Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский, Топология лагранже-
вых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптиче-
ским гамильтонианом, *Матем. сб.*, 2011, том 202, но-
мер 3, 69–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:48:32

УДК 517.938.5+514.756.4

Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский

Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом

В работе изучаются интегрируемые гамильтоновы системы $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(dz \wedge dw), H = \operatorname{Re} f(z, w))$ с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im} f$, отвечающие комплексным гамильтоновым системам $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ с гиперэллиптическим гамильтонианом $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. При $n \geq 3$ система имеет неполные потоки на любом лагранжевом слое $f^{-1}(a)$. Описана топология лагранжева слоения таких систем в малой окрестности любого слоя $f^{-1}(a)$ в терминах числа n и комбинаторного типа слоя – набора кратностей критических точек функции f , принадлежащих слою. При нечетном n получен комплексный аналог теоремы Лиувилля для систем, отвечающих многочленам $P_n(w)$ с простыми вещественными корнями. В частности, в малой окрестности слоя $f^{-1}(0)$ построен набор комплексных канонических переменных, аналогичных переменным действие-угол.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, лагранжево слоение с особенностями, послойная эквивалентность интегрируемых систем, эквивалентность голоморфных функций, теорема Лиувилля.

§ 1. Введение

Пусть дана интегрируемая гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) с первыми интегралами $f_1, \dots, f_n$ (см. определение 1). Возникают отображение момента

$$\Phi = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

и лагранжево слоение, лагранжевыми слоями которого являются связные компоненты множеств уровня $\Phi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В случае, когда векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ являются полными, применима теорема Лиувилля (см. [1]), описывающая топологию неособого слоя $\Phi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, топологию слоения в окрестности компактного неособого слоя и координаты действие-угол в окрестности компактного неособого слоя. Общая задача по нахождению аналога теоремы Лиувилля в случае интегрируемых гамильтоновых систем с неполными векторными полями $\operatorname{sgrad} f_i$ была поставлена А. Т. Фоменко. А. И. Шафаревичем был предложен широкий класс интегрируемых гамильтоновых систем с неполными полями $\operatorname{sgrad} f_i$, а именно класс систем

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00748-а и № 08-01-91300-ИНДа), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.3704) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (гранты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

$(\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2(z, w), \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w)))$ с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$, где $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфная функция двух комплексных переменных. Алгебраические системы с неполными векторными полями рассматривались также в работах Л. Гаврилова (см. [2]).

В настоящей работе развиваются методы, предложенные в [3]–[7]. В работе изучается лагранжево слоение для гамильтоновых систем с комплекснозначным полиномиальным гамильтонианом $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Описана топология лагранжева слоения в окрестности особой точки (локальная топологическая классификация особенностей лагранжева слоения; см. утверждения 1 и 2) и в окрестности особого слоя (полулокальная топологическая классификация особенностей лагранжева слоения; см. теорему 2). Вычислены операторы монодромии и группы монодромии слоения для некоторых таких систем (см. утверждения 3–5). На основе теоремы Р. Тома из [8] (см. теорему 1) указаны возможные значения количества особых точек, лежащих на одном и том же слое, и наборов кратностей этих особых точек (следствие 1). При нечетном n получен комплексный аналог теоремы Лиувилля для таких систем (теорема 3). В частности, в малой окрестности неособого слоя $f^{-1}(0)$ построен набор комплексных координат действие-угол.

Авторы выражают признательность А. Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе. Авторы искренне благодарны А. Т. Фоменко и А. И. Шафаревичу за указание на широкий класс интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками, а также А. Б. Жеглову за полезные обсуждения.

§ 2. Основные понятия и утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Гамильтоновой системой* называется тройка (M^{2n}, ω, H) , где M^{2n} – гладкое многообразие, ω – симплектическая структура на M^{2n} , $H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая вещественнозначная функция, называемая *функцией Гамильтона* (или *гамильтонианом*). Система называется *интегрируемой*, если существует набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, называемых *первыми интегралами*, такой, что выполнены следующие условия:

- 1) набор $f_1, \dots, f_n$ функционально независим на M^{2n} , т.е. $df_1, \dots, df_n$ линейно независимы в каждой точке всюду плотного подмножества в M^{2n} , и $f_1 = H$;
- 2) при любых $i, j = 1, \dots, n$ функции f_i и f_j находятся в инволюции относительно симплектической структуры ω , т.е.

$$\{f_i, f_j\} = \omega^{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^l} = 0$$

в локальных координатах $x^1, \dots, x^{2n}$, где ω^{kl} – компоненты матрицы, обратной матрице $\|\omega_{kl}\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторным полем *косой градиент* функции $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется поле $\operatorname{sgrad} f$ такое, что для любой функции $g: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено соотношение $\{f, g\} = \operatorname{sgrad} g(f)$. В локальных координатах $x^1, \dots, x^{2n}$ векторное поле $\operatorname{sgrad} f$ имеет вид $(\operatorname{sgrad} f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

С каждой гамильтоновой системой связано уравнение Гамильтона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Уравнением Гамильтона гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) называется дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = \text{sgrad } H|_{x(t)}$, где $t \in I$ – параметр в некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Если гамильтонова система является интегрируемой и все решения уравнения Гамильтона существуют глобально, т.е. допускают продолжение параметра t на $\mathbb{R}$, то систему назовем *интегрируемой по Лиувиллю* или *вполне интегрируемой*.

Описание невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем см. в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка $x \in M^{2n}$ называется *критической* (или *особой*), если $df_1(x), \dots, df_n(x)$ линейно зависимы. Отображение $\Phi: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi: x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, называется *отображением момента*. Образ $\Phi(x)$ любой критической точки $x \in M^{2n}$ называется *критическим значением* отображения момента. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma_\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется множество критических значений отображения момента.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $n = 1$ особые точки $x \in M^2$ совпадают с критическими точками функции Гамильтона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Лагранжевым слоением*, отвечающим вполне интегрируемой гамильтоновой системе, назовем разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \dots, f_n$. *Слоем* (или *листом*) интегрируемой гамильтоновой системы (M^{2n}, ω, H) с первыми интегралами $f_1, \dots, f_n$ назовем компоненту связности подмножества $T_{\xi_1, \dots, \xi_n} = \{x \in M^{2n} \mid f_1(x) = \xi_1, \dots, f_n(x) = \xi_n\}$. (Слои являются лагранжевыми подмногообразиями с особенностями; подмножество $T_{\xi_1, \dots, \xi_n}$ связно, если набор функций $(f_1, \dots, f_n)$ состоит из вещественных и мнимых частей комплекснозначных многочленов Лорана n переменных, образующих невырожденный для своих многогранников Ньютона набор из $n/2$ многочленов, и если размерности многогранников Ньютона равны n (см. [9; §2, теорема]); последние условия выполнены, например, для гиперэллиптического комплекснозначного многочлена $f(z, w)$, рассматриваемого в настоящей работе.) Слой $T_{\xi_1, \dots, \xi_n}$ называется *неособым*, если все его точки неособые (т.е. в каждой его точке $df_1, \dots, df_n$ линейно независимы); если иначе, слой называется *особым*. Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_i^{2n}, \omega_i, H_i)$ с наборами первых интегралов $\Phi_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, $i = 1, 2$, такие, что все слои $\Phi_i^{-1} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ связны, называют *послойно эквивалентными* (см. [1; определение 1.29]), если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_1: M_1 \rightarrow M_2$ и $h_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\Phi_1 = h_2 \circ \Phi_2 \circ h_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Аналогично определениям 1 и 2 определяются $\mathbb{C}$ -гамильтонова система $(M^{2n}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ и векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f$, где M^{2n} – комплексное многообразие размерности $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $\omega_{\mathbb{C}}$ – комплекснозначная замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на M^{2n} , $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфная функция на M^{2n} .

2.1. Важный класс комплексных гамильтоновых систем. Пусть $M^4 = \mathbb{C}^2(z, w)$. Рассмотрим четырехмерное многообразие $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и

диффеоморфизм

$$\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \mathbb{C}^2(z, w), \quad (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (z, w).$$

На $\mathbb{R}^4$ введем симплектическую структуру $\omega = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$, заметим, что $\omega = \operatorname{Re}(dz \wedge dw)$; также введем функцию $H = \operatorname{Re}(f(z, w))$: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(z, w)$ – комплексный многочлен двух комплексных переменных. Согласно лемме 1 (см. ниже) гамильтонова система

$$(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2(z, w), \operatorname{Re}(dz \wedge dw), \operatorname{Re}(f(z, w))) \quad (1)$$

имеет дополнительный первый интеграл $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$.

ЛЕММА 1 (см. [10; лемма 2.1]). *Если многочлен $f(z, w)$ отличен от константы на $\mathbb{C}^2$, то гамильтонова система (1) является интегрируемой с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im}(f(z, w))$, причем*

$$\operatorname{sgrad} F = -i \operatorname{sgrad} H.$$

ЛЕММА 2 (см. [10; лемма 2.2]). *Векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ совпадает с косым градиентом $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ комплекснозначной функции $f(z, w)$ относительно комплекснозначной симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ на $\mathbb{C}^2(z, w)$, т.е. $\operatorname{sgrad} H = \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ (см. определение 6).*

По лемме 2 уравнения Гамильтона систем $(\mathbb{R}^4, \omega, H) = (\mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(\omega_{\mathbb{C}}), \operatorname{Re} f)$ и $(\mathbb{C}^2, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ совпадают. Далее будем рассматривать только $\mathbb{C}$ -гамильтоновы системы. Нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Две $\mathbb{C}$ -дифференцируемые функции $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, будем называть эквивалентными и писать $f_1 \sim f_2$ (соответственно называть топологически эквивалентными и писать $f_1 \sim_{\text{top}} f_2$), если существует комплексный диффеоморфизм (соответственно сохраняющий ориентацию гомеоморфизм) $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $f_2 \circ \varphi = f_1$.

В настоящей работе исследуются классы эквивалентности (соответственно топологической эквивалентности) гиперэллиптических функций $f = f(z, w)$ в малых окрестностях критических точек (соответственно критических слов), т.е. приводится локальная классификация (соответственно полулокальная классификация) особенностей функций. Ясно, что из топологической эквивалентности таких функций следует послойная эквивалентность соответствующих лагранжевых слоений (см. определения 5, 7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. А. Римановой метрикой пополнения ds_{ξ}^2 неособого слоя $T_{\xi} = f^{-1}(\xi)$ для функции f назовем риманову метрику $ds_{\xi}^2 = \operatorname{Sym}(\Delta_{\xi} \otimes \overline{\Delta}_{\xi})$ на T_{ξ} , где голоморфная 1-форма Δ_{ξ} определена на слое T_{ξ} соотношением $\Delta_{\xi}(\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_{\xi}}) = 1$. Отметим, что риманова метрика ds_{ξ}^2 является плоской, а интегральные траектории векторных полей $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_{\xi}}$ а $i \operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_{\xi}}$ являются ее геодезическими.

В. На слое T_{ξ} определена функция расстояния $\rho_{\xi}: T_{\xi} \times T_{\xi} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\rho_{\xi}(x, y)$ – нижняя грань длин всех кривых, лежащих в T_{ξ} и соединяющих точки $x, y \in T_{\xi}$, а длина понимается в смысле римановой метрики пополнения ds_{ξ}^2 .

2.2. Монодромия слоения, задаваемого многочленом.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. Пусть $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – комплексный многочлен двух комплексных переменных, имеющий конечное множество критических значений $\Sigma_f \subset \mathbb{C}$. Тогда множество $\mathbb{C} \setminus \Sigma_f$ неособых значений гомотопически эквивалентно букету $s := |\Sigma_f|$ окружностей и его фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f)$ изоморфна свободной группе F_s ранга s . Пусть $\xi \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$ – такое комплексное число, что каждый прямолинейный отрезок γ_{ξ, ξ_i} , соединяющий точку ξ с одной из точек $\xi_i \in \Sigma_f$, $i = 1, \dots, s$, не содержит никаких других точек $\xi_j \in \Sigma_f$, $j \neq i$, $j = 1, \dots, s$. Рассмотрим петлю $\tilde{\xi}_i := \tilde{\gamma}_{\xi, \xi_i} \cdot s_{\xi_i, \varepsilon} \cdot \tilde{\gamma}_{\xi, \xi_i}^{-1}$, где $s_{\xi_i, \varepsilon}$ – окружность малого радиуса $\varepsilon > 0$, идущая в положительном направлении вокруг точки ξ_i и не содержащая внутри себя точек ξ_j при $j \neq i$, $j = 1, \dots, s$, а $\tilde{\gamma}_{\xi, \xi_i}$ – прямолинейный отрезок, идущий из ξ в точку пересечения окружности $s_{\xi_i, \varepsilon}$ с отрезком γ_{ξ, ξ_i} . Тогда гомотопические классы $\xi_i^* \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi)$ петель ξ_i , $i = 1, \dots, s$, являются свободными образующими группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi) \cong F_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. А. Пусть $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – многочлен двух комплексных переменных, отличный от константы, с конечным множеством критических значений $\Sigma_f = \{\xi_i\}_{i=1}^s$, где $\xi_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, s$. Обозначим $E := \bigcup_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f} T_\xi$, $f|_E: E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$ и предположим, что $(E, \mathbb{C} \setminus \Sigma_f, f|_E)$ является локально тривиальным расслоением. Рассмотрим соответствующее гомологическое расслоение $(f|_E)_*: \bigcup_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f} H_1(T_\xi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$. Зафиксируем точку $\xi \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_f$, тогда каждый элемент $u \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi)$ задает автоморфизм $M_u: H_1(T_\xi) \rightarrow H_1(T_\xi)$, называемый *оператором монодромии, соответствующим элементу u* . Гомоморфизм $\mu: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi) \rightarrow \text{Aut}(H_1(T_\xi))$, $u \mapsto M_u$, называется *представлением монодромии*. Образ фундаментальной группы $\mu(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi)) \subset \text{Aut}(H_1(T_\xi))$ называется *группой монодромии* и обозначается через M .

В. Предположим, что $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ – гиперэллиптический многочлен. Согласно лемме 5 $(E, \mathbb{C} \setminus \Sigma_f, f|_E)$ является локально тривиальным расслоением. Пусть $\xi_{i, \varepsilon}$ – точка пересечения окружности $s_{\xi_i, \varepsilon}$ с отрезком γ_{ξ, ξ_i} (см. обозначение 1). Предположим, что $\alpha \subset T_{\xi_{i, \varepsilon}}$ – исчезающий граф, например исчезающая окружность (см. замечания 3 и 4, а также лемму 4 и утверждения 1, 2). Перетаскивая этот граф при помощи изотопии слоев над путем $\tilde{\gamma}_{\xi, \xi_i}$, получим граф в слое T_ξ . Аналогично понятию *окружности, исчезающей над путем* (см. [11; гл. I, § 3.2, лемма 2]), назовем полученный граф *графом, исчезающим над путем γ_{ξ, ξ_i}* .

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (формула Пикара–Лефшеца). Пусть на особом слое $f^{-1}(\xi_i)$ лежит ровно одна критическая точка, причем она является морсовской (см. определение 11 ниже). Согласно формуле Пикара–Лефшеца оператор монодромии $M_{\xi_i^*} \in \text{Aut}(H_1(T_\xi))$, отвечающий образующей ξ_i^* фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma_f, \xi)$ (см. обозначение 1), имеет вид $M_{\xi_i^*}(h) = h + \langle \Delta_i, h \rangle \Delta_i$, $h \in H_1(T_\xi)$, где $\Delta_i \in H_1(T_\xi)$ – исчезающий цикл (т.е. класс гомологий исчезающей окружности) над путем γ_{ξ, ξ_i} (см. определение 9, В)), $\langle \Delta_i, h \rangle$ – индекс пересечения циклов Δ_i и h в $H_1(T_\xi)$ (см. [11; гл. I, § 2, предложение 4; § 3, лемма 2 и теоремы 3, 4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Кратностью* критической точки $p \in \mathbb{C}^2$ многочлена $f(z, w)$ (числом Милнора) называется степень отображения

$$\Gamma: S_\varepsilon^3 \rightarrow S^3, \quad (z, w) \mapsto \frac{(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w))}{|(\frac{\partial f}{\partial z}(z, w), \frac{\partial f}{\partial w}(z, w))|},$$

где S_ε^3 – сфера в $\mathbb{C}^2$ с центром в точке p достаточно малого радиуса ε (см. [12] и [11; гл. I, § 3, предложение 1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Критическая точка $p \in \mathbb{C}^2$ многочлена $f(z^1, z^2)$, в которой матрица вторых частных производных $\|\frac{\partial^2 f(z^1, z^2)}{\partial z^i \partial z^j}\|_p$ невырождена, называется *морсовской критической точкой*. Многочлен называется *морсовским*, если все его критические точки морсовские.

2.3. Гиперэллиптические гамильтонианы: топология неособого слоя, локальная классификация особенностей лагранжева слоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Комплексный полиномиальный гамильтониан вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, где $P_n(w)$ – многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ от w , будем также называть *гиперэллиптическим гамильтонианом степени n* (имеется в виду степень по w).

ЛЕММА 3. Пусть ξ – неособое значение гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$. Тогда слой $T_\xi \subset \mathbb{C}^2$ гомеоморфен сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками и без $n - 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 1 + \frac{1+(-1)^n}{2}$ точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двулистное разветвленное накрытие

$$\text{Pr}_w|_{T_\xi}: T_\xi \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto w.$$

Точки ветвления в конечной части плоскости совпадают с корнями уравнения $P_n(w) = \xi$, всего n конечных точек ветвления. Рассмотрим точку $\infty \in \mathbb{C}$ и сделаем замену переменной $u = \frac{1}{w}$. Пусть $P_n(w) - \xi = (w - w_1) \cdots (w - w_n)$, где $w_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $z(u) = \pm i \sqrt{u^{-n}} \sqrt{(1 - w_1 u) \cdots (1 - w_n u)}$. При четном n точка $u = 0$ не является точкой ветвления, а при нечетном n является точкой ветвления. Значит, T_ξ имеет один прокол при нечетном n и два прокола при четном n . Эйлерова характеристика $\chi(T_\xi) = 2\chi(\mathbb{C}) - n$, откуда

$$2 - 2g - \left(1 + \frac{1 + (-1)^n}{2}\right) = 2 - n,$$

где g – количество ручек. Отсюда $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4 (локальная классификация особенностей: особенность типа A_{k-1}). Для любого гиперэллиптического гамильтониана $f(z, w)$ и любой его критической точки $p \in \mathbb{C}^2$ кратности $k - 1$ существуют число $\varepsilon > 0$ и замкнутая окрестность $\bar{U}^4 \subset \mathbb{C}^2$ точки $p \in U^4$ такие, что функция $f|_{\bar{U}^4}$ эквивалентна функции $g: \bar{V}_{k,\varepsilon}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $g(z, w) = z^2 + w^k + f(p)$,

$$\bar{V}_{k,\varepsilon}^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^k| \leq \varepsilon, |w| \leq (2\varepsilon)^{1/k}\}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть критическая точка $p = (z_0, w_0)$; тогда $z_0 = 0$ и $f(z, w) = z^2 + (w - w_0)^k Q_{n-k}(w - w_0) + f(p)$, где $Q_{n-k}(x)$ – многочлен степени $n - k$, причем $Q_{n-k}(0) \neq 0$. Рассмотрим окрестность $U_1^4 \subset \mathbb{C}^2$ точки $p \in U_1^4$ такую, что для любой точки $(z, w) \in U_1^4$ выполнено

$$|Q_{n-k}(w - w_0) - Q_{n-k}(0)| < |Q_{n-k}(0)|.$$

В U_1^4 корректно определено отображение $\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi: U_1^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$, где $\text{id}_{\mathbb{C}}: z \mapsto z$, $\varphi: w \mapsto (w - w_0) \sqrt[k]{Q_{n-k}(w - w_0)}$, $\sqrt[k]{\cdot}$ – одна из ветвей в U_1^4 . Существует окрестность $U_2^4 \subset U_1^4$ точки $p \in U_2^4$ такая, что

$$(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)|_{U_2^4}: U_2^4 \rightarrow (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)(U_2^4)$$

– диффеоморфизм. Выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что $\bar{V}_{k,\varepsilon}^4 \subset (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)(U_2^4)$. Положим $\bar{U}^4 := (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)^{-1}(\bar{V}_{k,\varepsilon}^4)$; тогда $(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)|_{\bar{U}^4}: \bar{U}^4 \rightarrow \bar{V}_{k,\varepsilon}^4$ – диффеоморфизм и

$$\begin{aligned} g \circ (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi)(z, w) &= g\left(z, (w - w_0) \sqrt[k]{Q_{n-k}(w - w_0)}\right) \\ &= z^2 + (w - w_0)^k Q_{n-k}(w - w_0) + f(p) = f(z, w). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.4. Наборы кратностей критических точек на особых слоях.

ТЕОРЕМА 1 (Р. Том; см. [8; теорема (1)]). *Любой системе $(\xi_j)_{j=1}^k$ различных комплексных чисел и любой системе наборов натуральных чисел $(p_j^i)_{i=1}^{r_j}$, $1 \leq j \leq k$, таких, что при любом $j \in [1, k]$ выполнено $\sum_{i=1}^{r_j} (p_j^i + 1) \leq n$ и $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{r_j} p_j^i = n - 1$, можно сопоставить многочлен $P = P_n(w)$ степени n , имеющий множество критических значений $(\xi_j)_{j=1}^k$ и набор кратностей $(p_j^i)_{i=1}^{r_j}$ критических точек из $P^{-1}(\xi_j)$ для каждого $j \in [1, k]$.*

Для гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ обозначим количество различных особых слоев через $s(f)$, а количество критических точек на особом слое T_{ξ_j} – через r_j , $1 \leq j \leq s(f)$. Набор кратностей критических точек на особом слое T_{ξ_j} обозначим $(p_j^i)_{i=1}^{r_j}$, а сумму этих кратностей обозначим $\mu_j := \sum_{i=1}^{r_j} p_j^i$, $1 \leq j \leq s(f)$. Из теоремы Тома (см. теорему 1) получаем следующее утверждение о количествах критических точек на особых слоях для гиперэллиптических многочленов.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть имеется произвольный гиперэллиптический многочлен $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ степени n . Тогда:*

- 1) $\mu_1 + \dots + \mu_{s(f)} = n - 1$;
- 2) $r_j \leq \mu_j$, $r_j + \mu_j \leq n$ для любого $j = 1, \dots, s(f)$.

Верно обратное: для любых чисел $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_1, \dots, r_s, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), любого разбиения $(p_j^i)_{i=1}^{r_j}$ каждого μ_j в сумму r_j слагаемых, $1 \leq j \leq s$, и любых различных точек $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{C}$ существует гиперэллиптический многочлен степени $n = \mu_1 + \dots + \mu_s + 1$, имеющий ровно s различных критических значений, равных $\xi_1, \dots, \xi_s$, причем на каждом особом слое T_{ξ_j} имеется ровно r_j критических точек с кратностями $p_j^1, \dots, p_j^{r_j}$, $j = 1, \dots, s$.

§ 3. Топология слоения в окрестности особой точки (локальная топологическая классификация особенностей)

Для любых $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ обозначим через $D_{z_0, r}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ и $\overline{D}_{z_0, r}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ соответственно открытый и замкнутый двумерные диски в $\mathbb{C}$ радиуса r с центром в точке z_0 . Аналогично (2) при любом $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\begin{aligned}\overline{V}_\varepsilon^4 &= \overline{V}_{n, \varepsilon}^4 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon, |w| \leq (2\varepsilon)^{1/n}\}, \\ V_\varepsilon^4 &= V_{n, \varepsilon}^4 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon, |w| < (2\varepsilon)^{1/n}\}, \\ \partial^+ \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 &:= \overline{V}_{n, \varepsilon}^4 \setminus V_{n, \varepsilon}^4 = \{(z, w) \mid |z^2 + w^n| \leq \varepsilon, |w| = (2\varepsilon)^{1/n}\}.\end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (топология слоения в замкнутой окрестности критической точки четной кратности). *При четном $n \in \mathbb{N}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $g = g_n: \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z, w) = z^2 + w^n + \xi_0$, топологически эквивалентна функции $q = q_n: M_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_{\varepsilon, n}^4 = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$, а отношение эквивалентности $\sim$ порождено следующими $n+1$ отношениями:*

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi + t + 2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_- \right) \\ &\quad \sim_{1, k} \left(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{-\varphi + t - 2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_+ \right), \\ &(0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) \sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h), \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}0 \leq k \leq n-1, \quad r \in [0, \varepsilon], \quad \varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad t \in [-\pi, \pi], \\ h \in [-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1], \quad q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0.\end{aligned}$$

Здесь $0_+ := 0 \in [0_+, 1]$, $0_- := 0 \in [-1, 0_-]$ и $g(\overline{V}_\varepsilon^4) = q(M_{\varepsilon, n}^4) = \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. А. Исчезающая окружность или исчезающий граф. Пространство $M_{\varepsilon, n}^4 := ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim$ получено из тривиально расслоенного пространства $\widetilde{M}_{\varepsilon, n}^4 := [0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])$ путем отождествлений, описанных в (3) и имеющих следующий геометрический смысл. В пространстве $\widetilde{M}_{\varepsilon, n}^4$ каждый слой $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])$ является несвязным объединением двух цилиндров, причем первое соотношение $\sim_1$, порожденное набором соотношений $\sim_{1, k}$ формулы (3), $0 \leq k < n$, превращает слой в связную двумерную поверхность рода $\frac{n-2}{2}$ с краем из двух компонент, отождествляя верхнее основание первого цилиндра, разбитое на n равных дуг (которые пометим последовательно символами $a_1, \dots, a_n$ при положительном обходе основания цилиндра), с нижним основанием второго цилиндра, разбитым на n равных дуг (которые пометим последовательно символами $a_n, \dots, a_1$ при положительном обходе основания цилиндра), причем первое разбиение на дуги повернуто на угол φ/n в направлении своей ориентации, а второе разбиение – на тот же угол в направлении, противоположном своей ориентации, при помощи попарного склеивания соответствующих дуг с учетом

ориентации. На каждом слое $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim_1$ получаем граф $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times \{0_-, 0_+\}) / \sim_1$ с двумя вершинами и n ребрами $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых соединяет обе вершины, гомеоморфный графу $K_{2,n}$ и называемый *исчезающим графом*. При $n = 2$ исчезающий граф гомеоморфен окружности и называется *исчезающей окружностью*. Оставшееся соотношение $\sim_2$ в (3) отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \sqcup [0_+, 1])) / \sim_1$, где $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$, т.е. формирует особый слой. Из соотношений в (3) следует, что на особом слое исчезающий граф склеивается в точку (перетяжка на особом слое). Таким образом, семейство исчезающих графов (исчезающих окружностей при $n = 2$) на неособых слоях стремится к особой точке (исчезает) при стремлении слоя к особому.

В. *Тривиальность слоения на дополнении к исчезающим графам*. Обозначим $T_\xi := g_n^{-1}(\xi)$, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$. Согласно утверждению 1 имеем локально тривиальное расслоение

$$g_n|_{\overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \setminus T_{\xi_0}} : \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \setminus T_{\xi_0} \rightarrow \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \setminus \{\xi_0\} \subset \mathbb{C} \quad (4)$$

над проколотым двумерным кругом. Обозначим через $Z_{\varepsilon, n}^3$ объединение особой точки $\{(0, 0)\}$ и всех исчезающих графов (см. п. А), оно является трехмерным комплексом. Рассмотрим функцию

$$g_n|_{\overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \setminus Z_{\varepsilon, n}^3} : \overline{V}_{\varepsilon, n}^4 \setminus Z_{\varepsilon, n}^3 \rightarrow \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}. \quad (5)$$

Тогда описанная в утверждении 1 топологическая эквивалентность функций индуцирует послыйную эквивалентность слоения (5) тривиальному расслоению

$$\overline{D}_{0, \varepsilon}^2 \times S^1 \times ([-1, 0] \sqcup (0, 1]) \rightarrow \overline{D}_{0, \varepsilon}^2$$

над двумерным кругом. Здесь мы использовали гомеоморфизм

$$\overline{D}_{0, \varepsilon}^2 \approx ([0, \varepsilon] \times S^1) / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отношениями $(0, \varphi \bmod 2\pi) \sim (0, 0 \bmod 2\pi)$ при всех $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$. В силу тривиальности расслоения (5) над кругом определена *относительная монодромия*

$$[\tilde{M}_{\xi_0^*}] \in \pi_0(\text{Homeo}(T_{\xi_0 + \varepsilon}, T_{\xi_0 + \varepsilon} \setminus V_\varepsilon^4))$$

исходного расслоения (4) над проколотым двумерным кругом, отвечающая образующей ξ_0^* фундаментальной группы $\pi_1(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \setminus \{\xi_0\}, \xi_0 + \varepsilon)$ (см. обозначение 1). Здесь подгруппа $\text{Homeo}(T_{\xi_0 + \varepsilon}, T_{\xi_0 + \varepsilon} \setminus V_\varepsilon^4) \subset \text{Homeo}(T_{\xi_0 + \varepsilon})$ состоит из всех гомеоморфизмов слоя $T_{\xi_0 + \varepsilon}$, ограничение которых на $T_{\xi_0 + \varepsilon} \setminus V_\varepsilon^4$ является тождественным отображением, и $\tilde{M}_{\xi_0^*} \in \text{Homeo}(\tilde{T}_{\xi_0 + \varepsilon}, T_{\xi_0 + \varepsilon} \setminus V_\varepsilon^4)$. Из утверждения 1 получаем, что в качестве представителя $\tilde{M}_{\xi_0^*}$ относительной монодромии можно взять гомеоморфизм

$$\tilde{M}_{\xi_0^*} : (\varepsilon, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) \mapsto \left(\varepsilon, 0 \bmod 2\pi, \psi + \frac{2\pi\delta(1 - |h|)}{n} \bmod 2\pi, h \right),$$

где $(\psi \bmod 2\pi, h) \in S^1 \times ([-1, 0_-] \cup [0_+, 1])$, а $\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ – такая неубывающая гладкая функция, что $\delta|_{(-\infty, 0]} = 0$ и $\delta|_{[1, +\infty)} = 1$. То есть относительная монодромия $[\tilde{M}_{\xi_0}^*]$ является элементарным скручиванием Дэна вокруг исчезающего графа на слое $T_{\xi_0+\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Шаг 1. Функция $q: M_{\varepsilon, n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ определена корректно, так как

$$q\left(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi \pm t + 2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_{\mp}\right) = re^{i\varphi} + \xi_0,$$

$$q(0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = \xi_0.$$

Шаг 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ подмножества

$$A_{n, \varphi_0, a, b, \pm} := \left\{ w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid a \leq r \leq b, 0 \leq \pm(\varphi - \varphi_0) \leq \frac{\pi}{n} \right\},$$

$$B_{n, \varphi_0, b, \pm} := A_{n, \varphi_0, 0, b, \pm}.$$

Введем вещественные координаты $(u = u_{n, \varphi_0, \pm}, v = v_{n, \varphi_0, \pm})$ на $B_{n, \varphi_0, b, \pm}$ соотношением

$$ue^{i(\varphi_0 \pm \pi/n)} + ve^{i\varphi_0} = w,$$

где

$$0 \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq d_{n, b}(u), \quad d_{n, b}(u) := -u \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{b^2 - u^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Подмножество $A_{n, \varphi_0, a, b, \pm} \subset B_{n, \varphi_0, b, \pm}$ в координатах (u, v) задается соотношениями $d_{n, a}(u) \leq v \leq d_{n, b}(u)$ и $0 \leq u \leq b$. Определим гомеоморфизм $\alpha_{n, \varphi_0, a, b, \pm}: B_{n, \varphi_0, b, \pm} \rightarrow A_{n, \varphi_0, a, b, \pm}$ в координатах (u, v) формулой

$$\alpha_{n, \varphi_0, a, b, \pm}(u, v) = \begin{cases} (u, v), & u \geq a, \\ \left(u, d_{n, a}(u) + v \frac{d_{n, b}(u) - d_{n, a}(u)}{d_{n, b}(u)}\right), & u \leq a. \end{cases}$$

Отображение $\alpha_{n, \varphi_0, a, b, \pm}$ корректно определено и непрерывно, так как при $u = a$ выполнено

$$\left(u, d_{n, a}(u) + v \frac{d_{n, b}(u) - d_{n, a}(u)}{d_{n, b}(u)}\right) = (u, v)$$

в силу $d_{n, a}(a) = 0$. Введем множества

$$A_{n, \varphi_0, a, b} := A_{n, \varphi_0, a, b, +} \cup A_{n, \varphi_0, a, b, -}, \quad B_{n, \varphi_0, b} := B_{n, \varphi_0, b, +} \cup B_{n, \varphi_0, b, -}$$

и гомеоморфизм $\alpha_{n, \varphi_0, a, b}: B_{n, \varphi_0, b} \rightarrow A_{n, \varphi_0, a, b}$, $\alpha_{n, \varphi_0, a, b}(w) := \alpha_{n, \varphi_0, a, b, \pm}(w)$ при $w \in B_{n, \varphi_0, b, \pm}$.

Шаг 3. При четном n определим отображение $h_1: \bar{V}_\varepsilon^4 \rightarrow M_{\varepsilon,n}^4$ формулой

$$h_1(z, w) = \begin{cases} \left(r, \varphi, -\eta \arg \alpha(w), \eta \frac{|\alpha(w)| - r^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} \right), & r \geq 0, w^n \notin [0, re^{i\varphi}], \\ (r, \varphi, -\eta \arg \alpha(w), 0_\eta), & r > 0, w^n \in [0, re^{i\varphi}], \\ (0, 0, 0, 0_+), & z = w = 0, \end{cases}$$

где вторая и третья координаты точки $h_1(z, w) \in M_{\varepsilon,n}^4$ рассматриваются по модулю 2π ,

$$z^2 + w^n = re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \alpha(w) = \alpha_{r,\varphi,l}(w) := \alpha_{n, \frac{\varphi + \pi + 2\pi l}{n}, r^{1/n}, (2\varepsilon)^{1/n}}(w),$$

$$\eta = \eta_l(z, w) := \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}\right), & r \geq 0, w^n \notin [0, re^{i\varphi}], \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{z}{w^{n/2}}\right), & r > 0, w^n \in (0, re^{i\varphi}), \\ +, & r \geq 0, w^n = re^{i\varphi}, z = 0, \\ (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{z}{e^{i\varphi/2}}\right), & r > 0, w = 0, \end{cases}$$

число $l = l(r, \varphi, w) \in \mathbb{Z} \cap [0, n-1]$ определяется условиями

$$l(r, \varphi, 0) := 0, \quad \arg w \in \left[\frac{\varphi + 2\pi l}{n}, \frac{\varphi + 2\pi(l+1)}{n} \right)$$

при $w \neq 0, r > 0$.

Проверим корректность определения знака $\eta_l(z, w) = \pm 1$. В первых двух случаях имеем $w \neq 0$; положим $\lambda := \frac{z}{w^{n/2}}$, откуда $re^{i\varphi} = z^2 + w^n = (\lambda^2 + 1)w^n$. Поэтому в первом случае $\lambda^2 \notin [0, +\infty)$, откуда $\lambda \notin \mathbb{R}$, а во втором случае $\lambda^2 > 0$, поэтому $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В четвертом случае из $w = 0$ получаем $z = \pm r^{1/2} e^{i\varphi/2}$, поэтому $\frac{z}{e^{i\varphi/2}} = \pm r^{1/2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Значит, $\eta_l(z, w)$ и $h_1(z, w)$ определены корректно.

Шаг 4. Проверим, что отображение h_1 непрерывно в каждой точке $(\hat{z}, \hat{w}) \in \bar{V}_\varepsilon^4$. Пусть $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}, \hat{\eta} := \eta_{\hat{l}}(\hat{z}, \hat{w})$, $\hat{\alpha} := \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}}(\hat{w})$ — соответствующие значения в точке $(\hat{z}, \hat{w})$. Обозначим через $\tilde{l} \in \mathbb{Z}$ такое число, что $|\varphi + 2\pi\tilde{l} - \hat{\varphi} - 2\pi\hat{l}| < \pi$, и через $\bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$ множество всех точек $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n}^4$, для которых $l := l(r, \varphi, w) = \tilde{l}$ и значения $h_1(z, w)$ и $\eta := \eta_l(z, w)$ вычисляются по тем же формулам, что $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ и $\hat{\eta}$. Тогда $h_1(z, w) \rightarrow h_1(\hat{z}, \hat{w})$ при $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$ и $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$. Пусть далее $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n}^4 \setminus \bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$ и точка (z, w) достаточно близка к $(\hat{z}, \hat{w})$. Рассмотрим все возможные положения точки $(\hat{z}, \hat{w})$.

А. Дополнение к исчезающему графу в неособом слое. Пусть $\hat{r} > 0, \hat{w}^n \notin [0, \hat{r}e^{i\hat{\varphi}}]$. Тогда значения $h_1(z, w)$ и $\eta = \eta_l(z, w)$ вычисляются по своим первым формулам, откуда $\eta = \hat{\eta}$. Если $\arg \hat{w} > \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l}}{n}$, то $l = \tilde{l}$, откуда $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$ и все доказано (см. выше). Если $\arg \hat{w} = \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l}}{n}$, то $\alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{l}}(\hat{w}) = \hat{w}$ и $\alpha_{r,\varphi,l}(w) = w$ для любой точки (z, w) из малой окрестности точки $(\hat{z}, \hat{w})$ (независимо от l) в силу построения гомеоморфизма $\alpha_{n,\varphi_0,a,b}$ на шаге 2. Поэтому отображение $h_1(z, w)$ непрерывно в данной окрестности.

В. Дополнение к исчезающему графу в особом слое. Пусть $\hat{r} = 0$, $\hat{w} \neq 0$. Тогда $\alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \alpha_{0,\varphi,l}(\hat{w}) = \hat{w} = \hat{\alpha}$ при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ (независимо от φ, l). В малой окрестности точки $(\hat{z}, \hat{w})$ значения $h_1(z, w)$ и $\eta = \eta_l(z, w)$ вычисляются по первым формулам, поэтому $\eta = \hat{\eta}$ и $h_1(z, w) \rightarrow h_1(\hat{z}, \hat{w})$ при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$.

С. Открытое ребро $a_{\hat{l}+1}$ исчезающего графа на неособом слое. Пусть $\hat{r} > 0$, $\hat{w}^n \in (0, \hat{r}e^{i\varphi}]$. Тогда значение $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по второй формуле, а значение $\hat{\eta} = \eta_{\hat{l}}(\hat{z}, \hat{w})$ – по второй или третьей формуле, причем

$$\hat{\lambda} := \frac{\hat{z}}{\hat{w}^{n/2}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad |\hat{\lambda}| = \sqrt{\frac{\hat{r}}{|\hat{w}|^n} - 1},$$

откуда получаем $d\lambda(\hat{z}, \hat{w}) = \mu d(\frac{z^2+w^n}{w^n})$ для $\mu = \mu(\hat{z}, \hat{w}) = \frac{1}{2\hat{\lambda}}$. Имеем $\hat{w} \neq 0$, $\arg \hat{w} = \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}}{n}$, $|\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}$, $\arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}+\hat{t}}{n}$ для некоторого $\hat{t} \in [0, \pi)$.

Если $\hat{z} \neq 0$ и $(z, w) \notin \bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$, то $w^n \notin [0, re^{i\varphi}]$ и каждое значение $h_1(z, w)$ и $\eta_l(z, w)$ вычисляется по своей первой формуле, причем выполнено либо

$$\arg w \in \left(\frac{\varphi + 2\pi\tilde{l}}{n}, \frac{\varphi + 2\pi(\tilde{l} + 1)}{n} \right), \quad l = \tilde{l},$$

либо

$$\arg w \in \left(\frac{\varphi + 2\pi(\tilde{l} - 1)}{n}, \frac{\varphi + 2\pi\tilde{l}}{n} \right), \quad l = \tilde{l} - 1.$$

В первом случае при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ имеем, во-первых, $\alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \alpha_{\hat{r},\hat{\varphi},\hat{l}}(\hat{w}) = \hat{\alpha}$, откуда $|\alpha_{r,\varphi,l}(w)| \rightarrow |\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}+\hat{t}}{n}$, и, во-вторых, значение $\eta := \eta_l(z, w) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda(z, w))$ (вычисленное по первой формуле) в силу $\operatorname{Im} \hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda}\mu(\hat{z}, \hat{w}) > 0$ (см. выше) равно значению $-\operatorname{sgn}(\hat{\lambda}) = \hat{\eta}$ (вычисленному по второй формуле). Поэтому значение $h_1(z, w)$, вычисленное по первой формуле, стремится к значению

$$\left(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}, 0_{\hat{\eta}} \right) = h_1(\hat{z}, \hat{w}),$$

вычисленному по второй формуле. Во втором случае при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, \hat{w})$ имеем, во-первых, $\alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \alpha_{\hat{r},\hat{\varphi},\hat{l}-1}(\hat{w})$, откуда $|\alpha_{r,\varphi,l}(w)| \rightarrow \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}-\hat{t}}{n}$, и, во-вторых, значение $\eta_l(z, w) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{n/2}}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda(z, w))$ (вычисленное по первой формуле) в силу $\operatorname{Im} \hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda}\mu(\hat{z}, \hat{w}) > 0$ (см. выше) равно значению $\operatorname{sgn}(\hat{\lambda}) = -\hat{\eta}$ (вычисленному по второй формуле). Поэтому значение $h_1(z, w)$ (вычисленное по первой формуле) стремится к значению

$$\left(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} - \hat{t}}{n}, 0_{-\hat{\eta}} \right) \sim_{1,\hat{l}} \left(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + 2\pi\hat{l} + \hat{t}}{n}, 0_{\hat{\eta}} \right) = h_1(\hat{z}, \hat{w})$$

(вычисленному по второй формуле). Здесь мы использовали соотношение $\sim_{1,\hat{l}}$ в пространстве $M_{\varepsilon,n}^4$ (см. (3)).

Пусть теперь $\hat{z} = 0$ (середина ребра $a_{\hat{l}+1}$ исчезающего графа) и $(z, w) \notin \bar{V}_{\varepsilon,n,\hat{z},\hat{w}}^4$. Тогда значение $\hat{\eta} = \eta_{\hat{l}}(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по третьей формуле в определении $\eta_l(z, w)$, поэтому либо каждое значение $h_1(z, w)$ и $\eta_l(z, w)$ вычисляется

по своей первой формуле, либо каждое – по своей второй формуле. Дальнейшее доказательство аналогично приведенному выше с учетом того, что $\hat{t} = 0$ (откуда $\arg \alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}}{n} = \arg \hat{\alpha}$) и что пара точек $(\hat{r}, \hat{\varphi} \bmod 2\pi, \mp \frac{\hat{\varphi}+2\pi\hat{l}}{n}, 0_{\pm})$ склеивается в одну точку в $M_{\varepsilon,n}^4$ в силу соотношения $\sim_{1,\hat{l}}$.

Д. *Вершина исчезающего графа на неособом слое.* Пусть $\hat{r} > 0$, $\hat{w} = 0$. Тогда значение $h_1(\hat{z}, \hat{w})$ вычисляется по второй формуле, а значение $\hat{\eta} = \eta_{\hat{l}}(\hat{z}, \hat{w})$ – по четвертой формуле, причем $\hat{l} = l(\hat{r}, \hat{\varphi}, 0) = 0$. Поскольку $\hat{\alpha} = \alpha_{\hat{r}, \hat{\varphi}, 0}(0)$, то $|\hat{\alpha}| = \hat{r}^{1/n}$ и $\arg \hat{\alpha} = \frac{\hat{\varphi}+\pi}{n}$, откуда $\hat{\eta} = -\operatorname{sgn} \frac{\hat{z}}{e^{i\hat{\varphi}/2}}$ и $h_1(\hat{z}, \hat{w}) = (\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi}+\pi}{n}, 0_{\hat{\eta}})$. Если $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$, то из $w \rightarrow 0$ получаем $|\alpha_{r,\varphi,l}(w)| \rightarrow \hat{r}^{1/n}$ независимо от значения $l = l(r, \varphi, w)$. Для любой пары $(l, \eta) \in (\mathbb{Z} \cap [0, n-1]) \times \{+, -\}$ обозначим через $\bar{V}_{\varepsilon,n,l,\eta}^4$ множество всех точек $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n}^4$, для которых $l(r, \varphi, w) = l$ и $\eta_l(z, w) = \eta$. Тогда при $(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$ и $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n,l,\eta}^4$ имеем

$$\arg \alpha_{r,\varphi,l}(w) \rightarrow \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi(l - \tilde{l})}{n}, \quad h_1(z, w) \in (0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times \{\eta h \mid h \in [0, 1)\}$$

и $h_1(z, w)$ вычисляется по первой или второй формуле, откуда

$$h_1(z, w) \rightarrow \left(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\eta \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi(l - \tilde{l})}{n}, 0_{\eta} \right).$$

Полученная предельная точка $(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\eta \frac{\hat{\varphi} + \pi + 2\pi(l - \tilde{l})}{n}, 0_{\eta}) \in M_{\varepsilon,n}^4$ не зависит от l, η и совпадает с точкой $(\hat{r}, \hat{\varphi}, -\hat{\eta} \frac{\hat{\varphi} + \pi}{n}, 0_{\hat{\eta}}) = h_1(\hat{z}, \hat{w})$ в силу

$$\eta = (-1)^{l-1} \operatorname{sgn} \left(\operatorname{Re} \frac{z}{e^{i\varphi/2}} \right) = (-1)^{l-\tilde{l}} \hat{\eta}$$

и соотношений $\sim_{1,k}$ при $t = \pm\pi$.

Е. *Исчезающий граф (перетяжка) на особом слое – особая точка.* Пусть $\hat{r} = 0$, $\hat{w} = 0$. Тогда $\hat{z} = 0$ и $h_1(\hat{z}, \hat{w}) = \hat{h}_1(0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ по третьей формуле в определении $h_1(z, w)$. При $(z, w) \rightarrow (0, 0)$ имеем $r \rightarrow 0$ (т.е. слой стремится к особому) и $w \rightarrow 0$, откуда $|\alpha_{r,\varphi,l}(w)| \rightarrow 0$ (т.е. точка $h_1(z, w)$ стремится к исчезающему графу $\{(0, 0)\} \times S^1 \times \{0\}$ на особом слое $\{(0, 0)\} \times S^1 \times ([-1, 0_-] \cup [0_+, 1])$). Так как в $M_{\varepsilon,n}^4$ указанный граф отождествляется в точку $(0, 0, 0, 0_+)$, имеем $h_1(z, w) \rightarrow (0, 0, 0, 0_+) = \hat{h}_1(0, 0)$.

Шаг 5. Покажем, что отображение h_1 инъективно. Пусть

$$h_1(z_1, w_1) = h_1(z_2, w_2) =: (r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h).$$

Тогда $z_1^2 + w_1^n = z_2^2 + w_2^n = r e^{i\varphi}$. Если $h \notin \{0_-, 0_+\}$, то в силу

$$h = \eta_1 \frac{|\alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1)| - r^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} = \eta_2 \frac{|\alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2)| - r^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1/n} - r^{1/n}} \neq 0,$$

$$\psi = -\eta_1 \arg \alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1) = -\eta_2 \arg \alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2)$$

имеем $\operatorname{sgn} h = \eta_1 = \eta_2 =: \eta$ и $\alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1) = \alpha_{r,\varphi,l_2}(w_2) =: \alpha$; отсюда

$$\arg \alpha \in \left[\frac{\varphi + 2\pi l_j}{n}, \frac{\varphi + 2\pi(l_j + 1)}{n} \right), \quad j = 1, 2,$$

поэтому $l_1 = l_2$ и $w_1 = w_2$, а в силу $\eta = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{w_1^{n/2}}\right) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}\left(\frac{z_2}{w_2^{n/2}}\right)$ имеем $z_1 = z_2$, т.е. $(z_1, w_1) = (z_2, w_2)$. Если $h \in \{0_-, 0_+\}$ и $r = 0$, то каждое $h_1(z_j, w_j)$ вычисляется по третьей формуле, и поэтому $z_j = w_j = 0$, $j = 1, 2$.

Пусть $h \in \{0_-, 0_+\}$ и $r > 0$, тогда каждое $h_1(z_j, w_j)$ вычисляется по второй формуле. По построению имеем $\arg(\alpha_{r,\varphi,l_1}(w_1)) = \frac{\varphi+t+2\pi l_1}{n}$ для некоторого $t \in [0, \pi]$, откуда

$$h_1(z_1, w_1) = \left(r, \varphi, -\eta \frac{\varphi + t + 2\pi l_1}{n}, 0_\eta\right) = \left(r, \varphi, \frac{\varphi - \eta t + 2\pi l_1}{n}, 0_-\right),$$

где $\eta := \eta_{l_1}(z_1, w_1)$. Поэтому в случае $0 < t < \pi$ (соответственно $t = 0$, $t = \pi$) имеем $w_1 \neq 0$ (соответственно $w_1 \neq 0$, $w_1 = 0$), $l_1 = l_2$ и оба значения η_{l_1} , η_{l_2} , $\eta_{l_2}(z_2, w_2) = \eta = \eta_{l_1}(z_1, w_1)$, вычисляются по второй (соответственно третьей, четвертой) формуле, откуда $(z_1, w_1) = (z_2, w_2)$ (соответственно $w_1 = w_2$ и $z_1 = z_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 0$ и $z_1 = z_2$).

Шаг 6. Докажем, что $h_1(\bar{V}_{\varepsilon,n}^4) = M_{\varepsilon,n}^4$. Рассмотрим любую точку $(r, \varphi, \psi, h) \in M_{\varepsilon,n}^4$. Аналогично шагу 5 показывается, что в каждом случае $h \notin \{0_-, 0_+\}$ и $h \in \{0_-, 0_+\}$ имеется точка $(z, w) \in \bar{V}_{\varepsilon,n}^4$ такая, что $h_1(z, w) = (r, \varphi, \psi, h)$.

Так как отображение h_1 непрерывно, биективно и определено на компакте $\bar{V}_{\varepsilon,n}^4$, то оно является гомеоморфизмом.

Утверждение 1 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (топология слоения в замкнутой окрестности критической точки нечетной кратности). *При нечетном $n \in \mathbb{N}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $g = g_n: \bar{V}_{\varepsilon,n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z, w) = z^2 + w^n + \xi_0$, топологически эквивалентна функции $q = q_n: M_{\varepsilon,n}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где $M_{\varepsilon,n}^4 = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim$, а отношение эквивалентности $\sim$ порождено следующими $n + 1$ отношениями:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi + t + 2\pi k}{n} \bmod 4\pi, 0\right) \\ \sim_{1,k} \left(r, \varphi \bmod 2\pi, \frac{\varphi - t + 2\pi k}{n} + 2\pi \bmod 4\pi, 0\right), \\ (0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) \\ \sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h), \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$0 \leq k \leq n-1, \quad \varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad h \in [-1, 0], \\ q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0.$$

При этом $g(\bar{V}_{\varepsilon}^4) = q(M_{\varepsilon,n}^4) = \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. А. Исчезающий граф. Как и в замечании 3, пространство $M_{\varepsilon,n}^4 := ([0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim$ получено из тривиально расслоенного пространства $\widetilde{M}_{\varepsilon,n}^4 := [0, \varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0]$ путем отождествлений, описанных в (6) и имеющих следующий геометрический смысл. В пространстве $\widetilde{M}_{\varepsilon,n}^4$ каждый слой является цилиндром $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]$, причем первое соотношение $\sim_1$, порожденное набором соотношений $\sim_{1,k}$ формулы (6), $0 \leq k < n$,

превращает слой в связную двумерную поверхность рода $\frac{n-1}{2}$ со связным краем, отождествляя точки верхнего основания цилиндра, разбитого на $2n$ равных дуг (которые пометим последовательно символами $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ при положительном обходе основания цилиндра, причем разбиение на дуги повернуто на угол $\frac{\varphi}{2n} \bmod 2\pi$ в направлении ориентации этого основания), при помощи попарного склеивания соответствующих дуг с обращением ориентации. На каждом слое $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim_1$ получаем граф $(\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times \{0\}) / \sim_1$ с двумя вершинами и n ребрами $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых соединяет обе вершины, гомеоморфный графу $K_{2,n}$ и называемый *исчезающим графом*. (При $n = 1$ исчезающий граф является отрезком.) Оставшееся соотношение $\sim_2$ в (6) отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times [-1, 0]) / \sim_1$, где $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$, т.е. формирует особый слой. Из соотношений в (6) следует, что на особом слое исчезающий граф склеивается в точку (перетяжка на особом слое). Таким образом, семейство исчезающих графов на неособых слоях стремится к особой точке (исчезает) при стремлении слоя к особому.

В. *Тривиальность слоения на дополнении к исчезающим графам.* Аналогично замечанию 3 обозначим $T_\xi := g_n^{-1}(\xi)$, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$, а через $Z_{\varepsilon, n}^3$ обозначим объединение особой точки $\{(0, 0)\}$ и всех исчезающих графов (см. п. А), оно является трехмерным комплексом. Согласно утверждению 2 имеем локально тривиальное расслоение (4) над проколотым двумерным кругом, причем описанная в этом утверждении топологическая эквивалентность функций индуцирует послойную эквивалентность слоения (5) тривиальному расслоению

$$\overline{D}_{0, \varepsilon}^2 \times S^1 \times [-1, 0] \rightarrow \overline{D}_{0, \varepsilon}^2$$

над двумерным кругом. Аналогично замечанию 3, В определена *относительная монодромия* $[M_{\xi_0}^*] \in \pi_0(\text{Homeo}(T_{\xi_0 + \varepsilon}, T_{\xi_0 + \varepsilon} \setminus V_\varepsilon^4))$ исходного расслоения (4) над проколотым кругом, отвечающая образующей ξ_0^* фундаментальной группы $\pi_1(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \setminus \{\xi_0\}, \xi_0 + \varepsilon)$. Из утверждения 2 получаем, что в качестве представителя $M_{\xi_0}^*$ этой относительной монодромии можно взять гомеоморфизм

$$\tilde{M}_{\xi_0}^* : (\varepsilon, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) \mapsto \left(\varepsilon, 0 \bmod 2\pi, \psi + \frac{2\pi\delta(1 - |h|)}{n} \bmod 4\pi, h \right),$$

где $(\psi \bmod 4\pi, h) \in S^1 \times [-1, 0]$, а функция δ такая, как в замечании 3, В. То есть относительная монодромия $[M_{\xi_0}^*]$ является элементарным скручиванием Дэна вокруг исчезающего графа на слое $T_{\xi_0 + \varepsilon}$.

Доказательство утверждения 2 проводится аналогично доказательству утверждения 1.

§ 4. Топология слоения в окрестности слоя (полулокальная топологическая классификация особенностей)

На протяжении данного параграфа будем использовать обозначение $l := \bigcup_{j=1}^k l_j$, где $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ – набор кратностей всех особых точек $p_1, \dots, p_k$ на слое $T_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$. При $k = 0$ положим $l := 0$.

Обозначим через $M_{g,b}^2$ компактную связную ориентированную поверхность рода $g \geq 0$, край которой состоит из $b \geq 0$ компонент. Она гомеоморфна сфере с g ручками, из которой выкинуты внутренности b попарно непересекающихся замкнутых двумерных дисков. Обозначим через $M_{g,h,b}^2$ связную ориентированную поверхность, полученную из компактной поверхности $M_{g,b}^2$ выкидыванием h внутренних точек.

ЛЕММА 5. Пусть $T_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$ – особое или неособое множество уровня гиперэллиптического многочлена $f(z, w)$ степени $n \geq 2$, содержащее ровно $k \geq 0$ критических точек $p_1, \dots, p_k \in T_{\xi_0}$, причем кратности этих точек равны $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$, $l_1, \dots, l_k \geq 2$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, существуют четырехмерные окрестности $U_{1,\varepsilon}^4, \dots, U_{k,\varepsilon}^4$ точек $p_j \in U_{j,\varepsilon}^4$ в $f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)$, $j = 1, \dots, k$, такие, что:

1) функция $f|_{\overline{U}_{j,\varepsilon}^4}(z, w)$ эквивалентна функции $f_{j,1}: \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, где

$$\overline{V}_{j,\varepsilon}^4 = \{(z, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + \tilde{w}^{l_j}| \leq \varepsilon, |\tilde{w}| \leq (2\varepsilon)^{1/l_j}\}$$

и $f_{j,1}(z, \tilde{w}) = z^2 + \tilde{w}^{l_j} + \xi_0$, а также топологически эквивалентна функции $q_{l_j}: M_{\varepsilon,l_j}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ (см. утверждения 1 и 2), $j = 1, \dots, k$;

2) функция $f|_{(f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)}$ топологически эквивалентна функции

$$f_0: \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_0(\xi, x) = \xi, \quad \xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2, \quad x \in L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k},$$

где

$$L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} := T_{\xi_0} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right)$$

– комплексное многообразие с краем, $\dim_{\mathbb{C}} L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} = 1$, гомеоморфное либо поверхности $M_{g,h,b}^2$ при $n > l$ или существовании хотя бы одного нечетного l_j , либо поверхности $M_{0,1,k}^2 \sqcup M_{0,1,k}^2$ при четном $n = l$ и всех l_j четных, где $g = \left[\frac{n-1}{2} \right] - \sum_{j=1}^k \left[\frac{l_j}{2} \right]$, $h = \frac{3+(-1)^n}{2}$, $b = \sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $p_j = (0, w_{0,j})$ рассмотрим замкнутые окрестности $\overline{U}_{j,\varepsilon}^2$ и $\overline{U}_{j,\varepsilon}^4 \subset \mathbb{C} \times \overline{U}_{j,\varepsilon}^2$ точек $w_{0,j}$ и p_j , а также диффеоморфизмы

$$\varphi_j: \overline{U}_{j,\varepsilon}^2 \rightarrow \overline{D}_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2, \quad \varphi_j: w \mapsto \tilde{w}, \quad (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \varphi_j)|_{\overline{U}_{j,\varepsilon}^4}: \overline{U}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \overline{V}_{\varepsilon,l_j}^4,$$

как в лемме 4 и ее доказательстве соответственно, $1 \leq j \leq k$. Пункт 1) следует из леммы 4 и утверждений 1, 2. Докажем п. 2).

Шаг 1. При любом $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$ рассмотрим отображение

$$\text{Pr}_w|_{T_{\xi} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)}: T_{\xi} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2) \right), \quad (z, w) \mapsto w.$$

Оно является двулистным разветвленным накрытием с $n-l$ точками ветвления над поверхностью $\mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2)) \approx M_{0,1,k}^2$. При $n > l$ накрываемое пространство $T_{\xi} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ связно, так как накрытие двулистно и имеет

точки ветвления. При $n = l$ накрытие двулистно и не имеет точек ветвления; над компонентой края $\partial(\varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2))$ накрытие тривиальное тогда и только тогда, когда l_j четно, над бесконечно удаленной точкой $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ накрытие неразветвленное тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^k l_j$ четно. Поэтому накрывающее пространство $T_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ несвязно при всех четных l_j и связно, если хотя бы одно l_j нечетно. Значит, при всех четных l_j накрывающее пространство гомеоморфно несвязному объединению двух экземпляров поверхности $M_{0,1,k}^2$.

Пусть накрывающее пространство связно. Тогда количество h проколов равно $\frac{3+(-1)^n}{2}$ (см. доказательство леммы 3), а количество

$$b = \left| \pi_0 \left(\partial \left(T_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \right) \right) \right|$$

компонент связности границы равно $\sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}$ (в силу утверждений 1 и 2). По формуле Гурвица имеем

$$\chi \left(T_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \right) = 2\chi \left(\mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2) \right) \right) - (n - l) = 2 - 2k - n + l.$$

Отсюда и из равенств

$$h = \frac{3+(-1)^n}{2}, \quad b = \sum_{j=1}^k \frac{3+(-1)^{l_j}}{2}, \quad \chi \left(T_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \right) = 2 - 2g - h - b$$

получаем $g = \left[\frac{n-1}{2} \right] - \sum_{j=1}^k \left[\frac{l_j}{2} \right]$.

Шаг 2. Для любого $\xi \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$ рассмотрим двулистное разветвленное накрытие

$$\text{Pr}_w|_{T_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)} : T_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2) \right), \quad (z, w) \mapsto w.$$

Точки ветвления задаются уравнениями $z = 0$, $P_n(w) = \xi$ и $(z, w) \notin \bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4$. Последнее соотношение равносильно $w \notin \bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(\bar{D}_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2)$. Обозначим образы точек ветвления при отображении $\text{Pr}_w|_{T_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)}$ через $w_i(\xi)$, $1 \leq i \leq n - l$. Рассмотрим $\tau > 0$ такое, что

$$\bar{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2 \cap \bar{D}_{w_{i_1}(\xi_0),\tau}^2 = \emptyset$$

при $1 \leq i < i_1 \leq n - l$, а также

$$w_i(\xi) \in D_{w_i(\xi_0),\tau}^2, \quad \bar{D}_{w_i(\xi_0),\tau}^2 \cap \left(\bigcup_{j=1}^k \varphi_j^{-1}(\bar{D}_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}}^2) \right) = \emptyset$$

для любых $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$, $1 \leq i \leq n-l$. Рассмотрим семейство отображений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\xi: (f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2)) \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w|_{(f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4)})}^{-1}(D_{w_i(\xi_0), \tau}^2) \right) \right) \\ \rightarrow T_{\xi_0} \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w|_{T_{\xi_0} \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4)})^{-1}(D_{w_i(\xi_0), \tau}^2) \right) \right), \\ (z, w) \mapsto (\pm \sqrt{\xi_0 - P_n(w)}, w), \quad \xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2, \end{aligned}$$

такое, что $\tilde{\varphi}_{\xi_0} = \text{id}$.

Определим отображение $\tilde{\rho}_{\tau, r}: [-\tau, \tau] \rightarrow [-\tau, \tau]$ формулой $\tilde{\rho}_{\tau, r}(x) = \frac{\tau^2 x + r\tau^2}{rx + \tau^2}$ при любом $r \in \mathbb{R}$, $|r| < \tau$. Тогда отображение $\tilde{\rho}_{\tau, r}$ при $r \in (-\tau, \tau)$ является гомеоморфизмом, причем $\tilde{\rho}_{\tau, r}(0) = r$ и $\tilde{\rho}_{\tau, 0} = \text{id}_{[-\tau, \tau]}$. Определим отображение $\rho_{\tau, r}: \overline{D}_{0, \tau}^2 \rightarrow \overline{D}_{0, \tau}^2$ формулой

$$\rho_{\tau, r}(x, y) = \begin{cases} (\tilde{\rho}_{\sqrt{\tau^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}}(x), y), & |y| \leq r, \\ (x, y), & |y| \geq r. \end{cases}$$

Тогда отображение $\rho_{\tau, r}$ при $r \in (-\tau, \tau)$ является гомеоморфизмом, причем $\rho_{\tau, r}|_{\partial D_{0, \tau}^2}$ – тождественное отображение, $\rho_{\tau, r}(0, 0) = (r, 0)$ и $\rho_{\tau, 0} = \text{id}_{\overline{D}_{0, \tau}^2}$. Для каждого $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$ и $1 \leq i \leq n-l$ определим отображение

$$\tilde{\varphi}_{\xi, i}: T_\xi \cap ((\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0), \tau}^2)) \rightarrow T_{\xi_0} \cap ((\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0), \tau}^2))$$

такое, что $\tilde{\varphi}_{\xi, i}: (z, w) \mapsto (\pm \sqrt{\xi_0 - P_n(\tilde{w}_{\xi, i}(w))}, \tilde{w}_{\xi, i}(w))$ и $\tilde{\varphi}_{\xi_0, i} = \text{id}$, где $\tilde{w}_{\xi, i} := \text{id}$ при $w_i(\xi) = w_i(\xi_0)$,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\xi, i}(w) := e^{i \arg(w_i(\xi) - w_i(\xi_0))} (\rho_{\tau, |w_i(\xi) - w_i(\xi_0)|})^{-1} (e^{-i \arg(w_i(\xi) - w_i(\xi_0))} (w - w_i(\xi_0))) \\ + w_i(\xi_0) \end{aligned}$$

при $w_i(\xi) \neq w_i(\xi_0)$. Тогда отображение $\tilde{\varphi}_{\xi, i}$ является гомеоморфизмом, причем $\tilde{\varphi}_{\xi, i}(0, w_i(\xi)) = (0, w_i(\xi_0))$.

Шаг 3. Определим отображение

$$\varphi_\xi: T_\xi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right) \rightarrow T_{\xi_0} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right)$$

при $\xi \in \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2$ формулой

$$\varphi_\xi(z, w) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_\xi(z, w), & (z, w) \in T_\xi \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-l} (\text{Pr}_w|_{T_\xi \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4)})^{-1}(D_{w_i(\xi_0), \tau}^2) \right) \right), \\ \tilde{\varphi}_{\xi_0, i}(z, w), & (z, w) \in T_{\xi_0} \cap (\text{Pr}_w)^{-1}(\overline{D}_{w_i(\xi_0), \tau}^2), \end{cases}$$

$1 \leq i \leq n - l$. Тогда отображение φ_ε корректно определено и является гомеоморфизмом. Определим отображение

$$q: (f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2)) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j, \varepsilon}^4 \right) \rightarrow \overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$$

формулой $q: (z, w) \mapsto (f(z, w), \varphi_{f(z, w)}(z, w))$. Тогда q является гомеоморфизмом и $f = f_0 \circ q$.

Лемма доказана.

Пусть $l := \sum_{j=1}^k l_j$, $\varepsilon > 0$, $\overline{V}_{j, \varepsilon}^4 := \overline{V}_{\varepsilon, l_j}^4$, $L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k} \approx M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^2$, где $M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^2 := M_{g, h, b}^2$ при $n > l$ или при $n = l$ и существовании нечетного l_j , $M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^2 := M_{0, 1, k}^2 \sqcup M_{0, 1, k}^2$ при четном $n = l$ и всех четных l_j , как в лемме 5. Обозначим

$$\partial^+ \overline{V}_{j, \varepsilon}^4 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^{l_j}| \leq \varepsilon, |w| = (2\varepsilon)^{1/l_j}\}.$$

Фиксируем ориентацию на $M_{n, k, l_1, \dots, l_k}^2 \approx L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$ и рассмотрим любой гомеоморфизм

$$\alpha_{n, k, l_1, \dots, l_k}: \bigsqcup_{j=1}^k \left(\left(\mathbb{R} / \frac{8\pi}{3 + (-1)^{l_j}} \mathbb{Z} \right) \times \{j\} \times \{(-1)^{l_j}, -1\} \right) \rightarrow \partial L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$$

такой, что $L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$ лежит справа при прохождении вдоль каждого из путей

$$\gamma_{j, \eta} \left(\psi \bmod \frac{8\pi}{3 + (-1)^{l_j}} \right) = \alpha_{n, k, l_1, \dots, l_k} \left(\psi \bmod \frac{8\pi}{3 + (-1)^{l_j}}, j, \eta \right) \in \partial L_{n, \varepsilon, l_1, \dots, l_k},$$

$$\eta \in \{(-1)^{l_j}, -1\}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

ТЕОРЕМА 2 (топология слоения в замкнутой окрестности слоя). Пусть $T_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$ – особый или неособый слой гиперэллиптического многочлена $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$ степени $n \geq 2$, содержащий ровно $k \geq 0$ критических точек $p_1, \dots, p_k \in T_{\xi_0}$, причем кратности этих точек равны $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ соответственно, где $l_1, \dots, l_k \geq 2$. Тогда $l \leq n$, $l < n + k$ и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ функция $f|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2)}$ топологически эквивалентна функции $f_{n, k, l_1, \dots, l_k}: M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^4 \rightarrow \mathbb{C}$. Здесь

$$M_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}^4 = \left(\bigsqcup_{j=1}^k \overline{V}_{j, \varepsilon}^4 \right) \bigcup_{\phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}} (\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k})$$

$$:= \left(\left(\bigsqcup_{j=1}^k \overline{V}_{j, \varepsilon}^4 \right) \sqcup (\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}) \right) / (x \sim \phi_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}(x))$$

получено из несвязного объединения множеств

$$\overline{V}_{j, \varepsilon}^4 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2 + w^{l_j}| \leq \varepsilon, |w| \leq (2\varepsilon)^{1/l_j}\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

и множества $\overline{D}_{\xi_0, \varepsilon}^2 \times L_{n, k, \varepsilon, l_1, \dots, l_k}$ отождествлением любой точки

$$x \in \partial^+ \overline{V}_{j, \varepsilon}^4 = \{(z, w) \mid |z^2 + w^{l_j}| \leq \varepsilon, |w| = (2\varepsilon)^{1/l_j}\}$$

с ее образом $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(x) \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ при гомеоморфизме

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} : \bigsqcup_{j=1}^k \partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k},$$

задаваемом формулой

$$\begin{aligned} & \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, w) \\ & := \left(z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \alpha_{n,k,l_1,\dots,l_k} \left((\arg w) \bmod 2\pi, j, \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{z}{w^{l_j/2}} \right) \right) \end{aligned}$$

при четном l_j и $(z, w) \in \partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4$ и формулой

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, w) := (z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \alpha_{n,k,l_1,\dots,l_k}(2(\arg \sqrt{w}) \bmod 4\pi, j, -1))$$

при нечетном l_j и $(z, w) \in \partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4$, где ветвь $\sqrt{w}$ определяется условием $\operatorname{Im}(z/(\sqrt{w})^{l_j}) < 0$, $1 \leq j \leq k$, а функция $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}$ задается формулами

$$\begin{aligned} f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \big|_{\overline{V}_{j,\varepsilon}^4} (z, w) &= z^2 + w^{l_j} + \xi_0, & (z, w) \in \overline{V}_{j,\varepsilon}^4, \quad 1 \leq j \leq k, \\ f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \big|_{\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}} (\xi, x) &= \xi, & (\xi, x) \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}. \end{aligned}$$

При отождествлении $\overline{V}_{j,\varepsilon}^4 \approx M_{\varepsilon,l_j}^4$ с помощью топологической эквивалентности из утверждений 1 и 2 приклеивающий гомеоморфизм $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \big|_{\partial^+ \overline{V}_{j,\varepsilon}^4}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & ([0, \varepsilon] \times S^1) / \sim \times S^1 \times \{(-1)^{l_j}, -1\} \rightarrow \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}, \\ & (r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, \eta) \mapsto (re^{i\varphi} + \xi_0, \alpha_{n,k,l_1,\dots,l_k}(-\eta\psi \bmod 2\pi, j, \eta)) \end{aligned}$$

при четном l_j и вид

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, -1) \mapsto (re^{i\varphi} + \xi_0, \alpha_{n,k,l_1,\dots,l_k}(\psi \bmod 4\pi, j, -1))$$

при нечетном l_j , $\eta \in \{(-1)^{l_j}, -1\}$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отношениями $(0, \varphi \bmod 2\pi) \sim (0, 0 \bmod 2\pi)$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$, а функция $f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \big|_{\overline{V}_{j,\varepsilon}^4}$ имеет вид

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) \mapsto re^{i\varphi} + \xi_0$$

при четном l_j и вид

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 4\pi, h) \mapsto re^{i\varphi} + \xi_0$$

при нечетном l_j , $1 \leq j \leq k$. При этом $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4) = \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что ориентация на поверхности $L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ индуцирована комплексной структурой и гомеоморфизм $\alpha = \alpha_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ определен формулой

$$\alpha_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(\psi \bmod 2\pi, j, \pm 1) = (\pm i\sqrt{2\varepsilon}e^{il_j\psi/2}, \varphi_j^{-1}(\sqrt[4]{2\varepsilon}e^{i\psi}))$$

при четном l_j и формулой

$$\alpha_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(\psi \bmod 4\pi, j, -1) = (-i\sqrt{2\varepsilon}e^{il_j\psi/2}, \varphi_j^{-1}(\sqrt[4]{2\varepsilon}e^{i\psi}))$$

при нечетном l_j , где диффеоморфизмы $\varphi_j: w \mapsto \tilde{w}$ те же, что и в доказательстве лемм 4 и 5. Отображение $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ определено корректно, так как из $(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ и $\frac{z}{w^{l_j/2}} = \lambda \in \mathbb{R}$ следует

$$\varepsilon \geq |z^2 + w^{l_j}| = (\lambda^2 + 1)|w^{l_j}| = (\lambda^2 + 1)2\varepsilon \geq 2\varepsilon;$$

оно сюръективно, так как при четном l_j для $(\pm iw^{l_j/2}, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ выполнено $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{\pm iw^{l_j/2}}{w^{l_j/2}} = \pm 1$. Легко проверяется инъективность. Отображение

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}: M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4 \rightarrow \mathbb{C}$$

определено корректно, так как для любой точки $(z, w) \in \partial^+ \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ выполнено

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4}(z, w) = z^2 + w^{l_j} + \xi_0,$$

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}} \circ \phi_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}(z, w) = z^2 + w^{l_j} + \xi_0.$$

Согласно лемме 5 существуют $\varepsilon_0 > 0$ и набор семейств замкнутых окрестностей $\bar{U}_{j,\varepsilon}^4$ точек $p_j \in U_{j,\varepsilon}^4$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, такие, что для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ функция $f|_{\bar{U}_{j,\varepsilon}^4}$ эквивалентна функции $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{V}_{j,\varepsilon}^4}: \bar{V}_{j,\varepsilon}^4 \rightarrow \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2$, $1 \leq j \leq k$, а функция $f|_{f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)}$ топологически эквивалентна функции $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon}}$. Построим топологическую эквивалентность h между функцией $f|_{f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2)}$ и функцией $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}$ на всем $M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4$. Рассмотрим множество

$$f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) = \left(\bigcup_{j=1}^k \bar{U}_{j,\varepsilon}^4 \right) \cup \left(f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4 \right) \right).$$

При $(z, w) \in \bar{U}_{j,\varepsilon}^4$, $1 \leq j \leq k$, положим $h(z, w) = (z, \varphi_j(w)) \in \bar{V}_{j,\varepsilon}^4$ (см. доказательство леммы 4). При $(z, w) \in f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ положим

$$h(z, w) = (f(z, w), \varphi_{f(z,w)}(z, w)) \in \bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$$

(см. доказательство леммы 5, 2)). Отображение $h: f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \rightarrow M_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}^4$ определено корректно, так как для любой точки $(z, w) \in \bar{U}_{j,\varepsilon}^4 \cap (f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus U_{j,\varepsilon}^4)$, $1 \leq j \leq k$, выполнено

$$\begin{aligned} \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \circ h|_{\bar{U}_{j,\varepsilon}^4}(z, w) &= \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, \varphi_j(w)) \\ &= \left(z^2 + P_n(w), \alpha_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \left(\arg \varphi_j(w) \bmod 2\pi, j, \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{z}{(\varphi_j(w))^{l_j/2}} \right) \right) \\ &= \left(z^2 + P_n(w), \left(i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{z}{(\varphi_j(w))^{l_j/2}} (\varphi_j(w))^{l_j/2}, w \right) \right) \\ &= (f(z, w), \varphi_{f(z,w)}(z, w)) = h|_{f^{-1}(\bar{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus U_{j,\varepsilon}^4}(z, w) \end{aligned}$$

при четном l_j и

$$\begin{aligned} \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \circ h|_{\overline{U}_{j,\varepsilon}^4}(z, w) &= \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z, \varphi_j(w)) \\ &= (z^2 + P_n(w), \alpha_{n,k,l_1,\dots,l_k}(2(\arg \sqrt{w}) \bmod 4\pi, j, -1)) \\ &= (z^2 + P_n(w), (-i(\sqrt{\varphi_j(w)})^{l_j}, w)) \\ &= (f(z, w), \varphi_{f(z,w)}(z, w)) = h|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus U_{j,\varepsilon}^4}(z, w) \end{aligned}$$

при нечетном l_j .

Проверим, что h – топологическая эквивалентность: при $(z, w) \in \overline{U}_{j,\varepsilon}^4$ выполнено

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \circ h(z, w) = f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(z, \varphi_j(w)) = z^2 + P_n(w) = f(z, w),$$

при $(z, w) \in f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2) \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_{j,\varepsilon}^4)$ выполнено $h(z, w) \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}^2 \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ и

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \circ h(z, w) = f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(f(z, w), \varphi_{f(z,w)}(z, w)) = f(z, w),$$

откуда $f = f_{n,k,l_1,\dots,l_k} \circ h$. Теорема доказана.

§ 5. Монодромия лагранжева слоения

Для любых точек $a, b \in \mathbb{C}$ рассмотрим соединяющий их прямолинейный путь $\gamma_{a,b}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$ при $0 \leq t \leq 1$. В каждом из следующих примеров через γ_k обозначен прямолинейный путь в $\mathbb{C}$, ведущий из неособого значения 0 функции f в каждое из особых значений ξ_k функции f , $0 \leq k \leq s-1$, при этом $0 \leq \arg \xi_0 < \dots < \arg \xi_{s-1} < 2\pi$ (т.е. пути $\gamma_0, \dots, \gamma_{s-1}$ образуют отмеченную систему путей; см. [11; гл. I, § 3, определение 3]). Рассмотрим образующие ξ_i^* группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=0}^{s-1}, 0)$, представление монодромии $\mu: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\xi_i\}_{i=0}^{s-1}, 0) \rightarrow \text{Aut}(H_1(T_0))$, операторы монодромии $M_u = \mu(u)$ и группу монодромии M (см. обозначение 1 и определение 9, А). Для каждого $k = 0, \dots, s-1$ рассмотрим графы (например, окружности) в слое T_0 , исчезающие над путем γ_k (см. определение 9, В).

В следующих трех утверждениях неособый слой $T_0 = f^{-1}(0)$ гомеоморфен сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками и $n - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ проколами согласно лемме 3. Поэтому $H_1(T_0) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ обозначим $\varepsilon_m := e^{2\pi i/m}$ (примитивный корень степени m из 1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Рассмотрим морсовский гиперэллиптический многочлен $f(z, w) = z^2 - w^n + nw$, $n \geq 2$. Тогда:

- 1) функция f имеет ровно $n-1$ критических точек $(0, \varepsilon_{n-1}^k)$, $0 \leq k \leq n-2$, и все они морсовские;
- 2) особые значения попарно различны и суть $\xi_k = f(0, \varepsilon_{n-1}^k) = (n-1)\varepsilon_{n-1}^k$, $0 \leq k \leq n-2$;
- 3) окружность $\alpha_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(\gamma_{0,w_{k,0}}) \subset T_0$ на неособом слое $T_0 = f^{-1}(0)$ является окружностью, исчезающей над путем $\gamma_k(t) = t\xi_k$, $0 \leq t \leq 1$ (см. определение 9, В), где $w_{k,0} = n^{1/(n-1)}\varepsilon_{n-1}^k$, $0 \leq k \leq n-2$;

- 4) классы гомологий $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$ окружностей α_k , $0 \leq k \leq n-2$, образуют базис свободной абелевой группы $H_1(T_0) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$;
- 5) индексы пересечения базисных циклов $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$, снабженных подходящей ориентацией, имеют вид $\langle [\alpha_k], [\alpha_l] \rangle = 1$ при $0 \leq k < l \leq n-2$ и $\langle [\alpha_k], [\alpha_k] \rangle = 0$ при $0 \leq k \leq n-2$;
- 6) в базисе $[\alpha_l]$, $0 \leq l \leq n-2$, операторы монодромии $M_{\xi_k}^*$ действуют по формулам $M_{\xi_k}^*[\alpha_l] = [\alpha_l] + \text{sgn}(k-l)[\alpha_k]$, $0 \leq k, l \leq n-2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особые точки многочлена $f(z, w)$ суть $(0, w_0)$, где w_0 – корень многочлена $\frac{\partial f(z, w)}{\partial w} = -nw^{n-1} + n$, откуда получаем, что критические точки многочлена $f(z, w)$ суть $(0, \varepsilon_{n-1}^k)$, $k = 0, \dots, n-2$. Поэтому особые значения суть $f(0, \varepsilon_{n-1}^k) = (n-1)\varepsilon_{n-1}^k$, $k = 0, \dots, n-2$.

Проекция $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}$ является двулистным разветвленным накрытием с точками ветвления w , удовлетворяющими уравнению $-w^n + nw = 0$, откуда получаем, что точки ветвления суть 0 и $w_{k,0} = n^{1/(n-1)}\varepsilon_{n-1}^k$, $k = 0, \dots, n-2$, и пп. 4), 5) доказаны.

Рассмотрим путь $\gamma_k(t) = t(n-1)\varepsilon_{n-1}^k$ и уравнение $-w^n + nw = t(n-1)\varepsilon_{n-1}^k$. Введем переменную $\alpha = \varepsilon_{n-1}^{-k}w$, тогда уравнение будет иметь вид $-\alpha^n + n\alpha - (n-1)t = 0$. Так как

$$\frac{\partial(-\alpha^n + n\alpha - (n-1)t)}{\partial \alpha} = -n(\alpha^{n-1} - 1),$$

то при любом t функция $-\alpha^n + n\alpha - (n-1)t$ возрастает при $0 \leq \alpha \leq 1$ и убывает при $\alpha \geq 1$. При $t = 0$ получаем корни $\alpha = 0$ и $\alpha = n^{1/(n-1)}$, отсюда следует п. 3); п. 6) следует из формулы Пикара–Лефшеца. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Рассмотрим (неморсовский при $n > 2$) гиперэллиптический многочлен $f(z, w) = z^2 + w^n - 1$, $n \geq 2$. Тогда:

- 1) функция f имеет ровно одну критическую точку $(0, 0)$, эта критическая точка имеет кратность $n-1$;
- 2) особое значение одно и есть $\xi_0 = -1$;
- 3) объединение дуг $\beta_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(\gamma_{0, \varepsilon_n^k}) \subset T_0$, $k = 0, \dots, n-1$, на неособом слое $T_0 = f^{-1}(0)$ является графом, исчезающим над путем $\gamma(t) = -t$, $0 \leq t \leq 1$ (см. определение 9, В);
- 4) классы гомологий $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$ окружностей $\alpha_k := \beta_k \cup \beta_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-2$, образуют базис в гомологиях $H_1(T_0) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ неособого слоя $T_0 = f^{-1}(0)$;
- 5) индексы пересечения базисных циклов $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$, снабженных подходящей ориентацией, имеют вид $\langle [\alpha_k], [\alpha_{k+1}] \rangle = 1$ при $0 \leq k \leq n-3$ и $\langle [\alpha_k], [\alpha_l] \rangle = 0$ при $k \neq l \pm 1$, $0 \leq k, l \leq n-2$, где $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1} \cup \beta_0$;
- 6) в базисе $[\alpha_l]$, $0 \leq l \leq n-2$, оператор монодромии $M_{\xi_0}^*$ действует по формулам $M_{\xi_0}^*[\alpha_k] = -[\alpha_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-3$, $M_{\xi_0}^*[\alpha_{n-2}] = [\alpha_0] + \dots + [\alpha_{n-2}]$;
- 7) группа монодромии M является циклической группой порядка n , $M \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение следует из того, что

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (-nw^{n-1}, 2z).$$

2) Особое значение есть $\xi_0 = f(0, 0) = -1$.

3), 4), 5) Утверждение следует из доказательства утверждений 1, 2 и того, что разветвленное накрытие $\text{Pr}_w|_{T_0}$ двулистно и точки ветвления суть ε_n^k , $0 \leq k \leq n-1$.

6), 7) Если $\xi(t) = e^{it} - 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, то существует семейство гомеоморфизмов $\alpha_t: T_{\xi(0)} \rightarrow T_{\xi(t)}$, $\alpha_t(z, w) \mapsto (ze^{it/2}, we^{it/n})$, откуда следуют оба пункта.

Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Рассмотрим морсовский гиперэллиптический многочлен $f(z, w) = z^2 + T_n(w)$, $n \geq 3$, где $T_n(w)$ – многочлен Чебышёва первого рода степени n , $T_n(w) = \cos(n \arccos(w))$ при $w \in \mathbb{R}$ и $-1 \leq w \leq 1$. Тогда:

- 1) функция f имеет ровно $n-1$ критических точек $(0, \cos(\frac{\pi k}{n}))$, $1 \leq k \leq n-1$, все они морсовские;
- 2) различных особых значений два: $\xi_1 = -1$ и $\xi_0 = 1$, причем на особом слое $T_{-1} = f^{-1}(-1)$ имеется ровно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ критических точек $(0, \cos(\frac{2\pi k + \pi}{n}))$, $1 \leq 2k+1 \leq n-1$, а на особом слое $T_1 = f^{-1}(1)$ имеется ровно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ критических точек $(0, \cos(\frac{2\pi k}{n}))$, $1 \leq 2k \leq n-1$;
- 3) классы гомологий $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$ окружностей

$$\alpha_k := (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(\gamma_{a_k, a_{k+1}}) \subset T_0, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

образуют базис в гомологиях $H_1(T_0)$ неособого слоя $T_0 = f^{-1}(0)$, где $a_{l+1} := \cos(\frac{\pi + 2\pi l}{2n})$, $0 \leq l \leq n-1$;

- 4) окружности α_{2l-1} , $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, на неособом слое T_0 являются окружностями, исчезающими над путем $\gamma_1(t) = -t$, $0 \leq t \leq 1$, а окружности α_{2l} , $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, на неособом слое T_0 являются окружностями, исчезающими над путем $\gamma_0(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$ (см. определение 9, В);
- 5) индексы пересечения базисных циклов $[\alpha_k] \in H_1(T_0)$, $1 \leq k \leq n-1$, снабженных подходящей ориентацией, имеют вид $\langle [\alpha_k], [\alpha_{k+1}] \rangle = 1$ при $1 \leq k \leq n-2$ и $\langle [\alpha_k], [\alpha_l] \rangle = 0$ при $k \neq l \pm 1$, $1 \leq k, l \leq n-1$;
- 6) в базисе $[\alpha_l]$, $1 \leq l \leq n-1$, операторы монодромии $M_{\xi_0^*}, M_{\xi_1^*}$ действуют по формулам

$$\begin{aligned} M_{\xi_j^*}[\alpha_l] &= [\alpha_l] + [\alpha_{l-1}] - [\alpha_{l+1}] && \text{при } l \not\equiv j \pmod{2}, \\ M_{\xi_j^*}[\alpha_l] &= [\alpha_l] && \text{при } l \equiv j \pmod{2}, \end{aligned} \quad j = 0, 1,$$

$$\text{где } [\alpha_0] = [\alpha_n] := 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из того, что

$$\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f = \left(-n \frac{\sin(n \arccos(w))}{\sqrt{1-w^2}}, 2z \right),$$

следует, что критические точки имеют указанный вид. Они попарно различны и их количество равно $n-1$; отсюда следует, что все они морсовские.

2) Особые значения суть $f(0, \cos(\frac{\pi k}{n})) = \pm 1$, $1 \leq k \leq n-1$.

3) Утверждение следует из того, что слой T_0 неособый, накрытие $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}$ двулистно и точки ветвления суть $\cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2n})$, $0 \leq k \leq n-1$.

- 4) Утверждение следует из определения многочлена Чебышёва.
 5) Зафиксируем некоторую ориентацию окружности α_0 ; тогда из соотношения $\langle [\alpha_0], [\alpha_1] \rangle = 1$ однозначно определяется ориентация окружности α_1 и т.д.
 6) Утверждение следует из обобщения формулы Пикара–Лефшеца (см. замечания 3, 4).

Утверждение доказано.

§ 6. Комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптических гамильтонианов нечетной степени

Введем некоторые обозначения и сформулируем технические леммы (без доказательств), необходимые для понимания основного результата.

ЛЕММА 6. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_N(w)$, где $P_N(w)$ – любой многочлен степени $N \geq 1$ с комплексными коэффициентами, не имеющий кратных корней. Тогда:

- 1) отображение $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto w$, является двулистным разветвленным накрытием и переводит векторное поле $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ в векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0})$, корректно определенное с точностью до знака, т.е. для любых $(z_1, w), (z_2, w) \in T_0$ таких, что $z_1 \neq z_2$, верно

$$(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z_1, w)) = -(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f(z_2, w));$$

- 2) если все коэффициенты многочлена P_N вещественны, то определенное с точностью до знака векторное поле $\pm(\text{Pr}_w)_*(\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0})$ на $\mathbb{C}_w$ не меняется при отражении относительно вещественной прямой, т.е. инвариантно относительно преобразования $\text{Sym}: \mathbb{C}_w \rightarrow \mathbb{C}_w$, $w \mapsto \bar{w}$.

ЛЕММА 7 (нормализация гиперэллиптического многочлена нечетной степени и 2-формы $dz \wedge dw$ в бесконечно удаленных точках). Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w)$ – любой многочлен степени $2n + 1$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и голоморфное вложение $h: D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ такие, что

$$f \circ h(\xi, u) = \xi, \quad h^*(dz \wedge dw) = u^{2n-2} d\xi \wedge du, \quad (\xi, u) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}),$$

причем $\lim_{u \rightarrow 0} |h(\xi, u)| = \infty$ равномерно по $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$ и дополнение множества $h(D_{0,\varepsilon}^2 \times (D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\}))$ в $M_{\varepsilon}^4 := f^{-1}(D_{0,\varepsilon}^2)$ ограничено в $\mathbb{C}^2$. В частности, имеется комплексное 2-мерное связное многообразие $\widetilde{M}_{\varepsilon}^4$ с комплексно аналитическим атласом из двух карт, полученное из $M_{\varepsilon}^4 \subset \mathbb{C}^2$ приклеиванием множества $D_{0,\varepsilon}^2 \times D_{0,\varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}^2$ при помощи вложения h . При этом $\widetilde{M}_{\varepsilon}^4 \setminus M_{\varepsilon}^4 \approx D_{0,\varepsilon}^2 \times \{0\}$ (бесконечно удаленные точки $p_{\xi}, \xi \in D_{0,\varepsilon}^2$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w)$ – любой многочлен степени $2n + 1$ с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что поверхность уровня $T_{\xi} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = \xi\}$ неособа при $\xi \in \mathbb{C}$, $0 < |\xi| < \varepsilon$. Более того, неособая поверхность уровня T_{ξ}

гомеоморфна сфере с n ручками и одним проколом в бесконечно удаленной точке p_ξ . Векторное поле $\text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_\xi}$ и риманова метрика пополнения ds_ξ^2 в достаточно малой проколотой окрестности $U_\xi \subset T_\xi$ бесконечно удаленной точки p_ξ имеют соответственно вид

$$\dot{u} = u^{2-2n}, \quad ds_\xi^2 = u^{2n-2} \bar{u}^{2n-2} du \bar{d}u,$$

где $u: U_\xi \rightarrow D_{0,\varepsilon}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ – “координатный” диффеоморфизм такой, что $\lim_{g \rightarrow p_\xi} u(g) = 0$. В частности, пополнение $\bar{T}_\xi$ слоя T_ξ относительно римановой метрики пополнения ds_ξ^2 компактно и гомеоморфно сфере с n ручками. При этом на $\bar{T}_\xi$ имеется гладкое поле неотрицательно определенных квадратичных форм ds_ξ^2 такое, что $\bar{ds}_\xi^2|_{T_\xi} = ds_\xi^2$ и $ds_\xi^2(p_\xi) = 0$ при $n > 1$.

6.1. Интегральные траектории на “периодических” слоях.

ЛЕММА 8. Пусть

$$f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w),$$

где

$$P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \cdots (w - a_{2n+1}), \\ a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \quad a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда все интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_0}$, не являющиеся сепаратрисами, являются периодическими. Более того:

1) интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_0}$ и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}, (z, w) \mapsto w$ (см. лемму 6, 1)) выглядят, как на рис. 1; среди этих траекторий имеется ровно $2n - 1$ сепаратрис $s_1, \dots, s_{2n-1} \subset T_0$ (соответственно n сепаратрис $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{C}$ таких, что $s_1 = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_1)$, $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$, $k = 2, \dots, n$), которые разбивают слой T_0 на n связных компонент $c_1, \dots, c_n$, гомеоморфных внутренности цилиндра $S^1 \times (0, 1)$ (соответственно разбивают плоскость $\mathbb{C}$ на n областей $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{C}$ таких, что $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset C_k$, $c_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n$); в каждой цилиндрической области c_k траектории периодичны с периодом

$$T_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} \frac{dw}{\sqrt{-P_{2n+1}(w)}}, \quad k = 1, \dots, n;$$

всякая сепаратриса имеет начало и конец в бесконечно удаленной точке $p_0 \in \bar{T}_0$ и длины сепаратрис в метрике ds_0^2 суть $|s_{2k-2}| = |s_{2k-1}| = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} T_i$ при $k = 2, \dots, n$ и $|s_1| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} T_i$;

2) существуют сепаратрисы $d_1, \dots, d_n \subset T_0$ векторного поля $i \text{sgrad}_\mathbb{C} f|_{T_0}$, имеющие начало и конец в бесконечно удаленной точке p_0 , такие, что $d_k \subset c_k$ и их образы $\text{Pr}_w|_{T_0}(d_k) = D_k$ при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$ содержатся в C_k , причем при $k = 1, \dots, n - 1$ траектория D_k пересекает отрезок $[a_{2k}, a_{2k+1}] \subset \mathbb{C}_w$, а траектория D_n совпадает с лучом $[a_{2n+1}, +\infty) \subset \mathbb{C}_w$ (рис. 2);

3) упорядочивание пары сепаратрис $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$ в п. 1) и выбор одной из двух сепаратрис $d_k \subset (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(D_k)$ в п. 2) однозначно

Рис. 1. Траектории поля $\text{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{T_0}$ и их образы при проекции $\text{Pr}_w|_{T_0}: T_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$

Рис. 2. Проекция интегральных траекторий поля $i \text{sgrad } f|_{T_0}$ плоскость $\mathbb{C}_w$

определены следующим условием: подмножество

$$T_0^{++} := \left\{ \left(\sqrt{-P_{2n+1}(w)}, w \right) \mid \text{Im } w \geq 0 \right\} \subset T_0$$

(где ветвь функции $\sqrt{(\cdot)}$ определена условием $\sqrt{-P_{2n+1}(\frac{a_2+a_3}{2})} > 0$) имеет непустое пересечение с сепаратрисами

$$I(d_1), \quad I(s_{4k}), \quad I(d_{2k+1}), \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad s_{4k-2}, \quad d_{2k}, \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2} \right],$$

где $I: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – инволюция, определяемая формулой $I(z, w) = (-z, w)$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2 (разрезание невозмущенного слоя сепаратрисами на цилиндры). В обозначениях леммы 8 имеем разбиения

$$\mathbb{C}_w = S_1 \cup \dots \cup S_n \cup C_1 \cup \dots \cup C_n, \quad T_0 = s_1 \cup \dots \cup s_{2n-1} \cup c_1 \cup \dots \cup c_n$$

на сепаратрисы $s_1 = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_1)$, $s_{2k-2} \cup s_{2k-1} = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(S_k)$, $k = 2, \dots, n$, и области – открытые цилиндры $c_k = (\text{Pr}_w|_{T_0})^{-1}(C_k)$, $k = 1, \dots, n$. Границы областей $C_k \subset \mathbb{C}$ имеют вид $\partial C_k = S_k \cup S_{k+1}$ при $k = 1, \dots, n-1$ и $\partial C_n = S_n$, откуда границы цилиндрических областей c_k имеют вид

$$\partial c_1 = s_1 \cup s_2 \cup s_3, \quad \partial c_k = s_{2k-2} \cup s_{2k-1} \cup s_{2k} \cup s_{2k+1}, \quad \partial c_n = s_{2n-2} \cup s_{2n-1}$$

при $k = 2, \dots, n-1$, $n > 1$.

6.2. Семейства геодезических с концами в бесконечно удаленных точках на “возмущенных” слоях.

ЛЕММА 9. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \cdots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\overline{ds}_0^2$ – поле неотрицательно определенных квадратичных форм $\overline{ds}_0^2$ на пополнении $\overline{T}_0$ слоя $T_0 = f^{-1}(0)$ (см. определение 8 и следствие 2). Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{T}_0$ – (“невозмущенная”) геодезическая поля квадратичных форм $\overline{ds}_0^2$, имеющая начало и конец в бесконечно удаленной точке p_0 (см. лемму 8 и пояснение I ниже). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, и для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, существует (“возмущенная”) геодезическая $\gamma_\xi: [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$ поля квадратичных форм ds_ξ^2 (см. определение 8 и следствие 2), непрерывно зависящая от ξ , имеющая начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ (см. пояснение II ниже) и удовлетворяющая соотношению $\gamma_0 = \gamma$.

Сделаем некоторые пояснения.

I. В формулировке леммы 9 под геодезической поля квадратичных форм ds_ξ^2 на $\overline{T}_\xi$, имеющей начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ , понимается непрерывное отображение $\gamma_\xi: [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$ такое, что $\gamma_\xi(0) = \gamma_\xi(1) = p_\xi$, $\gamma_\xi(t) \in T_\xi$ при любом $t \in (0, 1)$, и $\gamma_\xi|_{(0,1)}: (0, 1) \rightarrow T_\xi$ является геодезической римановой метрики ds_ξ^2 на T_ξ .

II. В формулировке леммы 9 под условием о непрерывной зависимости геодезической $\gamma_\xi: [0, 1] \rightarrow \overline{T}_\xi$ от ξ понимается следующее: отображение

$$D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1] \rightarrow \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{T}_\xi = \widetilde{M}_\varepsilon^4, \quad (\xi, t) \mapsto \gamma_\xi(t),$$

непрерывно по совокупности переменных $(\xi, t) \in D_{0,\varepsilon}^2 \times [0, 1]$.

Используя леммы 8 и 9, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$, где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \cdots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой T_ξ является неособым, а также существует набор геодезических $s_1(\xi), \dots, s_{2n-1}(\xi), d_1(\xi), \dots, d_n(\xi) \subset \overline{T}_\xi$ поля квадратичных форм $\overline{ds}_\xi^2$ (см. следствие 2, лемму 8 и пояснение I),

$|\xi| < \varepsilon$, непрерывно зависящих от ξ , имеющих начало и конец в бесконечно удаленной точке p_ξ , удовлетворяющих соотношению $s_k(0) = s_k$, $k = 1, \dots, 2n-1$, $d_m(0) = d_m$, $m = 1, \dots, n$, и не проходящих через точки $(0, a_i(\xi)) \in T_\xi$, $i = 1, \dots, 2n+1$, где s_k такие, как в обозначении 2, d_m такие, как в лемме 8, $a_i(\xi)$ – корень уравнения $P_{2n+1}(w) = \xi$, близкий к a_i .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3 (разрезание возмущенного слоя геодезическими на цилиндры). Согласно следствию 3 при любом $\xi \in D_{0,\varepsilon}^2$ имеем следующие разбиения плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$ и слоя $T_\xi = f^{-1}(\xi)$, аналогичные введенным в обозначении 2 при $\xi = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_w &= S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi) \cup C_1(\xi) \cup \dots \cup C_n(\xi), \\ T_\xi &= s_1(\xi) \cup \dots \cup s_{2n-1}(\xi) \cup c_1(\xi) \cup \dots \cup c_n(\xi),\end{aligned}$$

где $C_k(\xi)$ – компонента связности $\mathbb{C}_w \setminus (S_1(\xi) \cup \dots \cup S_n(\xi))$, содержащая точки $a_{2k}(\xi), a_{2k+1}(\xi)$, $1 \leq k \leq n$. Границы цилиндрических областей $c_k(\xi)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\partial c_1(\xi) &= s_1(\xi) \cup s_2(\xi) \cup s_3(\xi), \\ \partial c_k(\xi) &= s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi), \quad k = 2, \dots, n-1, \\ \partial c_n(\xi) &= s_{2n-2}(\xi) \cup s_{2n-1}(\xi).\end{aligned}$$

6.3. Канонические комплексные координаты и функции перехода. Комплексная теорема Лиувилля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, как в следствии 3. Четырехмерной ε -окрестностью неособого слоя T_0 назовем область $U_\varepsilon(T_0) := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} T_\xi \subset \mathbb{C}^2$, а k -й четырехмерной ε -ручкой $G_{\varepsilon,k}$ назовем ее подмножество

$$G_{\varepsilon,k} := \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} \overline{c_k(\xi)} \subset U_\varepsilon(T_0),$$

где $\overline{c_k(\xi)}$ – замыкание цилиндрической области $c_k(\xi) \subset T_\xi$ из обозначения 3, $k = 1, \dots, n$.

Отметим, что количество четырехмерных ε -ручек $G_{\varepsilon,k}$ равно n (см. следствие 2 и обозначение 3), и ручки покрывают всю четырехмерную ε -окрестность $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 , т.е. $U_\varepsilon(T_0) = \bigcup_{k=1}^n G_{\varepsilon,k}$. В частности, для эллиптического многочлена ($n = 1$) ручка ровно одна и совпадает с ε -окрестностью $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 .

ТЕОРЕМА 3 (комплексная теорема Лиувилля для гиперэллиптического гамильтониана нечетной степени). Для $\mathbb{C}$ -гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f)$ с функцией Гамильтона $f(z, w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$ и соответствующего лагранжеева слоения (см. определение 5), где $P_{2n+1}(w) = (w - a_1) \cdots (w - a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что выполнены следующие свойства:

1) для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой $T_\xi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = \xi\}$ является неособым и гомеоморфен сфере с n ручками и одним проколом;

2) лагранжеево слоение в четырехмерной ε -окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ слоя T_0 тривиально, т.е. послойно гомеоморфно прямому произведению слоя T_0 на двумерный диск $D_\varepsilon^2 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < \varepsilon\}$;

3) в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ существуют $2n$ голоморфных функций

$$I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n: U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C},$$

а в каждой четырехмерной ε -ручке $G_{\varepsilon,k} \subset U_\varepsilon(T_0)$, $k = 1, \dots, n$, существуют комплексные координаты действие-угол

$$(I_k|_{G_{\varepsilon,k}}, \varphi_k \bmod 2\pi): G_{\varepsilon,k} \hookrightarrow \begin{cases} \bigcup_{I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}} \{I_1\} \times \overline{\left(T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right)\right)} \setminus \gamma_{I_1}, & k = 1, \\ \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), & 2 \leq k \leq n, \end{cases}$$

где через

$$T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right) := \mathbb{C}/2\pi\left(\mathbb{Z} \oplus \frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\mathbb{Z}\right)$$

обозначен комплексный тор с параметром $\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, через

$$\gamma_{I_1} \subset T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right)$$

обозначен образ прямолинейного отрезка $A_3^{(1)}(I_1)A_4^{(1)}(I_1) \subset \mathbb{C}$ (вырождающегося в точку в случае $n = 1$, см. ниже) при проекции $\mathbb{C} \rightarrow T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right)$ и через

$$\overline{\left(T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right)\right)} \setminus \gamma_{I_1}$$

обозначено пополнение “надрезанного” тора $(T_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\right)) \setminus \gamma_{I_1}$ относительно римановой метрики $d\varphi_1 \overline{d\varphi_1}$, со следующими свойствами:

(i) каждая из функций $I_k, J_k: U_\varepsilon(T_0) \rightarrow \mathbb{C}$ является голоморфной функцией $I_k = I_k(f)$ и $J_k = J_k(f)$ от f без критических точек, их множества значений

$$\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(U_\varepsilon(T_0)) = I_k(G_{\varepsilon,k}), \quad \hat{D}_{\varepsilon,k} := J_k(U_\varepsilon(T_0)) = J_k(G_{\varepsilon,k}) \subset \mathbb{C}$$

открыты в $\mathbb{C}$ и гомеоморфны открытому кругу, они выражаются в окрестности $U_\varepsilon(T_0)$ через любую другую такую формулами

$$I_k = I_k(f(I_\ell)), \quad I_k = I_k(f(J_\ell)), \quad J_k = J_k(f(I_\ell)), \quad J_k = J_k(f(J_\ell)),$$

где $f(I_k)$ и $f(J_k)$ – функции, обратные к функциям $I_k(f)$ и $J_k(f)$ соответственно, $k = 1, \dots, n$;

(ii) при любых $k = 1, \dots, n$ и $I_k \in \tilde{D}_{\varepsilon,k}$ множество значений комплексной угловой координаты $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_{f(I_k)}}$ получается из некоторой замкнутой области $W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}$, ограниченной шестиугольником с вершинами

$$A_1^{(k)}(I_k), \dots, A_6^{(k)}(I_k) \in \mathbb{C}$$

(вырождающимся при $k = n$ в параллелограмм с вершинами $A_1^{(n)}(I_n), A_2^{(n)}(I_n), A_3^{(n)}(I_n) = A_4^{(n)}(I_n), A_5^{(n)}(I_n) = A_6^{(n)}(I_n)$) и сторонами, соответствующими

 Рис. 3. Шестиугольник $\partial W_{1,I_1} \subset \mathbb{C}_{\varphi_1}$

 Рис. 4. Шестиугольник $\partial W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}_{\varphi_k}$, $1 < k < n$

 Рис. 5. Параллелограмм $\partial W_{n,I_n} \subset \mathbb{C}_{\varphi_n}$

геодезическим $d_k(f(I_k))$, $s_{2k-1}(f(I_k))$, $s_{2k-2}(f(I_k)) \subset T_{f(I_k)}$, а также геодезическим $s_{2k}(f(I_k))$, $s_{2k+1}(f(I_k)) \subset T_{f(I_k)}$ в случае $k < n$, следующим образом:

(а) выкидыванием всех вершин (соответствующих бесконечно удаленной точке $p_{f(I_k)}$);

(б) отождествлением (т.е. склеиванием) при помощи параллельного переноса любой пары сторон, отвечающих одной и той же геодезической ($d_k(f(I_k))$ либо $s_1(f(I_1))$ при $k = 1$); причем шестиугольник (соответственно параллелограмм при $k = n$) однозначно задается такими условиями (см. рис. 3–5 при $1 = k < n$, $1 < k < n$, $1 \leq k = n$ соответственно):

– шестиугольник (или параллелограмм) $\partial W_{k,I_k} \subset \mathbb{C}$ образован тремя парами равных и параллельных сторон, соответствующих следующим

геодезическим и получающихся друг из друга следующими сдвигами в плоскости $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k) &= \varphi_k(d_k(\xi)) \xrightarrow{2\pi} A_5^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) = \varphi_k(d_k(\xi)), \\ A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k) &= \varphi_k(s_{2k-1}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_1^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k-2}(\xi)), \\ A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k) &= \varphi_k(s_{2k}(\xi)) \xrightarrow{-\langle D_k(\xi) \rangle_k} A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k) = \varphi_k(s_{2k+1}(\xi)), \\ &k < n, \end{aligned}$$

где $\xi := f(I_k) \in D_{0,\varepsilon}^2$, через $\delta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначен параллельный перенос на вектор $\delta \in \mathbb{C}$ в плоскости $\mathbb{C}$, $s_0(\xi) := s_1(\xi)$,

$$\langle D_k(f(I_k)) \rangle_k := 2\pi \left(\frac{dJ_k}{dI_k}(I_k) - \frac{dJ_{k-1}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{dJ_1}{dI_k}(I_k) \right),$$

– при любом $k < n$ выполнено

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)} &= \overrightarrow{A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)} = \langle S_{k+1}(f(I_k)) \rangle_k \\ &:= 2\pi \left(\frac{dI_{k+1}}{dI_k}(I_k) - \frac{dI_{k+2}}{dI_k}(I_k) + \dots + (-1)^{n-k-1} \frac{dI_n}{dI_k}(I_k) \right), \end{aligned}$$

– точка пересечения диагоналей параллелограмма

$$A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$$

есть $\frac{1}{2}(A_1^{(k)}(I_k) + A_3^{(k)}(I_k)) = 0 = \varphi_k(0, a_{2k}(f(I_k)))$, откуда точка пересечения диагоналей вырождающегося в отрезок при $k = n$ параллелограмма

$$A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$$

есть $\frac{1}{2}(A_3^{(k)}(I_k) + A_5^{(k)}(I_k)) = \pi = \varphi_k(0, a_{2k+1}(f(I_k)))$, а при $k = 1$ центры отождествляемых сторон $A_2^{(1)}(I_1)A_3^{(1)}(I_1)$ и $A_1^{(1)}(I_1)A_6^{(1)}(I_1)$ суть отождествляемые точки $\pm \frac{1}{2}\langle D_1(f(I_1)) \rangle_1 = \varphi_1(0, a_1(f(I_1)))$;

в частности, при $k = 1$ для любого $I_1 \in \tilde{D}_{\varepsilon,1}$ образом комплексной угловой координаты

$$\varphi_1 \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,1} \cap T_{f(I_1)}} : G_{\varepsilon,1} \cap T_{f(I_1)} \rightarrow \overline{\left(T_{\mathbb{C}}^2 \left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \right) \right)} \setminus \gamma_{I_1}$$

является весь “пополненный надрезанный тор” $\overline{\left(T_{\mathbb{C}}^2 \left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \right) \right)} \setminus \gamma_{I_1}$ (совпадающий с тором $T_{\mathbb{C}}^2 \left(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1) \right)$ в случае $n = 1$) за исключением двух точек $A_3^{(1)}(I_1)$, $A_4^{(1)}(I_1)$ (совпадающих друг с другом в случае $n = 1$), являющихся концами линии надреза и отвечающих бесконечно удаленной точке;

(iii) $(dz \wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}} = dI_k \wedge d\varphi_k$, $k = 1, \dots, n$;

(iv) переменная действия $I_k = I_k(f)$ и функция $J_k = J_k(f)$ имеют соответственно вид

$$I_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy, \quad J_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \sqrt{\xi - P_{2n+1}(y)} dy,$$

$$\xi \in D_{0,\varepsilon}^2,$$

где в качестве функции $\sqrt{(\cdot)}$ берутся ее ветви такие, что:

$$\begin{aligned} \sqrt{-P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+1})\right)} &> 0 \quad \text{в первом случае,} \\ i\sqrt{-P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}(a_{2k-1} + a_{2k})\right)} &< 0 \quad \text{во втором случае;} \end{aligned}$$

(v) для любых двух ручек $G_{\varepsilon,k}, G_{\varepsilon,\ell}$, содержащих в своей границе одно и то же семейство геодезических $s_j(\xi)$, выполнено $k = \ell \pm 1$, причем в случае $1 \leq k < n$ пересечение $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1}$ является объединением геодезических:

$$G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,k+1} = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi)) = \bigcup_{|\xi| < \varepsilon} (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi)),$$

и на этом пересечении комплексные угловые координаты

$$\varphi_k \bmod 2\pi, \quad \varphi_{k+1} \bmod 2\pi$$

связаны друг с другом формулами

$$\begin{aligned} I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) &= I'_k(\xi)(\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi), \\ I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) &= I'_k(\xi)(\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi); \end{aligned}$$

(vi) уравнения Гамильтона в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ на ручке $G_{\varepsilon,k}$, $k = 1, \dots, n$, принимают вид

$$\dot{I}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{df(I_k)}{dI_k};$$

4) антиканоническая инволюция $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (-z, w)$, сохраняющая Гамильтониан f , переводит каждую четырехмерную ε -ручку $G_{\varepsilon,k}$ в себя, и ограничение этой инволюции на эту ручку в координатах $(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi)$ имеет вид

$$(I_k, \varphi_k \bmod 2\pi) \mapsto (I_k, -\varphi_k \bmod 2\pi), \quad 1 \leq k \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) получается из следствия 2. Пункт 2) следует из леммы 5 в специальном случае: когда на слое T_0 нет особых точек. Докажем п. 3).

Шаг 1. Определим функции $I_k = I_k(\xi)$, $J_k = J_k(\xi)$ формулами из п. (iv). Докажем п. (i), т.е. голоморфность функций $I_k(\xi)$, $J_k(\xi)$. По построению значение переменной действия I_k зависит только от ξ . Далее,

$$\begin{aligned} \frac{dI_k(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \frac{d(\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)})}{d\xi} dw + a'_{2k+1}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+1}(a_{2k+1}(\xi))} \right. \\ &\quad \left. - a'_{2k}(\xi) \sqrt{\xi - P_{2n+1}(a_{2k}(\xi))} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\xi| < \varepsilon$ производная $dI_k(\xi)/d\xi$ существует, поэтому $I_k = I_k(\xi)$ является голоморфной функцией. Более того, поскольку $dI_k(0)/d\xi \neq 0$, то можно считать, что $I_k|_{\{|\xi| < \varepsilon\}}$ является диффеоморфизмом открытого круга $D_{0,\varepsilon}^2$ радиуса ε на область $\tilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(\{|\xi| < \varepsilon\})$. Аналогично,

$$J'_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)} \frac{dw}{\sqrt{\xi - P_{2n+1}(w)}}.$$

Пункт (i) доказан.

Шаг 2. Для любой кусочно гладкой ориентированной кривой γ_ξ на слое T_ξ обозначим

$$\langle \gamma_\xi \rangle := \int_{\gamma_\xi} \Delta_\xi, \quad \langle \gamma_\xi \rangle_k := \frac{\langle \gamma_\xi \rangle}{I'_k(\xi)}, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2, \quad (7)$$

где Δ_ξ – голоморфная 1-форма на слое T_ξ (см. определение 8). Так как форма Δ_ξ замкнута, то ее интеграл $\langle \gamma_\xi \rangle$ по любому ориентированному циклу $\gamma_\xi \subset T_\xi$ не меняется при любых гомотопиях цикла в слое. Рассмотрим непрерывные по ξ семейства ориентированных циклов

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi,k} &:= (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}([a_{2k}(\xi), a_{2k+1}(\xi)]) \subset T_\xi \cap G_{\varepsilon,k}, \\ \hat{\gamma}_{\xi,k} &:= (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}([a_{2k-1}(\xi), a_{2k}(\xi)]) \subset T_\xi \end{aligned}$$

с такой ориентацией, что $\gamma_{0,k}$ и $\hat{\gamma}_{0,k}$ являются интегральными траекториями полей $\text{sgrad}_\mathbb{C} f$ и $i \text{sgrad}_\mathbb{C} f$ соответственно (см. лемму 8), $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\langle \gamma_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad \langle \hat{\gamma}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi) \quad (8)$$

в силу формул для $I'_k(\xi)$ и $J'_k(\xi)$ (см. шаг 1). Поэтому $\langle \gamma_{\xi,k} \rangle_k = 2\pi$ и существует единственная (многозначная при $k = 1$) функция $\varphi_k \bmod 2\pi$ в $G_{\varepsilon,k}$ такая, что

$$(d\varphi_k)|_{T_\xi \cap G_{\varepsilon,k}} = \Delta_\xi / I'_k(\xi), \quad \varphi_k(0, a_{2k}(\xi)) = 0, \quad \xi \in D_{0,\varepsilon}^2.$$

Пункт (iii) следует из того, что

$$dI_k \wedge d\varphi_k = \frac{df(z, w) \wedge dw}{2z} \Big|_{G_{\varepsilon,k}} = \frac{2z dz \wedge dw}{2z} \Big|_{G_{\varepsilon,k}} = (dz \wedge dw) \Big|_{G_{\varepsilon,k}}.$$

Пункт (vi) следует из п. (i) и п. (ii).

Шаг 3. Докажем п. (ii). Согласно следствию 3 существуют геодезические $s_1(\xi), \dots, s_{2n-1}(\xi): (0, 1) \rightarrow T_\xi$ римановой метрики ds_ξ^2 на $T_\xi \subset \overline{T}_\xi$ с концами

$$\lim_{t \rightarrow 0+} s_i(\xi)(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} s_i(\xi)(t) = p_\xi \in \overline{T}_\xi,$$

замыкания которых в $\widetilde{M}_\varepsilon^4$ близки к замыканиям интегральных траекторий $s_1, \dots, s_{2n-1}$ векторного поля $\text{sgrad}_\mathbb{C} f$. Аналогично, существуют геодезические $d_1(\xi), \dots, d_n(\xi)$ на $(\overline{T}_\xi, \overline{ds}_\xi^2)$, замыкания которых близки к замыканиям интегральных траекторий $d_1, \dots, d_n$ векторного поля $i \text{sgrad}_\mathbb{C} f$. Поэтому указанные геодезические на слое T_ξ и их образы в $\mathbb{C}$ при проекции $\text{Pr}_w|_{T_\xi}: T_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ выглядят, как на рис. 6–8.

 Рис. 6. Надрезанный или проколотый тор $c_1(\xi) \cup s_1(\xi) \subset T_\xi$

 Рис. 7. Область-цилиндр $c_k(\xi) \subset T_\xi$

Разрежем цилиндрическую область $c_k(\xi) \subset T_\xi$ (см. обозначение 3) по геодезической $d_k(\xi)$ и рассмотрим образ полученной (разрезанной) области $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ при отображении φ_k , введенном на шаге 2. Так как граница области составлена из геодезических:

$$\partial c_k(\xi) = \begin{cases} s_{2k-2}(\xi) \cup s_{2k-1}(\xi) \cup s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi), & 1 \leq k < n, \\ s_{2n-2}(\xi) \cup s_{2n-1}(\xi), & 1 \leq k = n, \end{cases}$$

где $s_0(\xi) := s_1(\xi)$, то граница ее образа $\varphi_k(c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)) \subset \mathbb{C}$ состоит из прямолинейных отрезков в плоскости $\mathbb{C}_{\varphi_k}$. Нетрудно показать, что комплекснозначная

Рис. 8. Область-цилиндр $c_n(\xi) \subset T_\xi$

функция

$$\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)}: c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$$

инъективна, поэтому ее образ является внутренностью некоторого шестиугольника (при $k < n$) или четырехугольника (при $k = n$)

$$\partial W_{k,I_k} = A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$$

на плоскости $\mathbb{C}_{\varphi_k}$. Значит, множество значений комплексной угловой координаты $\varphi_k|_{c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)}: c_k(\xi) \setminus d_k(\xi) \rightarrow \mathbb{C}$ на разрезанном цилиндре $c_k(\xi) \setminus d_k(\xi)$ является внутренностью этого шестиугольника. Поэтому множество значений комплексной угловой координаты $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi}: G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ на исходном (неразрезанном) цилиндре $\overline{c_k(\xi)} = G_{\varepsilon,k} \cap T_\xi$ получается из замкнутой области, ограниченной этим шестиугольником, выкидыванием всех вершин и отождествлением пар сторон, отвечающих одной и той же геодезической.

Вычислим направляющие векторы сторон шестиугольника $\partial W_{k,I_k}$:

$$\begin{aligned} A_2^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) &= A_4^{(k)}(I_k) - A_5^{(k)}(I_k) = \langle d_k(\xi) \rangle_k =: \langle D_k(\xi) \rangle_k, \\ A_3^{(k)}(I_k) - A_2^{(k)}(I_k) &= A_6^{(k)}(I_k) - A_1^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k-2}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k-1}(\xi) \rangle_k =: \langle S_k(\xi) \rangle_k, \\ A_4^{(k)}(I_k) - A_3^{(k)}(I_k) &= A_5^{(k)}(I_k) - A_6^{(k)}(I_k) = \langle s_{2k}(\xi) \rangle_k = \langle s_{2k+1}(\xi) \rangle_k =: \langle S_{k+1}(\xi) \rangle_k, \end{aligned}$$

где последняя цепочка равенств выполнена при $k < n$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \langle S_n(\xi) \rangle &= \langle \gamma_{\xi,n} \rangle = 2\pi I'_n(\xi), \\ \langle S_k(\xi) \rangle + \langle S_{k+1}(\xi) \rangle &= \langle \gamma_{\xi,k} \rangle = 2\pi I'_k(\xi), \quad 1 \leq k < n, \\ \langle D_1(\xi) \rangle &= \langle \widehat{\gamma}_{\xi,1} \rangle = 2\pi J'_1(\xi), \\ \langle D_{k-1}(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle &= \langle \widehat{\gamma}_{\xi,k} \rangle = 2\pi J'_k(\xi), \quad 1 < k \leq n, \end{aligned}$$

в силу (8). С учетом обозначений (7) отсюда получаем требуемые равенства

$$\begin{aligned}\langle S_{k+1}(\xi) \rangle_k &= 2\pi \frac{I'_{k+1}(\xi) - I'_{k+2}(\xi) + \dots + (-1)^{n-k-1} I'_n(\xi)}{I'_k(\xi)}, \\ \langle D_k(\xi) \rangle_k &= 2\pi \frac{J'_k(\xi) - J'_{k-1}(\xi) + \dots + (-1)^{k-1} J'_1(\xi)}{I'_k(\xi)}.\end{aligned}$$

Пункт (ii) доказан полностью.

Шаг 4. Докажем п. (v). Заметим, что в силу определения четырехмерных ручек $G_{\varepsilon,k}$ выполнено $G_{\varepsilon,k} \cap G_{\varepsilon,l} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $l = k \pm 1$. Пусть $l = k + 1$. В силу п. (ii) координаты $\varphi_k \bmod 2\pi$ и $\varphi_{k+1} \bmod 2\pi$ на пересечении $s_{2k}(\xi) \cup s_{2k+1}(\xi) = (\text{Pr}_w|_{T_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi))$ своих областей определения связаны друг с другом следующими соотношениями: во-первых, соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \frac{\langle S_{k+1}(\xi) \rangle + \langle D_{k+1}(\xi) \rangle}{2I'_{k+1}(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} \left(\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle + \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)} \right),$$

которое равносильно первой требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)} + \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)} - \pi),$$

а во-вторых, соотношением

$$\varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} + \frac{\langle S_{k+1}(\xi) \rangle - \langle D_{k+1}(\xi) \rangle}{2I'_{k+1}(\xi)} = \frac{I'_k(\xi)}{I'_{k+1}(\xi)} \left(\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \frac{\langle S_k(\xi) \rangle - \langle D_k(\xi) \rangle}{2I'_k(\xi)} \right),$$

которое равносильно второй требуемой формуле

$$I'_{k+1}(\xi) \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi J'_{k+1}(\xi) = I'_k(\xi) (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)} - \pi).$$

Пункт 3) полностью доказан.

Пункт 4) следует из того, что данная инволюция сохраняет гамильтониан f , меняет знак у $\mathbb{C}$ -симплектической структуры $dz \wedge dw$ и сохраняет точку $(0, a_{2k}(\xi))$, в которой $\varphi_k(0, a_{2k}(\xi)) = 0 \bmod 2\pi$.

Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] L. Gavrilov, “Abelian integrals related to Morse polynomials and perturbations of plane Hamiltonian vector fields”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **49**:2 (1999), 611–652.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:2 (1978), 113–121.

- [4] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли”, *УМН*, **39**:2 (1984), 3–56; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Liouville integrability of Hamiltonian systems on Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **39**:2 (1984), 1–67.
- [5] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [6] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1 (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [7] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия*, Изд-во МГУ, М., 1988; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Beach, Luxembourg, 1995.
- [8] R. Thom, “L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome”, *Topology*, **3**, suppl. 2 (1965), 297–307.
- [9] А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и род полных пересечений”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 51–61; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and the genus of complete intersections”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:1 (1978), 38–46.
- [10] Т. А. Лепский, “Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени”, *Матем. сб.*, **201**:10 (2010), 109–136; англ. пер.: T. A. Lepskii, “Incomplete integrable Hamiltonian systems with complex polynomial Hamiltonian of small degree”, *Sb. Math.*, **201**:10 (2010), 1511–1538.
- [11] В. А. Васильев, *Ветвящиеся интегралы*, МЦНМО, М., 2000.
- [12] Дж. Милнор, *Особые точки комплексных гиперповерхностей*, Мир, М., 1971; пер.с англ.: J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968.

Е. А. Кудрявцева (Е. А. Kudryavtseva)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ekudr@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

10.06.2010 и 03.12.2010

Т. А. Лепский (Т. А. Lepskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: timur.lepsky@gmail.com