Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Цыганков, Уравнения G -минимальных расслоений на коники, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 11, 103–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:56:51

УДК 512.774

В. И. Цыганков

Уравнения G -минимальных расслоений на коники

В работе разработан метод задания уравнениями G -минимальных расслоений на коники с произвольным числом вырожденных слоев. В случаях, когда число вырожденных слоев равно 4, 6 или 7, проведена подробная классификация вплоть до задания уравнениями минимальных расслоений на коники (S, G) и явного указания действия группы G на группе Пикара $\text{Pic}(S)$ и на самой поверхности S .

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: группа Кремоны, расслоение на коники, группа автоморфизмов.

§ 1. Введение

Классической задачей в группе Кремоны плоскости над полем $\mathbb{C}$, обозначаемой $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$, является классификация конечных подгрупп $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{C})$.

История задачи началась с работы Бертини [1], где классифицируются классы сопряженности подгрупп порядка 2 в группе $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$. Были выделены три класса сопряженности, в настоящее время известные как инволюции де Жонкьера, Гейзера и Бертини. Однако классификация была неполной, а доказательство нестрогим. Только недавно в работе [2] было получено полное и короткое доказательство.

В 1895 г. Кантор (см. [3]) и в 1896 г. Виман (см. [4]) привели описание конечных подгрупп в группе $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$. Список был достаточно исчерпывающим. Однако он не был точным в следующих отношениях. Во-первых, для заданной конечной подгруппы по этому списку нельзя было определить, содержится она в группе Кремоны или нет. Во-вторых, вопрос о сопряженности между подгруппами не рассматривался.

Современный подход к этой проблеме был начат в работе Ю. И. Манина [5] и продолжился в работах В. А. Исковских [6]–[10]. В работе [5] указывается явная связь классификации классов сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны с классификацией G -минимальных рациональных поверхностей (S, G) и G -эквивариантных бирациональных отображений между ними. Рассмотрение делится на два случая: когда S является поверхностью Дель Пеццо и когда S является расслоением на коники. В работе [10] было получено описание разложений бирациональных отображений между G -минимальными рациональными поверхностями на элементарные линки.

Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4713.2010.1).

В 2000 г. Бэйль и Бовиль в статье [2] классифицировали элементы второго порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности. В этой работе впервые было получено точное и ясное описание числа классов сопряженности, параметризованных классами изоморфизмов кривых. Для заданных двух подгрупп второго порядка по этой классификации можно точно определить, сопряжены они или нет. Техника статьи [2] была обобщена де Фернексом в статье [11] на изучение циклических групп простого порядка. Классификация была достаточно точной за исключением двух случаев подгрупп пятого порядка, для которых не был решен вопрос об их сопряженности. Полная классификация была получена в статье [12]. Бовиль в дальнейшем классифицировал p -элементарные максимальные подгруппы с точностью до сопряженности в статье [13].

Недавно И. В. Долгачев и В. А. Исковских доработали список Кантора и Вимана. В работе [14] получена классификация с точностью до сопряженности конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ в группе Кремоны плоскости над полем $\mathbb{C}$. Результат получен в терминах действия G на поверхностях Дель Пеццо и расслоениях на коники. Точнее, классифицируются неособые проективные рациональные G -минимальные поверхности с точностью до G -эквивариантных бирациональных отображений. Отметим также работу Д. Бланка [15], где классифицируются конечные абелевы подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности.

Цель настоящей работы – продолжить классификацию, начатую в статье [14], вплоть до явного задания уравнениями G -минимальных расслоений на коники (S, G) во взвешенных проективных пространствах и явного указания действия G на группе Пикара $\mathrm{Pic}(S)$ и на самой поверхности S .

Напомним (см. [14; п. 3.7]), что рациональная G -поверхность (S, G) обладает структурой расслоения на коники, если существует G -эквивариантный морфизм $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, каждый схемный слой которого $F_t = \varphi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{P}^1$, есть либо невырожденная плоская коника (изоморфная $\mathbb{P}^1$), либо приводимая приведенная коника, т.е. пара пересекающихся прямых.

В настоящей работе в § 3 разработан метод задания уравнениями произвольных G -минимальных расслоений на коники во взвешенных проективных пространствах.

Из результатов работ [6]–[8] следует, что G -минимальные расслоения на коники (S, G) с числом вырожденных слоев r являются бирационально жесткими при $r \geq 8$, а при $r < 8$ не являются. С другой стороны, известно (см. § 2), что случаи $r \leq 3$ и $r = 5$ тривиальны. Поэтому важным является изучение первых нетривиальных случаев, когда $r = 4, 6, 7$. В настоящей работе эти случаи подробно исследованы с явным заданием уравнениями расслоений на коники (S, G) во взвешенных проективных пространствах и явным указанием действия групп G .

Отметим, что исследование случая $r = 4$ было анонсировано в статье [16].

В настоящей статье получены интересные результаты для (слабых) поверхностей Дель Пеццо, являющихся G -минимальными расслоениями на коники. Хорошо известно, что поверхность Дель Пеццо с квадратом антиканонического класса 4 является полным пересечением двух квадрик в $\mathbb{P}^4$. Здесь показано

(см. теоремы 4.1 и 4.5), что если эта поверхность имеет структуру G -минимального расслоения на коники, то она является полным пересечением в $\mathbb{P}^4$ квадратичного конуса $xy = zw$ и квадрики $u^2 + F(x, y, z, w) = 0$. Морфизм на $\mathbb{P}^1$ задается по формуле

$$\varphi: (u : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Действие групп G на этом полном пересечении явно описывается. Также получены новые результаты для (слабых) поверхностей Дель Пеццо с квадратом антиканонического класса 1 и 2, являющихся G -минимальными расслоениями на коники (см. ш. 5.1, 5.2 и 6.2.3).

Работа имеет следующую структуру. В § 2 излагаются известные результаты. Метод исследования описывается в § 3. В §§ 4–6 рассматриваются соответственно случаи, когда r равно 4, 6, 7.

Полученные результаты сопоставляются с результатами работ Д. Бланка [15] и [17].

Работа посвящается памяти В. А. Исковских, поставившему мне задачу. Я благодарен за советы и полезные замечания В. А. Исковских, а также Ю. Г. Прохорову, В. С. Куликову и Д. А. Степанову.

§ 2. Предварительные (известные) результаты

Основным полем всюду предполагается $\mathbb{C}$. Всюду используются обозначения статьи [14], а для группы диэдра используется стандартное обозначение D_n . Перечислим обозначения и напомним часто встречающиеся в настоящей работе обозначения статьи [14]:

- n – циклическая группа $\mathbb{Z}_n$, если не возникает путаница;
- $A.B$, где A и B – некоторые группы, обозначает их расширение с помощью точной тройки $0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$;
- $A : B$, где A и B – некоторые группы, обозначает расщепимое расширение $A.B$, т.е. полупрямое произведение $A \rtimes B$;
- $A \triangle_D B$ – диагональное произведение групп A и B по их общему гомоморфному образу D (т.е. подгруппа прямого произведения $A \times B$, состоящая из таких пар (a, b) , что $\alpha(a) = \beta(b)$ для некоторых эпиморфизмов $\alpha: A \rightarrow D$, $\beta: B \rightarrow D$);
- $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{Z}$, – взвешенное проективное пространство с весами $a_1, \dots, a_n$;
- для взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ через $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{C}$, обозначим отображение $(x_1 : \dots : x_n) \mapsto (b_1 x_1 : \dots : b_n x_n)$, а через $\text{kdiag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{C}$, обозначим отображение $(x_1 : x_2 : \dots : x_n) \mapsto (b_1 x_n : b_2 x_{n-1} : \dots : b_n x_1)$;
- $\mathbb{F}_e$ – рациональная линейчатая поверхность с инвариантом e ;
- $\text{Aut}(S, \varphi)$ – группа автоморфизмов расслоения на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, сохраняющих структуру расслоения;

- $\text{Pic}(S)^G$ – подрешетка в решетке Пикара $\text{Pic}(S)$, инвариантная относительно действия группы G ;
- тройка (S, G, φ) – G -поверхность (S, G) (определение см. ниже), обладающую G -эквивариантной структурой расслоения на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$;
- для поверхности X и объединения кривых $\bigcup_{i=1}^n C_i \subset X$ (предполагаем, что $X \simeq \mathbb{F}_e$ или $X \simeq \mathbb{P}(n, 1, 1)$) $\text{Aut}(\bigcup_{i=1}^n C_i, X)$ обозначает подгруппу группы $\text{Aut}(X)$, сохраняющую объединение кривых $\bigcup_{i=1}^n C_i$ и действующую тривиально на решетке Пикара $\text{Pic}(X)$.

В этой статье мы часто будем работать с бинарными формами. Поэтому перечислим определения, относящиеся к ним.

Назовем бинарную форму $p(t_0, t_1)$ *вырожденной*, если $p(t_0, t_1) = \alpha t_0^a t_1^b$, $a, b \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Назовем бинарную форму $p(t_0, t_1)$ *полуинвариантной* относительно элемента $g \in \text{Aut}(\mathbb{F}_1)$, если $g(p(t_0, t_1)) := p(g(t_0), g(t_1)) = \alpha(g)p(t_0, t_1)$, $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$.

Будем называть точку $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ *корнем бинарной формы* $p(t_0, t_1)$, если $p(a, b) = 0$.

G -поверхностью называется тройка (S, G, ρ) , где S – неособая проективная поверхность, а ρ – инъективный гомоморфизм группы G в группу автоморфизмов поверхности S . Для краткости G -поверхность будем обозначать (S, G) .

Расслоение на коники (S, G, φ) называется *относительно G -минимальным*, если в слоях φ нет G -инвариантных (-1) -кривых (т.е. компонент приводимых слоев: $\text{Pic}(S)^G = \varphi^* \text{Pic}(\mathbb{P}^1) \oplus \mathbb{Z}$). Напомним, что G -поверхность (S, G) называется *G -минимальной*, если любой G -эквивариантный бирациональный морфизм $S \rightarrow Y$ на гладкую G -поверхность Y является G -изоморфизмом. Для краткости будем называть группу G *минимальной*, если соответствующее расслоение на коники (S, G, φ) является G -минимальным. Ясно, что G -минимальная поверхность, обладающая структурой расслоения на коники, является и относительно минимальной. Обратное верно не всегда.

Пусть (S, G, φ) – относительно минимальная G -поверхность, расслоенная на коники. Пусть r – число вырожденных слоев. По формуле Нётера имеем $K_S^2 = 8 - r$. Очевидно (см., например, [14] и [8]), что при $K_S^2 = 8$ отображение φ – это $\mathbb{P}^1$ -расслоение над $\mathbb{P}^1$ и $S \simeq \mathbb{F}_N$ – рациональная линейчатая поверхность (поверхность Хирцебруха). Не существует относительно G -минимальных (и, значит, просто G -минимальных) расслоений на коники с $K_S^2 = 7$. Относительно G -минимальные расслоения на коники не являются G -минимальными в точности в следующих случаях (см. [8]):

$K_S^2 = 6$; здесь существует G -инвариантная пара $E = E_1 \cup E_2$ непересекающихся (-1) -кривых в классе $E \sim -K_S - 2f$, где f – класс слоя морфизма $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$; стягивание $\sigma_E: S \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^3$ является G -эквивариантным морфизмом на гладкую квадрику Q в $\mathbb{P}^3$ с $\text{Pic}(Q)^G \simeq \mathbb{Z}$;

$K_S^2 = 5$; здесь существует G -инвариантная четверка непересекающихся (-1) -кривых $E = E_1 + \dots + E_4$ в классе $E \sim -2K_S - 3f$, морфизм стягивания которой $\sigma_E: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ переводит пучок коник $|f|$ в пучок плоских коник с G -инвариантной четверкой базисных точек;

$K_S^2 = 3$; здесь $S \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кубическая поверхность, на которой имеется одна G -инвариантная (-1) -кривая (т.е. обычная прямая в $\mathbb{P}^3$) $E \sim -K_S - f$, стягивание которой $\sigma_E: S \rightarrow S' \subset \mathbb{P}^4$ отображает S на поверхность Дель Пеццо S' степени 4 с $\text{Pic}(S')^G \simeq \mathbb{Z}$.

Для остальных значений $K_S^2 = 4, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ относительно G -минимальные поверхности, расслоенные на коники, являются G -минимальными (см. [14] и [8]). Далее на протяжении этого параграфа будем рассматривать только эти значения K_S^2 .

Напомним (см. [14; § 5]), что для любого относительно G -минимального расслоения на коники группа G представляется в виде расширения

$$1 \rightarrow G_K \rightarrow G \rightarrow G_B \rightarrow 1, \quad (2.1)$$

где G_K – ядро естественного гомоморфизма $\varphi_*: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, а G_B – его образ. Таким образом, группа G_B эффективно действует на базе.

Пусть (S, G) – рациональная G -поверхность и

$$a: G \rightarrow O(\text{Pic}(S)), \quad g \mapsto g^*,$$

– естественное представление G в группе автоморфизмов решетки $\text{Pic}(S)$. Обозначим через G_0 ядро этого представления. Группа G_0 фиксирует компоненты вырожденных слоев, а так как $r \geq 3$, то она тривиально действует на базе. Таким образом, $G_0 \subset G_K$. Группа G_0 фиксирует также классы дивизоров сечений с отрицательным индексом самопересечения. Следовательно, G_0 фиксирует их поточечно. Если рассмотреть одно из этих сечений как точку степени 1 на общем слое, то получаем, что G_0 – циклическая группа.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [14; предложение 5.5]). *Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 \leq 4$, $K_S^2 \neq 3$. Предположим, что $G_0 \neq \{1\}$. Тогда поверхность S имеет структуру исключительного расслоения на коники.*

Дадим определение *исключительных расслоений на коники*. Это минимальное разрешение особенностей поверхности, задаваемой во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1, 1, g+1, g+1)$ для целого $g \geq 1$ уравнением вида

$$Y_g: F_{2g+2}(t_0, t_1) + t_2 t_3 = 0, \quad (2.2)$$

где F_{2g+2} – бинарная форма без кратных множителей степени $2g+2$ от t_0, t_1 . Проекция на $\mathbb{P}^1$ с координатами (t_0, t_1) после разрешения точек неопределенности индуцирует расслоение на коники $\varphi: \widetilde{Y}_g \rightarrow \mathbb{P}^1$ с приводимыми слоями над точками $\mathbb{P}^1$, являющимися корнями формы $F_{2g+2}(t_0, t_1) = 0$. Поверхность Y_g содержит две непересекающиеся рациональные $(-g-1)$ -кривые, заданные уравнениями $t_2 = 0$ и $t_3 = 0$. Автоморфизмы поверхности Y_g индуцированы автоморфизмами $\mathbb{P}(1, 1, g+1, g+1)$.

При вычислении минимальных групп на исключительных расслоениях на коники будет часто использоваться следующая лемма, известная как лемма Гурса.

ЛЕММА 2.2. Пусть G – конечная подгруппа в прямом произведении $A \times B$ групп A и B . Пусть $p_1: A \times B \rightarrow A$, $p_2: A \times B \rightarrow B$ – гомоморфизмы проекций. Пусть $G_i = p_i(G)$, $H_i = \text{Ker}(p_j|_G)$, $i \neq j = 1, 2$. Тогда H_i – нормальная подгруппа в G_i . отображение $\varphi: G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$, определенное как $\varphi(aH_1) = p_2(a)H_2$, является изоморфизмом и

$$G = G_1 \triangle_D G_2,$$

где $D = G_1/H_1$, $\alpha: G_1 \rightarrow D$ – отображение факторизации, а β – композиция факторизации $G_2 \rightarrow G_2/H_2$ и φ .

Известна следующая теорема о структуре минимальных конечных групп на неисклнчительном расслоении на коники.

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [14; теорема 5.7]). Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 \leq 4$, $K_S^2 \neq 3$, и пусть Σ – множество вырожденных слоев. Предположим, что $G_0 \simeq 1$. Тогда имеет место один из следующих случаев.

1. Случай $G_K \simeq 2$. Центральная инволюция ι , порождающая группу G_K , фиксирует поточечно гладкое бисечение C расслоения φ и переставляет компоненты слоев в подмножестве $\Sigma' \subset \Sigma$. Морфизм φ определяет линейный ряд g_1^2 на кривой C с ветвлением в особых точках слоев в подмножестве Σ' . Род кривой C равен $g = (m - 2)/2$, где $m = |\Sigma'|$. Группа G_B изоморфна группе автоморфизмов кривой C по модулю инволюции, определенной линейным рядом g_1^2 .
2. Случай $G_K \simeq 2^2$. Каждый нетривиальный элемент g_i , $i = 1, 2, 3$, подгруппы G_K фиксирует поточечно неприводимое гладкое бисечение C_i . Множество Σ делится на три подмножества $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ таких, что $\Sigma_i = (\Sigma_j \cup \Sigma_k) \setminus (\Sigma_j \cap \Sigma_k)$, $i \neq j \neq k \neq i$. Морфизмы $\varphi|_{C_i}$, $i = 1, 2, 3$, разветвлены в особых точках слоев из подмножеств Σ_i . Группа G_B оставляет множество точек $\varphi(\Sigma) \in \mathbb{P}^1$ и его разбиение на три подмножества $\varphi(\Sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$, инвариантными.

Напомним, что в настоящей работе рассматриваются тройки (S, G, φ) с K_S^2 , равными 1, 2 или 4. Следующая теорема используется для изучения тех случаев, когда S – слабая поверхность Дель Пеццо. Неособая рациональная поверхность X называется слабой поверхностью Дель Пеццо, если $-K_X^2 > 0$ и дивизор $-K_X$ численно эффективен.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть (S, G, φ) – минимальное расслоение на коники с K_S^2 , равными 1, 2 или 4. Тогда верно следующее.

1. Если дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S – поверхность Дель Пеццо, то имеется еще одна структура расслоения на коники (S, G, φ') . Если дополнительно K_S^2 равно 1 или 2, то структуры φ и φ' переставляются инволюцией Бертини и Гейзера соответственно. Поверхность S является минимальной поверхностью Дель Пеццо относительно действия группы $G \times \langle \tau \rangle$, где τ – инволюция Гейзера или Бертини соответственно. (Таким образом, пара $(S, G \times \langle \tau \rangle)$ описана в работе [14].)

2. Пусть дивизор $-K_S$ является численно эффективным, но не является обильным (т.е. S – слабая поверхность Дель Пеццо). Если $K_S^2 = 4$, то (S, G, φ) – исключительное расслоение на коники. Если $K_S^2 = 1$ (соответственно $K_S^2 = 2$), то инволюция Бертини (соответственно Гейзера) сохраняет структуру расслоения на коники и коммутирует с действием группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 теоремы доказано в [8; теорема 4]. Доказательство утверждения 2 в случае $K_S^2 = 4$ приведено в [14; предложение 5.2]. Докажем утверждение 2 для K_S^2 , равного 1 или 2. Предположим, что поверхность S обладает двумя структурами расслоения на коники φ и φ' . Тогда G -инвариантный конус Мори порождается классами слоев морфизмов φ и φ' . Отсюда, очевидно, следует, что дивизор $-K_S$ обилеен. Противоречие.

Напомним также сведения о группах автоморфизмов рациональных линейчатых поверхностей.

Группа автоморфизмов поверхности $\mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, действующих тривиально на решетке Пикара, изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Введем на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ координаты $(x_0 : x_1, t_0 : t_1)$. Всюду в работе расслоение $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ будет индуцировано проекцией $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1)$.

Для поверхностей $\mathbb{F}_n$, $n \geq 1$, имеет место следующая конструкция. Существует морфизм $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}(n, 1, 1)$, соответствующий стягиванию исключительно сечения $\mathbb{F}_n$. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 1$, состоит из всех автоморфизмов $\mathbb{P}(n, 1, 1)$, оставляющих точку $(1 : 0 : 0)$ на месте. Введем на $\mathbb{P}(n, 1, 1)$ координаты $(x : t_0 : t_1)$. Морфизм $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ индуцируется отображением $(x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1)$. Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 1$, состоит из всех обратимых отображений вида $(x : t_0 : t_1) \mapsto (ax + f_n(t_0, t_1) : bt_0 + ct_1 : dt_0 + et_1)$, где $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$, а $f_n(t_0, t_1)$ – однородный полином степени n .

В дальнейших вычислениях часто будут использоваться две простые леммы.

Рассмотрим кривую C , заданную следующим уравнением в $\mathbb{F}_0$:

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0, \quad (2.3)$$

где форма $\mathrm{Disc}(C) = p_0p_2 - p_1^2$ не имеет кратных корней. Обозначим через σ двулистное накрытие $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное проекцией $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1)$.

ЛЕММА 2.5. Пусть кривая C представима уравнением (2.3) и группа $\mathrm{Aut}(C, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент $g \neq 1$, действующий тривиально на базе двулистного накрытия $\sigma : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. Тогда сопряжением в группе $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ кривую C можно привести к виду

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0, \quad (2.4)$$

а элемент g – к отображению $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0 : -x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что g – элемент второго порядка, переставляющий слои накрытия σ . Тогда g сопряжен элементу $\mathrm{diag}(1, -1) \times \mathrm{diag}(1, 1)$ в группе $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Под действием этого элемента кривая C перейдет

в кривую

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 - 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0.$$

Поэтому $p_1 = 0$.

Далее рассмотрим кривую C , заданную следующим уравнением в $\mathbb{P}(n, 1, 1)$, $n \geq 1$:

$$p_0(t_0, t_1)x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1) = 0, \quad (2.5)$$

где форма $\text{Disc}(C) = p_0p_2 - p_1^2$ не имеет кратных корней. Обозначим через σ двулистное накрытие $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное проекцией $(x_0 : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1)$.

ЛЕММА 2.6. Пусть кривая C представима уравнением (2.3). Группа $\text{Aut}(C, \mathbb{F}_n)$, $n \geq 1$, содержит элемент $g \neq 1$, действующий тривиально на базе двулистного накрытия $\sigma : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ тогда и только тогда, когда $p_0|p_1$. В этом случае сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ кривую C можно привести к виду

$$p_0(t_0, t_1)x^2 + p_2(t_0, t_1) = 0, \quad (2.6)$$

а элемент g — к отображению $(x_0 : t_0 : t_1) \mapsto (-x_0 : t_0 : t_1)$. Группа $\text{Aut}(C, \mathbb{F}_n)$ этим сопряжением переводится в подгруппу группы обратимых отображений вида $(x : t_0 : t_1) \mapsto (ax : bt_0 + ct_1 : dt_0 + et_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы доказывается аналогично доказательству леммы 2.4. Докажем второе утверждение. Пусть кривая C представима уравнением (2.6). Заметим, что группа $\text{Aut}(C, \mathbb{F}_n)$ конечна и подгруппа $\langle g \rangle$ лежит в ее центре. Группа $\langle g \rangle$ фиксирует исключительное сечение E линейчатой поверхности $\mathbb{F}_n$. Поэтому группа $\langle g \rangle$ циклическая. Следовательно, множество неподвижных точек этой группы состоит из двух непересекающихся сечений E и E' линейчатой поверхности $\mathbb{F}_n$. Ясно, что действие группы $\text{Aut}(C, \mathbb{F}_n)$ сохраняет сечение E' . Очевидно, что образ сечения E' на поверхности $\mathbb{P}(n, 1, 1)$ задается уравнением $x = 0$. Далее доказательство очевидно.

§ 3. Конструкции уравнений и метод исследования

Опишем теперь вкратце метод задания уравнениями произвольных минимальных расслоений на коники (S, G, φ) с явным указанием действия группы G . Так же, как в § 2, предполагается, что $K_S^2 \leq 4$, $K_S^2 \neq 3$.

Если $G_0 \not\cong 1$, то по теореме 2.1 поверхность S имеет структуру исключительного расслоения на коники и представима уравнением (2.2). Действие группы G достаточно просто вычисляется с использованием предложения 5.3 из [14] и списка конечных подгрупп в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ (см. [14; п. 5.5]).

Далее на протяжении этого параграфа предполагается, что $G_0 = \{1\}$. В этом случае используются две конструкции. Первая конструкция используется, когда в качестве следствия теоремы 2.3 получаем $G_K \simeq 2^2$ или $G_K \simeq \langle \iota \rangle \simeq 2$, где инволюция ι переставляет компоненты во всех вырожденных слоях Σ . Вторая конструкция используется в оставшемся случае, т.е. когда $G_K \simeq \langle \iota \rangle \simeq 2$, где инволюция ι переставляет компоненты не во всех вырожденных слоях Σ . В конструкциях ниже используются обозначения теоремы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В п. 5.1.2 мы отступили от этого метода вследствие удачной возможности представить поверхность S уравнением подходящего вида (см. [14; пример 5.13]).

3.1. Первая конструкция. Метод исследования будет основан на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $G_0 \simeq 1$. Предположим, что как следствие теоремы 2.3 выполнено одно из следующих условий:

- 1) $G_K \simeq 2$, где инволюция $\iota \in G_K$ переставляет компоненты всех вырожденных слоев расслоения $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$;
- 2) $G_K \simeq 2^2$.

Тогда $f: S \rightarrow S/G_K$ – G -эквивариантный морфизм и на поверхности S/G_K определено эффективное действие группы $G_B \simeq G/G_K$. Поверхность S/G_K неособа и $S/G_K \simeq \mathbb{F}_e$, $e \geq 0$. Если $G_K \simeq 2^2$, то в обозначениях теоремы 2.3 любая кривая $C_i \subset S$ с отрицательным индексом самопересечения имеет $C_i^2 = -e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $Y = S/G_K$. Докажем первое нетривиальное утверждение теоремы, а именно, что $S/G_K \simeq \mathbb{F}_e$. В случае $G_K \simeq 2$ оно очевидно. Действительно, группа G_K порождена инволюцией ι . Множество неподвижных точек инволюции ι является гладкой кривой, поэтому поверхность Y неособа. Инволюция ι переставляет компоненты вырожденных слоев, поэтому Y – линейчатая поверхность.

Докажем утверждение в случае $G_K \simeq 2^2$. Поверхность Y рациональна, поскольку такова S . Из следующей леммы будет следовать, что эта поверхность неособа.

ЛЕММА 3.3. В условиях теоремы 3.2 предположим, что $G_K \simeq 2^2$. Тогда фактор $Y := S/G_K$ является неособой поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x \in S$. Проверим, что точка $f(x) \in Y$ неособа. По теореме Шефарда–Тодда–Шевалле достаточно доказать, что образ естественного представления стабилизатора $\text{Stab}_{G_K}(x)$ в касательном пространстве $T_{x,S}$ является группой, порожденной отражениями. Это очевидно, поскольку группа 2^2 имеет единственное двумерное точное представление, и оно порождено отражениями.

Далее, $\rho(S/G_K) = \rho(S)^{G_K} = 2$. Поэтому Y – рациональная линейчатая поверхность.

Последнее утверждение теоремы тривиально вытекает из того факта, что на поверхности $\mathbb{F}_e$ существует не более одной неприводимой кривой D с $D^2 < 0$. Обозначим $C'_i = f(C_i)$. Ясно, что $f^*(C'_i) = 2C_i$. По формуле проекции $f^*(C'_i)^2 = \deg(f)C_i'^2 = 4C_i'^2$. Откуда $C_i'^2 = C_i'^2 = -e$.

Опишем метод исследования. Сначала применяем теорему 2.3 и находим возможности для групп G_K .

Предположим, что группа G_K содержит инволюцию ι , переставляющую компоненты всех вырожденных слоев. Тогда множество фиксированных точек инволюции ι будет гладкой кривой C . Теми же рассуждениями, что и в теореме 3.2, получаем, что $S/\iota \simeq \mathbb{F}_e$. Обозначим через $\hat{C}$ образ кривой C на поверхности $\mathbb{F}_e$. Вычисляются e и дивизор кривой $\hat{C}$ на поверхности $\mathbb{F}_e$. При вычислениях мы пользуемся тем, что двулистное накрытие $S \rightarrow \mathbb{F}_e$ существует, только если $[\hat{C}] \in 2\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$. Отсюда легко получить уравнения поверхности S . Заметим, что группа $\langle \iota \rangle$ нормальна в группе G . Поэтому на поверхности $\mathbb{F}_e$ определено действие группы G . Вычисляем это действие.

Рассмотрим случай, когда группа G_K не содержит инволюцию ι , переставляющую компоненты всех вырожденных слоев. В этом случае, пользуясь теоремой 3.2, вычисляем инвариант e и получаем уравнения образов кривых C_i , $i = 1, 2, 3$, на поверхности $\mathbb{F}_e$. Затем явно вычисляем действие группы G_B .

В обоих случаях отсюда легко получить уравнения поверхности S с определенным действием группы G_K . Далее, пользуясь точной последовательностью (2.1), поднимаем действие группы G_B до действия на поверхности S . Таким образом, получаем действие всей группы G .

3.2. Вторая конструкция. Напомним, что эта конструкция применяется тогда, когда в качестве следствия из теоремы 2.3 получаем, что $G_K \simeq 2$ и $m < k$.

Пусть $\Sigma' \subset \Sigma$ – множество вырожденных слоев, в которых инволюция ι переставляет компоненты. Далее, пусть $g_1: \tilde{S} \rightarrow S$ – раздутие особых точек всех вырожденных слоев $\Sigma \setminus \Sigma'$, а $g_2: \tilde{S} \rightarrow S'$ – стягивание собственного прообраза $\Sigma \setminus \Sigma'$. Поверхность S' имеет $2(r-m)$ особых точек типа A_1 . Очевидно, что отображения g_1 и g_2 G -эквивариантны. Имеем следующую G -эквивариантную коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{S} & & \\
 & g_1 \swarrow & & \searrow g_2 & \\
 S & & & & S' \\
 & \downarrow \tilde{h} & & & \\
 & \tilde{S}/\iota & & & \\
 & \swarrow g'_1 & & \searrow g'_2 & \\
 S/\iota & & & & S'/\iota
 \end{array} \tag{3.1}$$

В диаграмме вертикальные стрелки соответствуют отображениям факторизации по инволюции ι , а отображения g'_1 и g'_2 индуцированы отображениями g_1 и g_2 . Тройка (S, G, φ) определяет тройку (S', G, φ') , где морфизм $\varphi': S' \rightarrow \mathbb{P}^1$ индуцирован морфизмом φ .

ЛЕММА 3.4. Поверхности $\tilde{S}/\iota$ и S'/ι неособы и $S'/\iota \simeq \mathbb{F}_e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие группы $\langle \iota \rangle$ на поверхности $\tilde{S}$ не имеет изолированных неподвижных точек. Отсюда по теореме Шефарда–Толда–Шевалле следует, что поверхность $\tilde{S}/\iota$ неособа.

Легко проверить, что собственный прообраз множества $\Sigma \setminus \Sigma'$ на поверхности $\tilde{S}/\iota$ при отображении $\tilde{h}$ перейдет в объединение $2(r - m)$ непересекающихся рациональных (-1) -кривых Y . Морфизм g'_2 является стягиванием Y . Далее,

$$\rho(S'/\iota) = \rho(\tilde{S}/\iota) - 2(r - m) = \rho(\tilde{S})^{\langle \iota \rangle} - 2(r - m) = 2.$$

Поэтому S'/ι – рациональная линейчатая поверхность.

Учитывая лемму 3.4, поверхность S' можно задать уравнениями. Обозначим через C' собственный прообраз кривой C на поверхности S' . Тогда $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$ будет двулистным накрытием, разветвленным вдоль объединения кривых $C' \cup g_{2*}(g_1^*(\Sigma \setminus \Sigma'))$. Образ кривой $g_{2*}(g_1^*(\Sigma \setminus \Sigma'))$ на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$ является объединением $r - m$ слоев. Обозначим эти слои как F_i , $i = 1, \dots, r - m$. Также положим $\hat{C} = h'(C')$.

Найдем условие минимальности для группы G в терминах действия на поверхности S' . Перенумеруем вырожденные слои $\Sigma \setminus \Sigma'$, обозначив их соответственно V_i , $i = 1, \dots, r - m$, в соответствии с нумерацией слоев F_i , $i = 1, \dots, r - m$. Каждый вырожденный слой V_i представляется в виде объединения двух рациональных (-1) -кривых V_{i1} и V_{i2} . Обозначим через $\tilde{V}_{ij}$, $i = 1, \dots, r - m$, $j = 1, 2$, собственный прообраз кривой V_{ij} на поверхности $\tilde{S}$. Для удобства обозначим точки $h'(g_2(\tilde{V}_{ij}))$, $i = 1, \dots, r - m$, $j = 1, 2$, на поверхности $\mathbb{F}_e$ соответственно через x_{ij} , $i = 1, \dots, r - m$, $j = 1, 2$.

ЛЕММА 3.5. *При сделанных выше обозначениях пара (S, G) минимальна тогда и только тогда, когда для любого слоя $V_i \in \Sigma \setminus \Sigma'$, $i = 1, \dots, r - m$, орбита точки x_{i1} содержит точку x_{i2} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что пара (S, G) минимальна тогда и только тогда, когда для любого слоя $V_i \in \Sigma \setminus \Sigma'$, $i = 1, \dots, r - m$, орбита кривой V_{i1} содержит кривую V_{i2} . Ясно, что утверждение леммы равносильно последнему условию.

Найдем необходимое и достаточное условие существования двулистного накрытия $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$. Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$.

ЛЕММА 3.6. *При сделанных выше предположениях двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$ существует тогда и только тогда, когда $[\hat{C} + (r - m)f] \in 2\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что проще всего найти условия для существования двулистного накрытия $\tilde{h}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/\iota$, поскольку поверхность $\tilde{S}/\iota$ неособа.

Ясно, что группа $\text{Pic}(\tilde{S}/\iota)$ не имеет кручения и ее базис может быть выбран в виде $g_2^*(s)$, $g_2^*(f)$, $\tilde{h}(\tilde{V}_{ij})$, $i = 1, \dots, r - m$, $j = 1, 2$. Пусть D – дивизор

ветвления, тогда

$$\begin{aligned} D &\sim (g_2'^*(\widehat{C}) - \Sigma_{i,j} \tilde{h}(\tilde{V}_{ij})) + \sum_{i=1}^{r-m} (g_2'^*(f) - \tilde{h}(\tilde{V}_{i1}) - \tilde{h}(\tilde{V}_{i2})) \\ &\sim g_2'^*(\widehat{C}) + (r-m)g_2'^*(f) - 2\Sigma_{i,j} \tilde{h}(\tilde{V}_{ij}). \end{aligned}$$

Поэтому для существования двулистного накрытия $\tilde{h}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/\iota$ необходимо и достаточно, чтобы $[g_2'^*(\widehat{C}) + (r-m)g_2'^*(f)] \in 2\text{Pic}(\tilde{S}/\iota)$. Это равносильно условию леммы.

Из вышесказанного ясно, что метод исследования должен быть следующим. Сначала с помощью леммы 3.6 вычисляем значения инварианта e у линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$, при котором существует двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$. Находим уравнения кривой $\widehat{C}$ и слоев F_i , $i = 1, \dots, r-m$, откуда получаем уравнения поверхности S' . Далее вычисляем группу $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_e)$. Обозначим через $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_e)$ подгруппу автоморфизмов $\mathbb{F}_e$, переводящих кривую $\widehat{C}$ и множество слоев $\bigcup_i F_i$ в себя. Вычисляем эту группу. Ясно, что $G_B \subset \text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_e)$. Отбираем подгруппы G_B в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_e)$ при помощи леммы 3.5. Далее, пользуясь точной последовательностью (2.1), поднимаем действие группы G_B до действия на поверхности S' . Таким образом, получаем действие всей группы G .

Ясно, что тройка (S', G, φ') определяет G -минимальную тройку (S, G, φ) . Расслоение (S, G, φ) не является исключительным расслоением на коники, поскольку иначе существовала бы инволюция $\iota' \in G_K$, переставляющая компоненты всех слоев Σ (см. [14; предложение 5.3]). Поэтому тройка (S, G, φ) принадлежит рассматриваемому случаю.

§ 4. Случай $K_S^2 = 4$

Расслоение $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет четыре приводимых слоя. Из [14; предложение 5.2] следует, что поверхность S обладает структурой исключительного расслоения на коники тогда и только тогда, когда S не является поверхностью Дель Педро. Это верно, поскольку поверхность Дель Педро не содержит (-2) -кривых. Поэтому рассмотрение делится на два случая: когда антиканонический дивизор поверхности обилен и когда не обилен.

4.1. Случай, когда дивизор $-K_S$ обилен и выполнены условия первой конструкции. Данный пункт будет посвящен доказательству следующей теоремы. Всюду используются обозначения первой конструкции (см. п. 3.1).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 4$. Предположим, что дивизор $-K_S$ обилен и выполнены условия первой конструкции. Тогда поверхность S представляется в виде G -эквивариантного двулистного накрытия $\pi: S \rightarrow S/\iota = \mathbb{F}_0$, где $\iota \in G_K$ – инволюция, переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. Также поверхность S задается следующими уравнениями в $\mathbb{P}^4$:

$$u^2 + F(x, y, z, w) = 0, \quad xw = yz, \quad (4.1)$$

где $F(x, y, z, w)$ – однородный полином степени 2, определенный кривой $\widehat{C}$. Морфизм φ задается формулой

$$\varphi: (u : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Инволюция ι действует по формуле $u \mapsto -u$. Группа G является любой подгруппой группы $\text{Aut}(S, \varphi)$, содержащей инволюцию ι . Если $G_K \simeq 2^2$, то $F(x, y, z, w) = F(-x, -y, z, w)$ в (4.1) и группа G_K порождена отображениями

$$u \mapsto -u, \quad (u : x : y : z : w) \mapsto (u : -x : -y : z : w).$$

Если индуцированное действие группы $\text{Aut}(S, \varphi)$ на $\mathbb{P}^1$ (базе расслоения φ) нетривиально, то полиномы $F(x, y, z, w)$ и действие группы $\text{Aut}(S, \varphi)$ описаны в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

$F(x, y, z, w)$	$\text{Aut}(S, \varphi)$	Образующие $\text{Aut}(S, \varphi)$
$xy + (z - aw)(z - \frac{w}{a}),$ $a^2 \neq 0, \pm 1$	$(2^2).(2^2)$	$\iota, \text{diag}(1, -1, -1, 1, 1),$ $(u : x : y : z : w) \mapsto (u : y : x : w : z),$ $(u : x : y : z : w) \mapsto (u : \frac{z}{a} - w : az - w : \frac{x-ay}{1-a^2} : \frac{ax-y}{1-a^2})$
$xy + z^2 + w^2$	$(2^2).D_4$	$\iota, \text{diag}(1, i, -i, 1, -1),$ $(u : x : y : z : w) \mapsto (2\varepsilon_8 u : 2(z + \varepsilon_8^2 w) : 2(\varepsilon_8^2 z + w) : x + \varepsilon_8^2 y : \varepsilon_8^2 x + y)$
$x^2 + (2y + z)w$	$2.A_4$	$\text{diag}(-1, 1, \varepsilon_3, \varepsilon_3, \varepsilon_3^2),$ $(u : x : y : z : w) \mapsto (3u : x + 2y + z + 2w : x - y + z - w : 2x + 4y - z - 2w : 2x - 2y - z + w)$
$x^2 + y^2 + 2xw + cz^2 + dw^2,$ $c, d \neq 0, c \neq d$	2^3	$\iota, \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1),$ $(u : x : y : z : w) \mapsto (\frac{u}{\sqrt{d}} : w : a_2 z : a_1 y : a_1 a_2 x), a_1^2 = \frac{1}{cd}, a_2 = a_1 \cdot c$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Пользуясь результатами теоремы 4.1, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Циклические группы. Случай $G \simeq 6$. Выполнен третий случай таблицы 1. Группа G порождена отображением $\text{diag}(-1, 1, \varepsilon_3, \varepsilon_3, \varepsilon_3^2)$. (Этот случай был описан в [17; теорема 2].)

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2$. Возможны следующие случаи.

- Случай $G \simeq 2 \times 4$. Выполнен второй случай таблицы 1. Группа G порождена отображениями ι и $(u : x : y : z : w) \mapsto (2\varepsilon_8 u : \pm 2(z + \varepsilon_8^2 w) : \pm 2(\varepsilon_8^2 z + w) : x + \varepsilon_8^2 y : \varepsilon_8^2 x + y)$.
- Случай $G \simeq 2^3$. Выполнен третий случай таблицы 1. Группа G порождена отображениями ι , $(u : x : y : z : w) \mapsto (3u : x + 2y + z + 2w : x - y + z - w : 2x + 4y - z - 2w : 2x - 2y - z + w)$ и $(u : x : y : z : w) \mapsto (3u : x + 2\varepsilon_3 y + \varepsilon_3 z + 2\varepsilon_3^2 w : \varepsilon_3^2 x - y + z - \varepsilon_3 w : 2\varepsilon_3^2 x + 4y - z - 2\varepsilon_3 w : 2\varepsilon_3 x - 2\varepsilon_3^2 y - \varepsilon_3^2 z + w)$.
- Случай $G \simeq 2^3$. Выполнен четвертый случай таблицы 1. Группа G изоморфна группе $\text{Aut}(S, \varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Докажем в качестве следствия теоремы 2.3, что минимальная группа G содержит инволюцию $\iota \in G_K$, переставляющую компоненты всех вырожденных слоев. Ясно, что надо рассмотреть только второй случай теоремы 2.3. Без ограничения общности можем считать, что $|\Sigma_1| \geq |\Sigma_2| \geq |\Sigma_3|$. Простым перебором случаев получаем единственную возможность $|\Sigma_1| = 4$, $|\Sigma_2| = 2$, $|\Sigma_3| = 2$. Но тогда элемент g_1 и будет искомой инволюцией.

Найдем инвариант e . Ясно, что кривая $\hat{C}$ эллиптическая. Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – дивизор слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. По формуле присоединения имеем $\hat{C} \sim 2s + (e + 2)f$, откуда следует, что число e четное, так как класс дивизора $[\hat{C}] \in 2\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$. Далее, $0 \leq s \cdot \hat{C} = 2 - e$, поэтому $e = 0$ или $e = 2$. При $e = 2$ прообраз $\pi^*(s)$ состоит из двух непересекающихся рациональных (-2) -кривых. Это противоречит тому, что S – поверхность Дель Пеццо. Поэтому $e = 0$.

Кривая $\hat{C}$ задается следующим уравнением в $\mathbb{F}_0$:

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0, \quad (4.2)$$

где $p_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 1, 2$, – бинарные формы степени 2. Определим *дискриминант кривой* $\hat{C}$, обозначаемый $\text{Disc}(\hat{C})$, как форму $p_2(t_0, t_1)p_0(t_0, t_1) - p_1^2(t_0, t_1)$. Очевидно, $\text{Disc}(\hat{C})$ не имеет кратных корней.

Обозначим через σ двулистное накрытие $\hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное проекцией на второй множитель в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Легко получить уравнения поверхности S следующим образом. Используем вложение $\text{Сегре } \mathbb{F}_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(x : y : z : w)$, заданное в координатах отображением $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 t_0 : x_0 t_1 : x_1 t_0 : x_1 t_1)$. Тогда поверхность S представится уравнениями (4.1) в $\mathbb{P}^4$. Кривая C задается парой уравнений $u = 0$ и $xw = yz$. Инволюция ι действует по формуле $u \mapsto -u$.

Теперь перейдем к изучению группы $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$. Двулистное накрытие σ индуцирует гомоморфизм групп $\sigma_* : \text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. По лемме 2.5 рассмотрение делится на два случая: $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$ и $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$. В первом случае кривая $\hat{C}$ приводится к виду (2.4).

Изучим группу $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ в случае $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$. Это равносильно тому, что в $\mathbb{F}_0$ существует прямая вида $sx_0 - dx_1 = 0$, $s, d \in \mathbb{C}$, на которой лежат две

точки ветвления двулистного накрытия σ . Кривая $\widehat{C}$ приводится некоторым автоморфизмом $h \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ к виду

$$t_0 t_1 x_0^2 + (t_0 - at_1) \left(t_0 - \frac{t_1}{a} \right) x_1^2 = 0, \quad a \neq 0, \pm 1. \quad (4.3)$$

Все возможности реализуются. При $a = \pm i$ группа $\mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ изоморфна $2.D_4$ и порождена отображениями

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (ix_0 : x_1, t_0 : -t_1), \\ (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (2x_1 : x_0, (t_0 + it_1) : (it_0 + t_1)). \end{aligned}$$

При $a \neq \pm i$ группа $\mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ изоморфна 2^3 и порождена отображениями

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (-x_0 : x_1, t_0 : t_1), \\ (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : x_1, t_1 : t_0), \\ (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto \left(\frac{x_1}{a} : \frac{x_0}{1-a^2}, (t_0 - at_1) : (at_0 - t_1) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Накрытие σ имеет четыре точки ветвления на $\mathbb{P}^1$. Эти точки некоторым автоморфизмом в $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ можно перевести в точки $t_0/t_1 = 0, \infty, a, 1/a$, $a \neq 0, \pm 1$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$. Это следует из того, что при различных значениях параметра a двойное отношение точек $t_0/t_1 = 0, \infty, a, 1/a$, $a \neq 0$, принимает все значения в $\mathbb{C}^*$.

В одну сторону первое утверждение теоремы очевидно. Докажем обратную импликацию. Предположим, что существуют две точки ветвления (без ограничения общности мы можем предположить, что это 0 и ∞), прообразы которых на кривой $\widehat{C}$ лежат на одной прямой вида $cx_0 - dx_1 = 0$, $c, d \in \mathbb{C}$. Переведем некоторым автоморфизмом $q = (q' \times 1) \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ эту прямую в прямую $x_1 = 0$. Тогда кривая $\widehat{C}$ приведет к виду

$$t_0 t_1 x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0 x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0.$$

Далее, из того, что $\mathrm{Disc}(\widehat{C}) = p_1^2 - p_0 p_2$ имеет корни 0 и ∞ , следует, что $p_1 = \alpha t_0 t_1$. Сделаем проективную замену $x_0 = x_0 + \alpha x_1$, $x_1 = x_1$. В новых координатах уравнение кривой $\widehat{C}$ примет вид

$$t_0 t_1 x_0^2 + p'_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0.$$

Форма p'_2 делит $\mathrm{Disc}(\widehat{C})$, поэтому $p'_2 = \alpha'(t_0 - at_1)(t_0 - t_1/a)$. Делая проективную замену $x_0 = x_0$, $x_1 = x_1 \sqrt{\alpha'}$, получаем, что кривая $\widehat{C}$ представима уравнением типа (4.3).

Вычислим группу $\mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. Из того, что накрытие σ имеет четыре точки ветвления, следует, что $\mathrm{Im}(\sigma_*) \subset S_4$. Две точки ветвления накрытия σ , лежащие на одной прямой вида $cx_0 - dx_1 = 0$, $c, d \in \mathbb{C}$, при действии группы $\mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ снова переходят в точки ветвления, лежащие на одной прямой. Отсюда, очевидно, следует, что в группе $\mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ нет элементов третьего порядка. Однако из формулировки данной теоремы ясно, что $2^3 \subset \mathrm{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$.

Поэтому из [14; п. 5.5] следует, что $\text{Im}(\sigma_*) \subset D_4$. Вычислениями легко проверить, что форма $\text{Disc}(\widehat{C})$ полуинвариантна относительно группы D_4 только при $a = \pm i$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Изучим оставшийся случай $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть кривая $\widehat{C}$ представима уравнением (4.2). Группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ нетривиальна и $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$ тогда и только тогда, когда кривая $\widehat{C}$ приводится к одному из типов, перечисленных в таблице 2. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ТАБЛИЦА 2

Тип	$\widehat{C}$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$
I	$t_0^2 x_0^2 + 2t_1^2 x_0 x_1 + t_0 t_1 x_1^2$	A_4	$\text{diag}(1, \varepsilon_3) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 + x_1 :$ $2x_0 - x_1, t_0 + 2t_1 : t_0 - t_1)$
II	$(t_0^2 + t_1^2)x_0^2 + 2t_0 t_1 x_0 x_1$ $+ (ct_0^2 + dt_1^2)x_1^2,$ $c, d \neq 0, c \neq d$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1),$ $\text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2),$ $a_1^2 = \frac{1}{cd}, a_2 = a_1 \cdot c$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ и $g \neq 1$. Сопряжением в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ этот элемент можно привести к виду $g = \text{diag}(1, \beta) \times \text{diag}(1, \alpha)$. Из условий теоремы, очевидно, следует, что $\text{ord}(\beta) \mid \text{ord}(\alpha)$ и $2 \leq \text{ord}(\alpha) \leq 4$. Возможны следующие два случая в зависимости от значения $\text{ord}(\alpha)$.

1. $\text{ord}(\alpha) \geq 3$. Очевидно, что тогда формы p_i , $i = 0, 1, 2$, в уравнении (4.2) вырождены. Заменаи переменных вида $(x_0 : x_1) \mapsto (x_1 : x_0)$ и $(t_0 : t_1) \mapsto (t_1 : t_0)$ можно добиться того, что $p_0 = t_0^2$. Очевидно, что тогда $p_1 = at_1^2$, а $p_2 = bt_0^2$ или $p_2 = bt_0 t_1$. Пусть $p_2 = bt_0^2$. Но тогда очевидно, что точки ветвления имеют вид $t_0/t_1 = c, -c, d, -d$, $c, d \neq 0$, причем прообразы на кривой $\widehat{C}$ первых двух точек (как и двух последних) лежат на одной прямой. Противоречие с предложением 4.3. Если $p_2 = bt_0 t_1$, то из [14; п. 5.5] следует, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0) \subset A_4$. Заменой переменных вида

$$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto ((\sqrt[3]{b})^2 x_0 : \sqrt[3]{a} x_1, (\sqrt[3]{a})^2 t_0 : \sqrt[3]{b} t_1)$$

уравнение кривой $\widehat{C}$ приводится к типу I в таблице 2. Получаем кривую $\widehat{C}$ типа I.

2. $\text{ord}(\alpha) = 2$. Можно предположить, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ не содержит элементов из предыдущего случая. Поэтому $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0) \subset 2^2$. Пусть $\beta = 1$. Можно проверить, что точки ветвления будут различны, если только $p_i(t_0, -t_1) = p_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 1, 2$. Но тогда очевидно, что точки ветвления имеют вид $t_0/t_1 =$

$c, -c, d, -d, c, d \neq 0$. Как и выше, получаем противоречие с предложением 4.3. Пусть $\beta = -1$. Здесь возможны два случая:

- 1) $p_i(t_0, -t_1) = p_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 2$, $p_1(t_0, t_1) = at_0t_1$, $a \neq 0$;
- 2) $p_i(t_0, t_1) = s_it_0t_1$, $s_i \neq 0$, $i = 0, 2$, $p_1(t_0, -t_1) = p_1(t_0, t_1)$.

Докажем, что случай 2) сводится к случаю 1). Проективной заменой $x'_0 = x_0\sqrt{s_0}$, $x'_1 = x_1\sqrt{s_2}$ кривая $\hat{C}$ приводится к виду

$$t_0t_1x_0'^2 + p_1'(t_0, t_1)x_0'x_1' + t_0t_1x_1'^2 = 0, \quad p_1'(t_0, -t_1) = p_1'(t_0, t_1).$$

Далее проективной заменой $x''_0 = x'_0 + ix'_1$, $x''_1 = ix'_0 + x'_1$ этот случай сводится к случаю 1).

Выясним, когда в случае 1) у кривой $\hat{C}$ существуют две точки ветвления, лежащие на одной прямой. Рассмотрим отображение

$$f: (t_0 : t_1) \mapsto (p_0(t_0, t_1) : p_1(t_0, t_1) : p_2(t_0, t_1))$$

из $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^2$. Очевидно, что когда линейная оболочка форм $p_0(t_0, t_1)$, $p_1(t_0, t_1)$, $p_2(t_0, t_1)$ над полем $\mathbb{C}$ совпадает с линейной оболочкой форм t_0^2 , t_0t_1 , t_1^2 , отображение f взаимно однозначно. Если это выполнено, то ясно, что никакие две точки ветвления не могут лежать на одной прямой. Легко проверить, что если отображение f взаимно однозначно, то уравнение кривой $\hat{C}$ приводится к типу II. Иначе тривиальной заменой переменных уравнение кривой $\hat{C}$ приводится к виду

$$(t_0^2 + t_1^2)x_0^2 + 2at_0t_1x_0x_1 + (t_0^2 + t_1^2)x_1^2 = 0.$$

Но тогда очевидно, что точки ветвления имеют вид $t_0/t_1 = c, -c, d, -d, c, d \neq 0$. Как и выше, получаем противоречие с предложением 4.3.

Сведения, полученные в предложениях 4.3 и 4.4, позволяют описать группы $\text{Aut}(S, \varphi)$. Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 1.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 4.1.

4.2. Случай, когда дивизор $-K_S$ обилен и выполнены условия второй конструкции. В этом пункте будет доказано следующее утверждение (всюду будут использоваться обозначения второй конструкции; см. п. 3.2).

ТЕОРЕМА 4.5. *Не существует G -минимальных расслоений на коники (S, G, φ) таких, что $K_S^2 = 4$, дивизор $-K_S$ обилен и выполнены условия второй конструкции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что множество $\Sigma' \subset \Sigma$ состоит из двух вырожденных слоев. Поэтому кривая $\hat{C}$ рациональна. Докажем, что двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$ существует только при $e = 1$.

Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. Найдем класс дивизора кривой $\hat{C}$. Ясно, что $\hat{C} \simeq 2s + af$. По формуле присоединения имеем $a = e + 1$. Далее, $0 \leq s \cdot \hat{C} = a - 2e$, откуда $e \leq 1$. Однако $\hat{C} + 2f \sim 2s + (3 + e)f$, поэтому из леммы 3.6 следует, что e нечетно. Следовательно, $e = 1$.

Представим $\mathbb{F}_1$ как проективную плоскость $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(x, t_0, t_1)$, раздутую в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим это раздутие через ψ . Исключительный дивизор будет отрицательным сечением, а прямые $at_0 - bt_1 = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, будут слоями $\mathbb{F}_1$. Тогда кривая $\widehat{C}$ представляется уравнением

$$x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1) = 0,$$

где p_1, p_2 – бинарные формы соответственно степеней 1 и 2. Форма $p_2(t_0, t_1) - p_1(t_0, t_1)^2$ не имеет кратных множителей, поскольку кривая $\widehat{C}$ неособа. Поэтому тривиальной заменой координат уравнение кривой $\widehat{C}$ приводится к виду

$$x^2 + t_0 t_1 = 0.$$

Очевидно, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \simeq 2 : \mathbb{C}^*$. Эта группа порождена отображениями $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : ct_0 : t_1/c)$, $c \in \mathbb{C}^*$, и $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$. Слои F_i , $i = 1, 2$, представляются уравнениями

$$F_i = \{l_i(t_0, t_1) = 0\},$$

где $l_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2$, – бинарные формы степени 1. Положим $Q_2(t_0, t_1) = \prod_{i=1}^2 l_i(t_0, t_1)$. Легко проверить, что сопряжением в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ форма $Q_2(t_0, t_1)$ приводится к виду

$$Q_2(t_0, t_1) = (t_0 - at_1) \left(t_0 - \frac{t_1}{a} \right), \quad a^2 \neq 1. \quad (4.4)$$

ЛЕММА 4.6. *В зависимости от значения параметра a в уравнениях (4.4) имеют место следующие возможности для группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$.*

1. При $a = \pm i$ группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ изоморфна группе D_4 и порождена отображениями

$$(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : it_0 : -it_1), \quad (x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0).$$

2. При $a \neq \pm i$ группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ изоморфна группе 2^2 и порождена отображениями

$$(x : t_0 : t_1) \mapsto (-x : t_0 : t_1), \quad (x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ является подгруппой в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$, для которой форма $(t_0 - at_1)(t_0 - t_1/a)$ полуинвариантна. Поэтому утверждение леммы получается прямыми вычислениями.

Из лемм 4.6 и 3.5 тривиальными вычислениями получается, что в группах $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ не существует подгрупп G_B . Это завершает доказательство теоремы 4.5.

4.3. Случай, когда дивизор $-K_S$ не является обильным. Из [14; предложение 5.2] следует, что S – исключительное расслоение на коники. Поверхность S задается уравнением (2.2). Используем обозначения из [14; пп. 5.2, 5.3].

Так как расслоение на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет четыре вырожденных слоя, то $2g + 2 = 4$ и $g = 1$. Из [14; предложение 5.3] следует, что $\text{Aut}(Y_1) \simeq N \times P$, где P – подгруппа $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, оставляющая множество корней формы $F_4(t_0, t_1)$ инвариантным, а $N \simeq \mathbb{C}^* : 2$ – множество матриц с определителем ± 1 , оставляющих моном $t_2 t_3$ инвариантным. В силу [14; п. 5.5] легко проверить, что группа P изоморфна 2×2 , D_4 или A_4 .

Группа G минимальна тогда и только тогда, когда она переставляет исключительные сечения E_0 и E_∞ (см. [14; § 5.2]). Для описания групп $G \subset N \times P$ будем использовать лемму 2.2. Обозначим через p_1 и p_2 проекции прямого произведения $N \times P$ на N и P соответственно. Тогда группа G изоморфна $D_n \triangle_B P'$, где $D_n = p_1(G)$, $P' = p_2(G)$, а группа B – общий фактор D_n и P' . Найдем возможности для групп B . Рассмотрим точную последовательность (2.1). Ясно, что $G_K = \text{Ker}(p_2) \simeq D_m$. Из [14; лемма 4.3] следует, что $B \simeq 1$ или $B \simeq 2$. Причем последний вариант возможен, только если группа P' содержит нормальную подгруппу индекса 2. Имеет место включение $P' \subset P$, поэтому P' может быть одной из следующих: 1, 2, 3, 4, 2×2 , D_4 или A_4 . Группа P' обладает нормальной подгруппой индекса 2 только в случаях, когда она изоморфна 2, 4, 2×2 или D_4 .

Диагональное произведение $D_n \triangle_B P'$ не определяет группу G однозначно, так как есть зависимость от выбора гомоморфизмов $\alpha: D_n \rightarrow B$ и $\beta: P' \rightarrow B$ (см. лемму 2.2). Однако ясно, что группа G будет минимальной тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\alpha)$ не является циклической группой.

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть (S, G) – расслоение на коники степени 4. Предположим, что $-K_S$ не является обильным. Тогда S имеет структуру исключительного расслоения на коники Y_1 и $\text{Aut}(Y_1) \simeq N \times P$. Пара (S, G) минимальна тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп:

- 1) $D_n, D_n \times 2, D_n \triangle_2 2, D_n \times 2 \times 2, D_n \triangle_2 (2 \times 2), n \geq 1$, при $P \simeq 2 \times 2$;
- 2) $D_n, D_n \times 2, D_n \triangle_2 2, D_n \times 4, D_n \triangle_2 4, D_n \times 2 \times 2, D_n \triangle_2 (2 \times 2), D_n \times D_4, D_n \triangle_2 D_4, n \geq 1$, при $P \simeq D_4$;
- 3) $D_n, D_n \times 3, D_n \times 2 \times 2, D_n \triangle_2 (2 \times 2), D_n \times A_4, n \geq 1$, при $P \simeq A_4$.

В случае $G \simeq D_n \triangle_2 P'$, где $P' \subset P$, $n \geq 1$, пара (S, G) будет минимальной тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\alpha)$ не является циклической группой (см. лемму 2.2). Все возможности реализуются.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Пользуясь результатами теоремы 4.7, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Циклические группы. Случай $G \simeq 6$. (Этот случай был описан в [17; теорема 2].)

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2$. Пропущены случаи $G \simeq 2^3$ и $G \simeq 2 \times 4$.

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2^2$. Пропущены случаи $G \simeq 2^3$, $G \simeq 2^2 \times 3$ и $G \simeq 2^2 \times 4$.

§ 5. Случай $K_S^2 = 2$

Расслоение на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет $r = 6$ приводимых слоев.

ЛЕММА 5.1. Пусть S – неособая рациональная поверхность с $K_S^2 \geq 1$. Предположим, что существует неприводимая кривая $C \subset S$ такая, что $-K_S \cdot C \leq 0$. Тогда C – гладкая рациональная кривая, $C^2 \leq -2$ и $|-K_S - C| \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C - K_S) \rightarrow \mathcal{O}_S(-K_S) \rightarrow \mathcal{O}_C(-K_S) \rightarrow 0$$

получаем точную когомологическую последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(-C - K_S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(-K_S)) \rightarrow \dots$$

По неравенству Римана–Роха $h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) \geq K_S^2 + 1 \geq 2$. С другой стороны, $h^0(\mathcal{O}_C(-K_S)) \leq 1$, так как по условию $C \cdot (-K_S) \leq 0$. Откуда получаем $h^0(\mathcal{O}_S(-C - K_S)) \geq 1$ и $|-K_S - C| \neq \emptyset$.

Запишем $-K_S \sim mC + C'$, где $m \geq 1$ и C' – эффективный дивизор, не содержащий кривую C в качестве компоненты. Если $C^2 = 0$, то $-K_S \cdot C = 0$. Противоречие с теоремой Ходжа об индексе. Поэтому $C^2 < 0$.

Из условия $K_S^2 > 0$ следует, что $C \notin |-K_S|$. Далее, $|-K_S - C| \neq \emptyset$, поэтому $|K_S + C| = \emptyset$. Применяя теорему Римана–Роха к дивизору $K_S + C$, получаем, что C – кривая арифметического рода 0, откуда $C \simeq \mathbb{P}^1$. По формуле присоединения получаем $C^2 \leq -2$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ – G -минимальное расслоение на коники степени $K_S^2 = 2$. Дивизор $-K_S$ не является численно эффективным тогда и только тогда, когда поверхность S имеет структуру исключительного расслоения на коники $\tilde{Y}_2$ (см. уравнение (2.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Докажем в другую. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5.3. Пусть E – сечение G -минимального расслоения на коники S степени $K_S^2 = 2$. Предположим, что $E^2 = -3$. Тогда S – исключительное расслоение на коники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия минимальности группы G , очевидно, следует существование элемента $g \in G$, переставляющего компоненты некоторого вырожденного слоя расслоения φ . Тогда ясно, что $E' = g(E) \neq E$. Из [14; лемма 5.1] следует, что $E \cdot E' = 0$. Возьмем три вырожденных слоя на расслоении S и стянем в них компоненты, пересекающие E . Далее возьмем три оставшихся вырожденных слоя и стянем в них компоненты, пересекающие E' . Очевидно, что получится $\mathbb{F}_0$, а поверхность S будет исключительным расслоением на коники (см. [14; п. 5.2] и первую конструкцию).

Предположим, что дивизор $-K_S$ не является численно эффективным. Докажем, что S – исключительное расслоение на коники. Пусть C – сумма гладких

рациональных кривых с индексом самопересечения < -2 . Из леммы 5.1 следует, что множество C непусто и конечно. Очевидно, что C — G -инвариантный дивизор, поэтому $C \sim -aK_S - bf$, где f — класс дивизора слоя расслоения φ . Пересекая C с f , получаем $a > 0$. Пересекая C с K_S , получаем $b > a$. Из [14; лемма 5.1] следует, что поверхность S содержит сечение E с индексом самопересечения $-1 \leq E^2 \leq -3$ (напомним, что S не имеет G -инвариантных сечений, поскольку группа G минимальна). Если $E^2 = -3$, то утверждение следует из леммы 5.3. Иначе, пересекая C с E , получим $0 \leq C \cdot E = a(-K_S \cdot E) - b \leq a - b$. Противоречие с предыдущим неравенством. Теорема 5.2 доказана.

В силу теоремы 5.2 рассмотрение делится на два случая: когда антиканонический дивизор численно эффективен и когда не эффективен.

5.1. Случай, когда дивизор $-K_S$ численно эффективен и выполнены условия первой конструкции. Всюду будут использоваться обозначения первой конструкции (см. п. 3.1). Применим теорему 2.3. В первом случае существует инволюция $\iota \in G_K$, переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. Во втором случае $G_K \simeq 2^2$ и множество вырожденных слоев Σ разбивается на три подмножества Σ_i , $i = 1, 2, 3$, таких, что $\Sigma_i = \Sigma_j + \Sigma_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, и $|\Sigma_i| = 4$, $i = 1, 2, 3$. Последнее утверждение получается простым перебором случаев.

5.1.1. Случай, когда существует инволюция $\iota \in G_K$, переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. В этом пункте будет доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть (S, G, φ) — G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$. Предположим, что дивизор $-K_S$ численно эффективен и существует инволюция $\iota \in G_K$, переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. Тогда на поверхности S существует либо G -инвариантная рациональная (-2) -кривая, либо G -инвариантная пара рациональных (-2) -кривых, пересекающихся в одной точке. Пусть $\psi': (S, G, \varphi) \rightarrow (S', G, \varphi')$ — стягивание этих кривых, где отображение $\varphi': S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцировано морфизмом φ . Поверхность S' представляется уравнением в $\mathbb{P}(2, 1^3)$ с координатами u, x, t_0, t_1 :

$$u^2 + F(x, t_0, t_1) = 0, \quad (5.1)$$

где $F(x, t_0, t_1)$ — однородный полином степени 4, определенный кривой $\widehat{C}$. Полином F имеет вид (5.2). Отображение φ' является проекцией:

$$\varphi': (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Инволюция ι совпадает с инволюцией Гейзера и действует по формуле $u \mapsto -u$. Группа G является любой подгруппой группы $\text{Aut}(S', \varphi')$, содержащей инволюцию ι . Если $G_K \simeq 2^2$, то $F(-x, t_0, t_1) = F(x, t_0, t_1)$ в уравнении (5.1) и группа G_K порождена отображениями ι и $x \mapsto -x$. Если группа G_B нетривиальна, то полиномы $F(x, t_0, t_1)$ и действие группы $\text{Aut}(S', \varphi')$ описываются соответственно в таблицах 3 и 4.

ТАБЛИЦА 3. Кривые $\widehat{C}$

Тип	$\widehat{C}, F(x, t_0, t_1)$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$
I	$t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + t_1^4$	$2.D_4$	$\text{diag}(\varepsilon_8, \varepsilon_8^6, 1),$ $t_0 \leftrightarrow t_1$
II	$t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + t_1^4, \quad b \neq 0$	D_4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, 1),$ $(x : t_0 : t_1)$ $\mapsto (x : t_1 : t_0)$
III	$(t_0^2 + t_1^2)x^2 + a t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + c t_1^4,$ $a, b, c \neq 0, \quad a \neq c$	2^2	$\text{diag}(-1, 1, 1),$ $\text{diag}(1, -1, 1)$
IV	$(t_0^2 + t_1^2)x^2 + a t_0^3 t_1 + b t_0 t_1^3,$ $a, b \neq 0, \quad a \neq b$	4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, 1)$
V	$t_0^2 x^2 + 2 t_1^3 x + t_0^4$	6	$\text{diag}(\varepsilon_6^4, \varepsilon_6, 1)$
VI	$t_0^2 x^2 + 2 t_1^3 x + t_0^3 t_1$	5	$\text{diag}(\varepsilon_5^3, \varepsilon_5, 1)$
VII	$t_0 t_1 x^2 + 2 t_0^3 x + t_1^4$	5	$\text{diag}(\varepsilon_5^2, \varepsilon_5, 1)$
VIII	$t_0^2 x^2 + 2(t_1^3 + a t_0^3)x + t_0(b t_0^3 + c t_1^3)$	3	$\text{diag}(\varepsilon_3, \varepsilon_3, 1)$
IX	$t_0 t_1 x^2 + a(t_0^3 + t_1^3)x + b t_0^2 t_1^2,$ $a, b \neq 0$	D_3	$\text{diag}(\varepsilon_3^2, \varepsilon_3, 1),$ $t_0 \leftrightarrow t_1$
X	$p_0(t_0, t_1)x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1),$ $p_i(t_0, -t_1) = p_i(t_0, t_1), \quad i = 0, 1, 2,$ $p_0 \nmid p_1$	2	$\text{diag}(1, -1, 1)$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Пользуясь результатами теоремы 5.4, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Циклические группы. Случай $G \simeq 10$. Кривая $\widehat{C}$ имеет тип VI или VII в таблице 3. Группа G изоморфна группе $\text{Aut}(S', \varphi')$. (Этот случай был описан в [17; теорема 2].)

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2$. Возможны следующие случаи:

- случай $G \simeq 2^2$; группы этого вида встречаются, если кривая $\widehat{C}$ имеет один из типов I, II, III, V, IX, X из таблицы 3;
- случай $G \simeq 2 \times 6$; кривая $\widehat{C}$ имеет тип V из таблицы 3, группа G изоморфна группе $\text{Aut}(S', \varphi')$.

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2^2$. Случай $G \simeq 2^3$. Группы этого вида встречаются, если кривая $\widehat{C}$ имеет один из типов I, II или III из таблицы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. По формуле Гурвица кривая $\widehat{C}$ имеет род 2. Найдем e .

Таблица 4

Тип кривой $\widehat{C}$	$\text{Aut}(S', \varphi')$	Образующие $\text{Aut}(S', \varphi')$
I	$2^2 \cdot D_4$	$\iota, \text{diag}(1, \varepsilon_8, \varepsilon_8^6, 1),$ $(u : x : t_0 : t_1) \mapsto (u : x : t_1 : t_0)$
II	$2 \times D_4$	$\iota, \text{diag}(1, \varepsilon_4, -1, 1),$ $(u : x : t_0 : t_1) \mapsto (u : x : t_1 : t_0)$
III	2^3	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1), \text{diag}(1, -1, 1, 1),$ $\text{diag}(1, 1, -1, 1)$
IV	2×4	$\iota, \text{diag}(\varepsilon_4, \varepsilon_4, -1, 1)$
V	2×6	$\iota, \text{diag}(\varepsilon_6^2, \varepsilon_6^4, \varepsilon_6, 1)$
VI	10	$\text{diag}(\varepsilon_{10}^3, \varepsilon_{10}^6, \varepsilon_{10}^2, 1)$
VII	10	$\text{diag}(-1, \varepsilon_5^2, \varepsilon_5, 1)$
VIII	6	$\text{diag}(-\varepsilon_3^2, \varepsilon_3, \varepsilon_3, 1)$
IX	$2 \times D_3$	$\iota, \text{diag}(\varepsilon_3, \varepsilon_3^2, \varepsilon_3, 1),$ $(u : x : t_0 : t_1) \mapsto (u : x : t_1 : t_0)$
X	2^2	$\iota, \text{diag}(1, 1, -1, 1)$

Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя $\mathbb{F}_e$. Тогда $\pi^*(s)^2 = -2e$. Легко проверить, что $\widehat{C} = 2s + (3 + e)f$. Имеем $0 \leq s \cdot \widehat{C} = -2e + (3 + e) = 3 - e$. Для существования двулистного накрытия $\pi : S \rightarrow \mathbb{F}_e$ необходимо и достаточно, чтобы $[\widehat{C}] \in 2\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$. Поэтому получаем, что e равно 1 или 3. В случае $e = 3$ прообраз $\pi^*(s)$ состоит из двух гладких рациональных кривых с индексом самопересечения -3 , что противоречит численной эффективности дивизора $-K_S$. Поэтому $e = 1$.

Представим $\mathbb{F}_1$ как проективную плоскость $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(x, t_0, t_1)$, раздутую в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим это раздутие через ψ . Исключительный дивизор будет отрицательным сечением, а прямые $at_0 - bt_1 = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, будут слоями $\mathbb{F}_1$. Тогда гиперэллиптическая кривая $\widehat{C}$ представится уравнением

$$F(x, t_0, t_1) = p_0(t_0, t_1)x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1) = 0, \quad (5.2)$$

где $p_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2, 3$, – бинарные формы соответственно степеней 2, 3, 4. Определим *дискриминант кривой* $\widehat{C}$, обозначаемый $\text{Disc}(\widehat{C})$, как форму $p_0p_2 - p_1^2$. Ясно, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

Легко получить уравнения поверхности S следующим образом. Напомним, что поверхность $\mathbb{F}_1$ представлялась как проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, раздутая в точке $(1 : 0 : 0)$. По конструкции прообраз исключительной кривой раздутия на поверхности S будет либо G -инвариантной рациональной (-2) -кривой, либо G -инвариантной парой рациональных (-2) -кривых, пересекающихся в одной точке. Пусть $\psi' : S \rightarrow S'$ – стягивание этих кривых. Очевидно, что морфизм ψ'

G -эквивариантен и на поверхности S' группа G действует эффективно. Ясно, что морфизм $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ индуцирует отображение $\varphi': S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$.

Обозначим через τ инволюцию Гейзера и изучим ее действие на поверхности S . Обозначим через E дивизор единственной рациональной (-2) -кривой на поверхности S , а через f – класс дивизора слоя расслоения φ . Легко проверить, что $-K_S \sim E + f$. Поэтому τ сохраняет структуру расслоения на коники φ , т.е. $\tau \in \text{Aut}(S, \varphi)$. С другой стороны,

$$\text{Pic}(S)^\tau = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}E = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f.$$

Следовательно, группа $\langle \tau \rangle$ минимальна. Заметим, что подгруппа $H \subset \text{Aut}(S, \varphi)$ минимальна тогда и только тогда, когда компоненты любого вырожденного слоя расслоения φ лежат в одной орбите относительно действия H . Поэтому $\tau = \iota$.

Перейдем к изучению группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$. Обозначим через σ двулистное накрытие $\widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное проекцией $(x : t_0 : t_1) \rightarrow (t_0 : t_1)$. Накрытие σ индуцирует гомоморфизм групп $\sigma_*: \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Очевидно, что $\text{Im}(\sigma_*) \subset S_6$. По лемме 2.6 рассмотрение делится на два случая: $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$ и $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$.

Рассмотрим сначала случай $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$. Сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ кривая $\widehat{C}$ приводится к виду (2.6). Из леммы 2.6 следует, что формы p_0 и p_2 в уравнении (2.6) полуинвариантны относительно группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$. Также получаем, что любой элемент $g \in \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ можно диагонализировать так, что кривая $\widehat{C}$ сохранит вид (2.6).

ЛЕММА 5.6. Пусть $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$. Предположим, что $\text{Im}(\sigma_*) \not\subset 1$. Тогда сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ элемент g и уравнение кривой $\widehat{C}$ приводятся к одному из случаев, перечисленных в таблице 5. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ТАБЛИЦА 5

Случай	g	$\widehat{C}$
1	$\text{diag}(\varepsilon_8, \varepsilon_8^6, 1)$	$t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + t_1^4$
2	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, 1)$	$t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + t_1^4$
3	$\text{diag}(1, -1, 1)$	$(t_0^2 + t_1^2)x^2 + a t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + c t_1^4, \quad a, c \neq 0$
4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, 1)$	$(t_0^2 + t_1^2)x^2 + a t_0^3 t_1 + b t_0 t_1^3, \quad a, b \neq 0, \quad a \neq b$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что формы p_0 и p_2 в уравнении (2.6) полуинвариантны относительно группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$. Отсюда следует, что $\text{Im}(\sigma_*) \subset S_4$ и группа $\text{Im}(\sigma_*)$ не содержит элементов третьего порядка. Приведем элемент g к диагональному виду $\text{diag}(\beta, \alpha, 1)$. Ясно, что $\text{ord}(\alpha)$ равно 2 или 4. Рассмотрим случаи в зависимости от значения $\text{ord}(\alpha)$.

1. $\text{ord}(\alpha) = 4$. Заметим, что форма p_0 вырожденная. Легко проверить, что $p_0 = at_0t_1$, $p_2 = bt_0^4 + ct_1^4$, $a, b, c \neq 0$, а также, что здесь выполнен случай 1 из таблицы 5.
2. $\text{ord}(\alpha) = 2$. Здесь возможны два случая.
 - 1) Форма $p_0 = a't_0t_1$. Легко проверить, что тогда $p_2 = at_0^4 + bt_0^2t_1^2 + ct_1^4$, $a, c \neq 0$. Делая тривиальную замену координат, получаем случай 2 из таблицы 5.
 - 2) Форма $p_0 = a't_0^2 + b't_1^2$, $a', b' \neq 0$. Здесь возможны два случая. В первом случае $p_2 = at_0^4 + bt_0^2t_1^2 + ct_1^2$, $a, c \neq 0$. Вычислениями получаем случай 3 из таблицы 5. Во втором случае $p_2 = at_0^3t_1 + bt_0t_1^3$, $a, b \neq 0$. Вычислениями получаем случай 4 из таблицы 5.

Пользуясь леммой 5.6, опишем группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 2$ и $\text{Im}(\sigma_*) \neq 1$. Тогда сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ уравнение кривой $\widehat{C}$ и группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ приводятся к одному из типов I–IV, перечисленных в таблице 3. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.6 следует, что в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ нет элементов третьего порядка. Поэтому из [14; п. 5.5] следует, что образ σ_* может содержаться только в группах 2×2 или D_4 . Очевидно, что если группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ не содержит элемента из случая 1 таблицы 5, то образ σ_* может содержаться только в группе 2×2 .

Если группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 1 таблицы 5, то кривая $\widehat{C}$ имеет тип I из таблицы 3.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 2 таблицы 5 и не содержит элементов из случая 1 этой таблицы. Легко проверить, что это будет выполнено тогда и только тогда, когда в уравнении кривой $\widehat{C}$ коэффициент $b \neq 0$. Здесь кривая $\widehat{C}$ имеет тип II из таблицы 3.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 3 таблицы 5 и не содержит элементов из предыдущих случаев этой таблицы. Легко проверить, что это будет выполнено тогда и только тогда, когда в уравнении кривой $\widehat{C}$ коэффициенты $a \neq c$, $b \neq 0$. Тогда $\text{Im}(\sigma_*) \subset 2$. Вычислениями получаем, что кривая $\widehat{C}$ имеет тип III из таблицы 3.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 4 таблицы 5. Легко проверить, что подгруппа группы $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, относительно которой формы p_0 и p_2 полуинвариантны, изоморфна группе 2 и порождена отображением $(t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : -t_1)$. Поэтому $\text{Im}(\sigma_*) \simeq 2$ и кривая $\widehat{C}$ имеет тип IV из таблицы 3. Легко проверить, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ не содержит элементов из предыдущих случаев таблицы 5.

Изучим оставшийся случай, когда $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$.

ЛЕММА 5.8. Пусть $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$. Предположим, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ нетривиальна, т.е. содержит элемент $g \neq 1$. Тогда сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ элемент g и кривая $\widehat{C}$ приводятся к одному из следующих случаев,

перечисленных в таблице 6. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ТАБЛИЦА 6

Случай	g	$\widehat{C}$
1	$\text{diag}(\varepsilon_6^4, \varepsilon_6, 1)$	$t_0^2 x^2 + 2t_1^3 x + t_0^4$
2	$\text{diag}(\varepsilon_5^3, \varepsilon_5, 1)$	$t_0^2 x^2 + 2t_1^3 x + t_0^3 t_1$
3	$\text{diag}(\varepsilon_5^2, \varepsilon_5, 1)$	$t_0 t_1 x^2 + 2t_0^3 x + t_1^4$
4	$\text{diag}(\varepsilon_3, \varepsilon_3, 1)$	$t_0^2 x^2 + 2a(t_1^3 + t_0^3)x + t_0(bt_0^3 + ct_1^3)$
5	$\text{diag}(\varepsilon_3^2, \varepsilon_3, 1)$	$t_0 t_1 x^2 + 2a(t_0^3 + t_1^3)x + bt_0^2 t_1^2 = 0, a, b \neq 0$
6	$\text{diag}(1, -1, 1)$	$p_0(t_0, t_1)x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1),$ $p_i(t_0, -t_1) = p_i(t_0, t_1), i = 0, 1, 2, p_0 \nmid p_1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что кривая $\widehat{C}$ приводится к виду (2.6) тогда и только тогда, когда форма p_1 делится на форму p_0 . Отсюда следует, что все случаи, перечисленные в формулировке леммы, действительно реализуются.

Приведем элемент g к диагональному виду $\text{diag}(\beta, \alpha, 1)$. Очевидно, что формы p_0, p_1, p_2 полуинварианты относительно элемента g . Из условия $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \subset S_6$ следует, что $2 \leq \text{ord}(\alpha) \leq 6$. Рассмотрим случаи в зависимости от значения $\text{ord}(\alpha)$. Заметим, что при $\text{ord}(\alpha) \geq 3$ форма p_0 вырождена. В этом случае заменой переменных $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$ форму p_0 приведем к виду t_0^2 или $t_0 t_1$.

1. $\text{ord}(\alpha) \geq 4$. Очевидно, что формы p_0 и p_1 вырожденные.

Пусть $p_0 = t_0^2$. Очевидно, что тогда $p_1 = at_1^3$. Легкими вычислениями получаем случаи 1 и 2 из таблицы 6.

Пусть $p_0 = t_0 t_1$. Докажем, что случаи $p_1 = at_0^2 t_1$ и $p_1 = at_0 t_1^2$ невозможны. Допустим, что выполнен один из этих случаев. Ясно, что тогда $p_2 = bt_0^4 + ct_1^4$, $b, c \neq 0$ и $\text{ord}(\alpha) = 4$. Легкими вычислениями проверяется, что это невозможно. Поэтому заменой переменных $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$ форму p_1 можно привести к виду at_0^3 . Легкими вычислениями получаем случай 3 из таблицы 6.

2. $\text{ord}(\alpha) = 3$. Легко проверить, что $p_1 = at_0^3 + bt_1^3$.

Пусть $p_0 = t_0^2$. Легко проверить, что тогда $\beta = \alpha$ и $p_2 = t_0(ct_0^3 + dt_1^3)$. Тривиальной заменой переменных получаем случай 4 из таблицы 6.

Пусть $p_0 = t_0 t_1$. Легко проверить, что тогда $\beta = \alpha^2$ и $p_2 = ct_0^2 t_1^2$. Тривиальной заменой переменных получаем случай 5 в таблице 6.

3. $\text{ord}(\alpha) = 2$. Ясно, что $\text{ord}(\beta) \leq 2$. Заменой переменных $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$ можно добиться того, что $\beta = 1$ и $g = \text{diag}(1, -1, 1)$. Простым перебором возможностей получаем случай 6 из таблицы 6.

Пользуясь леммой 5.8, опишем группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Пусть $\text{Ker}(\sigma_*) \simeq 1$ и группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ нетривиальна. Тогда сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ уравнение кривой $\widehat{C}$ и группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ приводятся к одному из типов V–X, перечисленных в таблице 3. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что кривая $\widehat{C}$ приводится к виду (2.6) тогда и только тогда, когда форма p_1 делится на форму p_0 . Отсюда следует, что все случаи, перечисленные в формулировке предложения, действительно реализуются. Заметим, что форма p_0 определяет точки пересечения кривой $\widehat{C}$ и исключительной кривой раздутия ψ . Отсюда следует, что формы p_0 и $\text{Disc}(\widehat{C})$ полуинвариантны относительно группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случаев 1–4 таблицы 6. Из [14; п. 5.5] несложными вычислениями можно получить, что группа $\langle \sigma_*(g) \rangle$ является максимальной, относительно которой формы p_0 и $\text{Disc}(\widehat{C})$ полуинвариантны. Поэтому кривая $\widehat{C}$ имеет соответственно типы V–VIII из таблицы 3.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 5 таблицы 6. Из [14; п. 5.5] несложными вычислениями можно получить, что группа D_3 является максимальной, относительно которой формы p_0 и $\text{Disc}(\widehat{C})$ полуинвариантны. Поэтому легко проверить, что кривая $\widehat{C}$ имеет тип IX из таблицы 3.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ содержит элемент g из случая 6 таблицы 6 и не содержит элементов из других случаев этой таблицы. Ясно, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \subset 2^2$. Предположим, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \simeq 2^2$. Тогда $\text{Im}(\sigma_*)$ порожден отображениями $(t_0 : t_1) \mapsto (-t_0 : t_1)$ и $(t_0 : t_1) \mapsto (at_1 : t_0)$, $a \neq 0$. Проверяя формы p_0 и $\text{Disc}(\widehat{C})$ на полуинвариантность относительно этой группы, получаем, что форма p_1 делится на форму p_0 . Противоречие. Поэтому $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \simeq 2$ и кривая $\widehat{C}$ имеет тип X из таблицы 3.

Сведения, полученные в предложениях 5.7 и 5.9, позволяют описать группы $\text{Aut}(S', \varphi')$. Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 4.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 5.4.

5.1.2. Случай, когда не существует инволюции $\iota \in G_K$, переставляющей компоненты всех вырожденных слоев. Основным результатом пункта является теорема 5.10. Прежде всего заметим, что здесь будет выполнен случай 2 из теоремы 2.3 (поскольку мы предполагаем выполнимость условий первой конструкции). Множество Σ делится на три подмножества $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ такие, что $|\Sigma_1| = |\Sigma_2| = |\Sigma_3| = 4$. Кривые C_j , $j = 1, 2, 3$, будут бисечениями расслоения на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ рода 1. Сначала докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$ и $G_K \simeq 2^2$. Предположим, что дивизор $-K_S$ численно эффективен и не существует инволюции $\iota \in G_K$, переставляющей компоненты всех вырожденных слоев. Тогда дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S является поверхностью Дель Пецо. Поверхность S представляется следующим уравнением в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$:

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_1(t_0, t_1)x_1^2 + p_2(t_0, t_1)x_2^2 = 0, \quad (5.3)$$

где $p_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2, 3$, – бинарные формы степени 2 без кратных и попарно общих множителей. Морфизм φ задается формулой

$$\varphi: (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Группа G_K изоморфна группе 2×2 и порождена отображениями

$$\begin{aligned} g_1: (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) &\mapsto (-x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1), \\ g_2: (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : -x_1 : x_2, t_0 : t_1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Группа G является любой подгруппой группы $\text{Aut}(S, \varphi)$, содержащей отображения (5.4). Если индуцированное действие группы $\text{Aut}(S, \varphi)$ на базе расслоения φ нетривиально, то уравнения поверхности S и действие группы $\text{Aut}(S, \varphi)$ описываются в таблице 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. В работе Д. Бланка утверждалось, что не известно, существуют ли группы вида $C.44$ (см. [15; замечание, с. 87]). Приведем пример. Пусть поверхность S имеет тип III из таблицы 7. Группа G изоморфна группе 4×4 и порождена отображениями

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) &\mapsto (\varepsilon_4 x_0 : x_1 : x_2, t_0 : -t_1), \\ (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : \varepsilon_4 x_1 : x_2, t_1 : t_0). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. Пользуясь результатами теоремы 5.10, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2^2$. Случай $G \simeq 2^3$. Группы этого вида встречаются, если поверхность S имеет один из типов I, IV, VI из таблицы 7.

Построим вложение поверхности S в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Линейная система $|-K_S|$ не имеет базисных точек (см. [18; теорема 8.3.2]). Поэтому пучок $\mathcal{O}(-K_S)$ в каждой точке порождается глобальными сечениями. Ясно, что $-K_S \cdot f = 2$. Поэтому пучок $\mathcal{O}(-K_S)$ относительно очень обилен и определяет вложение $S \rightarrow X$, где $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, а

$$\mathcal{E} = \varphi_* \mathcal{O}(-K_S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_3)$$

– локально свободный пучок ранга 3 на $\mathbb{P}^1$. Из того, что пучок $\mathcal{O}(-K_S)$ в каждой точке порождается глобальными сечениями, следует что пучок $\mathcal{E}$ также порождается глобальными сечениями в каждой точке. Откуда имеем $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим через $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ естественную проекцию. Пусть $\mathcal{L} = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ и $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1)$ – тавтологический обратимый пучок Гротендика, т.е. такой пучок, что $f_* \mathcal{M} = \mathcal{E}$. Обозначим соответствующие классы дивизоров на X через L и M соответственно. По [19; предложение 3.12] имеем

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &= \mathbb{Z}M \oplus \mathbb{Z}L, \quad M^3 = \sum_{i=1}^3 d_i, \quad M^2 \cdot L = 1, \quad L^2 = 0, \\ K_X &= -3M + \left(\sum_{i=1}^3 d_i - 2 \right) L. \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 7. Группы $\text{Aut}(S, \varphi)$

Тип	S	$\text{Aut}(S, \varphi)$	Порождающие $\text{Aut}(S, \varphi)$
I	$(t_0^2 - t_1^2)x_0^2 + (t_0^2 - \varepsilon_6^2 t_1^2)x_1^2 + (t_0^2 - \varepsilon_6^4 t_1^2)x_2^2$	$2^2.D_6$	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_1 : x_2 : x_0, t_0 : \varepsilon_6 t_1),$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : \varepsilon_6^2 x_2 : \varepsilon_6 x_1, t_1 : t_0)$
II	$(t_0 - at_1)(t_0 - bt_1)x_0^2 + (t_0 - \varepsilon_3 at_1)(t_0 - \varepsilon_3 bt_1)x_1^2 + (t_0 - \varepsilon_3^2 at_1)(t_0 - \varepsilon_3^2 bt_1)x_2^2,$ $a, b \neq 0, a \neq \pm b$	$2.D_3$	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_1 : x_2 : x_0, t_0 : \varepsilon_3 t_1),$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : \varepsilon_3^2 x_2 : \varepsilon_3 x_1, abt_1 : t_0)$
III	$t_0 t_1 x_0^2 + (t_0^2 - t_1^2)x_1^2 + (t_0^2 + t_1^2)x_2^2$	$2^2.D_4$	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (\varepsilon_8^3 x_0 : x_2 : x_1, t_0 : \varepsilon_8^2 t_1),$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : ix_1 : x_2, t_1 : t_0)$
IV	$t_0 t_1 x_0^2 + (t_0 - at_1)(t_0 - \frac{1}{a}t_1)x_1^2 + (t_0 + at_1)(t_0 + \frac{1}{a}t_1)x_2^2, a^4 \neq 1$	$2^2.2^2$	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : x_2 : x_1, t_0 : -t_1),$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : x_1 : x_2, t_1 : t_0)$
V	$(t_0^2 - t_1^2)x_0^2 + (t_0 - at_1)(t_0 - bt_1)x_1^2 + (t_0 + at_1)(t_0 + bt_1)x_2^2,$ $a, b \neq 0, (ab)^2 \neq 1, a \neq \pm b$	D_4	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : x_2 : x_1, t_0 : -t_1)$
VI	$(t_0^2 - t_1^2)x_0^2 + (t_0^2 - a^2 t_1^2)x_1^2 + (t_0^2 - b^2 t_1^2)x_2^2, a, b \neq 0,$ $a^2 b^2 \neq 1, a^2 \neq b^2, a^4 \neq b^2,$ $a^2 \neq b^4, a^2 \neq 1, b^2 \neq 1$	2^3	$g_1, g_2,$ $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$ $\mapsto (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : -t_1)$

Найдем класс дивизора поверхности S в группе $\text{Pic}(X)$. Очевидно, что $S = 2M + cL$. Найдем c . Из условий

$$\varphi_* \mathcal{O}(-K_S) = \mathcal{E} = f_* \mathcal{M}$$

имеем

$$-K_S = M \mid_S.$$

По формуле присоединения

$$-K_S = \left(3M + \left(2 - \sum_{i=1}^3 d_i \right) L - 2M - cL \right) \Big|_S = \left(M + \left(2 - \sum_{i=1}^3 d_i - c \right) L \right) \Big|_S.$$

Поэтому имеем два случая:

- 1) $2 - \sum_{i=1}^3 d_i - c = 0$;
- 2) $L|_S \sim 0$, откуда $0 = L^2 \cdot S = 2L^2 \cdot M = 2$, что невозможно.

Далее,

$$2 = K_S^2 = M^2 \cdot S = 2M^3 + \left(2 - \sum_{i=1}^3 d_i \right) M^2 \cdot L = 2 \sum_{i=1}^3 d_i + 2 - \sum_{i=1}^3 d_i,$$

откуда $\sum_{i=1}^3 d_i = 0$. Из условия $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, получаем $d_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, $X \simeq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Введем на X биоднородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1)$. Поверхность S представляется биоднородным многочленом бистепени $(2, 2)$. По построению $\text{Aut}(S, \varphi) \subset \text{Aut}(X, f) \simeq \text{PGL}(3, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Очевидно, что действие группы G_K можно диагонализировать так, что элементы g_i , $i = 1, 2$, в формулировке теоремы 2.3 будут представлены отображениями (5.4). Легко проверить, что тогда поверхность S представляется уравнением вида (5.3).

Далее прямыми вычислениями проверяется, что дивизор $-K_S$ обилен по критерию Накаи–Мойшезона.

Перейдем к изучению группы $\text{Aut}(S, \varphi)$.

ЛЕММА 5.13. *При сделанных выше предположениях справедливо следующее. Предположим, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ действует нетривиально на базе расслоения $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$. Тогда возможны случаи, перечисленные в таблице 7. Все возможности реализуются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кривые C_i , $i = 1, 2, 3$, высекаемые на поверхности S сечениями $x_{i-1} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Из вышесказанного ясно, что определено действие группы $\text{Aut}(S, \varphi)$ на множестве этих кривых. Поэтому определен гомоморфизм $f: \text{Aut}(S, \varphi) \rightarrow S_3$. Пусть группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ содержит элемент g , действующий нетривиально на базе расслоения $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$. Возможны следующие случаи.

1. $\text{ord}(f(g)) = 1$. Заметим, что сопряжением в подгруппе $1 \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ элемент g можно привести к виду $\text{diag}(1, \alpha_1, \alpha_2) \times \text{diag}(1, \beta)$, так что поверхность S сохранит вид (5.3). Очевидно, что формы $p_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 1, 2$, полуинвариантны относительно элемента g и $\text{ord}(\beta) = 2$.

2. $\text{ord}(f(g)) = 2$. Без ограничения общности можно считать, что элемент g переводит друг в друга кривые C_2 и C_3 . Сопряжением в подгруппе $1 \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ элемент g можно привести к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, \beta)$, так что поверхность S сохранит вид (5.3). Очевидно, что формы p_1, p_2 будут невырождены и $\text{ord}(\beta)$ равно 2 или 4.

3. $\text{ord}(f(g)) = 3$. Без ограничения общности можно считать, что элемент g переводит кривую C_1 в кривую C_2 , кривую C_2 в кривую C_3 и кривую C_3 в кривую C_1 . Сопряжением в подгруппе $1 \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ элемент g можно привести к виду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, \beta)$, так что поверхность S сохранит вид (5.3). Ясно, что формы p_0, p_1, p_2 будут невырождены и $\text{ord}(\beta)$ равно 3 или 6.

Рассмотрим сначала случай, когда $\text{ord}(f(g)) = 3, \text{ord}(\beta) = 6$. Тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу I из таблицы 7. Из [14; п. 5.5] следует, что $G_B \subset D_6$, откуда, очевидно, следует, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ имеет тип I из таблицы 7.

Теперь рассмотрим случай, когда $\text{ord}(f(g)) = 3, \text{ord}(\beta) = 3$ и группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ не содержит элементов из предыдущего случая. Тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу II из таблицы 7. Из [14; п. 5.5] следует, что $G_B \subset D_3$ или $G_B \subset A_4$, откуда, очевидно, следует, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ имеет тип II из таблицы 7.

Рассмотрим случай, когда $\text{ord}(f(g)) = 2, \text{ord}(\beta) = 4$. Ясно, что форма p_0 вырождена. Тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу III из таблицы 7. Из [14; п. 5.5] следует, что $G_B \subset D_4$, откуда, очевидно, следует, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ имеет тип III из таблицы 7.

Рассмотрим случай, когда $\text{ord}(f(g)) = 2, \text{ord}(\beta) = 2$ и группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ не содержит элементов из предыдущих случаев. Предположим, что форма p_0 вырождена. Тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу IV из таблицы 7. Из [14; п. 5.5] следует, что $G_B \subset 2^2$, откуда, очевидно, следует, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ имеет тип IV из таблицы 7. При условии $a^4 \neq 1$ в уравнении поверхности S группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ не содержит элементов из случая 3. Если форма p_0 невырождена, то тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу V из таблицы 7. Снова $G_B \subset 2^2$. Пусть $G_B \simeq 2^2$. Тогда подгруппу $G_B \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ сопряжением можно привести к подгруппе, порожденной отображениями

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : -t_1), \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_1 : t_0).$$

Отсюда легко проверяется, что $G_B \simeq 2^2$ тогда и только тогда, когда $(ab)^2 = 1$ в уравнении поверхности S . Однако легко видеть, что в этом случае тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S приводится к типу IV. В оставшемся случае $G_B \simeq 2$ и группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ имеет тип V из таблицы 7.

Осталось рассмотреть случай, когда $\text{ord}(f(g)) = 1, \text{ord}(\beta) = 2$ и группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ не содержит элементов из предыдущих случаев. Предположим, что форма p_0 вырождена. Тогда тривиальной заменой переменных уравнение поверхности S представится в виде

$$t_0 t_1 x_0^2 + (t_0^2 - a^2 t_1^2) x_1^2 + (t_0^2 - b^2 t_1^2) x_2^2 = 0, \quad a, b \neq 0.$$

Заметим, что отображение

$$(x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) \mapsto (\sqrt{ab}x_0 : \varepsilon_4 b x_2 : \varepsilon_4 a x_1, ab t_1 : t_0)$$

является автоморфизмом поверхности S . Поэтому рассмотрение сводится к предыдущим случаям. Итак, форма p_0 невырождена. Тривиальной заменой

переменных уравнение поверхности S приводится к типу VI из таблицы 7. Легко проверить, что группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ не содержит элементов g' таких, что $\text{ord}(f(g')) = 2$, $\text{ord}(\beta) = 2$, только когда $(ab)^2 \neq 1$, $a^2 \neq b^4$, $b^2 \neq a^4$ в уравнении поверхности S . Легко проверить, что если группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ содержит элемент g' с условиями $\text{ord}(f(g')) = 2$, $\text{ord}(\beta) = 4$, то она содержит и элемент h с условиями $\text{ord}(f(h)) = 2$, $\text{ord}(\beta) = 2$. Далее легко проверить, что если группа $\text{Aut}(S, \varphi)$ содержит элемент g' с условиями $\text{ord}(f(g')) = 3$, $\text{ord}(\beta) = 3$ или $\text{ord}(\beta) = 6$, то она содержит и элемент h с условиями $\text{ord}(f(h)) = 2$, $\text{ord}(\beta) = 2$.

Лемма доказана.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 5.10.

5.2. Случай, когда дивизор $-K_S$ численно эффективен и выполнены условия второй конструкции. Всюду будут использоваться обозначения второй конструкции (см. п. 3.2). Рассмотрение делится на два случая: когда $|\Sigma'| = 2$ и когда $|\Sigma'| = 4$ (эти случаи будут рассмотрены в п. 5.2.1 и п. 5.2.2 соответственно).

5.2.1. *Случай, когда $|\Sigma'| = 2$.* В настоящем пункте будет доказано, что эта возможность не реализуется.

ТЕОРЕМА 5.14. *Не существует G -минимальных расслоений на коники (S, G, φ) таких, что выполнены условия второй конструкции и $K_S^2 = 2$, $|\Sigma'| = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как в п. 4.2, доказывается, что двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$ существует только при $e = 1$. В этом случае кривая $\widehat{C}$ рациональна.

Представим $\mathbb{F}_1$ как проективную плоскость $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(x, t_0, t_1)$, раздутую в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим это раздутие через ψ . Исключительный дивизор будет отрицательным сечением, а прямые $at_0 - bt_1 = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, будут слоями $\mathbb{F}_1$. Тогда кривая $\widehat{C}$ представляется уравнением

$$x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1) = 0,$$

где $p_1(t_0, t_1)$ и $p_2(t_0, t_1)$ – бинарные формы соответственно степеней 1 и 2. Бинарная форма $p_2 - p_1^2$ не имеет кратных множителей, поскольку кривая $\widehat{C}$ неособа. Поэтому тривиальной заменой координат уравнение кривой $\widehat{C}$ приводится к виду

$$x^2 + t_0 t_1 = 0.$$

Слои F_i , $i = 1, \dots, 4$, представляются уравнениями

$$F_i = \{l_i(t_0, t_1) = 0\},$$

где $l_i(t_0, t_1)$, $i = 1, \dots, 4$, – бинарные формы степени 1. Положим

$$Q_4(t_0, t_1) = \prod_{i=1}^4 l_i(t_0, t_1).$$

Перейдем к изучению группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$. Легко проверить, что

$$\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \simeq \mathbb{C}^* : 2$$

и эта группа порождена отображениями

$$(x : t_0 : t_1) \mapsto \left(x : ct_0 : \frac{t_1}{c}\right), \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad (x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0).$$

ЛЕММА 5.15. *Предположим, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ не является циклической. Тогда форма $Q_4(t_0, t_1)$ и группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ принадлежат к одному из случаев, перечисленных в таблице 8.*

ТАБЛИЦА 8

$Q_4(t_0, t_1)$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$
$t_0^4 - t_1^4$	D_8	$(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : \varepsilon_8 t_0 : \frac{t_1}{\varepsilon_8}),$ $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$
$(t_0^2 - at_1^2)(t_1^2 - at_0^2)$	D_4	$(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : \varepsilon_4 t_0 : \frac{t_1}{\varepsilon_4}),$ $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$
$Q_4(t_1, t_0) = \pm Q_4(t_0, t_1)$	2^2	$(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : -t_0 : -t_1),$ $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что любая конечная подгруппа группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)$ является либо циклической, либо группой диэдра. Поэтому группа

$$\text{Aut}\left(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1\right)$$

изоморфна группе диэдра D_n , $n \geq 2$. Очевидно, что группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ будет сопряжена группе, порожденной отображениями

$$\alpha : (x : t_0 : t_1) \mapsto \left(x : \varepsilon_n t_0 : \frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), \quad \beta : (x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0).$$

Элемент α действует на корнях формы $Q_4(t_0, t_1)$, и это действие не имеет неподвижных корней. Поэтому n может равняться 2, 4 или 8. Легко проверить, что эти возможности соответствуют случаям таблицы 8.

Докажем, что в группах $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ не существует подгрупп G_B . Очевидно, что циклическая группа не удовлетворяет условиям леммы 3.5. Поэтому выполнены условия леммы 5.15. Далее, из таблицы 8 следует, что любая нециклическая подгруппа группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_1)$ содержит инволюцию $x \mapsto -x$. Однако очевидно, что группа G_B не может содержать эту инволюцию.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 5.14.

5.2.2. Случай, когда $|\Sigma'| = 4$. Из условия $|\Sigma'| = 4$ следует, что кривая C' эллиптическая. Найдём значения e , при которых существует двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$.

Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. Найдём класс дивизора кривой $\hat{C}$. Ясно, что $\hat{C} \simeq 2s + af$. По формуле присоединения имеем $a = e + 2$. Далее, $0 \leq s \cdot \hat{C} = a - 2e$, откуда $e \leq 2$. Однако $\hat{C} + 2f \sim 2s + (4 + e)f$, поэтому из леммы 3.6 следует, что e чётно. Следовательно, $e = 0$ или $e = 2$. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай $e = 0$. Основной результат здесь – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.16. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, а также $|\Sigma'| = 4$ и $e = 0$. Тогда дивизор $-K_S$ обилён, т.е. S является поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S' представляется следующими уравнениями в $\mathbb{P}(2^2, 1^4)$ с координатами v, s, x, y, z, w :

$$\begin{aligned} v^2 &= Q_2(x, y)F(x, y, z, w), & s^2 &= Q_2(z, w)F(x, y, z, w), \\ vz &= sx, & vw &= sy, & xw &= yz, \end{aligned}$$

где Q_2 – бинарная форма степени 2, а F – однородный полином степени 2, определённый кривой $\hat{C}$. Морфизм φ' задается формулой

$$\varphi': (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Инволюция ι действует по формуле

$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

Выполнен один из следующих случаев.

1. $F = (xy + (z - aw)(z - w/a))$. При $a = \pm i$ формы $Q_2(t_0, t_1)$ и действие групп G описаны в таблице 9. При $a \neq \pm i$ формы $Q_2(t_0, t_1)$ и действие групп G описаны в таблице 10.

ТАБЛИЦА 9. Минимальные группы G при $a = \pm i$

$Q_2(t_0, t_1)$	G	Порождающие G	G_B	Порождающие G_B
$t_0^2 - t_1^2$	4	$\zeta_I^2 \gamma'$	2	$\alpha^2 \gamma$
$t_0^2 - t_1^2$	D_4	$\zeta_I^2 \gamma', \eta_I \zeta_I$	2^2	$\alpha^2 \gamma, \beta \alpha$
$t_0^2 - t_1^2$	Q_8	$\zeta_I^2 \gamma', \gamma' \eta_I \zeta_I$	2^2	$\alpha^2 \gamma, \gamma \beta \alpha$
$it_0^2 + 2t_0 t_1 + it_1^2$	4	ζ_{II}	2	$\beta \alpha$
$it_0^2 + 2t_0 t_1 + it_1^2$	4×2	ζ_{II}, η_{II}	2^2	$\beta \alpha, \alpha^2$
$it_0^2 + 2t_0 t_1 + it_1^2$	D_4	$\zeta_{II}, \eta_{II} \gamma'$	2^2	$\beta \alpha, \alpha^2 \gamma$

ТАБЛИЦА 10. Минимальные группы G при $a \neq \pm i$

Случай	G	Порождающие G	G_B	Порождающие G_B
I	4	$\alpha'\gamma'$	2	$\alpha\gamma$
I	D_4	$\alpha'\gamma', \beta'$	2^2	$\alpha\gamma, \beta$
I	Q_8	$\alpha'\gamma', \beta'\gamma'$	2^2	$\alpha\gamma, \beta\gamma$
II	4	β'	2	β
II	4×2	β', α'	2^2	β, α
II	D_4	$\beta', \alpha'\gamma'$	2^2	$\beta, \alpha\gamma$

2. Формы F описаны в таблице 11. Формы $Q_2(t_0, t_1)$ и действие групп G описаны в таблице 12.

ТАБЛИЦА 11. Уравнения кривых C'

$\widehat{C}$	$C', F(x, y, z, w)$
I	$x^2 + 2yw + zw$
II	$x^2 + y^2 + 2xw + cz^2 + dw^2, c, d \neq 0,$ $c \neq d, a_1^2 = 1/(cd), a_2 = a_1 \cdot c$

Вначале докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5.17. Дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S – поверхность Дель Пеццо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Предположим, что дивизор $-K_S$ не является обильным. Тогда по лемме 5.1 и по теореме 5.2 поверхность S содержит гладкую рациональную кривую D с $D^2 = -2$.

Пусть кривая D является сечением расслоения φ . Тогда легко проверить, что собственный прообраз кривой D на поверхности S' является кривой с индексом самопересечения -2 . Очевидно, что это невозможно.

Теперь рассмотрим случай, когда кривая D не является сечением расслоения φ . Из леммы 5.1 следует, что $-K_S \sim D + F$, где F – эффeктивный дивизор. Отсюда следует, что D – бисечение расслоения φ . Очевидно, что

$$F \sim af + \sum_{i=1}^k b_i f_i, \quad a, b_i \geq 0,$$

где f – класс дивизора слоя расслоения φ , а f_i – классы дивизоров компонент вырожденных слоев расслоения φ . Можно считать, что компоненты с классами f_i и f_j при $i \neq j$ лежат в разных вырожденных слоях. По формуле присоединения имеем

$$-2 = (D + K_S) \cdot D = -F \cdot (-F - K_S) = -2a - 2 \sum_{i=1}^k b_i.$$

Таблица 12. Минимальные группы G

$\widehat{C}$	$Q_2(t_0, t_1)$	G	Порождающие G
I	$t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_1^2$	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (3\sqrt{3}\varepsilon_4(v + s) : 3\sqrt{3}\varepsilon_4(2v - s) : (x + 2y + z + 2w) : (x - y + z - w) : (2x + 4y - z - 2w) : (2x - 2y - z + w))$
I	$t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_1^2$	D_4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (3\sqrt{3}\varepsilon_4(v + s) : 3\sqrt{3}\varepsilon_4(2v - s) : (x + 2y + z + 2w) : (x - y + z - w) : (2x + 4y - z - 2w) : (2x - 2y - z + w)),$ $(v : s : x : y : z : w) \mapsto (3\sqrt{3}(v + \varepsilon_3^2s) : 3\sqrt{3}(2\varepsilon_3v - s) : (x + 2\varepsilon_3^2y + \varepsilon_3z + 2\varepsilon_3w) : (\varepsilon_3x - y + z - \varepsilon_3^2w) : (2\varepsilon_3x + 4y - z - 2\varepsilon_3^2w) : (2\varepsilon_3^2x - 2\varepsilon_3y - \varepsilon_3z + w))$
II	t_0t_1	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_4v : -\varepsilon_4s : x : -y : -z : w)$
II	t_0t_1	D_4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_4v : -\varepsilon_4s : x : -y : -z : w),$ $(v : s : x : y : z : w) \mapsto \left(\sqrt{\frac{a_2}{d}}s : a_1\sqrt{\frac{a_2}{d}}v : w : a_2z : a_1y : a_1a_2x\right)$
II	$a_2t_0^2 - t_1^2$	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto \left(\sqrt{\frac{-a_2}{d}}s : a_1\sqrt{\frac{-a_2}{d}}v : w : a_2z : a_1y : a_1a_2x\right)$
II	$a_2t_0^2 - t_1^2$	D_4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (v : -s : x : -y : -z : w),$ $(v : s : x : y : z : w) \mapsto \left(\sqrt{\frac{-a_2}{d}}s : a_1\sqrt{\frac{-a_2}{d}}v : w : a_2z : a_1y : a_1a_2x\right)$
II	$a_2t_0^2 + t_1^2$	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto \left(\sqrt{\frac{a_2}{d}}s : -a_1\sqrt{\frac{a_2}{d}}v : w : a_2z : a_1y : a_1a_2x\right)$
II	$a_2t_0^2 + t_1^2$	D_4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (v : -s : x : -y : -z : w),$ $(v : s : x : y : z : w) \mapsto \left(\sqrt{\frac{a_2}{d}}s : -a_1\sqrt{\frac{a_2}{d}}v : w : a_2z : a_1y : a_1a_2x\right)$

Из этого и условия $D^2 = -2$ получаем, что $D \sim -K_S - f$. Поэтому кривая D G -инвариантна. Пусть $\rho : D \rightarrow \mathbb{P}^1$ — двулистное накрытие, индуцированное морфизмом φ . Ясно, что инволюция ι переставляет листы накрытия ρ . Поэтому морфизм ρ разветвлен в особых точках слоев в множестве $\Sigma \setminus \Sigma'$. Далее, из диаграммы (3.1) следует, что собственный прообраз кривой D на поверхности S' — рациональная (-4) -кривая. Образ этой кривой на поверхности $\mathbb{F}_0 - (-2)$ -сечение. Что, очевидно, невозможно. Лемма доказана.

Заметим, что уравнения кривых $\widehat{C}$ и группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ описаны в предложениях 4.3 и 4.4. Слои F_i , $i = 1, 2$, представляются уравнениями

$$F_i = \{l_i(t_0, t_1) = 0\},$$

где $l_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2$, – бинарные формы степени 1. Положим $Q_2(t_0, t_1) = \prod_{i=1}^2 l_i(t_0, t_1)$.

Группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$ действует на множестве слоев $\{F_1, F_2\}$. Поэтому определен гомоморфизм $\varrho: \text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0) \rightarrow 2$.

Для того чтобы представить поверхность S' уравнениями, воспользуемся вложением Сегре $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(x, y, z, w)$, заданным в координатах формулой $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 t_0 : x_0 t_1 : x_1 t_0 : x_1 t_1)$. Получаем уравнения поверхности S' из формулировки теоремы 5.16.

Рассмотрим по порядку все случаи из предложений 4.3 и 4.4.

Пусть выполнены условия предложения 4.3.

Рассмотрим случай, когда $a = \pm i$. Обозначим отображения:

$$\alpha: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (2x_1 : x_0, t_0 + it_1 : it_0 + t_1),$$

$$\beta: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (ix_0 : x_1, t_0 : -t_1),$$

$$\gamma: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 : -x_1, t_0 : t_1).$$

По лемме 3.5 мы можем предположить, что $\text{Ker}(\varrho) \neq \langle \gamma \rangle$. Легкими вычислениями проверяется, что это условие выполнено только в случаях, перечисленных в таблице 13.

ТАБЛИЦА 13

Случай	$\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	$Q_2(t_0, t_1)$
I	$2.D_4$	α, β	$t_0^2 - t_1^2$
II	2^3	$\alpha^2, \beta\alpha, \gamma$	$it_0^2 \pm 2t_0 t_1 + it_1^2$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.18. Легко проверить, что случаи $Q_2(t_0, t_1) = it_0^2 + 2t_0 t_1 + it_1^2$ и $Q_2(t_0, t_1) = it_0^2 - 2t_0 t_1 + it_1^2$ в таблице 13 переводятся друг в друга сопряжением в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. Поэтому достаточно рассмотреть только случай $Q_2(t_0, t_1) = it_0^2 + 2t_0 t_1 + it_1^2$.

Пользуясь леммой 3.5, отберем группы G_B с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$. Также заметим, что группы G_B не содержат инволюцию γ . Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 14.

Опишем действие групп G на поверхности S' .

Рассмотрим случай, когда $Q_2(t_0, t_1) = t_0^2 - t_1^2$. Обозначим автоморфизмы поверхности S' :

$$\zeta_I: (v : s : x : y : z : w)$$

$$\mapsto (4\sqrt{2}\varepsilon_8 s : 2\sqrt{2}\varepsilon_8 v : 2(z + \varepsilon_8^2 w) : 2(\varepsilon_8^2 z + w) : x + \varepsilon_8^2 y : \varepsilon_8^2 x + y),$$

$$\eta_I: (v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_8^2 v : s : \varepsilon_8^2 x : -\varepsilon_8^2 y : z : -w),$$

$$\gamma': (v : s : x : y : z : w) \mapsto (v : -s : x : y : -z : -w).$$

Индукированное действие отображений ζ_I , η_I и γ' на поверхности $\mathbb{F}_0$ совпадает с действием соответственно отображений α , β и γ .

Таблица 14. Группы G_B при $a = \pm i$

$Q_2(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
$t_0^2 - t_1^2$	2	$\alpha^2\gamma$
$t_0^2 - t_1^2$	2^2	$\alpha^2\gamma, \beta\alpha$
$t_0^2 - t_1^2$	2^2	$\alpha^2\gamma, \gamma\beta\alpha$
$it_0^2 + 2t_0t_1 + it_1^2$	2	$\beta\alpha$
$it_0^2 + 2t_0t_1 + it_1^2$	2^2	$\alpha^2, \beta\alpha$
$it_0^2 + 2t_0t_1 + it_1^2$	2^2	$\alpha^2\gamma, \beta\alpha$

Рассмотрим случай, когда $Q_2(t_0, t_1) = it_0^2 + 2t_0t_1 + it_1^2$. Обозначим автоморфизмы поверхности S' :

$$\begin{aligned}
\zeta_{\text{II}}: (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (4\sqrt{2}\varepsilon_8 s : -2\sqrt{2}\varepsilon_8^3 v : 2(\varepsilon_8^2 z - w) : 2(z - \varepsilon_8^2 w) : x + \varepsilon_8^2 y : -(\varepsilon_8^2 x + y)), \\
\eta_{\text{II}}: (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (v : s : y : x : w : z), \\
\gamma': (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (v : -s : x : y : -z : -w).
\end{aligned}$$

Индукированное действие отображений ζ , η и γ' на поверхности $\mathbb{F}_0$ совпадает с действием соответственно отображений $\beta\alpha$, α^2 и γ .

Пользуясь таблицей 14, получаем описание минимальных групп G . Результаты представлены в таблице 9.

Рассмотрим случай, когда $a \neq \pm i$. Обозначим отображения:

$$\begin{aligned}
\alpha: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : x_1, t_1 : t_0), \\
\beta: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto \left(\frac{x_1}{a} : \frac{x_0}{1-a^2}, t_0 - at_1 : at_0 - t_1 \right), \\
\gamma: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : -x_1, t_0 : t_1).
\end{aligned}$$

По лемме 3.5 мы можем предположить, что $\text{Ker}(\varrho) \not\cong \langle \gamma \rangle$. Легкими вычислениями проверяется, что это условие выполнено только в случаях, перечисленных в таблице 15.

Таблица 15

Случай	$\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	$Q_2(t_0, t_1)$
I	2^3	α, β, γ	$t_0^2 - t_1^2$
II	2^3	α, β, γ	$at_0^2 - 2t_0t_1 + at_1^2$

Отберем группы G_B , пользуясь леммой 3.5. Заметим, что группы G_B не содержат инволюцию γ . Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 16.

Таблица 16. Группы G_B при $a \neq \pm i$

$Q_2(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
$t_0^2 - t_1^2$	2	$\alpha\gamma$
$t_0^2 - t_1^2$	2^2	$\alpha\gamma, \beta$
$t_0^2 - t_1^2$	2^2	$\alpha\gamma, \beta\gamma$
$at_0^2 - 2t_0t_1 + at_1^2$	2	β
$at_0^2 - 2t_0t_1 + at_1^2$	2^2	β, α
$at_0^2 - 2t_0t_1 + at_1^2$	2^2	$\beta, \alpha\gamma$

Опишем действие групп G на поверхности S' .

Рассмотрим случай, когда $Q_2(t_0, t_1) = t_0^2 - t_1^2$. Обозначим автоморфизмы поверхности S' :

$$\begin{aligned}
 \alpha' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (iv : is : y : x : w : z), \\
 \beta' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (\sqrt{(1-a^2)}a(1-a^2)^2s : ((1-a^2)a)^{3/2}v \\
 &\quad : (1-a^2)(z-aw) : (1-a^2)(az-w) : a(x-ay) : a(ax-y)), \\
 \gamma' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (v : -s : x : y : -z : -w).
 \end{aligned}$$

Индукцированное действие отображений α' , β' и γ' на поверхности $\mathbb{F}_0$ совпадает с действием соответственно отображений α , β и γ .

Рассмотрим случай, когда $Q_2(t_0, t_1) = at_0^2 - 2t_0t_1 + at_1^2$. Обозначим следующие автоморфизмы поверхности S' :

$$\begin{aligned}
 \alpha' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (v : s : y : x : w : z), \\
 \beta' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (\sqrt{(a^2-1)}a(1-a^2)^2s : a\sqrt{(a^2-1)}a(1-a^2)v \\
 &\quad : (1-a^2)(z-aw) : (1-a^2)(az-w) : a(x-ay) : a(ax-y)), \\
 \gamma' : (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (v : -s : x : y : -z : -w).
 \end{aligned}$$

Индукцированное действие отображений α' , β' и γ' на поверхности $\mathbb{F}_0$ совпадает с действием соответственно отображений α , β и γ .

Пользуясь таблицей 16, получаем описание минимальных групп G . Результаты были представлены в таблице 10.

Пусть выполнены условия предложения 4.4. По лемме 3.5 мы можем предполагать, что $\text{Ker}(\varrho) \neq 1$. Легкими вычислениями проверяется, что это условие выполнено только в случаях, перечисленных в таблице 17. Результаты приведены с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. Поясним, что в этой таблице типы кривых $\widehat{C}$ определяются таблицей 2.

Отберем группы G_B , пользуясь леммой 3.5. Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 18.

В таблице 11 уравнения кривых C' для удобства были записаны в координатах x, y, z, w .

ТАБЛИЦА 17

$\widehat{C}$	$Q_2(t_0, t_1)$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$
I	$t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_1^2$	2^2	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1, t_0 + 2t_1 : t_0 - t_1),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + \varepsilon_3^2 x_1 : 2\varepsilon_3 x_0 - x_1, t_0 + 2\varepsilon_3^2 t_1 : \varepsilon_3 t_0 - t_1)$
II	$t_0 t_1$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1),$ $\text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$
II	$a_2 t_0^2 \pm t_1^2$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1),$ $\text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$

ТАБЛИЦА 18. Группы G_B

$\widehat{C}$	$Q_2(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
I	$t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_1^2$	2	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1, t_0 + 2t_1 : t_0 - t_1)$
I	$t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_1^2$	2^2	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1, t_0 + 2t_1 : t_0 - t_1),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + \varepsilon_3^2 x_1 : 2\varepsilon_3 x_0 - x_1, t_0 + 2\varepsilon_3^2 t_1 : \varepsilon_3 t_0 - t_1),$
II	$t_0 t_1$	2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1)$
II	$t_0 t_1$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1), \text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$
II	$a_2 t_0^2 - t_1^2$	2	$\text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$
II	$a_2 t_0^2 - t_1^2$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1), \text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$
II	$a_2 t_0^2 + t_1^2$	2	$\text{kdiag}(1, -a_1) \times \text{kdiag}(1, -a_2)$
II	$a_2 t_0^2 + t_1^2$	2^2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1), \text{kdiag}(1, a_1) \times \text{kdiag}(1, a_2)$

Опишем действие групп G на поверхности S' . Результаты тривиальных вычислений представлены в таблице 12.

Полученные результаты сформулированы в теореме 5.16.

Случай $e = 2$. Основной результат здесь – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.19. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, а также $|\Sigma'| = 4$, $e = 2$. Тогда дивизор $-K_S$ численно эффективен, т.е. S является слабой поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S содержит неприводимую G -эквивариантную рациональную (-2) -кривую. Пусть $(S, G, \varphi) \rightarrow (\bar{S}, G, \bar{\varphi})$ –

стягивание этой кривой, где отображение $\bar{\varphi}: \bar{S} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцировано морфизмом φ . Поверхность $\bar{S}$ представляется в $\mathbb{P}(2, 1^3)$ с координатами u, x, t_0, t_1 уравнением вида

$$u^2 + t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + t_1^4 = 0, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Отображение $\bar{\varphi}$ является проекцией

$$\bar{\varphi}: (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Инволюция ι действует по формуле $x \mapsto -x$. Инволюция Гейзера действует по формуле $\tau: u \mapsto -u$. Группа G не содержит τ . Для групп G имеют место возможности, перечисленные в таблице 19. Тройка $(S, G \times \langle \tau \rangle, \varphi)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.4.

ТАБЛИЦА 19. Группы G

G	Порождающие G
4	$\text{diag}(-1, \varepsilon_4, -1, 1)$
D_4	$\text{diag}(-1, \varepsilon_4, -1, 1), t_0 \leftrightarrow t_1$
D_4	$\text{diag}(-1, \varepsilon_4, -1, 1),$ $(u : x : t_0 : t_1) \mapsto (-u : x : t_1 : t_0)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 5.2.

Представим $\mathbb{F}_2$ как взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(2, 1^2)$ с координатами x, t_0, t_1 , раздутое в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим исключительный дивизор этого раздутия через E . Имеем

$$\widehat{C} \cdot E = (2s + 4f) \cdot s = 0, \quad (\widehat{C} + 2f) \cdot E = (2s + 6f) \cdot s = 2, \quad (5.5)$$

где f и s – соответственно классы дивизора слоя и исключительного сечения на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_2$. Обозначим через E' собственный прообраз кривой E на поверхности S . Из (5.5) следует, что E' является неприводимой G -инвариантной рациональной (-2) -кривой. Из условия G -инвариантности получаем, что $E' \sim -K_S - \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ – класс дивизора слоя расслоения φ .

Докажем, что E' – единственная рациональная (-2) -кривая. Обозначим через C объединение всех рациональных (-2) -кривых. По лемме 5.1 это объединение конечно. Из условия G -инвариантности получаем, что $C \sim -aK_S - b\tilde{f}$. Из условий $C \cdot \tilde{f} > 0$ и $C \cdot K_S = 0$ следует, что $a = b, a > 0$. Далее,

$$-2 \leq C \cdot E' = a(K_S + f)^2 = -2a.$$

Поэтому $a = 1$ и кривая E' единственна.

Отсюда следует, что инволюция Гейзера τ сохраняет структуру расслоения на коники, т.е. $\tau \in \text{Aut}(S, \varphi)$. Ясно, что

$$\text{Pic}(S)^\tau = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}E' = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}\tilde{f}.$$

Следовательно, группа $\langle \tau \rangle$ минимальна. Заметим, что подгруппа

$$H \subset \text{Aut}(S, \varphi)$$

минимальна тогда и только тогда, когда компоненты любого вырожденного слоя расслоения φ лежат в одной орбите относительно действия H . Поэтому $\tau \in \text{Aut}(S, \varphi)_K$ и τ переставляет компоненты во всех вырожденных слоях расслоения φ . Следовательно, тройка $(S, G \times \langle \tau \rangle, \varphi)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.4. Заметим, что $(G \times \langle \tau \rangle)_K \simeq 2^2$. Далее утверждение теоремы 5.19 получаем из результатов теоремы 5.4 тривиальными вычислениями.

5.3. Случай, когда дивизор $-K_S$ не является численно эффективным. Из теоремы 5.2 следует, что S – исключительное расслоение на коники. Используем обозначения и рассуждения из п. 4.3.

Так как расслоение на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет шесть вырожденных слоев, то $2g + 2 = 6$ и $g = 2$. Из [14; предложение 5.3] следует, что $\text{Aut}(Y_1) \simeq N.P$, где группы N и P такие же, как в п. 4.3, причем расширение расщепимо и определяет изоморфизм $\text{Aut}(Y_1) \simeq N \times P$ тогда и только тогда, когда группа P является либо циклической, либо группой диэдра. В силу [14; п. 5.5] получаем, что группа P изоморфна одной из следующих: 1, 2, 5, 2^2 , D_3 , D_6 , S_4 .

Группа P' содержит нормальную подгруппу индекса 2 только в случаях, когда она изоморфна 2, 4, 6, D_2 , D_3 , D_4 , D_6 , S_4 .

Диагональное произведение $D_n \triangle_B P'$ не определяет группу G однозначно, так как есть зависимость от выбора гомоморфизмов $\alpha: D_n \rightarrow B$ и $\beta: P' \rightarrow B$ (см. лемму 2.2). Однако ясно, что группа G будет минимальной тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\alpha)$ не является циклической группой.

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.20. Пусть (S, G) – расслоение на коники степени 2. Предположим, что $-K_S$ не является численно эффективным. Тогда S имеет структуру исключительного расслоения на коники Y_2 и $\text{Aut}(Y_2) \simeq N.P$. Пара (S, G) минимальна тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп:

- 1) D_n , $n \geq 1$, при $P \simeq 1$;
- 2) D_n , $D_n \times 2$, $D_n \triangle_2 2$, $n \geq 1$, при $P \simeq 2$;
- 3) D_n , $D_n \times 5$, $n \geq 1$, при $P \simeq 5$;
- 4) D_n , $D_n \times 2$, $D_n \triangle_2 2$, $D_n \times 2^2$, $D_n \triangle_2 (2^2)$, $n \geq 1$, при $P \simeq 2^2$;
- 5) D_n , $D_n \times 3$, $D_n \times 2$, $D_n \triangle_2 2$, $D_n \times D_3$, $D_n \triangle_2 D_3$, $n \geq 1$, при $P \simeq D_3$;
- 6) D_n , $D_n \times 2$, $D_n \triangle_2 2$, $D_n \times 3$, $D_n \times 6$, $D_n \triangle_2 6$, $D_n \times D_6$, $D_n \triangle_2 D_6$, $n \geq 1$, при $P \simeq D_6$;
- 7) D_n , $D_n \times 2$, $D_n \triangle_2 2$, $D_n \times 3$, $D_n \times 4$, $D_n \triangle_2 4$, $D_n \times 2^2$, $D_n \triangle_2 (2^2)$, $D_n \times D_3$, $D_n \triangle_2 D_3$, $D_n \times D_4$, $D_n \triangle_2 D_4$, $D_n.A_4$, $D_n.S_4$, $n \geq 1$, при $P \simeq S_4$.

В случае, когда $G \simeq D_n \triangle_2 P'$, где $P' \subset P$, $n \geq 1$, пара (S, G) будет минимальной тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\alpha)$ не является циклической группой (см. лемму 2.2). Все возможности реализуются.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.21. Пользуясь результатами теоремы 5.20, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Циклические группы. Случай $G \simeq 10$. (Этот случай был описан в [17; теорема 2].)

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2$. Пропущены случаи $G \simeq 2^2$, $G \simeq 2^3$, $G \simeq 2 \times 4$ и $G \simeq 2 \times 6$.

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2^2$. Пропущены случаи $G \simeq 2^3$, $G \simeq 2^2 \times 3$, $G \simeq 2^2 \times 4$, $G \simeq 2^2 \times 5$ и $G \simeq 2^2 \times 6$.

§ 6. Случай $K_S^2 = 1$

Расслоение на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет семь вырожденных слоев. Согласно определению S не может иметь структуру исключительного расслоения на коники, так как число вырожденных слоев нечетно. Следовательно, $G_0 \simeq 1$.

6.1. Случай, когда выполнены условия первой конструкции. Всюду используются обозначения первой конструкции (см. п. 3.1). По теореме 2.3 получаем $G_K \simeq 2^2$. Упорядочим множества Σ_i , $i = 1, 2, 3$, так, что $|\Sigma_1| \geq |\Sigma_2| \geq |\Sigma_3|$. Простым перебором случаев получаем следующие две возможности:

- 1) $|\Sigma_1| = |\Sigma_2| = 6$, $|\Sigma_3| = 2$;
- 2) $|\Sigma_1| = 6$, $|\Sigma_2| = |\Sigma_3| = 4$.

6.1.1. Случай, когда $|\Sigma_1| = |\Sigma_2| = 6$, $|\Sigma_3| = 2$. В этом пункте будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники степени $K_S^2 = 1$. Предположим, что выполнены условия первой конструкции и $|\Sigma_1| = |\Sigma_2| = 6$, $|\Sigma_3| = 2$. Тогда кривая C_3 является G -инвариантной рациональной (-3) -кривой. Пусть $\psi': (S, G, \varphi) \rightarrow (S', G, \varphi')$ – стягивание этой кривой, где отображение $\varphi': S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцируется морфизмом φ . Морфизм ψ' является G -эквивариантным и на поверхности S' группа G действует эффективно. Поверхность S' представляется следующими уравнениями в $\mathbb{P}(2^2, 3, 1^2)$ с координатами u, v, x, t_0, t_1 :

$$u^2 + xl_1(t_0, t_1) + P_4(t_0, t_1) = 0, \quad v^2 + xl_2(t_0, t_1) + Q_4(t_0, t_1) = 0, \quad (6.1)$$

где $l_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2$, – взаимно простые бинарные формы степени 1, а $P_4(t_0, t_1)$ и $Q_4(t_0, t_1)$ – бинарные формы степени 4. Отображение φ' является проекцией

$$\varphi': (u : v : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Группа G_K порождена отображениями $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ и $\text{diag}(1, -1, 1, 1, 1)$. Группа G является любой подгруппой группы $\text{Aut}(S', \varphi')$, содержащей эти отображения. Если индуцированное действие группы $\text{Aut}(S', \varphi')$ на базе расслоения φ нетривиально, то уравнения поверхности S' и действие группы $\text{Aut}(S', \varphi')$ описаны в таблице 20.

Таблица 20

Уравнения S'	$\text{Aut}(S', \varphi')$	Порождающие $\text{Aut}(S', \varphi')$
$u^2 + xt_0 + t_1^4 = 0,$ $v^2 + xt_1 + t_0^4 = 0$	$2^2.D_5$	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1), \text{diag}(1, -1, 1, 1, 1),$ $\text{diag}(1, \varepsilon_5^2, \varepsilon_5^4, \varepsilon_5, 1),$ $(u : v : x : t_0 : t_1) \mapsto (v : u : x : t_1 : t_0)$
$u^2 + x(t_0 + t_1)$ $+P_4(t_0, t_1) = 0,$ $v^2 + x(t_0 - t_1)$ $+P_4(t_0, -t_1) = 0$	2^3	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1), \text{diag}(1, -1, 1, 1, 1),$ $\text{diag}(1, 1, 1, 1, -1)$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пользуясь результатами теоремы 6.1, перечислим минимальные абелевы группы, пропущенные в работе Д. Бланка (см. [15; гл. 10]).

Минимальные абелевы нециклические группы G с $G_K \simeq 2^2$. Возможны следующие случаи:

- случай $G \simeq 2^3$; выполнен второй случай из таблицы 20, группа G изоморфна группе $\text{Aut}(S', \varphi')$;
- случай $G \simeq 2^2 \times 5$; выполнен первый случай из таблицы 20, группа G порождена отображениями $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1), \text{diag}(1, -1, 1, 1, 1)$ и $\text{diag}(1, \varepsilon_5^2, \varepsilon_5^4, \varepsilon_5, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Найдем классы дивизоров кривых $C_i, i = 1, 2, 3$. Из условия $C_i \in \text{Pic}(S)^{G_K}$ получаем, что $C_i \sim a_i K_S + b_i f$. Из условия $C_i \cdot f = 2, i = 1, 2, 3$, следует, что $a_i = -1, i = 1, 2, 3$. По формуле присоединения получаем $C_1, C_2 \sim -K_S + f, C_3 \sim -K_S - f$. Следовательно, C_3 – G -инвариантная рациональная (-3) -кривая. По теореме 3.2 имеем G -эквивариантный морфизм $S \rightarrow S/G_K \simeq \mathbb{F}_3$. На поверхности $\mathbb{F}_3$ определено эффе́ктивное действие группы G_B . Пусть $\psi': (S, G, \varphi) \rightarrow (S', G, \varphi')$ – стягивание кривой C_3 , где отображение $\varphi': S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцируется морфизмом φ . Морфизм ψ' является G -эквивариантным и на поверхности S' группа G действует эффе́ктивно. Образ кривой C_3 на $\mathbb{F}_3$, являющийся исключительным сечением, также можно G -эквивариантно стянуть. Итак, получился G -эквивариантный морфизм $S' \rightarrow \mathbb{P}(3, 1, 1)$.

Введем на $\mathbb{P}(3, 1, 1)$ координаты $(x : t_0 : t_1)$. Тогда линейная система коник на S переходит в линейную систему прямых $\alpha t_0 + \beta t_1 = 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Образом кривой C_3 будет особая точка $(1 : 0 : 0)$. Обозначим через C'_1, C'_2 образы кривых C_1, C_2 на поверхности $\mathbb{P}(3, 1, 1)$. Из построения ясно, что кривые C'_1, C'_2 неособы всюду, кроме, может быть, точки $(1 : 0 : 0)$. Но так как $C_1 \cdot C_3 = C_2 \cdot C_3 = 1$, то в этой точке кривые C'_1, C'_2 также неособы. Кривые C'_1, C'_2 представляются уравнениями:

$$C'_1: xl_1(t_0, t_1) + P_4(t_0, t_1) = 0, \quad C'_2: xl_2(t_0, t_1) + Q_4(t_0, t_1) = 0, \quad (6.2)$$

где $l_1(t_0, t_1)$, $l_2(t_0, t_1)$ – взаимно простые бинарные формы степени 1, а $P_4(t_0, t_1)$, $Q_4(t_0, t_1)$ – бинарные формы степени 4. Формы $l_1(t_0, t_1)$, $l_2(t_0, t_1)$ взаимно просты, так как кривые C_1 , C_2 пересекают кривую C_3 в различных точках. Из приведенной конструкции получаем уравнения (6.1) для поверхности S' . Действие группы G_K порождено отображениями $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ и $\text{diag}(1, -1, 1, 1, 1)$.

Перейдем к изучению группы $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$.

ЛЕММА 6.3. *Предположим, что группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ нетривиальна. Тогда возможны следующие случаи.*

1. *Сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{P}(3, 1, 1))$ кривые C'_1 , C'_2 приводятся соответственно к видам*

$$C'_1: xt_0 + t_1^4 = 0, \quad C'_2: xt_1 + t_0^4 = 0.$$

Группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ изоморфна группе D_5 и порождена отображениями

$$(x : t_0 : t_1) \mapsto (\varepsilon_5^4 x : \varepsilon_5 t_0 : t_1), \quad (x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0).$$

2. *Сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{P}(3, 1, 1))$ кривые C'_1 , C'_2 приводятся соответственно к видам*

$$C'_1: x(t_0 + t_1) + P_4(t_0, t_1) = 0, \quad C'_2: x(t_0 - t_1) + P_4(t_0, -t_1) = 0,$$

где P_4 – любая бинарная форма степени 4 с условием, что кривые C'_1 , C'_2 неособы. Группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ изоморфна группе 2 и порождена отображением

$$(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_0 : -t_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности (2.1), примененной к группе $\text{Aut}(S, \varphi)$, следует, что

$$\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1)) \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

С другой стороны, группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ переводит множества вырожденных слоев $\Sigma \setminus \Sigma_3$ и Σ_3 (см. теорему 2.3) в себя. Поэтому $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1)) \subset D_5$. Также в группе $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ любой элемент 5-го порядка переводит каждую из кривых C'_1 и C'_2 в себя, а любой элемент 2-го порядка переставляет эти кривые.

Пусть группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ содержит элемент g 5-го порядка. Сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{P}(3, 1, 1))$ элемент g приводится к виду $\text{diag}(\beta, \varepsilon_5, 1)$. Очевидно, что тогда в уравнениях (6.2) формы l_1 , l_2 , P_4 , Q_4 вырождены. Пользуясь тем, что формы l_1 и l_2 взаимно просты, можно считать, что $l_1 = at_0$, $l_2 = bt_1$, $a, b \in \mathbb{C}^*$. Далее, пользуясь тем, что кривые C'_1 и C'_2 неприводимы, получаем $P_4 = ct_1^4$, $Q_4 = dt_0^4$, $c, d \in \mathbb{C}^*$. Отсюда тривиальной заменой переменных получаем первый случай теоремы.

В оставшемся случае группа $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ порождена элементом g второго порядка, переставляющим кривые C'_1 и C'_2 . Сопряжением в группе

$\text{Aut}(\mathbb{P}(3, 1, 1))$ элемент g приводится к виду $\text{diag}(\beta, 1, -1)$, где $\text{ord}(\beta) \leq 2$. При необходимости делая замену переменных $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$, приводим g к виду $\text{diag}(1, 1, -1)$. Отсюда тривиальной заменой переменных получаем второй случай теоремы.

Опишем группы $\text{Aut}(S', \varphi')$, поднимая действие групп $\text{Aut}(C'_1 \cup C'_2, \mathbb{P}(3, 1, 1))$ до действия на поверхности S' . Результаты элементарных вычислений были приведены в таблице 20.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 6.1.

6.1.2. Случай, когда $|\Sigma_1| = 6$, $|\Sigma_2| = |\Sigma_3| = 4$. В этом пункте будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.4. *Не существует G -минимальных расслоений на коники (S, G, φ) таких, что выполнены условия первой конструкции и $K_S^2 = 1$, $|\Sigma_1| = 6$, $|\Sigma_2| = |\Sigma_3| = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Предположим, что такое G -минимальное расслоение на коники (S, G, φ) существует. Найдем дивизоры кривых C_i , $i = 1, 2, 3$. Из условия $C_i \in \text{Pic}(S)^{G_K}$ получаем, что $C_i \sim a_i K_S + b_i f$. Из условия $C_i \cdot f = 2$, $i = 1, 2, 3$, следует, что $a_i = -1$, $i = 1, 2, 3$. По формуле присоединения получаем $C_1 \sim -K_S + f$, $C_2, C_3 \sim -K_S$. По теореме 3.2 имеем G -эквивариантный морфизм $h: S \rightarrow S/G_K \simeq \mathbb{F}_e$. На поверхности $\mathbb{F}_e$ определено эффективное действие группы G_B . Найдем инвариант e .

Положим $C'_i = h(C_i)$, $i = 1, 2, 3$. Из формулы проекции легко получить, что $C_i'^2 = C_i^2$, $i = 1, 2, 3$ (см. рассуждения в конце доказательства теоремы 3.2). Обозначим через s класс дивизора исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. Имеем $C'_2, C'_3 \sim s + bf$. Из условия $C'_2 \cdot s \geq 0$ получаем $-e + b \geq 0$. С другой стороны, $1 = (-K_S)^2 = C_2'^2 = -e + 2b$, откуда $e = 1$, $C'_2, C'_3 \sim s + f$. Также получаем $C'_1 \sim s + 3f$.

По формуле Гурвица

$$-K_S = h^* \left(-K_{\mathbb{F}_1} - \frac{\sum_{i=1}^3 C'_i}{2} \right) = h^* \left(2s + 3f - \frac{3s + 5f}{2} \right) = h^* \left(\frac{s + f}{2} \right).$$

Из этой формулы имеем $-K_S \cdot h^*(s) = 0$. Отсюда следует, что S – слабая поверхность Дель Пеццо. Тогда имеется выделенная точка $P \in S$ – базисная точка $|-K_S|$. Обозначим через β инволюцию Бертини. По теореме 2.4 инволюция β сохраняет структуру расслоения на коники $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$. Следовательно, можно считать, что $\beta \in G$. Далее, через точку P не проходят (-1) - и (-2) -кривые. Следовательно, она лежит на неособом слое и морфизм φ гладкий в точке P . Поэтому отображение

$$d\varphi: T_{P,S} \rightarrow T_{\varphi(P),\mathbb{P}^1}$$

сюръективно. Следовательно, $\beta \notin G_K$. Пусть P' – особая точка слоя $\Sigma \setminus \Sigma_1$. Тогда точка P' неподвижна относительно действия групп G . Поэтому определено точное действие группы G в касательном пространстве этой точки. Имеем $G_K \times \langle \beta \rangle \simeq 2^3$. Однако $2^3 \not\subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 6.4.

6.2. Случай, когда выполнены условия второй конструкции. Всюду используются обозначения второй конструкции (см. п. 3.2).

6.2.1. Случай, когда $|\Sigma'| = 2$. В этом пункте будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 1$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции и $|\Sigma'| = 2$. Тогда дивизор $-K_S$ не является численно эффективным. Поверхность S' представляется следующими уравнениями в $\mathbb{P}(3^2, 1^4)$ с координатами v, s, x, y, z, w :

$$\begin{aligned} v^2 &= (x^5 - y^5)x + (x^4z - y^4w)w, & s^2 &= (z^4x - w^4y)x + (z^5 - w^5)w, \\ vz^2 &= sx^2, & vzw &= sxy, & vw^2 &= sy^2, & xw &= yz. \end{aligned}$$

Морфизм φ' задается формулой

$$\varphi': (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Группа G изоморфна $2.D_5$ и порождена отображениями

$$\begin{aligned} (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (\varepsilon_4 s : \varepsilon_4 v : w : z : y : x), \\ (v : s : x : y : z : w) &\mapsto (\varepsilon_5^4 v : s : \varepsilon_5^3 x : \varepsilon_5^2 y : \varepsilon_5 z : w). \end{aligned}$$

Инволюция ι действует по формуле

$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как в п. 4.2, доказывается, что двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$ существует только при $e = 0$. По формуле присоединения $\widehat{C} \simeq 2s + f$. Отсюда следует, что $C^2 = -3$. Следовательно, дивизор $-K_S$ не является численно эффективным. Введем на $\mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ координаты $(x_0 : x_1, t_0 : t_1)$. Кривая $\widehat{C}$ представится уравнением вида

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0,$$

где $p_i, i = 0, 1, 2$, – бинарные формы степени 1. Определим дискриминант кривой $\widehat{C}$, обозначаемый $\text{Disc}(\widehat{C})$, как форму $p_2p_0 - p_1^2$. Слои $F_i, i = 1, \dots, 5$, представятся уравнениями:

$$F_i: l_i(t_0, t_1) = 0,$$

где $l_i(t_0, t_1), i = 1, \dots, 5$, – бинарные формы степени 1. Положим $Q_5(t_0, t_1) = \prod_{i=1}^5 l_i(t_0, t_1)$.

Классифицируем кривые $\widehat{C}$ с точностью до изоморфизма.

ЛЕММА 6.6. Сопряжением в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ кривая $\widehat{C}$ приводится к виду

$$t_0x_0^2 + t_1x_1^2 = 0.$$

Группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ изоморфна группе $2 : \mathbb{C}^*$ и порождена отображениями

$$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_1 : x_0, t_1 : t_0),$$

$$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto \left(\frac{x_0}{c} : x_1, c^2 t_0 : t_1 \right), \quad c \in \mathbb{C}^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\sigma : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ двулистное накрытие, индуцированное морфизмом φ' . Легко проверить, что две точки ветвления накрытия σ лежат на двух различных прямых вида $ax_0 + bx_1 = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$. Очевидно, что некоторым автоморфизмом вида $h \times 1 \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ эти прямые можно перевести в прямые $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$. Далее, ясно, что некоторым автоморфизмом вида $1 \times h' \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ форму $\text{Disc}(\widehat{C})$ можно привести к виду $t_0 t_1$. После этого утверждение леммы получается тривиальной заменой координат с учетом того, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0) \subset \text{Aut}(\widehat{C}, \sigma) \simeq 2.(2 : \mathbb{C}^*)$.

Найдем формы $Q_5(t_0, t_1)$ и группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$ с точностью до сопряжения в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 21.

ТАБЛИЦА 21

$Q_5(t_0, t_1)$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \bigcup_i F_i, \mathbb{F}_0)$
$t_0^5 - t_1^5$	$2 \times D_5$	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (-x_0 : x_1, t_0 : t_1),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_1 : x_0, t_1 : t_0),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (\varepsilon_5^2 x_0 : x_1, \varepsilon_5 t_0 : t_1)$
$a(t_0^5 + t_1^5)$ $+b(t_0^4 t_1 + t_0 t_1^4)$ $+c(t_0^3 t_1^2 + t_0^2 t_1^3)$	2^2	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (-x_0 : x_1, t_0 : t_1),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_1 : x_0, t_1 : t_0)$

Найдем явный вид групп G_B , пользуясь леммой 3.5. Очевидно, что группы G_B не содержат инволюцию $x_0 \mapsto -x_0$. Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 22.

ТАБЛИЦА 22

$Q_5(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
$t_0^5 - t_1^5$	D_5	$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_1 : x_0, t_1 : t_0),$ $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (\varepsilon_5^2 x_0 : x_1, \varepsilon_5 t_0 : t_1)$

Далее, используя вложение Серре $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(x, y, z, w)$, заданное формулой $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 t_0 : x_0 t_1 : x_1 t_0 : x_1 t_1)$, получаем уравнения поверхности S' . Поднимая действие группы G_B на поверхность S' , получаем действие группы G . Теорема 6.5 доказана.

6.2.2. *Случай, когда $|\Sigma'| = 4$.* В этом пункте будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.7. *Не существует G -минимальных расслоений на коники (S, G, φ) таких, что выполнены условия второй конструкции и $K_S^2 = 1$, $|\Sigma'| = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $|\Sigma'| = 4$ следует, что кривая $\widehat{C}$ эллиптическая. Найдем значения e , при которых существует двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$.

Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. Найдем класс дивизора кривой $\widehat{C}$. Ясно, что $\widehat{C} \simeq 2s + af$. По формуле присоединения имеем $a = e + 2$. Далее, $0 \leq s \cdot \widehat{C} = a - 2e$, откуда $e \leq 2$. Однако $\widehat{C} + 3f \sim 2s + (5 + e)f$. Поэтому из леммы 3.6 следует, что e нечетно. Следовательно, $e = 1$.

Представим $\mathbb{F}_1$ как проективную плоскость $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(x, t_0, t_1)$, раздутую в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим кривую раздутия через E . Пусть $\sigma: \widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ – морфизм, индуцированный морфизмом φ . Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_F \rightarrow \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B \rightarrow 0,$$

где $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_F$ – ядро естественного гомоморфизма $\sigma_*: \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, а $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B$ – его образ. Таким образом, группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B$ эффективно действует на базе.

Группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B$ фиксирует образ единственной точки пересечения кривых E и $\widehat{C}$, откуда $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$. Поэтому группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B$ циклическая, а тогда и подгруппа $G_B \subset \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_1)_B$ также циклическая. Однако очевидно, что группа G с этим условием не может удовлетворять лемме 3.5. Это завершает доказательство теоремы 6.7.

6.2.3. *Случай, когда $|\Sigma'| = 6$.* Найдем значения параметра e , при которых существует двулистное накрытие $h': S' \rightarrow \mathbb{F}_e$.

Обозначим через s дивизор исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_e$. Найдем класс дивизора кривой $\widehat{C}$. Ясно, что $\widehat{C} \sim 2s + af$. По формуле присоединения имеем $a = e + 3$. Далее, $0 \leq s \cdot \widehat{C} = a - 2e$, откуда $e \leq 3$. Однако $\widehat{C} + f \sim 2s + (4 + e)f$. Поэтому из леммы 3.6 следует, что e четно. Следовательно, $e = 0$ или $e = 2$. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай $e = 0$. Основной результат здесь – теорема 6.8. Предварительно введем обозначения. На $\mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ введем координаты $(x_0 : x_1, t_0 : t_1)$. Кривая $\widehat{C}$ представится уравнением

$$F(x, t_0, t_1) = p_0(t_0, t_1)x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2 = 0, \quad (6.3)$$

где $p_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 1, 2$, – бинарные формы степени 3. Слой F_1 представится уравнением $Q_1(t_0, t_1) = 0$, где Q_1 – бинарная форма степени 1. Определим дискриминант кривой $\widehat{C}$, обозначаемый $\text{Disc}(\widehat{C})$, как форму $p_0p_2 - p_1^2$. Ясно, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

Далее, рассмотрим вложение Сегре $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(x, y, z, w)$, заданное в координатах формулой $v: (x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 t_0 : x_0 t_1 : x_1 t_0 : x_1 t_1)$. Ясно, что можно выбрать однородные многочлены $E_0(x, y, z, w)$ и $E_1(x, y, z, w)$ такие, что

$$\begin{aligned} v^*(E_0(x, y, z, w)) &= x_0^2 Q_1(t_0, t_1) F(x, t_0, t_1), \\ v^*(E_1(x, y, z, w)) &= x_1^2 Q_1(t_0, t_1) F(x, t_0, t_1). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 1$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, а также $|\Sigma'| = 6$, $e = 0$. Тогда дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S является поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S' представляется следующими уравнениями в $\mathbb{P}(2^2, 1^4)$ с координатами v, s, x, y, z, w :

$$\begin{aligned} v^2 &= E_0(x, y, z, w), & s^2 &= E_1(x, y, z, w), \\ vz &= sx, & vw &= sy, & xw &= yz. \end{aligned}$$

Морфизм φ' задается формулой

$$\varphi': (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Описание уравнений кривых $\widehat{C}$, форм Q_1 и действия группы G представлено в таблицах 23 и 24. Инволюция ι действует по формуле

$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

Вначале докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6.9. Дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S – поверхность Дель Пеццо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через s класс дивизора исключительного сечения, а через f – класс дивизора слоя линейчатой поверхности $\mathbb{F}_0$. По формуле Гурвица имеем

$$K_{S'} \sim h'^* K_{\mathbb{F}_0} + B \sim h'^* \left(-2s - 2f + \frac{2s + 4f}{2} \right) \sim h'^* (-s),$$

где B – дивизор ветвления морфизма h' . Поэтому дивизор $-K_{S'}$ численно эффективен. Отсюда следует, что дивизор $-K_S$ также численно эффективен. По лемме 5.1 осталось показать, что поверхность S не содержит гладких рациональных (-2) -кривых. Пусть D – такая кривая. Обозначим через f' дивизор слоя расслоения φ . Ясно, что $-K_S \sim D + D'$, где D' – эффективный дивизор и $-K_S \cdot f' = 2$. Поэтому $D \cdot f' \leq 2$. Далее, из диаграммы (3.1) следует, что собственный прообраз кривой D на поверхности S' имеет отрицательный индекс самопересечения. Очевидно, что это невозможно.

Уравнения расслоения на коники (S', φ') легко получаются с учетом сделанных выше обозначений и рассуждений второй конструкции.

ТАБЛИЦА 23. Кривые $\widehat{C}$

Тип	$\widehat{C}$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$
I	$(t_0^3 - t_1^3)x_0^2 + (t_0^3 + t_1^3)x_1^2$	$2.D_6$	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_6),$ $\text{diag}(\varepsilon_4, 1) \times \text{kdiag}(1, 1)$
II	$t_0^3x_0^2 + 2t_1^3x_0x_1 + t_0^2t_1x_1^2$	5	$\text{diag}(1, \varepsilon_5^2) \times \text{diag}(1, \varepsilon_5)$
III	$(t_0^3 + t_1^3)x_0^2 + (t_0^3 + a^6t_1^3)x_1^2,$ $a^6 \neq 0, 1$	$2 \times D_3$	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3),$ $\text{kdiag}(a^3, 1) \times \text{kdiag}(a^2, 1)$
IV	$(a_0t_0^3 + b_0t_1^3)x_0^2 + 2(a_1t_0^3 + b_1t_1^3)x_0x_1$ $+(a_2t_0^3 + b_2t_1^3)x_1^2$	3	$\text{diag}(1, 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3)$
V	$at_0^2t_1x_0^2 + 2(t_0^3 + t_1^3)x_0x_1$ $+at_0t_1^2x_1^2$	D_3	$\text{diag}(1, \varepsilon_3) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3),$ $\text{kdiag}(1, 1) \times \text{kdiag}(1, 1)$
VI	$t_0(t_0^2 + at_1^2)x_0^2 + t_1(t_1^2 + at_0^2)x_1^2,$ $a^2 \neq 0, 1$	D_4	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{kdiag}(1, 1),$ $\text{diag}(1, \varepsilon_4) \times \text{diag}(1, -1)$
VII	$t_0(a_0t_0^2 + b_0t_1^2)x_0^2$ $+2t_1(a_1t_0^2 + b_1t_1^2)x_0x_1$ $+t_0(a_2t_0^2 + b_2t_1^2)x_1^2$	2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1)$
VIII	$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_2(t_0, t_1)x_1^2$	2	γ

ТАБЛИЦА 24. Формы Q_1 и группы G

Тип кривой $\widehat{C}$	$Q_1(t_0, t_1)$	G	Порождающие G
I	t_1	12	$(v : s : x : y : z : w)$ $\mapsto (\varepsilon_{12}s : \varepsilon_{12}v : z : \varepsilon_{12}^2w : x : \varepsilon_{12}^2y)$
I	t_1	4	$(v : s : x : y : z : w)$ $\mapsto (\varepsilon_4s : \varepsilon_4v : z : -w : x : -y)$
I	$t_0 - \varepsilon_{24}^2t_1$	4	$(v : s : x : y : z : w)$ $\mapsto (\varepsilon_{24}s : \varepsilon_{24}^7v : \varepsilon_{24}^4w : z : \varepsilon_{24}^{10}y : \varepsilon_{24}^6x)$
V	$t_0 - t_1$	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_4s : \varepsilon_4v : w : z : y : x)$
VI	$t_0 - t_1$	4	$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_4s : \varepsilon_4v : w : z : y : x)$
VII	t_1	4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -\varepsilon_4, 1, -1, -1, 1)$

Перейдем к изучению групп $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. Из того, что кривая $\widehat{C}$ двулистно накрывает $\mathbb{P}^1$ с ветвлением в шести точках, следует, что $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0) \subset 2.S_6$.

ЛЕММА 6.10. Пусть $g \in \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$, $g \neq 1$. Тогда сопряжением в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ уравнение кривой $\widehat{C}$ и элемент g приводятся к одному из случаев, перечисленных в таблице 25. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ТАБЛИЦА 25

Случай	g	$\widehat{C}$
1	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_6)$	$(t_0^3 - t_1^3)x_0^2 + (t_0^3 + t_1^3)x_1^2$
2	$\text{diag}(1, \varepsilon_5^2) \times \text{diag}(1, \varepsilon_5)$	$t_0^3x_0^2 + 2t_1^3x_0x_1 + t_0^2t_1x_1^2$
3	$\text{diag}(1, 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3)$	$(a_0t_0^3 + b_0t_1^3)x_0^2 + 2(a_1t_0^3 + b_1t_1^3)x_0x_1 + (a_2t_0^3 + b_2t_1^3)x_1^2$
4	$\text{diag}(1, \varepsilon_3) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3)$	$at_0^2t_1x_0^2 + 2(t_0^3 + t_1^3)x_0x_1 + at_0t_1^2x_1^2$
5	$\text{diag}(1, \pm 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_3)$	$(a_0t_0^3 + b_0t_1^3)x_0^2 + (a_2t_0^3 + b_2t_1^3)x_1^2$
6	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1)$	$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + 2p_1(t_0, t_1)x_0x_1 + p_2(t_0, t_1)x_1^2,$ $p_i(t_0, -t_1) = (-1)^i p_i(t_0, t_1),$ $i = 0, 1, 2, p_1 \neq 0$
7	$\text{diag}(1, \varepsilon_4) \times \text{diag}(1, -1)$	$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_2(t_0, t_1)x_1^2,$ $p_i(t_0, -t_1) = (-1)^{i/2} p_i(t_0, t_1), i = 0, 2$
8	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, 1)$	$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_2(t_0, t_1)x_1^2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопряжением в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ элемент g можно привести к виду $\text{diag}(1, \beta) \times \text{diag}(1, \alpha)$. Очевидно, что тогда формы p_i , $i = 0, 1, 2$, будут полуинвариантами относительно элемента g . Из условия $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0) \subset 2.S_6$ следует, что $\text{ord}(\alpha) \leq 6$. Рассмотрим случаи в зависимости от значения $\text{ord}(\alpha)$.

1) $4 \leq \text{ord}(\alpha) \leq 6$. Очевидно, что тогда формы p_i , $i = 0, 1, 2$, вырождены. Перестановкой переменных x_0, x_1 и t_0, t_1 можно добиться того, что $p_0 = t_0^3$. Легко проверить, что тогда $p_1 = at_1^3$, $p_2 = ct_0^3$ или $p_2 = ct_0^2t_1$, $a, c \neq 0$. Далее, при $p_2 = ct_0^3$ тривиальной заменой координат получаем случай, когда $g = \text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_6)$, и кривая $\widehat{C}$ представляется уравнением

$$t_0^3x_0^2 + 2t_1^3x_0x_1 + t_0^2x_1^2 = 0.$$

Заменой координат

$$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 + x_1 : x_1 - x_0, t_0 : t_1)$$

этот случай сводится к случаю 1 из таблицы 25. При $p_2 = ct_0^2t_1$ получаем случай 2 из таблицы 25.

2) $\text{ord}(\alpha) = 3$. Пусть $p_1 \neq 0$. Если все формы p_i , $i = 0, 1, 2$, вырождены, то, используя вышеприведенные рассуждения, получаем случай 3 из таблицы 25.

Предположим, что одна из форм p_0, p_2 невырождена. Легко проверить, что тогда снова получается случай 3. Оставшаяся возможность дает нам случаи 3 и 4.

При $p_1 = 0$ получаем случай 5.

3) $\text{ord}(\alpha) = 2$. Пусть $p_1 \neq 0$. Перестановкой переменных t_0, t_1 можно добиться того, что $p_0(t_0, -t_1) = p_0(t_0, t_1)$. Тогда если $p_1(t_0, -t_1) = p_1(t_0, t_1)$, то получаем $p_2(t_0, -t_1) = p_2(t_0, t_1)$, откуда следует, что $\text{Disc}(\hat{C})$ имеет кратный множитель t_0 , что невозможно. Если $p_1(t_0, -t_1) = -p_1(t_0, t_1)$, то получаем случай 6 из таблицы 25.

При $p_1 = 0$ аналогичными рассуждениями получаем случай 7 из таблицы 25.

4) $\text{ord}(\alpha) = 1$. Здесь получаем случай 8 из таблицы 25.

Лемма доказана.

Опишем группы $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$. Обозначим через γ отображение

$$(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 : -x_1, t_0 : t_1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. Пусть группа $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ нетривиальна. Тогда сопряжением в группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ кривая $\hat{C}$ и группа $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ приводятся к одному из случаев, перечисленных в таблице 23. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\hat{C})$ не имеет кратных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие группы $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ на корнях формы $\text{Disc}(\hat{C})$ индуцирует гомоморфизм групп $f: \text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0) \rightarrow S_6$. Ясно, что $\text{Ker}(f) \simeq 1$ или $\text{Ker}(f) \simeq 2$.

Пусть группа $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случая 1 таблицы 25. Из [14; п. 5.5] следует, что $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0) \subset 2.D_6$. Поэтому кривая $\hat{C}$ имеет тип I из таблицы 23.

Пусть группа $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случая 2 таблицы 25. Из [14; п. 5.5] следует, что $\text{Im}(f) \subset 5$. Пусть $\text{Ker}(f) \simeq 2$ и элемент g' порождает $\text{Ker}(f)$. Ясно, что $\text{ord}(g') = 2$ и $gg' = g'g$. Простыми вычислениями проверяется, что $g' = \text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, 1)$. Но элемент такого вида не действует на $\hat{C}$. Поэтому $\text{Ker}(f) \simeq 1$ и кривая $\hat{C}$ имеет тип II из таблицы 23.

Пусть группа $\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случаев 3–5 и не содержит элементов из предыдущих случаев таблицы 25. Из [14; п. 5.5] получаем, что $\text{Im}(f) \subset D_3$ или $\text{Im}(f) \subset A_4$.

Допустим $\text{Ker}(f) \simeq 2$. Точно так же, как в предыдущем абзаце, доказываем, что элемент g относится к случаю V таблицы 23. Поэтому кривая $\hat{C}$ имеет тип III в таблице 23.

Допустим $\text{Ker}(f) \simeq 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда g относится к случаю 3 из таблицы 25. Докажем, что $\text{Im}(f) \not\subset A_4$. Предположим противное. Тогда подгруппа

$$\text{Aut}(\hat{C}, \mathbb{F}_0) \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})$$

сопряжена подгруппе, порожденной отображениями $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 : x_1, t_0 : \varepsilon_3 t_1)$ и $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_0 : \pm x_1, t_0 + t_1 : 2t_0 - t_1)$. Однако эта группа не

может эффективно действовать на кривой $\widehat{C}$. Противоречие. Поэтому $\text{Im}(f) \subset D_3$. Если $\text{Im}(f) \simeq 3$, то кривая $\widehat{C}$ имеет тип IV из таблицы 23. Предположим, что $\text{Im}(f) \simeq D_3$. Тогда уравнение кривой $\widehat{C}$ приводится к виду

$$(x_0^2 + x_1^2)(t_0^3 + t_1^3) + 2a(t_0^3 - t_1^3)x_0x_1 = 0.$$

Но тогда группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит автоморфизм $(x_0 : x_1, t_0 : t_1) \mapsto (x_1 : x_0, t_0 : t_1)$. Поэтому $\text{Ker}(f) \neq 1$. Противоречие.

Если g относится к случаю 4 из таблицы 25, то кривая $\widehat{C}$ имеет тип V из таблицы 23.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случая 7 таблицы 25 и не содержит элементов из случаев 1–5. Из [14; п. 5.5] получаем, что $\text{Im}(f) \subset 2^2$. Далее тривиальными вычислениями получаем, что кривая $\widehat{C}$ имеет тип VI из таблицы 23.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случая 6 таблицы 25 и не содержит элементов из случаев 1–5 и 7. Из [14; п. 5.5] получаем, что $\text{Im}(f) \subset 2^2$. Далее тривиальными вычислениями получаем, что кривая $\widehat{C}$ имеет тип VII из таблицы 23.

Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$ содержит элемент g из случая 8 таблицы 25 и не содержит элементов из предыдущих случаев. Тогда кривая $\widehat{C}$ имеет тип VIII в таблице 23.

Найдем формы $Q_1(t_0, t_1)$ и отберем группы G_B с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$. В вычислениях будем пользоваться леммой 3.5. Результаты вычислений представлены в таблице 26.

ТАБЛИЦА 26. Группы G_B

Тип кривой $\widehat{C}$	$Q_1(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
I	t_1	6	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{diag}(1, \varepsilon_{12}^2)$
I	t_1	2	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{diag}(1, -1)$
I	$t_0 - \varepsilon_{12}t_1$	2	$\text{kdiag}(1, \varepsilon_{12}^3) \times \text{kdiag}(\varepsilon_{12}^2, 1)$
V	$t_0 - t_1$	2	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{kdiag}(1, 1)$
VI	$t_0 - t_1$	2	$\text{kdiag}(1, 1) \times \text{kdiag}(1, 1)$
VII	t_1	2	$\text{diag}(1, -1) \times \text{diag}(1, -1)$

Пользуясь полученными результатами, легко описать действие групп G на поверхностях S' . Результаты элементарных вычислений представлены в таблице 24.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 6.8.

Случай $e = 2$. Основной результат здесь – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.12. Пусть (S, G, φ) – G -минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 1$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, а также $|\Sigma'| = 6$, $e = 2$. Тогда поверхность S' содержит G -эквивариантную рациональную (-4) -кривую. Пусть $(S', G, \varphi') \rightarrow (S'', G, \varphi'')$ – стягивание этой

кривой, где отображение $\varphi'': S'' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцировано морфизмом φ' . Поверхность S'' представляется в $\mathbb{P}(3, 2, 1, 1) = \mathbb{P}(u, x, t_0, t_1)$ уравнением вида

$$u^2 + F(x, t_0, t_1)Q_1(t_0, t_1) = 0, \quad (6.4)$$

где F – полином, определенный кривой $\widehat{C}$, а Q_1 – бинарная форма степени 1. Полином F имеет вид (6.5). Отображение φ'' является проекцией:

$$\varphi'': (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Описание полиномов F представлено в таблице 27. Формы Q_1 и действие групп G описаны в таблице 28. Инволюция ι действует по формуле $u \mapsto -u$.

ТАБЛИЦА 27. Кривые $\widehat{C}$

Тип	$\widehat{C}, F(x, t_0, t_1)$	$\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$	Порождающие $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_0)$
I	$t_0x^2 + 2t_1^3x + t_0^5$	6	$\text{diag}(\varepsilon_6^5, \varepsilon_6, 1)$
II	$t_0x^2 + t_1^5 + t_0^5$	10	$\text{diag}(-\varepsilon_5^2, \varepsilon_5, 1)$
III	$t_0x^2 + 2t_1^3x + t_0^4t_1$	5	$\text{diag}(\varepsilon_5^4, \varepsilon_5, 1)$
IV	$t_0x^2 + t_1(t_0^4 + t_1^4)$	8	$\text{diag}(\varepsilon_8^3, \varepsilon_8^2, 1)$
V	$t_0x^2 + 2(at_0^3 + bt_1^3)x + t_0^2(ct_0^3 + dt_1^3)$	3	$\text{diag}(\varepsilon_3^2, \varepsilon_3, 1)$
VI	$t_0x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1), t_0 \nmid p_1,$ $p_i(t_0, -t_1) = (-1)^{i+1}p_i(t_0, t_1), i = 1, 2,$	2	$\text{diag}(-1, -1, 1)$
VII	$t_0x^2 + p_2(t_0, t_1), p_2(t_0, -t_1) = p_2(t_0, t_1)$	4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, 1)$
VIII	$p_0(t_0, t_1)x^2 + p_2(t_0, t_1)$	2	$\text{diag}(-1, 1, 1)$

ТАБЛИЦА 28. Группы G

Тип кривой $\widehat{C}$	$Q_1(t_0, t_1)$	G	Порождающие G
I	t_1	12	$\text{diag}(\varepsilon_{12}^5, \varepsilon_{12}^{10}, \varepsilon_{12}^2, 1)$
I	t_1	4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, -1, 1)$
VI	t_1	4	$\text{diag}(\varepsilon_4, -1, -1, 1)$

Представим $\mathbb{F}_2$ как взвешенное проективное пространство

$$\mathbb{P}(2, 1, 1) = \mathbb{P}(x, t_0, t_1),$$

раздутое в точке $(1 : 0 : 0)$. Обозначим исключительную кривую этого раздутия через E . Ясно, что прообраз кривой E на поверхности S' является G -инвариантной рациональной (-4) -кривой. Пусть $(S', G, \varphi') \rightarrow (S'', G, \varphi'')$ – стягивание этой кривой, где отображение $\varphi'': S'' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ индуцировано морфизмом φ' .

Кривая $\widehat{C}$ представится уравнением

$$F(x, t_0, t_1) = p_0(t_0, t_1)x^2 + 2p_1(t_0, t_1)x + p_2(t_0, t_1) = 0, \quad (6.5)$$

где p_0, p_1, p_2 – бинарные формы степени соответственно 1, 3 и 5. Определим дискриминант кривой $\widehat{C}$, обозначаемый $\text{Disc}(\widehat{C})$, как форму $p_2(t_0, t_1)p_0(t_0, t_1) - p_1^2(t_0, t_1)$. Очевидно, $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней. Слой F_1 представляется уравнением

$$F_1 = \{Q_1(t_0, t_1) = 0\},$$

где $Q_1(t_0, t_1)$ – бинарная форма степени 1. Отсюда получаем уравнение (6.4) поверхности S'' .

Опишем группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.13. Пусть группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2)$ нетривиальна. Тогда сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ кривая $\widehat{C}$ и группа $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2)$ приводятся к одному из случаев, перечисленных в таблице 27. Все возможности реализуются при условии, что $\text{Disc}(\widehat{C})$ не имеет кратных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через σ двулистное накрытие $\widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное морфизмом φ' . Морфизм σ индуцирует гомоморфизм групп $\sigma_*: \text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Из условия, что форма p_0 в уравнении (6.5) полуинвариантна относительно действия группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2)$, следует, что $\text{Im}(\sigma_*)$ – циклическая группа. Поэтому либо $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2) \simeq \langle g \rangle$, либо $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2) \simeq \langle g \rangle \times \langle \tau \rangle$, где $\tau \in \text{Ker}(\sigma_*)$.

Сопряжением в группе $\text{Aut}(\mathbb{P}(2, 1, 1))$ элемент g можно привести к виду $\text{diag}(\beta, \alpha, 1)$. Очевидно, что тогда формы p_i , $i = 0, 1, 2$, и $\text{Disc}(\widehat{C})$ будут полуинвариантными относительно элемента g . Из условия $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2) \subset 2.S_6$ следует, что $\text{ord}(\alpha) \leq 6$. Рассмотрим случаи в зависимости от значения $\text{ord}(\alpha)$. Ясно, что при $\text{ord}(\alpha) \geq 2$ форма p_0 вырождена. В этом случае, делая при необходимости замену $(x : t_0 : t_1) \mapsto (x : t_1 : t_0)$, можно добиться того, что $p_0 = t_0$. В рассуждениях будем пользоваться леммой 2.6.

1) $\text{ord}(\alpha) = 6$. Очевидно, что все формы p_i , $i = 0, 1, 2$, вырождены. Легко проверить, что $p_1 = at_0^3$ или $p_1 = at_1^3$. Вычислениями проверяется, что возможно только $p_1 = at_1^3$. Здесь получаем тип I из таблицы 27.

2) $\text{ord}(\alpha) = 5$. Очевидно, что формы p_i , $i = 0, 1$, вырождены. Если $p_1 = at_0^3$ или $p_1 = bt_1^3$, $b \neq 0$, то получаем соответственно типы II и III из таблицы 27. Вычислениями проверяется, что остальные случаи невозможны.

3) $\text{ord}(\alpha) = 4$. Очевидно, что формы p_i , $i = 0, 1$, вырождены. Вычислениями проверяется, что невозможны случаи, когда $p_1 \neq 0$. Если $p_1 = 0$, то получаем тип IV из таблицы 27.

4) $\text{ord}(\alpha) = 3$. Если $p_1 = at_0^3 + bt_1^3$, то получаем тип V из таблицы 27. Вычислениями проверяется, что остальные случаи невозможны.

5) $\text{ord}(\alpha) = 2$. Пусть $p_1 \neq 0$. Тогда $g(p_1) = p_1$ или $g(p_1) = -p_1$. Если $g(p_1) = p_1$, то получаем тип VI из таблицы 27. Легко проверить, что при $g(p_1) = -p_1$ формы p_i , $i = 0, 1, 2$, имеют общий множитель t_0 , что невозможно. Пусть $p_1 = 0$. Тогда $g(p_2) = p_2$ или $g(p_2) = -p_2$. Если $g(p_2) = p_2$, то получаем

тип VII из таблицы 27. Легко проверить, что при $g(p_2) = -p_2$ формы p_i , $i = 0, 2$, имеют общий множитель t_0 , что невозможно.

6) $\text{ord}(\alpha) = 1$. Здесь получаем тип VIII из таблицы 27.

Предложение доказано.

Найдем формы $Q_1(t_0, t_1)$ и отберем группы G_B , пользуясь леммой 3.5. Результаты вычислений представлены в таблице 29.

Таблица 29. Группы G_B

Тип кривой $\widehat{C}$	$Q_1(t_0, t_1)$	G_B	Порождающие G_B
I	t_1	6	$\text{diag}(\varepsilon_6^5, \varepsilon_6, 1)$
I	t_1	2	$\text{diag}(-1, -1, 1)$
VI	t_1	2	$\text{diag}(-1, -1, 1)$

Кратко поясним вычисления. Во-первых, из того, что группы $\text{Aut}(\widehat{C}, \mathbb{F}_2)$ состоят из диагональных матриц (см. таблицу 27), следует, что $Q_1 = t_0$ или $Q_1 = t_1$. Однако $p_0 = t_0$ во всех случаях. Поэтому кривая $\widehat{C}$ пересекает исключительное сечение линейчатой поверхности $\mathbb{F}_2$ при $t_0 = 0$ в одной точке. Следовательно, $Q_1 = t_1$ по лемме 3.5. Во-вторых, ясно, что группа G_B не может содержать инволюцию $x \mapsto -x$.

Пользуясь полученными результатами, легко описать действие групп G на поверхностях S'' . Результаты элементарных вычислений были представлены в таблице 28.

Формулируя полученные результаты, получаем теорему 6.12.

Список литературы

- [1] E. Bertini, “Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano”, *Annali di Mat.* (2), **8** (1877), 254–287.
- [2] L. Bayle, A. Beauville, “Birational involutions of $\mathbb{P}^2$ ”, *Asian J. Math.*, **4**:1 (2000), 11–17.
- [3] S. Kantor, *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer & Müller, Berlin, 1895.
- [4] A. Wiman, “Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene”, *Math. Ann.*, **48**:1–2 (1896), 195–240.
- [5] Ю. И. Манин, “Рациональные поверхности над совершенными полями. II”, *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 161–192; англ. пер.: J. I. Manin, “Rational surfaces over perfect fields. II”, *Math. USSR-Sb.*, **1**:2 (1967), 141–168.
- [6] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. сб.*, **74(116)**:4 (1967), 608–638; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Rational surfaces with a pencil of rational curves”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:4 (1967), 563–587.
- [7] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса”, *Матем. сб.*, **83(125)**:1(9) (1970), 90–119; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Rational surfaces with a pencil of rational curves and with positive square of the canonical class”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:1 (1970), 91–117.

- [8] В. А. Исковских, “Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 19–43; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 17–39.
- [9] В. А. Исковских, “Порождающие и соотношения в двумерной группе Кремоны”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 5, 43–48; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Generators and relations in a two-dimensional Cremona group”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **38**:5 (1983), 56–63.
- [10] В. А. Исковских, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори”, *УМН*, **51**:4 (1996), 3–72; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Factorization of birational maps of rational surfaces from the viewpoint of Mori theory”, *Russian Math. Surveys*, **51**:4 (1996), 585–652.
- [11] Т. de Fernex, “On planar Cremona maps of prime order”, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004), 1–28.
- [12] А. Beauville, J. Blanc, “On Cremona transformations of prime order”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **339**:4 (2004), 257–259.
- [13] А. Beauville, “ p -elementary subgroups of the Cremona group”, *J. Algebra*, **314**:2 (2007), 553–564.
- [14] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskih, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, v. I, Progr. Math., **269**, Birkhäuser, Boston, MA, 2009, 443–548.
- [15] J. Blanc, “Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **344**:1 (2007), 21–26.
- [16] В. И. Цыганков, “Уравнения G -минимальных расслоений на коники степени 4”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 2, 39–42; англ. пер.: V. I. Tsygankov, “Equations of G -minimal conic bundles with degree 4”, *Russian Math. Surveys*, **65**:2 (1996), 72–75.
- [17] J. Blanc, “Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group”, *Comment. Math. Helv.*, **86**:2 (2010), 469–497.
- [18] I. V. Dolgachev, *Topics in classical algebraic geometry, Part I*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/lecturenotes.html>.
- [19] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 59–157; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 745–814.

В. И. Цыганков (V. I. Tsygankov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vova_cygankov@yahoo.com

Поступила в редакцию

10.06.2010 и 19.12.2010