиваний, снабженном топологией.

Доказательство см. в [9].

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предыдущего предложения для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существует раскрой $\mathbb{E}_{R, \varepsilon, k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем набор $q = \{q_1, \dots, q_k\}$ из k произвольных непересекающихся множеств меры $\frac{1}{k}$. Выберем перемешивание T такое, что $\mu(T^j A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ для всех $A, B \in q$ и $j \neq 0$. В качестве T можно взять, например, бернуллиевский сдвиг. Для произвольного перемешивающего преобразования S по лемме Рохлина–Халмоза все пространство можно представить как набор непересекающихся множеств $\{Z, SZ, \dots, S^{k-1}Z, \tilde{Z}\}$, где мера множества $\tilde{Z}$ меньше $\frac{\varepsilon}{4k^2}$. Также потребуем, чтобы $S\tilde{Z} \subset Z$ (это можно требовать, см. [18]). Рассмотрим на $X \times X$ преобразование V , действующее по следующему правилу:

$$V(x, z) = \begin{cases} c(x, Sz) & \text{при } z \notin S^{k-1}Z \sqcup \tilde{Z}, \\ (T^k x, Sz) & \text{при } z \in S^{k-1}Z, \\ (Tx, Sz) & \text{при } z \in \tilde{Z}. \end{cases}$$

Это преобразование перемешивает, так как его можно представить в виде $J^{-1}(T \times S)J$, где

$$J(x, z) = \begin{cases} (T^i x, z) & \text{при } z \in S^i Z, \ i = 0, \dots, k-1, \\ (x, z) & \text{при } z \in \tilde{Z}. \end{cases}$$

Каждая точка (x, z) под действием V^l , $l > 0$, переходит в точку $(T^a x, S^l z)$, где $a = 0$, только если траектория точки z за время l не проходила через $S^{k-1}Z$. Для этого должно быть выполнено неравенство $k - l \geq 0$ и точка z должна лежать в одном из множеств $\{S^i Z\}_{i=0, \dots, k-l-1}$. Поэтому для $A, B \in q$ и $l \leq k$ имеем

$$\mu \otimes \mu(V^l(A \times X) \cap (B \times X)) \stackrel{\frac{\varepsilon}{4k^2}}{\sim} \sum_{m=0}^{k-l-1} \mu(A \cap B)\mu(Z) + \mu(A)\mu(B)(1 - (k-l)\mu(Z)) \stackrel{\frac{\varepsilon}{2k^2}}{\sim} \frac{k-l}{k} \mu(A \cap B) + \frac{l}{k^3}.$$

При $l > k$ имеем

$$\mu \otimes \mu(V^l(A \times X) \cap (B \times X)) \stackrel{\frac{\varepsilon}{4k^2}}{\sim} \mu(A)\mu(B).$$

Таким образом, множества $\{A \times X\}_{A \in q}$ образуют раскрой $\mathbb{E}_{V, \varepsilon/2, k}$. Возьмем преобразование U такое, что $U^{-1}RU \in \mathcal{V}(V, \mathbb{E}_{V, \varepsilon/2, k}, \varepsilon/(2k^2))$. Тогда требуемый раскрой порождают множества $\{U(A \times X)\}_{A \in q}$.

Теперь мы в состоянии описать конструкцию, используемую для доказательства лемм.

Конструкция специального $\mathcal{G}$ -действия. Пусть $\widehat{\mathcal{T}}$ – действие либо модели 1, либо модели 2. Мы построим специальное действие $\widehat{\mathcal{V}}$, зависящее от $\widehat{\mathcal{T}}$, числа $\delta > 0$, набора множеств $r = \{r_1, \dots, r_m\}$ и натурального числа k .

Будем предполагать, что δ имеет вид $\frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$. Если это не так, то в дальнейших рассуждениях вместо δ надо рассматривать наибольшее число такого вида, не превышающее δ .

С помощью предложения 2 по действию $\widehat{\mathcal{T}}$, числу δ и набору множеств r выберем преобразование K .

Выберем произвольное, сохраняющее меру преобразование $U: X \rightarrow X \times X$, переводящее каждое множество A из набора r в множество $A \times X$.

Пусть $\mathbb{E}_{\widehat{r}_1, \delta, k/\delta} = \{E_i\}_{i=1, \dots, k/\delta}$ – некоторый раскрой X . Определим ассоциированное с ним преобразование декартового произведения $X \times X$, действующее по формуле $J|_{X \times E_i}(x, y) = (K^i x, y)$.

Действие $\widehat{\mathcal{V}} = U^{-1}J^{-1}(\widehat{\mathcal{T}} \times \widehat{\mathcal{K}})JU$ назовем *специальным*.

Таким образом, в конструкции есть некоторый произвол: различными способами можно выбрать и раскрой, и преобразование U , но в настоящей работе это несущественно.

Пусть $\tilde{\gamma}$ – произвольный элемент $\mathcal{G}$. Для $A, B \in r$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{\mathcal{V}}(\tilde{\gamma})A \cap B) &= \mu \otimes \mu((\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma}) \times \widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma}))J(A \times X) \cap J(B \times X)) \\ &= \mu \otimes \mu\left((\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma}) \times \widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma}))J\left(A \times \bigsqcup_b E_b\right) \cap J\left(B \times \bigsqcup_c E_c\right)\right) \\ &= \sum_{b,c} \mu \otimes \mu((\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})K^b \times \widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma}))(A \times E_b) \cap (K^c \times I)(B \times E_c)) \\ &= \sum_{b,c} \mu \otimes \mu((\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})K^b A \cap K^c B) \times (\widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma})E_b \cap E_c)) \\ &= \sum_{b,c} \mu(\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma})E_b \cap E_c). \end{aligned}$$

Полученным соотношением

$$\mu(\widehat{\mathcal{V}}(\tilde{\gamma})A \cap B) = \sum_{b,c} \mu(\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma})E_b \cap E_c) \quad (2)$$

мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Из формулы (2) следует, что некоторые элементы $\widehat{\mathcal{V}}$ будут действовать почти как соответствующие элементы $\widehat{\mathcal{T}}$, но некоторые – существенно иначе.

Более точно, пусть $A, B \in r$, $l \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\gamma} = \widehat{y}_0^l$ или $\tilde{\gamma} = \widehat{y}_2^l$. Тогда $\widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma}) = I$ и

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{\mathcal{V}}(\tilde{\gamma})A \cap B) &= \sum_{b,c} \mu(\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{\mathcal{K}}(\tilde{\gamma})E_b \cap E_c) \\ &= \sum_b \mu(\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})A \cap B) \mu(E_b) = \mu(\widehat{\mathcal{T}}(\tilde{\gamma})A \cap B). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mu(\widehat{y}_1 A \cap B) = \sum_{b,c} \mu(\widehat{t}_1 K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{r}_1 E_b \cap E_c)$$

и, кроме того,

$$\mu(\widehat{y}_4^l A \cap B) = \sum_{b,c} \mu(\widehat{t}_4^l K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c).$$

Формулу (1) уместно переписать для используемого в конструкции раскроя $\mathbb{E}_{\widehat{r}_1, \delta, k/\delta}$ так:

$$\mu(\widehat{r}_1^l E_i \cap E_j) \stackrel{\frac{\delta^3}{k^2}}{\sim} \begin{cases} \frac{\delta^2}{k^2} & \text{при } |l| > \frac{k}{\delta}, \\ \frac{\delta k - \delta^2 |l|}{k^2} + \frac{\delta^3 |l|}{k^3} & \text{при } |l| \leq \frac{k}{\delta}, \quad i = j, \\ \frac{\delta^3 |l|}{k^3} & \text{при } |l| \leq \frac{k}{\delta}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (3)$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, \frac{k}{\delta}\}$. Заметим, что для любого набора пар индексов $B \subset [1, \frac{k}{\delta}] \times [1, \frac{k}{\delta}]$ мера множества

$$\bigcup_{(i,j) \in B} (R^l E_i \cap E_j)$$

с точностью до δ оценивается суммой приближительных значений мер для соответствующих (i, j) , задаваемых формулой (3).

Следующее предложение показывает, что действия $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{T}}$ достаточно близки в слабой топологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Действие $\widehat{\mathcal{T}}$ лежит в окрестности $\mathcal{O}(\widehat{\mathcal{T}}, r, 3\delta)$ действия $\widehat{\mathcal{T}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем l и $A, B \in r$. Так как

$$\mu(\widehat{y}_0 A \cap B) = \mu(\widehat{t}_0 A \cap B),$$

то $\widehat{y}_0 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_0, r, 3\delta)$.

Далее,

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{y}_1 A \cap B) &= \sum_{b,c} \mu(\widehat{t}_1 K^{b-c} A \cap B) \mu(\widehat{r}_1 E_b \cap E_c) \\ &\stackrel{\delta}{\sim} \frac{\delta^3}{k^3} \sum_{b \neq c} \mu(\widehat{t}_1 K^{b-c} A \cap B) + \left(\frac{\delta(k-\delta)}{k^2} + \frac{\delta^3}{k^3} \right) \sum_b \mu(\widehat{t}_1 A \cap B) \\ &\stackrel{\delta}{\sim} \frac{\delta^3}{k^3} \sum_{b,c} \mu(\widehat{t}_1 K^{b-c} A \cap B) + \frac{\delta(k-\delta)}{k^2} \sum_b \mu(\widehat{t}_1 A \cap B). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\delta^3}{k^3} \sum_{b,c} \mu(\widehat{t}_1 K^{b-c} A \cap B) \leq \frac{\delta^3}{k^3} \frac{k^2}{\delta^2} = \frac{\delta}{k}$$

и, кроме того,

$$\frac{\delta(k-\delta)}{k^2} \sum_b \mu(\widehat{t}_1 A \cap B) = \left(1 - \frac{\delta}{k}\right) \mu(\widehat{t}_1 A \cap B) \stackrel{\frac{\delta}{k}}{\sim} \mu(\widehat{t}_1 A \cap B),$$

то

$$\mu(\widehat{y}_1 A \cap B) \stackrel{3\delta}{\sim} \mu(\widehat{t}_1 A \cap B), \quad \widehat{y}_1 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_1, r, 3\delta).$$

Так как $\widehat{y}_1 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_1, r, 3\delta)$ и $\widehat{y}_0 \in \mathcal{U}(\widehat{t}_0, r, 3\delta)$, то $\widehat{\mathcal{Y}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{T}}, r, 3\delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пользуясь леммой 1, зафиксируем набор множеств $q = \{q_1, \dots, q_m\}$ и число δ , удовлетворяющие условиям

$$\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, 4\delta) \implies d(\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{S}}) < \varepsilon, \quad (4)$$

$$\widehat{t}_4 \in \mathcal{V}(\widehat{s}_4, q, \{\Delta_{ij} + 4\delta\}) \implies w(\widehat{t}_4, \widehat{s}_4) < \Delta + \varepsilon, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{ij} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |\mu(q_i \cap \widehat{s}_4^k q_j) - \mu(q_i)\mu(q_j)|.$$

Зафиксируем число k такое, что

$$\mu(\widehat{s}_4^l q_1 \cap q_2) \stackrel{\delta + \Delta_{ij}}{\sim} \mu(q_1)\mu(q_2)$$

при $nl \geq k$ и всех $q_1, q_2 \in q$.

Множество $\mathcal{G}$ -действий $\widehat{\mathcal{T}}$, удовлетворяющих условиям

$$\widehat{\mathcal{T}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, \delta), \quad \widehat{t}_4^l \in \mathcal{U}(\widehat{s}_4^l, q, \delta),$$

при $0 < nl \leq \frac{k}{\delta}$ открыто в слабой топологии, так как отображение $\widehat{\mathcal{T}} \mapsto \widehat{t}_4^l$ непрерывно. Поскольку $\widehat{\mathcal{H}}$ – свободное эргодическое действие, сопряженные с ним действия всюду плотны (см. утверждение 1). Следовательно, можно выбрать преобразование V , для которого

$$V^{-1} \widehat{\mathcal{H}} V \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, \delta)$$

и, кроме того,

$$V^{-1} \widehat{h}_4^l V \in \mathcal{U}(\widehat{s}_4^l, q, \delta) \quad (6)$$

при $0 < nl \leq \frac{k}{\delta}$.

По действию $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{H}}$, числам k и δ и набору множеств Vq построим специальное действие $\widehat{\mathcal{Y}}$. Покажем, что действие $V^{-1} \widehat{\mathcal{Y}} V$ – искомое. Из построения $\widehat{\mathcal{H}}$ следует, что $\widehat{h}_1 \times \widehat{r}_1$ перемешивает и обладает простым спектром. Тогда этими же свойствами обладает $V^{-1} \widehat{y}_1 V$, так как $V^{-1} \widehat{\mathcal{Y}} V$ и $\widehat{\mathcal{H}} \times \widehat{\mathcal{R}}$ – сопряженные действия. Нетрудно видеть, что $\widehat{\mathcal{H}} \times \widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{M}_0$, поэтому и $V^{-1} \widehat{\mathcal{Y}} V \in \mathcal{M}_0$. Согласно предложению 5 имеем $\widehat{\mathcal{Y}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{H}}, Vq, 3\delta)$. Следовательно, $V^{-1} \widehat{\mathcal{Y}} V \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, 4\delta)$. Теперь первое утверждение леммы 3 следует из (4).

Чтобы завершить доказательство леммы, остается, учитывая (5), проверить, что $V^{-1} \widehat{y}_4 V$ лежит в $\mathcal{V}(\widehat{s}_4, q, \{\Delta_{ij} + 4\delta\})$.

Зафиксируем $A, B \in q$ и $l \in \mathbb{N}$. Множества A и B имеют свои номера в q и этим номерам соответствует некоторое Δ_{ij} .

Так как $\sum_{b,c} \mu(\widehat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c) = 1$, то

$$\mu(\widehat{s}_4^l A \cap B) = \sum_{b,c} \mu(\widehat{s}_4^l A \cap B) \mu(\widehat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c).$$

Учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} & |\mu(V^{-1}\hat{y}_4^l V A \cap B) - \mu(\hat{s}_4^l A \cap B)| \\ &= \sum_{b,c} (\mu(V^{-1}\hat{h}_4^l K^{b-c} V A \cap B) - \mu(\hat{s}_4^l A \cap B)) \mu(\hat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c). \end{aligned} \quad (7)$$

Достаточно показать, что это выражение вне зависимости от зафиксированных значений $l \in \mathbb{N}$, A, B меньше $\Delta_{ij} + 4\delta$.

Напомним, что преобразование K , появившееся в формуле (7), было выбрано при построении специального действия и согласно предложению 2 для всех разностей $b - c$ кроме, быть может, одной исключительной выполнено

$$\mu(V^{-1}\hat{h}_4^l K^{b-c} V A \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B). \quad (8)$$

В зависимости от b, c и l мера множества $V^{-1}\hat{h}_4^l K^{b-c} V A \cap B$ может как сильно, так и слабо отличаться от меры множества $\hat{s}_4^l A \cap B$. "Плохими" назовем те точки $\{y \mid y \in E_b, \hat{r}_1^{nl} y \in E_c\}$, в которых это отличие может превышать $2\delta + \Delta_{ij}$. Оставшиеся точки назовем соответственно "хорошими". В качестве общей оценки для величины (7) можно взять сумму максимальной меры отклонения для "хороших" точек и меры множества "плохих" точек. Другими словами, достаточно показать, что мера множества плохих точек меньше 2δ . Эта мера с точностью до δ оценивается из формулы (3). Оценки, даваемые формулой, существенно различаются при $b = c$ и $b \neq c$, поэтому полезно отдельно проверять, не являются ли точки с $b = c$ "плохими". Во втором и третьем столбцах таблицы 1 дана верхняя оценка модуля разности

$$|\mu(V^{-1}\hat{h}_4^l K^{b-c} V A \cap B) - \mu(\hat{s}_4^l A \cap B)|$$

в различных ситуациях¹.

Таблица 1

	оценка при $b = c$	оценка при $b \neq c$	мера множества "плохих" точек
$0 < nl < k$	δ	1	2δ
$k \leq nl \leq \frac{k}{\delta}$	δ	$2\delta + \Delta_{ij}$	$\delta + \frac{\delta}{k}$
$nl > \frac{k}{\delta}$	1	$2\delta + \Delta_{ij}$	$\delta + \frac{\delta}{k}$

Оценки при $b = c$ следуют из (6). Оценки при $b \neq c$ следуют из того, что при $nl \geq k$ для всех таких пар, кроме исключительных, имеем

$$\mu(V^{-1}\hat{h}_4^l K^{b-c} V A \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B) \stackrel{2\delta + \Delta_{ij}}{\sim} \mu(\hat{s}_4^l A \cap B)$$

(здесь первое сравнение следует из (8), а второе – из выбора k).

¹При $b \neq c$ оценка может не выполняться для пар индексов, разность между которыми соответствует исключительному значению в формуле (8).

В последнем столбце таблицы подсчитана максимально возможная мера “плохих” точек при фиксированном l . Она оценивается из формулы (3) при соответствующем l .

При $0 < nl < k$ “плохими” могут быть лишь точки, соответствующие $b \neq c$. Согласно формуле (3) мера множества “плохих” точек в этом случае оценивается величиной

$$\delta + \sum_{b \neq c} \frac{\delta^3 |nl|}{k^3} \leq \delta + \left(\frac{k}{\delta} - 1 \right)^2 \frac{\delta^3}{k^2} < 2\delta.$$

При $k \leq nl \leq \frac{k}{\delta}$ “плохими” могут быть только точки, соответствующие исключительному значению разности $b - c$. Мера множества таких точек (с точностью до δ) оценивается произведением их количества $\frac{k}{\delta}$ на меру, не превышающую $\frac{\delta^2}{k^2}$.

При $nl > \frac{k}{\delta}$ мера множества “плохих” точек также оценивается мерой множества точек, для которых $b - c$ – исключительное значение. Отличие от предыдущего случая в том, что исключительным значением может оказаться и нуль (оценка, тем не менее, будет такой же).

Таким образом, в любом случае мера множества “плохих” точек не больше 2δ и, следовательно, величина (7) не превосходит $\Delta_{ij} + 4\delta$. В силу произвольности $A, B \in q, l$ имеем

$$V^{-1} \widehat{\mathcal{V}} V \in \mathcal{V}(\widehat{s}_4, q, \{\Delta_{ij} + 4\delta\}) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, 4\delta),$$

что, учитывая (5), завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 1. Воспользуемся построением, сделанным при доказательстве леммы 3. Достаточно заметить, что $\widehat{h}_2$ перемешивает и если в набор q добавить множества A и B , то

$$\mu(V^{-1} \widehat{y}_2^l V A \cap B) = \mu(\widehat{h}_2^l V A \cap V B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Зафиксируем набор множеств q и число δ , удовлетворяющие условиям

$$\widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, 4\delta) \implies d(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{S}}) < \varepsilon, \quad (9)$$

$$\widehat{t}_4 \in \mathcal{V}(\widehat{s}_4, q, 6\delta) \implies w(\widehat{t}_4, \widehat{s}_4) < \Delta. \quad (10)$$

Выберем число k такое, что

$$\mu(\widehat{s}_4^l A \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A) \mu(B)$$

при $nl \geq k$ и всех $A, B \in q$.

Множество действий $\widehat{\mathcal{F}}$, удовлетворяющих условиям

$$\widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, \delta), \quad \widehat{t}_4^l \in \mathcal{U}(\widehat{s}_4^l, q, \delta)$$

при $0 < nl \leq \frac{k}{\delta}$, открыто в слабой топологии. Согласно утверждению 3 можно выбрать преобразование V , для которого

$$V^{-1} \widehat{\mathcal{F}} V \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{S}}, q, \delta), V^{-1} \widehat{f}_4^l V \in \mathcal{U}(\widehat{s}_4^l, q, \delta), \mu(VA)^m \stackrel{\frac{\delta}{2n}}{\approx} \frac{\mu(VA)}{n} \quad (11)$$

при $0 < nl \leq \frac{k}{\delta}$, всех $A \in q$ и $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Для каждого множества $\tilde{A} \in q$ возьмем близкое к нему множество A такое, что $\mu(A) = \mu(\tilde{A})$ и VA равномерно распределено по множествам X^m , $m = 0, 1, \dots, n-1$ (это потребует изменить $\tilde{A}$ на подмножестве меры не более $\frac{\delta}{2}$). Набор, состоящий из полученных множеств и множеств набора q , обозначим буквой p . По $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{F}}$, числам k , δ и набору множеств Vp построим специальное действие $\widehat{\mathcal{V}}$. Согласно предложению 5 имеем $\widehat{\mathcal{V}} \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{F}}, Vp, 3\delta)$. Так как набор q является укрупнением набора p , имеем $V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V \in \mathcal{O}(V^{-1}\widehat{\mathcal{F}}V, q, 3\delta)$, откуда $V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V \in \mathcal{O}(\widehat{\mathcal{T}}, q, 4\delta)$. Действие $V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V$ сопряжено $\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{R}}$, поэтому преобразование $V^{-1}\widehat{y}_3V$ имеет простой спектр.

Далее, покажем, что $V^{-1}\widehat{y}_4V$ содержится в $\mathcal{V}(\widehat{s}_4, q, 6\delta)$. В силу (9) и (10) из этого будет следовать, что

$$V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V \in \mathcal{M}_\Delta, \quad D(\widehat{\mathcal{T}}, V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V) < \Delta + \varepsilon.$$

Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$ и $\tilde{A}, \tilde{B} \in q$ и соответствующие им равномерно распределенные множества $A, B \in p$. Нетрудно видеть, что $\mu(T\tilde{A} \cap \tilde{B}) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(TA \cap B)$ для любого обратимого, сохраняющего меру преобразования T .

В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \mu(V^{-1}\widehat{y}_4^l V \tilde{A} \cap \tilde{B}) &\stackrel{\delta}{\sim} \mu(V^{-1}\widehat{y}_4^l VA \cap B) \\ &\stackrel{\delta}{\sim} \sum_{b,c} \mu(V^{-1}\widehat{f}_4^l K^{b-c} VA \cap B) \mu(\widehat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c), \end{aligned}$$

поэтому модуль разности

$$|\mu(V^{-1}\widehat{y}_4^l V \tilde{A} \cap \tilde{B}) - \mu(\widehat{s}_4^l \tilde{A} \cap \tilde{B})|$$

оценивается сверху величиной

$$2\delta + \sum_{b,c} |\mu(V^{-1}\widehat{f}_4^l K^{b-c} VA \cap B) - \mu(\widehat{y}_4^l A \cap B)| \mu(\widehat{r}_1^{nl} E_b \cap E_c). \quad (12)$$

Появившееся в формулах преобразование K получено при построении специального действия и согласно п. 2) предложения 2 для всех разностей $b - c$, кроме, быть может, одной исключительной выполнено

$$\mu(V^{-1}\widehat{f}_4^l K^{b-c} VA^i \cap B^i) \stackrel{\delta/n}{\sim} n\mu(A^i)\mu(B^i) \quad (13)$$

для $i = 0, 1, \dots, n-1$.

В зависимости от b, c и l мера множества $V^{-1}\widehat{f}_4^l K^{b-c} VA \cap B$ может как сильно, так и слабо отличаться от меры множества $\widehat{s}_4^l A \cap B$. “Плохими” назовем те точки $\{y \mid y \in E_b, \widehat{r}_1^{nl} y \in E_c\}$, в которых это отличие может превышать 2δ . Оставшиеся точки назовем соответственно “хорошими”. В качестве общей оценки для величины (12) можно взять сумму максимальной меры отклонения для “хороших” точек, меры множества “плохих” точек и двух δ . Другими словами, достаточно показать, что мера множества плохих точек не больше 2δ . Эта мера с точностью до δ оценивается из формулы (3). Оценки, даваемые

формулой, существенно разнятся при $b = c$ и $b \neq c$, поэтому полезно отдельно проверять, не являются ли точки с $b = c$ “плохими”. Во втором и третьем столбцах таблицы 2 дана верхняя оценка модуля разности

$$|\mu(V^{-1}\hat{f}_4^l K^{b-c}VA \cap B) - \mu(\hat{s}_4^l A \cap B)|$$

в различных ситуациях².

Таблица 2

	оценка при $b = c$	оценка при $b \neq c$	мера “плохих” точек
$0 < nl < k$	δ	1	2δ
$k \leq nl \leq \frac{k}{\delta}$	δ	2δ	$\delta + \frac{\delta}{k}$
$nl > \frac{k}{\delta}$	1	2δ	$\delta + \frac{\delta}{k}$

Оценки при $b = c$ следуют из (11).

Оценки при $b \neq c$ следуют из того, что для всех пар, кроме исключительных,

$$\mu(V^{-1}\hat{f}_4^l K^{b-c}VA \cap B) = \sum_{i=1, \dots, n} \mu(V^{-1}\hat{f}_4^l K^{b-c}VA^i \cap B^i) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B),$$

поэтому в силу выбора k при $nl \geq k$ имеем

$$\mu(V^{-1}\hat{f}_4^l K^{b-c}VA \cap B) \stackrel{\delta}{\sim} \mu(A)\mu(B) \stackrel{2\delta}{\sim} \mu(\hat{s}_4^l A \cap B).$$

В последнем столбце таблицы подсчитана максимально возможная мера “плохих” точек при фиксированном l . Она оценивается из формулы (3) при соответствующем l .

При $0 < nl < k$ “плохими” могут быть лишь точки, соответствующие $b \neq c$. Согласно формуле (3) мера множества “плохих” точек в этом случае оценивается величиной

$$\delta + \sum_{b \neq c} \frac{\delta^3 |nl|}{k^3} \leq \delta + \left(\frac{k}{\delta} - 1\right)^2 \frac{\delta^3}{k^2} < 2\delta.$$

При $k \leq nl \leq \frac{k}{\delta}$ “плохими” могут быть только точки, соответствующие исключительному значению разности $b - c$. Мера множества таких точек (с точностью до δ) оценивается произведением их количества $\frac{k}{\delta}$ на меру, не превышающую $\frac{\delta^2}{k^2}$.

При $nl > \frac{k}{\delta}$ мера множества “плохих” точек также оценивается мерой множества точек, для которых $b - c$ – исключительное значение. Отличие от предыдущего случая в том, что исключительным значением может оказаться и нуль. Оценка, тем не менее, будет такой же.

Таким образом, для действия $V^{-1}\widehat{\mathcal{V}}V$ выполняются все утверждения леммы.

²При $b \neq c$ оценка может не выполняться для пар индексов, разность между которыми соответствует исключительному значению в формуле (13).

§ 5. Замечания и вопросы

Случай, когда n не является простым числом. В этом случае вместо условия 2 надо потребовать, чтобы преобразования $\widehat{\mathcal{T}}(g_1 g_0^{-1} g_1^{-1} g_0^k)$ имели непрерывный спектр для всех $1 < k < n$. Доказательство типичности таких действий ничем не отличается от доказательства замечания 1.

Типичность и G_δ . Типичность преобразований с простым спектром получена С. А. Юзвинским в [19]. Однако нам важно, что преобразования с простым и непрерывным спектром образуют в точности G_δ -множества. Для преобразований с непрерывным спектром это – классический результат П. Халмоша (см. [20]). Массивность множества преобразований с простым спектром упоминалась (без доказательства) в одной из работ Рохлина. Даниленко и Соломко в [12] доказали эти факты для действий бесконечных счетных дискретных абелевых групп.

Раскрой. В конструкции можно было бы вместо раскроя использовать башню Рохлина, как это сделано в следствии 1. Однако в этом случае пришлось бы отдельно отслеживать поведение действий в далекие моменты времени. Использование раскроя и формулы (2) представляется более оправданным. Мы доказали существование раскроя для специфических преобразований, однако, используя методы работы [17], можно доказать значительно больше.

Назовем преобразование R *частично жестким*, если существуют такие число $a > 0$ и последовательность $\{n_i\}$, что для любого $A \in \mathcal{B}$ имеем

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \mu(R^{n_i} A \cap A) \geq a \mu(A).$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ и не частично жесткого преобразования R существует раскрой $\mathbb{E}_{R, \varepsilon, k}$.*

Метод “Хоббита”. Идея “вплетать” в перемешивающее преобразование свойства близких в слабой топологии не перемешивающих преобразований встречается в нескольких работах Рыжикова. Эта идея реализовывалась в рамках одной “ранговой” конструкции. В частности, такими методами были получены перемешивания с однородным спектром кратности два. Рыжиков сообщил автору, что для действия $\widehat{\mathcal{T}}$, обладающего свойствами 1)–4), преобразование $\widehat{y}_3$ не может иметь ранг один. Это делает практически невозможным применение ранговых конструкций в данном случае.

Перемешивания. $\mathcal{G}$ -действие $\widehat{\mathcal{T}}$ называется *перемешивающим*, если для любых множеств $A, B \in \mathcal{B}$ и любой последовательности различных элементов $\{g^i\} \subset \mathcal{G}$ выполнено

$$\mu(\widehat{\mathcal{T}}(g^i) A \cap B) \rightarrow \mu(A) \mu(B), \quad i \rightarrow \infty.$$

Множество перемешивающих $\mathcal{G}$ -действий можно снабдить поводок-метрикой, относительно которой это множество является полным сепарабельным метрическим пространством. Несмотря на то, что в полученные в теореме 1 действия входят перемешивания, мы не можем сказать, существуют ли перемешивающие

$\mathcal{G}$ -действия, у которых соответствующий элемент имеет однородный спектр кратности n . Причина в том, что действия, которые можно получить с помощью конструкции, не перемешивают, в некоторые их элементы тождественное преобразование входит как декартов множитель.

Вопросы. Существуют ли перемешивающие $\mathcal{G}$ -действия, удовлетворяющие требованиям теоремы 1? Типичны ли они?

Конструктивность. Хотя доказательство основной теоремы проведено категорными методами, можно явно указать последовательность действий, пределом которой является действие со свойствами 1)–4). Тем не менее, в доказательстве используется, например, выбор циклического вектора, что не позволяет назвать его конструктивным.

Вопросы. Можно ли сделать конструктивное доказательство существования $\mathcal{G}$ -действия со свойствами 1)–4)? Существуют ли явные примеры таких действий?

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие существенно улучшить текст настоящей статьи.

Список литературы

- [1] O. N. Ageev, “On ergodic transformations with homogeneous spectrum”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:1 (1999), 149–152.
- [2] V. V. Ryzhikov, “Homogeneous spectrum, disjointness of convolutions, and mixing properties of dynamical systems”, *Selected Russian Math.*, **1**:1 (1999), 13–24.
- [3] O. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.
- [4] A. I. Danilenko, “Explicit solution of Rokhlin’s problem on homogeneous spectrum and applications”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1467–1490.
- [5] В. В. Рыжиков, “Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 107–120; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Spectral multiplicities and asymptotic operator properties of actions with invariant measure”, *Sb. Math.*, **200**:12 (2009), 1833–1845.
- [6] O. Ageev, “Mixing with staircase multiplicity functions”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:6 (2008), 1687–1700.
- [7] A. I. Danilenko, *New spectral multiplicities for mixing transformations*, [abs/0908.1640](#).
- [8] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Weak limits of powers, simple spectrum of symmetric products, and rank-one mixing constructions”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 733–754.
- [9] С. В. Тихонов, “Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 135–158; англ. пер.: S. V. Tikhonov, “A complete metric in the set of mixing transformations”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 575–596.
- [10] В. А. Рохлин, “Избранные вопросы метрической теории динамических систем”, *УМН*, **4**:2 (1949), 57–128.
- [11] П. Р. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, ИЛ, М., 1959; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1956.

- [12] A. I. Danilenko, A. V. Solomko, *Ergodic Abelian actions with homogeneous spectrum*, [abs/1001.2259](#).
- [13] M. Foreman, B. Weiss, “An anti-classification theorem for ergodic measure preserving transformations”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **6**:3 (2004), 277–292.
- [14] Д. В. Аносов, “О спектральных кратностях в эргодической теории”, *Совр. пробл. матем.*, **3**, МИАН, М., 2003, 3–85.
- [15] И. Корнфельд, Я. Синай, С. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [16] В. В. Рыжиков, “Перемешивание, ранг и минимальное самоприсоединение действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **183**:3 (1992), 133–160; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Mixing, rank, and minimal self-joining of actions with an invariant measure”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:2 (1993), 405–427.
- [17] В. В. Рыжиков, “Попарная ε -независимость множеств $T^i A$ для перемешивающего преобразования T ”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 88–91; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Pairwise ε -independence of the sets $T^i A$ for a mixing transformation T ”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 155–157.
- [18] E. Lehrer, B. Weiss, “An ε -free Rohlin lemma”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **2**:1 (1982), 45–48.
- [19] С. А. Юзвинский, “О метрических автоморфизмах с простым спектром”, *Докл. АН СССР*, **172**:5 (1967), 1036–1038; англ. пер.: S. A. Yuzvinskij, “Metric automorphisms with simple spectrum”, *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 243–245.
- [20] P. R. Halmos, “Approximation theories for measure preserving transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**:1 (1944), 1–18.

С. В. Тихонов (S. V. Tikhonov)

Российский государственный

торгово-экономический университет, г. Москва

E-mail: tikhonovc@mail.ru

Поступила в редакцию

08.06.2010 и 15.12.2010