Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ефимов, Доказательство гипотезы Концевича–Сойбельмана, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 65–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:41:39

УДК 512.66

А. И. Ефимов

Доказательство гипотезы Концевича–Сойбельмана

Хорошо известно, что “категория Фукаи” является на самом деле A_∞ -предкатегорией в смысле М. Концевича и Я. Сойбельмана. Это связано с тем, что, вообще говоря, пространства морфизмов определены только для трансверсальных пар лагранжевых подмногообразий, а высшие умножения определены только для трансверсальных последовательностей лагранжевых подмногообразий. Концевич и Сойбельман сформулировали следующую гипотезу: для любого градуированного коммутативного кольца k классы квазиэквивалентности A_∞ -предкатегорий над k находятся в биекции с классами квазиэквивалентности A_∞ -категорий над k с сильными (или слабыми) тождественными морфизмами.

В работе эта гипотеза доказана для существенно малых A_∞ -(пред)категорий в случае, когда k является полем. В частности, отсюда следует, что A_∞ -предкатегорию Фукаи можно заменить на квазиэквивалентную настоящую A_∞ -категорию.

Кроме того, представлена естественная конструкция предтриангулированной оболочки для A_∞ -предкатегорий и доказана ее инвариантность относительно квазиэквивалентностей.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: A_∞ -категории, категории Фукаи, гомологическая зеркальная симметрия.

§ 1. Введение

Замечательная конструкция К. Фукаи [1] связывает с симплектическим многообразием ($\mathbb{Z}$ - или $\mathbb{Z}/2$ -)градуированную A_∞ -предкатегорию в смысле М. Концевича и Я. Сойбельмана [2]. Ее объекты – это лагранжевы подмногообразия с некоторыми дополнительными структурами.

Это – не настоящая A_∞ -категория, так как, вообще говоря, пространства морфизмов определены только для трансверсальных пар лагранжевых подмногообразий, а высшие умножения определены только для трансверсальных последовательностей лагранжевых подмногообразий. Конструкция Фукаи используется в категорной интерпретации зеркальной симметрии [3] для многообразий Калаби–Яу и в дальнейших обобщениях на случаи многообразий Фано и многообразий общего типа. Этот подход к зеркальной симметрии известен как гипотеза Концевича о гомологической зеркальной симметрии. Различные версии и аспекты A_∞ -предкатегорий Фукаи систематически изложены в книге [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 4713.2010.1), Фонда “Династия” и Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений Высшей школы экономики (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0023).

© А. И. ЕФИМОВ, 2011

Для того чтобы доказать гипотезу о гомологической зеркальной симметрии в некоторых частных случаях, следует сначала заменить A_∞ -предкатегорию Фукаи на квазиэквивалентную настоящую A_∞ -категорию. Ясно, что каждая A_∞ -категория (со слабыми тождественными морфизмами) может рассматриваться также как A_∞ -предкатегория. Концевич и Сойбельман в [2] сформулировали следующую естественную гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1.1 (см. [2]). Пусть k – градуированное коммутативное кольцо. Тогда классы квазиэквивалентности A_∞ -предкатегорий над k находятся в биекции с классами квазиэквивалентности A_∞ -категорий над k с сильными (или слабыми) тождественными морфизмами.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть k – поле. Тогда классы квазиэквивалентности существенно малых A_∞ -предкатегорий над k находятся в биекции с классами квазиэквивалентности существенно малых A_∞ -категорий над k с сильными (или слабыми) тождественными морфизмами.*

Мы ограничимся рассмотрением A_∞ -(пред)категорий над полем, так как нам потребуется переходить к минимальным A_∞ -(пред)категориям (т.е. с $m_1 = 0$). Далее, мы ограничимся существенно малыми A_∞ -(пред)категориями по чисто теоретико-множественной причине: нам потребуются когомологии Хохшильда градуированных (пред)категорий.

Кроме того, в работе представлена естественная конструкция скрученных комплексов для A_∞ -предкатегорий. Здесь основным утверждением является утверждение об инвариантности скрученных комплексов относительно квазиэквивалентностей (предложение 4.6). Для обычных A_∞ -категорий мы получаем таким образом обычные предтриангулированные оболочки.

Работа имеет следующую структуру. В § 2 определены A_∞ -категории, сильные и слабые тождественные морфизмы, квазиэквивалентности, A_∞ -предкатегории (в соответствии с [2]). В § 3 доказана основная теорема (теорема 3.2). Доказательство проводится по следующей схеме. В п. 3.1 мы переходим от существенно малых A_∞ -(пред)категорий к малым. Далее, в п. 3.2 мы переходим от малых к малым минимальным A_∞ -(пред)категориям. В п. 3.3 введены когомологии Хохшильда для градуированных предкатегорий. Грубо говоря, препятствия к построению A_∞ -структур и A_∞ -морфизмов лежат в этих пространствах когомологий. В п. 3.4 сформулирована и доказана основная лемма (лемма 3.4) об инвариантности когомологий Хохшильда относительно квазиэквивалентностей градуированных предкатегорий. Это утверждение нетривиально в отличие от случая обычных DG и A_∞ -категорий и является, фактически, ключевым местом в доказательстве основной теоремы. Здесь использован язык локальных систем на симплициальных множествах. В п. 3.5 введены множества классов эквивалентности минимальных A_∞ -структур на градуированных предкатегориях и развита простая теория препятствий для поднятия A_∞ -структур и A_∞ -гомотопий. В п. 3.6 мы применяем основную лемму, чтобы доказать инвариантность множества классов эквивалентности минимальных A_∞ -структур на градуированных предкатегориях. В п. 3.7 мы доказываем основную теорему, используя результат об инвариантности. В § 4 представлена конструкция предтриангулированной оболочки для A_∞ -предкатегорий над

произвольным градуированным коммутативным кольцом. Мы проверяем, что эта конструкция корректно определена и инвариантна относительно квазиэквивалентностей.

Автор выражает благодарность Д. Каледину за его замечания.

§ 2. Предварительные сведения об A_∞ -(пред)категориях

Зафиксируем некоторое основное поле k произвольной характеристики.

2.1. Неунитальные A_∞ -алгебры и A_∞ -категории. Пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i - \mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Z}/2$)-градуированное векторное пространство. Обозначим через $A[n]$ его сдвиг на n : $A[n]^i := A^{i+n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Структура неунитальной A_∞ -алгебры на A дается кодифференцированием $b: T_+(A[1]) \rightarrow T_+(A[1])$ степени $+1$ таким, что $b^2 = 0$. Здесь $T_+(A[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} A[1]^{\otimes n}$ – косвободная тензорная коалгебра.

Кодифференцирование b однозначно определяется своими коэффициентами Тейлора $m_n: A^{\otimes n} \rightarrow A[2-n]$, $n \geq 1$. Равенство $b^2 = 0$ эквивалентно последовательности следующих квадратичных соотношений:

$$\sum_{i+j=n+2} \sum_{0 \leq l \leq i-1} (-1)^\varepsilon m_i(a_0, \dots, a_{l-1}, m_j(a_l, \dots, a_{l+j-1}), a_{l+j}, \dots, a_n) = 0, \quad (2.1)$$

где $a_m \in A$, $\varepsilon = j \sum_{0 \leq s \leq l-1} \deg(a_s) + l(j-1) + j(i-1)$. В частности, при $n = 0$ имеем $m_1^2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. A_∞ -морфизм неунитальных A_∞ -алгебр $A \rightarrow B$ – это морфизм соответствующих некоунитальных DG-коалгебр $T_+(A[1]) \rightarrow T_+(B[1])$.

Такой A_∞ -морфизм однозначно определяется своими “коэффициентами Тейлора” $f_n: A^{\otimes n} \rightarrow B[1-n]$, удовлетворяющими следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_i = n} (-1)^{\gamma_i} m_i^B(f_{l_1}(a_1, \dots, a_{l_1}), \dots, f_{n-l_{i-1}}(a_{l_{i-1}+1}, \dots, a_n)) \\ &= \sum_{s+r=n+1} \sum_{1 \leq j \leq s} (-1)^{\varepsilon_j} f_s(a_1, \dots, a_{j-1}, m_r^A(a_j, \dots, a_{j+r-1}), a_{j+r}, \dots, a_n), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $a_m \in A$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= r \sum_{1 \leq p \leq j-1} \deg(a_p) + j-1 + r(s-j), \\ \gamma_i &= \sum_{1 \leq p \leq i-1} (i-p)(l_p - l_{p-1} - 1) + \sum_{1 \leq p \leq i-1} \nu(l_p) \sum_{l_{p-1}+1 \leq q \leq l_p} \deg(a_q), \end{aligned}$$

использовано обозначение $\nu(l_p) = \sum_{p+1 \leq m \leq i} (l_m - l_{m-1} - 1)$ и $l_0 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Неунитальная $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Z}/2$)-градуированная A_∞ -категория $\mathcal{C}$ – это следующий набор данных:

- 1) класс объектов $Ob(\mathcal{C})$;
- 2) $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Z}/2$)-градуированное векторное пространство морфизмов $\text{Hom}(X_1, X_2)$ для каждых двух объектов X_1 и X_2 ,

3) отображение градуированных векторных пространств

$$m_n: \bigotimes_{0 \leq i \leq n-1} \text{Hom}(X_i, X_{i+1}) \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_n)[2-n]$$

для каждой последовательности объектов $X_0, \dots, X_n$.

Эти данные должны удовлетворять следующему условию: для любого конечного набора объектов $X_0, \dots, X_N$, $N \geq 0$, градуированное векторное пространство $\bigoplus_{0 \leq i, j \leq N} \text{Hom}(X_i, X_j)$ вместе с операциями m_n становится A_∞ -алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Неунитальная A_∞ -алгебра может рассматриваться как неунитальная A_∞ -категория с одним объектом X таким, что $\text{Hom}(X, X) = A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если $\mathcal{C}$ – неунитальная A_∞ -категория, то мы имеем “неунитальную” градуированную категорию $H(\mathcal{C})$, которая определяется заменой пространств морфизмов их когомологиями относительно m_1 . Здесь термин “неунитальная” означает, что может не быть тождественных морфизмов $\text{id}_X \in \text{Hom}_{H(\mathcal{C})}^0(X, X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. A_∞ -функтор между неунитальными A_∞ -категориями $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ – это следующий набор данных:

- 1) отображение классов объектов $F: \text{Ob}(\mathcal{C}_1) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$.
- 2) морфизм градуированных векторных пространств

$$f_n: \bigotimes_{0 \leq i \leq n-1} \text{Hom}(X_i, X_{i+1}) \rightarrow \text{Hom}(F(X_0), F(X_n))[1-n]$$

для каждой конечной последовательности объектов $X_0, \dots, X_n$ в $\mathcal{C}_1$.

Требуется, чтобы для любого конечного набора объектов $X_0, \dots, X_N$, $N \geq 0$, последовательность f_n , $n \geq 1$, определяла A_∞ -морфизм

$$\bigoplus_{0 \leq i, j \leq N} \text{Hom}(X_i, X_j) \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i, j \leq N} \text{Hom}(F(X_i), F(X_j)). \quad (2.3)$$

2.2. Тожественные морфизмы. Теперь мы определим строгие и слабые тождественные морфизмы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $\mathcal{C}$ – неунитальная A_∞ -категория, а $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Морфизм $e \in \text{Hom}^0(X, X)$ называется *строгим тождественным морфизмом*, если $m_2(f, e) = f$, $m_2(e, g) = g$ и для $n \neq 2$ выполнено

$$m_n(f_1, \dots, f_{i-1}, e, f_{i+1}, \dots, f_n) = 0$$

для любых морфизмов f, g, f_j , для которых эти равенства имеют смысл. В этом случае мы полагаем $1_X := e$.

Класс когомологий $\bar{e} \in H^0(\text{Hom}(X, X), m_1) = \text{Hom}_{H(\mathcal{C})}^0(X, X)$ называется *слабым тождественным морфизмом*, если для любых замкнутых морфизмов $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow X$ мы в $H(\mathcal{C})$ имеем $\bar{e} \cdot \bar{g} = \bar{g}$, $\bar{f} \cdot \bar{e} = \bar{f}$.

Ясно, что класс любого строгого тождественного морфизма является слабым тождественным морфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Если неунитальная A_∞ -категория $\mathcal{C}$ имеет хотя бы слабые тождественные морфизмы, то $H(\mathcal{C})$ – настоящая градуированная категория, и наоборот.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. A_∞ -функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между A_∞ -категориями со строгими (соответственно слабыми) тождественными морфизмами называется *строго* (соответственно *слабо*) *унитальным*, если f_1 сохраняет строгие тождественные морфизмы и $f_n(g_1, \dots, 1_X, \dots, g_n) = 0$ при $n > 1$ (соответственно если он сохраняет слабые тождественные морфизмы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Строго (соответственно слабо) унитарный A_∞ -функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между строго (соответственно слабо) унитарными A_∞ -категориями называется *квазиэквивалентностью*, если индуцированный функтор $H(F): H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D})$ является эквивалентностью градуированных категорий.

Две A_∞ -категории со слабыми тождественными морфизмами $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *квазиэквивалентными*, если существует конечная последовательность A_∞ -категорий со слабыми тождественными морфизмами $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n = \mathcal{D}$ таких, что для всех $0 \leq i \leq n-1$ существует квазиэквивалентность $\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i+1}$ или $\mathcal{C}_{i+1} \rightarrow \mathcal{C}_i$.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Если рассматривать только A_∞ -категории со строгими тождественными морфизмами и строго унитарными квазиэквивалентностями, то соответствующие классы квазиэквивалентности находятся в биекции с классами квазиэквивалентности A_∞ -категорий со слабыми тождественными морфизмами.

2.3. A_∞ -предкатегории. Теперь мы напомним определение A_∞ -предкатегорий, которые были изначально определены в работе [2]. Мы начинаем с понятия неунитальной A_∞ -предкатегории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Неунитальная $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Z}/2$)-градуированная A_∞ -предкатегория $\mathcal{C}$ – это следующий набор данных:

- класс объектов $Ob(\mathcal{C})$;
- для любого $n \geq 1$ подкласс $\mathcal{C}_{tr}^n \subset Ob(\mathcal{C})^n$ трансверсальных последовательностей (требуется, чтобы $\mathcal{C}_{tr}^1 = Ob(\mathcal{C})$);
- для каждой пары $(X_1, X_2) \in \mathcal{C}_{tr}^2$ градуированное векторное пространство $\text{Hom}(X_1, X_2)$;
- для трансверсальной последовательности $X_0, \dots, X_n$ отображение градуированных векторных пространств

$$m_n: \bigotimes_{0 \leq i \leq n-1} \text{Hom}(X_i, X_{i+1}) \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_n)[2-n].$$

Требуется, чтобы каждая подпоследовательность

$$(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_l}), \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n,$$

трансверсальной последовательности $(X_0, \dots, X_N)$ была трансверсальной и чтобы градуированное векторное пространство $\bigoplus_{0 \leq i < j \leq N} \text{Hom}(X_i, X_j)$ с операциями m_n являлось неунитальной A_∞ -алгеброй.

Отметим, что мы не требуем, чтобы свойство трансверсальности для пары объектов было симметричным. Ясно, что неунитальная A_∞ -категория – это то же самое, что неунитальная A_∞ -предкатегория $\mathcal{C}$ с $\mathcal{C}_{\text{tr}}^n = \text{Ob}(\mathcal{C})^n$, $n \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. A_∞ -функтор между неунитальными A_∞ -предкатегориями $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ определяется следующим набором данных:

- 1) отображение классов объектов $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ такое, что $F^n(\mathcal{C}_{\text{tr}}^n) \subset \mathcal{D}_{\text{tr}}^n$;
- 2) для каждой трансверсальной последовательности объектов $X_0, \dots, X_n$ в $\mathcal{C}$ морфизм градуированных векторных пространств

$$f_n: \bigotimes_{0 \leq i \leq n-1} \text{Hom}(X_i, X_{i+1}) \rightarrow \text{Hom}(F(X_0), F(X_n))[1-n].$$

Требуется, чтобы для каждой трансверсальной последовательности объектов $X_0, \dots, X_N$, $N \geq 0$, последовательность f_n , $n \geq 1$, определяла A_∞ -морфизм

$$\bigoplus_{0 \leq i < j \leq N} \text{Hom}(X_i, X_j) \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < j \leq N} \text{Hom}(F(X_i), F(X_j)). \quad (2.4)$$

Грубо говоря, A_∞ -предкатегория – это неунитальная A_∞ -предкатегория, в которой достаточно много трансверсальных последовательностей. Чтобы определить это понятие строго, мы сначала определяем понятие квазиизоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Предположим, что $\mathcal{C}$ – неунитальная A_∞ -предкатегория, а $(X_1, X_2) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^2$. Замкнутый морфизм $f \in \text{Hom}^0(X_1, X_2)$ называется *квазиизоморфизмом*, если для любых двух объектов X_0 и X_3 таких, что $(X_0, X_1, X_2) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^3$, $(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^3$, отображения

$$\begin{aligned} m_2(f, \cdot) &: \text{Hom}(X_0, X_1) \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_2), \\ m_2(\cdot, f) &: \text{Hom}(X_2, X_3) \rightarrow \text{Hom}(X_1, X_3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

являются квазиизоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. A_∞ -предкатегория – это неунитальная A_∞ -предкатегория $\mathcal{C}$, удовлетворяющая следующему свойству расширения: для любого конечного набора трансверсальных последовательностей $(S_i)_{i \in I}$ в $\mathcal{C}$ и объекта X найдутся объекты X_- , X_+ и квазиизоморфизмы $f_-: X_- \rightarrow X$, $f_+: X \rightarrow X_+$ такие, что все последовательности (X_-, S_i, X_+) , $i \in I$, трансверсальны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.16. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – A_∞ -предкатегории. Тогда A_∞ -функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – это A_∞ -функтор между соответствующими неунитальными A_∞ -предкатегориями, который переводит квазиизоморфизмы в $\mathcal{C}$ в квазиизоморфизмы в $\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. A_∞ -категория со слабыми тождественными морфизмами – это то же самое, что A_∞ -предкатегория $\mathcal{C}$ с $\mathcal{C}_{\text{tr}}^n = \text{Ob}(\mathcal{C})^n$, $n \geq 1$.

Теперь мы определим понятие квазиэквивалентности для A_∞ -предкатегорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. A_∞ -функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между A_∞ -предкатегориями называется *квазиэквивалентностью*, если:

- 1) для каждой пары $(X_1, X_2) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^2$, отображение

$$f_1: \text{Hom}(X_1, X_2) \rightarrow \text{Hom}(F(X_1), F(X_2))$$

является квазиизоморфизмом;

- 2) каждый объект Y в $\mathcal{D}$ квазиизоморфен некоторому $F(X)$, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19. Две A_∞ -предкатегории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *квазиэквивалентными*, если существует последовательность $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ из A_∞ -предкатегорий с $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_n = \mathcal{D}$ такая, что для каждого $0 \leq i \leq n-1$ существует квазиэквивалентность из $\mathcal{C}_i$ в $\mathcal{C}_{i+1}$ или из $\mathcal{C}_{i+1}$ в $\mathcal{C}_i$.

§ 3. Основная теорема

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. A_∞ -(пред)категория $\mathcal{C}$ называется *существенно малой* (соответственно *малой*), если классы квазиизоморфизма в $\mathcal{C}$ образуют множество (соответственно $\text{Ob}(\mathcal{C})$ -множество).

В оставшейся части работы “ A_∞ -категория” означает “ A_∞ -категория со слабыми тождественными морфизмами”.

ТЕОРЕМА 3.2. *Классы квазиэквивалентности существенно малых A_∞ -предкатегорий находятся в биекции с классами квазиэквивалентности существенно малых A_∞ -категорий.*

Настоящие параграф посвящен доказательству этой теоремы.

3.1. От существенно малых к малым. Определим классы квазиэквивалентности малых A_∞ -(пред)категорий требованием, чтобы все промежуточные A_∞ -(пред)категории $\mathcal{C}_i$ в цепочке были малыми.

ЛЕММА 3.3. *Классы квазиэквивалентности существенно малых A_∞ -(пред)категорий находятся в биекции с классами квазиэквивалентности малых A_∞ -(пред)категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем только, как построить малую A_∞ -(пред)категорию, стартуя с существенно малой. Все остальное проверяется непосредственно.

Случай A_∞ -категорий очевиден. А именно, пусть дана некоторая существенно малая A_∞ -категория $\mathcal{C}$. Мы можем выбрать по одному объекту из каждого класса квазиизоморфизма и взять соответствующую полную A_∞ -подкатегорию. В силу ее конструкции она является малой и A_∞ -функтор вложения является квазиэквивалентностью.

Чтобы разобраться со случаем A_∞ -предкатегорий, нам потребуется следующая (не каноническая) операция на малых подклассах. Пусть $\mathcal{C}$ – A_∞ -предкатегория, а $\mathcal{D} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ – малый подкласс (т.е. являющийся множеством). Для каждого конечного набора $S_1, \dots, S_n$ трансверсальных последовательностей в $\mathcal{D}$ и объекта $X \in \mathcal{D}$ выберем объекты $X_\pm = X_\pm(S_i) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ с квазиизоморфизмами $X_- \rightarrow X \rightarrow X_+$ такие, что все последовательности (X_-, S_i, X_+)

являются трансверсальными. Пусть $T(\mathcal{D})$ – объединение $\mathcal{D}$ и всех пар $(X_-(S.), X_+(S.))$. Тогда $T(\mathcal{D})$ – снова малый подкласс в $Ob(\mathcal{C})$. Положим

$$T^\infty(\mathcal{D}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(\mathcal{D}). \quad (3.1)$$

Пусть теперь $\mathcal{D}$ – малый подкласс в $Ob(\mathcal{C})$, содержащий по одному объекту из каждого класса квазиизоморфизма. Возьмем полную A_∞ -подпредкатегорию $\mathcal{E} = T^\infty(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$. Ясно, что $\mathcal{E}$ – малая A_∞ -предкатегория по конструкции и A_∞ -функтор вложения $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C}$ является квазиэквивалентностью.

До конца этого параграфа мы будем иметь дело только с малыми A_∞ -(пред)категориями.

3.2. Минимальные модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Если $m_1 = 0$, то A_∞ -(пред)категория называется *минимальной*.

Определим классы квазиэквивалентности малых A_∞ -(пред)категорий требованием, чтобы все промежуточные A_∞ -(пред)категории $\mathcal{C}_i$ в цепочке квазиэквивалентностей были минимальными.

ЛЕММА 3.5. *Классы квазиэквивалентности A_∞ -(пред)категорий находятся в биекции с классами квазиэквивалентности минимальных A_∞ -(пред)категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{C}$ – A_∞ -(пред)категория. Для каждой пары объектов (X_1, X_2) (соответственно для $(X_1, X_2) \in \mathcal{C}_{tr}^2$) выберем разложение в прямую сумму $\text{Hom}(X_1, X_2) = K(X_1, X_2) \oplus Ac(X_1, X_2)$, где $K(X_1, X_2)$ – подкомплекс с нулевым дифференциалом, а $Ac(X_1, X_2)$ – ациклический подкомплекс. Обозначим через

$$i(X_1, X_2): K(X_1, X_2) \rightarrow \text{Hom}(X_1, X_2)$$

естественное вложение, а через

$$p(X_1, X_2): \text{Hom}(X_1, X_2) \rightarrow K(X_1, X_2)$$

– естественную проекцию (оба морфизма i и p являются квазиизоморфизмами). Выберем некоторую стягивающую гомотопию $h = h(X_1, X_2): Ac(X_1, X_2) \rightarrow Ac(X_1, X_2)$ такую, что $h^2 = 0$. Наконец, обозначим через

$$H(X_1, X_2): \text{Hom}(X_1, X_2) \rightarrow \text{Hom}(X_1, X_2)$$

продолжение h нулем.

Стартуя с данных $i(X_1, X_2)$, $p(X_1, X_2)$ и $H(X_1, X_2)$ и используя стандартную формулу для переноса A_∞ -структур (см. [2]), мы получаем

- 1) минимальную A_∞ -(пред)категорию $\mathcal{C}_{\min}$ с $Ob(\mathcal{C}_{\min}) = Ob(\mathcal{C})$ и

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\min}}(X_1, X_2) = K(X_1, X_2);$$

кроме того, в случае A_∞ -предкатегорий мы имеем $(\mathcal{C}_{\min})_{tr}^n = \mathcal{C}_{tr}^n$;

- 2) квазиэквивалентность $F: \mathcal{C}_{\min} \rightarrow \mathcal{C}$ такую, что $F(X) = X$ и $f_1 = i$;

3) квазиэквивалентность $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\min}$ такую, что $G(X) = X$ и $g_1 = p$.
Отсюда легко следует лемма.

Таким образом, нам достаточно иметь дело только с минимальными A_∞ -(пред)категориями.

3.3. Когомологии Хохшильда градуированных предкатегорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Определим $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Z}/2$)-градуированную предкатегорию как A_∞ -предкатегорию с $t_n = 0$ при $n \neq 2$.

Определим *функтор между градуированными предкатегориями* как A_∞ -функтор с $f_n = 0$ при $n \neq 1$. Мы говорим, что такой функтор является *эквивалентностью*, если он является квазиэквивалентностью A_∞ -предкатегорий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $\mathcal{C}$ – градуированная предкатегория. Тогда она может быть канонически продолжена до настоящей градуированной категории $\mathcal{C}_{\text{full}}$ с $Ob(\mathcal{C}_{\text{full}}) = Ob(\mathcal{C})$ вместе с естественной эквивалентностью градуированных предкатегорий $\iota: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{full}}$, $\iota(X) = X$ для каждого $X \in Ob(\mathcal{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Категория $\mathcal{C}_{\text{full}}$ может быть получена формальным обращением квазиизоморфизмов в $\mathcal{C}$. Мы оставляем непосредственную проверку этого факта читателю.

Пусть $\mathcal{C}$ – градуированная предкатегория. Определим биградуированный комплекс Хохшильда для $\mathcal{C}$ следующей формулой:

$$CC^{i,j}(\mathcal{C}) = \prod_{(X_0, \dots, X_i) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^i} \text{Hom}^j \left(\bigotimes_{1 \leq l \leq i} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{l-1}, X_l), \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\text{full}}}(X_0, X_i) \right). \quad (3.2)$$

Здесь $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $j \in \mathbb{Z}$ (соответственно $j \in \mathbb{Z}/2$). Мы пишем $\mathcal{C}_{\text{full}}$ в формуле выше, так как, вообще говоря, при $i = 0$ последовательность (X_0, X_0) не трансверсальна.

Дифференциал – это стандартный дифференциал Хохшильда. Он отображает $CC^{i,j}(\mathcal{C})$ в $CC^{i+1,j}(\mathcal{C})$. А именно, для $\varphi \in CC^{n,p}(\mathcal{C})$ имеем

$$\begin{aligned} \partial(\varphi)(a_{n+1}, \dots, a_1) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varphi(a_{n+1}, \dots, a_{i+1}a_i, \dots, a_1) \\ &+ (-1)^n \varphi(a_{n+1}, \dots, a_2)a_1 + (-1)^{p \deg(a_{n+1})+1} a_{n+1} \varphi(a_n, \dots, a_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Итак, мы имеем биградуированные когомологии Хохшильда $HH^{i,j}(\mathcal{C})$.

Теперь предположим, что имеется вполне строгий функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между градуированными предкатегориями. Ясно, что он индуцирует морфизм комплексов (сохраняющий биградуировку)

$$F^*: CC^{\cdot, \cdot}(\mathcal{D}) \rightarrow CC^{\cdot, \cdot}(\mathcal{C}). \quad (3.4)$$

3.4. Основная лемма. Ключевым утверждением в доказательстве основной теоремы является следующая лемма.

ЛЕММА 3.8. Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – эквивалентность градуированных предкатегорий. Тогда индуцированный морфизм комплексов

$$F^*: CC^{\cdots}(\mathcal{D}) \rightarrow CC^{\cdots}(\mathcal{C}) \quad (3.5)$$

индуцирует изоморфизмы $F^*: HH^{i,j}(\mathcal{D}) \rightarrow HH^{i,j}(\mathcal{C})$.

Мы докажем эту лемму на языке локальных систем на симплициальных множествах. Напомним категорию Δ , которая является (не полной) подкатегорией в категории множеств. Ее объекты обозначаются через $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Далее,

$$\text{Hom}_{\Delta}([m], [n]) = \{ \text{неубывающие отображения множеств } f: [m] \rightarrow [n] \}. \quad (3.6)$$

Категория Δ допускает хорошо известную систему порождающих морфизмов, которая состоит из отображений граней $\sigma_i^n: [n] \rightarrow [n+1]$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, и отображений вырождений $s_i^n: [n] \rightarrow [n-1]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Здесь

$$\sigma_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{при } j \leq i-1, \\ j+1 & \text{при } j \geq i, \end{cases} \quad s_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{при } j \leq i, \\ j-1 & \text{при } j \geq i+1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Симплициальное множество $\mathcal{X}$ – это функтор $\mathcal{X}: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}([n])$. Мы воспринимаем $\mathcal{X}$ так же, как категорию (которую мы обозначаем той же буквой). Ее объектами являются элементы $X_n \in \mathcal{X}_n$. Далее,

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(X_m, X_n) = \{ f: [m] \rightarrow [n] \mid f^*(X_n) = X_m \} \quad (3.8)$$

и композиция очевидна.

Пусть задано симплициальное множество $\mathcal{X}$. (Когомологическая) локальная система k -векторных пространств на $\mathcal{X}$ – это функтор $\mathcal{A}: \mathcal{X} \rightarrow k\text{-Vect}$. В частности, мы имеем постоянную локальную систему $\underline{k}$ со слоем k , а именно, $\underline{k}(X_n) = k$ и $\underline{k}(f) = \text{id}$ для $f: X_m \rightarrow X_n$.

Локальные системы, очевидно, образуют абелеву категорию. Кроме того, легко видеть, что в ней достаточно много проективных объектов. Действительно, для каждого объекта $X_n \in \mathcal{X}$ имеем соответствующую локальную систему P_{X_n} , $P_{X_n}(Y_m) = k[\text{Hom}_{\mathcal{X}}(X_n, Y_m)]$, где $k[\cdot]$ означает формальную линейную оболочку. По лемме Ионеды имеем

$$\text{Hom}(P_{X_n}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}(X_n). \quad (3.9)$$

Таким образом, объект P_{X_n} проективен. Каждая локальная система имеет резольвенту, состоящую из прямых сумм таких проективных объектов.

Когомологии локальной системы $\mathcal{A}$ определяются как $\text{Ext}^*(\underline{k}, \mathcal{A})$.

Теперь напомним хорошо известную проективную резольвенту локальной системы $\underline{k}$. Положим

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{X_n \in \mathcal{X}_n} P_{X_n}. \quad (3.10)$$

Дифференциал $\partial: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ – это сумма отображений $(-1)^i \sigma_i^{n-1}: P_{X_n} \rightarrow P_{(\sigma_i^{n-1})^*(X_n)}$. Стандартный комплекс, вычисляющий когомологии локальной системы $\mathcal{A}$, – это просто комплекс морфизмов из этой проективной резольвенты в $\mathcal{A}$.

Доказательство леммы 3.8. Определим градуированную категорию $\mathcal{E}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{D}_{\text{full}}$, которая содержит в точности по одному объекту из каждого класса изоморфизма в $\mathcal{D}_{\text{full}}$. Выберем функтор $G: \mathcal{D}_{\text{full}} \rightarrow \mathcal{E}$, который тождественен в ограничении на $\mathcal{E}$, и обозначим той же буквой его ограничение на $\mathcal{D}$. Чтобы установить нужный квазиизоморфизм, достаточно доказать, что отображения $G^*: CC^{\cdot\cdot\cdot}(\mathcal{E}) \rightarrow CC^{\cdot\cdot\cdot}(\mathcal{D})$ и $(GF)^*: CC^{\cdot\cdot\cdot}(\mathcal{E}) \rightarrow CC^{\cdot\cdot\cdot}(\mathcal{E})$ являются квазиизоморфизмами.

Таким образом, мы можем (и будем) предполагать, что $\mathcal{D}$ сама является настоящей градуированной категорией и функтор F индуцирует биекцию между классами квазиизоморфизма объектов $\mathcal{E}$ и множеством $Ob(\mathcal{D})$.

Теперь определим симплициальное множество $\mathcal{X}$ формулой $\mathcal{X}_n = Ob(\mathcal{D})^{n+1}$. Далее, для $(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{X}_n$ и $f: [m] \rightarrow [n]$ положим

$$f^*(Y_0, \dots, Y_n) = (Y_{f(0)}, Y_{f(1)}, \dots, Y_{f(m)}).$$

Определим локальную систему $\mathcal{A}$ на $\mathcal{X}$ формулой

$$\mathcal{A}(Y_0, \dots, Y_n) = \bigoplus_j \text{Hom}^j \left(\bigotimes_{1 \leq l \leq n} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_{l-1}, Y_l), \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_0, Y_n) \right). \quad (3.11)$$

Далее, для $f: [m] \rightarrow [n]$ и однородных

$$\varphi^m \in \mathcal{A}(f^*(Y_0, \dots, Y_n)), \quad a_i \in \text{Hom}(Y_{i-1}, Y_n)$$

положим

$$\begin{aligned} & f(\varphi^m)(a_n, \dots, a_1) \\ &= (-1)^{\varepsilon(f)} a_n \dots a_{f(m)+1} \varphi^m(a_{f(m)} \dots a_{f(m-1)+1}, \dots, a_{f(1)} \dots, a_{f(0)+1}) a_{f(0)} \dots a_1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\varepsilon(f) = \deg(\varphi^m) \sum_{i=f(m)+1}^n \deg(a_i) + \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

и произведение по пустому множеству равняется соответствующему тождественному морфизму.

Возьмем стандартную проективную резольвенту $\mathcal{P}$ локальной системы $\underline{k}$, как и выше. Тогда комплекс $\text{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ естественно изоморфен комплексу $\bigoplus_j CC^{\cdot\cdot\cdot j}(\mathcal{D})$. Таким образом,

$$H^{\cdot}(\mathcal{A}) \cong \bigoplus_j HH^{\cdot\cdot\cdot j}(\mathcal{D}). \quad (3.13)$$

Теперь нам хотелось бы интерпретировать $HH^{\cdot\cdot\cdot}(\mathcal{E})$ в таких же терминах. Для $S \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^{n+1}$ положим $Q_S := P_{F(S)}$ – проективная локальная система на $\mathcal{X}$. Если $S = (Y_0, \dots, Y_n)$, то положим $(\sigma_i^{n-1})^*(S) := (Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_n)$. Ясно, что $F((\sigma_i^{n-1})^*(S)) = (\sigma_i^{n-1})^*(F(S))$.

Определим цепной комплекс $\mathcal{Q}$ следующим образом. Положим

$$\mathcal{Q}_n = \bigoplus_{S \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^{n+1}} Q_S.$$

Далее, дифференциал $\partial: \mathcal{Q}_n \rightarrow \mathcal{Q}_{n-1}$ – это сумма отображений

$$(-1)^i \sigma_i^{n-1}: \mathcal{Q}_S \rightarrow \mathcal{Q}_{(\sigma_i^{n-1})^*(S)}.$$

Имеем очевидную проекцию $\mathcal{Q}_0/\text{Im}(\partial) \rightarrow \underline{k}$.

Ясно, что комплекс $\text{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{A})$ естественным образом изоморфен комплексу $\bigoplus_j CC^{*,j}(\mathcal{C})$. Имеем очевидный морфизм комплексов $\Phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$, у которого ненулевые компоненты – тождественные отображения $Q_S \rightarrow P_{F(S)}$. Морфизм Φ совместим с проекциями $\mathcal{Q}_0 \rightarrow \underline{k}$, $\mathcal{P}_0 \rightarrow \underline{k}$. Кроме того, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_j CC^{i,j}(\mathcal{Q}) & \xrightarrow{F^*} & \bigoplus_j CC^{i,j}(\mathcal{C}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \text{Hom}(\mathcal{P}_i, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cdot \circ \Phi} & \text{Hom}(\mathcal{Q}_i, \mathcal{A}) \end{array} \quad (3.14)$$

Таким образом, остается доказать, что $\mathcal{Q}$ – резольвента $\underline{k}$. Докажем это утверждение.

Для удобства положим $\mathcal{Q}_{-1} = \underline{k}$ и будем воспринимать $k = \underline{k}(Y_0, \dots, Y_m)$ как $k[\text{Hom}([-1], [n])]$, где $[-1] := \emptyset$. Теперь нам нужно доказать, что комплекс $\mathcal{Q}$ ацикличесен.

Зафиксируем какую-нибудь последовательность $T = (Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 0$, и рассмотрим комплекс $\mathcal{Q}(T)$ векторных пространств. Тогда $\mathcal{Q}_m(T)$ состоит из формальных линейных комбинаций пар (f, S) , где $f: [m] \rightarrow [n]$, $S \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^{m+1}$, таких, что $F(S) = f^*(T)$. Возьмем какой-нибудь замкнутый элемент $a = \sum_{j=1}^p \lambda_j(f_j, S_j) \in \mathcal{Q}_m(T)$, $m \geq -1$. Мы хотим построить его (не канонически определенный) прообраз $H(a) \in \mathcal{Q}_{m+1}(T)$ относительно дифференциала ∂ .

Определим отображения $g_j: [m+1] \rightarrow [n]$, $j = 1, \dots, p$, формулой

$$g_j(l) = \begin{cases} f_j(l-1) & \text{при } l > 0, \\ 0 & \text{при } l = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Далее, по определению A_∞ -предкатегории существуют объект $\tilde{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и квазиизоморфизм $\tilde{Y} \rightarrow Y_0$ такие, что все последовательности $(\tilde{Y}, S_j)$ трансверсальны. Так как F индуцирует биекцию между классами квазиизоморфизма в $\mathcal{C}$ и объектами в $\mathcal{Q}$, то $F(\tilde{Y}) = F(Y_0)$. Таким образом, $F(\tilde{Y}, S_j) = (F(Y_0), F(S_j)) = g_j^*(T)$. Положим

$$H(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j(g_j, (\tilde{Y}, S_j)). \quad (3.16)$$

Из замкнутости a мы немедленно получаем, что $\partial(H(a)) = a$. Это доказывает утверждение о том, что комплекс $\mathcal{Q}$ является резольвентой $\underline{k}$.

Лемма 3.8 доказана.

3.5. A_∞ -структуры на градуированной предкатегории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. A_∞ -структура на градуированной предкатегории $\mathcal{C}$ – это набор отображений m_n , $n \geq 3$, $\deg(m_n) = 2 - n$, для всех трансверсальных последовательностей таких, что вместе с $m_2(a, b) = ab$ и $m_1 = 0$ они задают структуру A_∞ -предкатегории на $\mathcal{C}$.

Две A_∞ -структуры m и m' на $\mathcal{C}$ называются *сильно гомотопными*, если существует A_∞ -морфизм $F: (\mathcal{C}, m) \rightarrow (\mathcal{C}, m')$ с $F(X) = X$ для $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и $f_1 = \text{id}$. В этом случае F называется *сильной гомотопией между m и m'* .

Формальные наборы отображений

$$f_n: \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \text{Hom}(X_{i-1}, X_i) \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_n)$$

степени $1 - n$ для всех трансверсальных последовательностей $(X_0, \dots, X_n) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^{n+1}$, $n \geq 1$, с $f_1 = \text{id}$ образуют группу $G_{\mathcal{C}}$. Произведение f и g задается той же формулой, что и композиция A_∞ -функторов. Эта группа действует на множестве $A_\infty(\mathcal{C})$ всех A_∞ -структур на $\mathcal{C}$. А именно, $f(m) = m'$, если и только если f является A_∞ -морфизмом из $(\mathcal{C}, m)$ в $(\mathcal{C}, m')$. Тавтологически, две A_∞ -структуры являются сильно гомотопными, если и только если они лежат в одной орбите этого действия.

Следующие леммы хорошо известны для A_∞ -алгебр. Их доказательства, в сущности, просты и поэтому мы их опускаем.

ЛЕММА 3.10. Пусть $(m_3, \dots, m_{n-1})$ – частично определенная A_∞ -структура на градуированной предкатегории $\mathcal{C}$, т.е. отображения $m_{\leq n-1}$ удовлетворяют всем требуемым уравнениям, не содержащим $m_{\geq n}$. Запишем первое A_∞ -условие, содержащее m_n , в форме

$$\partial(m_n) = \Phi, \quad (3.17)$$

где ∂ – дифференциал Хохшильда, $\Phi = \Phi(m_3, \dots, m_{n-1})$ – квадратичное выражение. Тогда всегда $\partial(\Phi) = 0$.

ЛЕММА 3.11. Пусть m и m' – две A_∞ -структуры на градуированной предкатегории $\mathcal{C}$. Пусть $f: (\mathcal{C}, m) \rightarrow (\mathcal{C}, m')$ – A_∞ -морфизм с $f_1 = \text{id}$ и $f_i = 0$, $2 \leq i \leq n-2$. Тогда $m'_i = m_i$, $i \leq n-1$, и $m'_n = m_n + \partial(f_{n-1})$.

ЛЕММА 3.12. Пусть m и m' – A_∞ -структуры на градуированной предкатегории $\mathcal{C}$. Предположим, что $(f_1 = \text{id}, f_2, \dots, f_{n-1})$ – частично определенная сильная гомотопия между m и m' , т.е. отображения $f_{\leq n-1}$ удовлетворяют всем требуемым уравнениям, не содержащим $f_{\geq n}$. Запишем первое A_∞ -условие, содержащее f_n , в форме

$$\partial(f_n) = \Psi, \quad (3.18)$$

где ∂ – дифференциал Хохшильда, $\Psi = \Psi(f_2, \dots, f_{n-1}; m, m')$ – полиномиальное выражение. Тогда всегда $\partial(\Psi) = 0$.

Нам также понадобится понятие гомотопии между двумя A_∞ -функторами. Во-первых, пусть $f, f': A \rightarrow B$ – два A_∞ -морфизма (возможно, неунитальных)

A_∞ -алгебр. Имеем соответствующие морфизмы DG коалгебр $f, f': T_+(A[1]) \rightarrow T_+(B[1])$. Гомотопия между f и f' – это отображение $H: T_+(A[1]) \rightarrow T_+(B[1])$, удовлетворяющее тождествам

$$\Delta \circ H = (f \otimes H + H \otimes f') \circ \Delta, \quad (3.19)$$

$$f - f' = b_B \circ H + H \circ b_A. \quad (3.20)$$

Каждое отображение H , удовлетворяющее (3.19), однозначно определяется своими компонентами $h_n: A^{\otimes n} \rightarrow B$, $\deg(h_n) = -n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. Пусть $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – A_∞ -функторы между A_∞ -предкатегориями такие, что $F(X) = F'(X)$ для каждого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Гомотопия H между F и F' – это набор отображений

$$h_n: \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{i-1}, X_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_0), F(X_n))$$

степени $-n$ для всех трансверсальных последовательностей $(X_0, \dots, X_n)$, удовлетворяющих следующему свойству: для каждой трансверсальной последовательности $(X_0, \dots, X_N) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^{n+1}$ отображения h_n определяют гомотопию между ограничениями A_∞ -функторов

$$F, F': \bigoplus_{i < j} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j) \rightarrow \bigoplus_{i < j} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_i), F(X_j)). \quad (3.21)$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.14. Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – A_∞ -функтор. Предположим, что задан набор отображений

$$h_n: \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{i-1}, X_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_0), F(X_n))$$

степени $-n$ для всех трансверсальных последовательностей. Тогда существует единственный A_∞ -функтор $F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $F'(X) = F(X)$, такой, что последовательность h_n определяет гомотопию между F и F' .

Кроме того, в случае, когда $\mathcal{C} = (\mathcal{E}, m)$, $\mathcal{D} = (\mathcal{E}, m')$ – A_∞ -структуры на одной градуированной предкатегории $\mathcal{E}$, F принадлежит $G_{\mathcal{E}}$ и $h_i = 0$, $1 \leq i \leq n-2$, имеем

$$\begin{cases} f'_i = f_i & \text{при } 1 \leq i \leq n-1, \\ f'_n = f_n + \partial(h_{n-1}). \end{cases} \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение – прямое следствие [6; лемма 2.1]. Второе утверждение проверяется непосредственно.

3.6. Теорема инвариантности. Пусть $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – эквивалентность градуированных предкатегорий. Имеем естественное отображение $\varphi^*: A_\infty(\mathcal{D}) \rightarrow A_\infty(\mathcal{C})$ и гомоморфизм $\varphi^*: G_{\mathcal{D}} \rightarrow G_{\mathcal{C}}$, совместимые с нашими действиями групп. Таким образом, имеем следующее отображение между классами сильной гомотопической эквивалентности A_∞ -структур:

$$\varphi^*: A_\infty(\mathcal{D})/G_{\mathcal{D}} \rightarrow A_\infty(\mathcal{C})/G_{\mathcal{C}}. \quad (3.23)$$

ТЕОРЕМА 3.15. Отображение (3.23) является биекцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сюръективность. Сначала проверим, что это отображение сюръективно. Возьмем какую-нибудь A_∞ -структуру m на $\mathcal{C}$. Мы хотим доказать, что она сильно гомотопна некоторой A_∞ -структуре вида $\varphi^*(\widetilde{m})$, где $\widetilde{m}$ – A_∞ -структура на $\mathcal{D}$. Ясно, что достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.16. Пусть m – A_∞ -структура на $\mathcal{C}$ такая, что $m_i = \varphi^*(\widetilde{m}_i)$, $3 \leq i \leq n-1$, где $(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_{n-1})$ – частично определенная A_∞ -структура на $\mathcal{D}$. Тогда m строго гомотопна некоторой A_∞ -структуре m' такой, что $m'_i = m_i$, $i \leq n-1$, и $m'_n = \varphi^*(\widetilde{m}_n)$, так что $(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_n)$ – частично определенная A_∞ -структура на $\mathcal{D}$. Кроме того, сильная гомотопия $(f_1, f_2, \dots)$ между m и m' может быть выбрана так, что $f_2 = \dots = f_{n-1} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем первое A_∞ -условие, содержащее m_n , в форме

$$\partial(m_n) = \Phi, \quad (3.24)$$

как в лемме 3.10. Тогда $\Phi(m_3, \dots, m_{n-1})$ – кограница Хохшильда. По лемме 3.10 $\Phi(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_{n-1})$ – коцикл Хохшильда. Далее,

$$\Phi(m_3, \dots, m_{n-1}) = \varphi^*\Phi(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_{n-1}). \quad (3.25)$$

Значит, по лемме 3.8 $\Phi(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_{n-1})$ – кограница Хохшильда. Возьмем некоторое $\widetilde{m}_n \in CC^{n,2-n}(\mathcal{D})$ такое, что $\partial(\widetilde{m}_n) = \Phi(\widetilde{m}_3, \dots, \widetilde{m}_{n-1})$.

Тогда $(\varphi^*(\widetilde{m}_n) - m_n)$ – коцикл Хохшильда. В силу леммы 3.8 мы можем выбрать $\widetilde{m}_n$ так, чтобы эта разность была кограницей Хохшильда. Возьмем элемент $f \in G_{\mathcal{C}}$ такой, что $f_2 = \dots = f_{n-2} = 0$ и $\partial(f_{n-1}) = \varphi^*(\widetilde{m}_n) - m_n$. Положим $m' = f(m)$. По лемме 3.11 имеем $m'_i = \varphi^*(\widetilde{m}_i)$, $i \leq n$. Это доказывает лемму.

Сюръективность доказана.

Инъективность. Нам остается доказать, что наше отображение инъективно. Пусть m, m' – A_∞ -структуры на $\mathcal{D}$, и пусть $F: (\mathcal{C}, \varphi^*(m)) \rightarrow (\mathcal{C}, \varphi^*(m'))$ – сильная гомотопия. Нам нужно доказать существование сильной гомотопии между m и m' . Ясно, что достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.17. Пусть m, m' – A_∞ -структуры на $\mathcal{C}$. Пусть f – сильная гомотопия между $\varphi^*(m)$ и $\varphi^*(m')$. Предположим, что $f_i = \varphi^*(\widetilde{f}_i)$, $2 \leq i \leq n-1$, где $(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1})$ – частично определенная сильная гомотопия между m и m' . Тогда существует некоторая сильная гомотопия f' между $\varphi^*(m)$ и $\varphi^*(m')$ такая, что $f'_i = f_i$, $i \leq n-1$, и $f'_n = \varphi^*(\widetilde{f}_n)$, так что $(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_n)$ – частично определенная сильная гомотопия между m и m' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем первое A_∞ -условие, содержащее f_n , в форме

$$\partial(f_n) = \Psi, \quad (3.26)$$

как и в лемме 3.12. Тогда $\Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; \varphi^*(m), \varphi^*(m'))$ – кограница Хохшильда. По лемме 3.12 $\Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; m, m')$ – коцикл Хохшильда. Далее,

$$\Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; \varphi^*(m), \varphi^*(m')) = \varphi^*\Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; m, m'). \quad (3.27)$$

Таким образом, из леммы 3.8 следует, что $\Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; m, m')$ – кограница Хохшильда. Возьмем некоторое $\widetilde{f}_n \in CC^{n,1-n}(\mathcal{D})$ такое, что $\partial(\widetilde{f}_n) = \Psi(\widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_{n-1}; m, m')$.

Тогда $(\varphi^*(\widetilde{f_n}) - f_n)$ – коцикл Хохшильда. Снова по лемме 3.8 мы можем выбрать $\widetilde{f_n}$ так, чтобы эта разность была кограницей Хохшильда. Возьмем некоторую последовательность элементов $h_n \in CC^{m, -n}$, $n \geq 1$, такую, что $h_2 = \dots = h_{n-2} = 0$ и $\partial(h_{n-1}) = \varphi^*(\widetilde{f_n}) - f_n$. По лемме 3.14 существует единственная сильная гомотопия f' такая, что последовательность h_n определяет гомотопию между f и f' . Снова по лемме 3.14 имеем $f'_i = \varphi^*(\widetilde{f_i})$, $i \leq n$. Это доказывает лемму.

Инъективность доказана.

3.7. Доказательство основной теоремы. Прежде чем доказать основную теорему, отметим еще одно обстоятельство.

ЛЕММА 3.18. Пусть $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – эквивалентность градуированных предкатегорий. Пусть m, m' – некоторые A_∞ -структуры на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) функтор φ можно продолжить до A_∞ -функтора $\Phi: (\mathcal{C}, m) \rightarrow (\mathcal{D}, m')$;
- (ii) A_∞ -структуры m и $\varphi^*(m')$ сильно гомотопны.

Доказательство очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Согласно леммам 3.3 и 3.5 достаточно доказать, что классы квазиэквивалентности малых минимальных A_∞ -категорий находятся в биекции с классами квазиэквивалентности малых минимальных A_∞ -предкатегорий.

Любая A_∞ -категория $\mathcal{C}$ может также рассматриваться как A_∞ -предкатегория с $\mathcal{C}_{\text{tr}}^n = \text{Ob}(\mathcal{C})^n$. Ясно, что если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – квазиэквивалентные минимальные A_∞ -категории, то соответствующие минимальные A_∞ -предкатегории также квазиэквивалентны.

Пусть $\mathcal{C}$ – минимальная A_∞ -предкатегория. Обозначим через m A_∞ -структуру на $\mathcal{C}^{\text{gr}}$, соответствующую $\mathcal{C}$.

Мы имеем эквивалентность градуированных предкатегорий $\iota_{\mathcal{C}^{\text{gr}}}: \mathcal{C}^{\text{gr}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}}$. По теореме 3.15 существует A_∞ -структура $\tilde{m}$ на $\mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}}$, такая, что A_∞ -структура $\iota_{\mathcal{C}^{\text{gr}}}^*(\tilde{m})$ сильно гомотопна m . По лемме 3.18 функтор $\iota_{\mathcal{C}^{\text{gr}}}$ может быть продолжен до квазиэквивалентности $\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}}, \tilde{m})$. Таким образом, стартуя с минимальной A_∞ -предкатегории, мы построили некоторую минимальную A_∞ -категорию $\mathcal{C}$ вместе с квазиэквивалентностью $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Нам остается доказать, что, стартуя с квазиэквивалентных A_∞ -предкатегорий, мы получим квазиэквивалентные A_∞ -категории.

Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – квазиэквивалентность минимальных A_∞ -предкатегорий. Функтор между градуированными предкатегориями $F_1: \mathcal{C}^{\text{gr}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{gr}}$, очевидно, продолжается до функтора $\Phi_1: \mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{full}}^{\text{gr}}$, так что мы имеем коммутативную диаграмму функторов:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}^{\text{gr}} & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{D}^{\text{gr}} \\
 \downarrow \iota_{\mathcal{C}^{\text{gr}}} & & \downarrow \iota_{\mathcal{D}^{\text{gr}}} \\
 \mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}} & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathcal{D}_{\text{full}}^{\text{gr}}
 \end{array} \tag{3.28}$$

Обозначим через m (соответственно m') A_∞ -структуру на $\mathcal{C}^{\text{gr}}$ (соответственно на $\mathcal{D}^{\text{gr}}$), соответствующую $\mathcal{C}$ (соответственно $\mathcal{D}$). Далее, обозначим через $\tilde{m}$ (соответственно $\tilde{m}'$) A_∞ -структуру на $\mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}}$ (соответственно на $\mathcal{D}_{\text{full}}^{\text{gr}}$) такую, что $\iota_{\mathcal{C}^{\text{gr}}}^*(\tilde{m})$ сильно гомотопна m (соответственно $\iota_{\mathcal{D}^{\text{gr}}}^*(\tilde{m}')$ сильно гомотопна m'). По лемме 3.18 A_∞ -структуры $F_1^*(m')$ и m также сильно гомотопны. Следовательно, из коммутативной диаграммы (3.28) и теоремы 3.15 получаем, что A_∞ -структуры $\Phi_1^*(\tilde{m}')$ и $\tilde{m}$ сильно гомотопны. Таким образом, по лемме 3.18 функтор Φ_1 может быть продолжен до квазиэквивалентности

$$\Phi: (\mathcal{C}_{\text{full}}^{\text{gr}}, \tilde{m}) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{full}}^{\text{gr}}, \tilde{m}'). \quad (3.29)$$

Значит, стартуя с квазиэквивалентных минимальных A_∞ -предкатегорий, мы получаем квазиэквивалентные минимальные A_∞ -категории. Теорема доказана.

§ 4. Скрученные комплексы над A_∞ -предкатегориями

Из основной теоремы очевидным образом следует, что предтриангулированную оболочку и совершенные комплексы можно определить для любой существенно малой A_∞ -предкатегории, заменяя ее на некоторую квазиэквивалентную A_∞ -категорию. Тем не менее, на практике полезно иметь конструкцию предтриангулированной оболочки в рамках A_∞ -предкатегорий. В этом параграфе мы представляем такую конструкцию. Фактически, она является непосредственным обобщением скрученных комплексов над обычными A_∞ -категориями (см. [3]).

Здесь мы работаем над произвольным градуированным коммутативным кольцом k .

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая A_∞ -предкатегория. Определим A_∞ -предкатегорию $\tilde{\mathcal{C}}$ следующим образом:

- 1) $Ob(\tilde{\mathcal{C}}) = \{X[n] \mid X \in Ob(\mathcal{C}), n \in \mathbb{Z}\}$;
- 2) $(X_1[n_1], \dots, X_k[n_k]) \in \tilde{\mathcal{C}}_{\text{tr}}^k \iff (X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^k$;
- 3) для трансверсальной пары $(X_1[n_1], X_2[n_2])$ положим

$$\text{Hom}(X_1[n_1], X_2[n_2]) := \text{Hom}(X_1, X_2)[n_2 - n_1]. \quad (4.1)$$

Высшие умножения мы полагаем такими же, как в $\mathcal{C}$.

Теперь определим скрученные комплексы. Для заданной трансверсальной последовательности $S = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^n$ положим

$$\text{End}_+(S) := \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \text{Hom}(X_i, X_j). \quad (4.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Неунитальная A_∞ -алгебра A называется *нильпотентной*, если она снабжена конечной убывающей фильтрацией $A = F_1 A \supset F_2 A \supset \dots \supset F_n A = 0$ такой, что

$$m_k(F_{r_1} A \otimes \dots \otimes F_{r_k} A) \subset F_{r_1 + \dots + r_k} A. \quad (4.3)$$

Ясно, что $\text{End}_+(S)$ – нильпотентная A_∞ -алгебра с фильтрацией $F \cdot \text{End}_+(S)$, где

$$F_r \text{End}_+(S) = \bigoplus_{1 \leq i \leq j-r \leq n-r} \text{Hom}(X_i, X_j), \quad r \geq 1. \quad (4.4)$$

Так же, как и в работе [7], для каждой нильпотентной A_∞ -алгебры A мы имеем группоид $\mathcal{MC}(A)$ решений уравнения Муавра–Картана в A . Следующая лемма является непосредственным обобщением теоремы 7.2 из [7].

ЛЕММА 4.2. Пусть $f: A_1 \rightarrow A_2$ – фильтрованный A_∞ -квазиизоморфизм нильпотентных A_∞ -алгебр. Тогда индуцированный функтор

$$f^*: \mathcal{MC}(A_1) \rightarrow \mathcal{MC}(A_2) \quad (4.5)$$

является эквивалентностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathcal{C}$ – A_∞ -предкатегория. Определим A_∞ -предкатегорию $\mathcal{C}^{\text{pre-tr}}$ скрученных комплексов над $\mathcal{C}$ следующим образом:

- 1) объекты $\mathcal{C}^{\text{pre-tr}}$ – это пары (S, α) , где S – некоторая трансверсальная последовательность в $\mathcal{C}$ и $\alpha \in \text{End}_+(S)^1$ – решение уравнения Муавра–Картана;
- 2) последовательность $((S_1, \alpha_1), \dots, (S_n, \alpha_n)) \in (\mathcal{C}^{\text{pre-tr}})^n$ трансверсальна тогда и только тогда, когда последовательность $(S_1, \dots, S_n)$ трансверсальна в $\mathcal{C}$;
- 3) для трансверсальной пары $((S_1, \alpha_1), (S_2, \alpha_2))$ в $\mathcal{C}^{\text{pre-tr}}$ положим

$$\text{Hom}((S_1, \alpha_1), (S_2, \alpha_2)) = \bigoplus_{X \in S_1, Y \in S_2} \text{Hom}(X, Y); \quad (4.6)$$

- 4) для трансверсальной последовательности

$$((S_0, \alpha_0), \dots, (S_n, \alpha_n)) \in (\mathcal{C}^{\text{pre-tr}})^{n+1}_{\text{tr}}$$

и однородных морфизмов $x_i \in \text{Hom}((S_{i-1}, \alpha_{i-1}), (S_i, \alpha_i))$ положим

$$m_n(x_n, \dots, x_1) = \sum_{k_0, \dots, k_n \geq 0} (-1)^\varepsilon m_{n+k_0+\dots+k_n}(\alpha_n^{k_n}, x_n, \alpha_{n-1}^{k_{n-1}}, \dots, x_1, \alpha_0^{k_0}), \quad (4.7)$$

где

$$\varepsilon = \sum_{n \geq i > j \geq 0} (\deg(x_i) + k_i)k_j + \sum_{i=0}^n \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \sum_{i=1}^n ik_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. A_∞ -предкатегория $\mathcal{C}^{\text{pre-tr}}$ корректно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственное обстоятельство, нуждающееся в проверке, – это свойство расширения. Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathcal{D}$ – A_∞ -предкатегория, и пусть $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ – трансверсальная последовательность в $\mathcal{D}$. Предположим, что нам даны квазиизоморфизмы $F_i: X_i \rightarrow Y_i$, $1 \leq i \leq n$. Тогда для каждого решения уравнения Муавра–Картана $\beta \in \text{End}_+(Y_1, \dots, Y_n)$ (соответственно $\alpha \in \text{End}_+(X_1, \dots, X_n)$) существует решение уравнения Муавра–Картана $\alpha \in \text{End}_+(X_1, \dots, X_n)$ (соответственно $\beta \in \text{End}_+(Y_1, \dots, Y_n)$) вместе с квазиизоморфизмом $G: ((X_1, \dots, X_n), \alpha) \rightarrow ((Y_1, \dots, Y_n), \beta)$ в $\mathcal{D}^{\text{pre-tr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие A_∞ -алгебры: $\mathcal{A}_1 = \text{End}_+(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{A}_2 = \text{End}_+(Y_1, \dots, Y_n)$, а также A_∞ -алгебру $\mathcal{B}$, описываемую следующим способом. Как k -модуль,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \text{Hom}(X_i, Y_j)[-1] \quad (4.8)$$

и высшие умножения являются прямыми суммами высших умножений в $\mathcal{D}$, а также

$$m_k(y_l, \dots, y_1, F_p, x_k, \dots, x_1) \quad \text{для } y_i \in \text{Hom}(Y_{j_{i-1}}, Y_{j_i}), \quad x_i \in \text{Hom}(X_{q_{i-1}}, X_{q_i}), \\ 1 \leq q_0 < \dots < q_k = p = j_0 < \dots < j_l \leq n. \quad (4.9)$$

Имеем очевидные проекции $\pi_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, являющиеся квазиизоморфизмами.

Теперь предположим, что $\beta \in \mathcal{A}_2^1$ – решение уравнения Муавра–Картана. Мы покажем, как построить требуемое $\alpha \in \mathcal{A}_1^1$. Обратное построение аналогично.

По лемме 4.2 существует решение уравнения Муавра–Картана $\tilde{\beta} \in \mathcal{B}^1$ такое, что $\pi_2(\tilde{\beta})$ гомотопно β . Компоненты $\tilde{\beta}$ вместе с $F_i: X_i \rightarrow Y_i$ задают объекты $E_1 = ((X_1, \dots, X_n), \pi_1(\tilde{\beta}))$, $E_2 = ((Y_1, \dots, Y_n), \pi_2(\tilde{\beta})) \in \text{Ob}(\mathcal{D}^{\text{pre-tr}})$ и квазиизоморфизм $F: E_1 \rightarrow E_2$ (это непосредственно проверяется).

Далее, если $h \in \mathcal{A}_2^0$ – морфизм $\pi_2(\tilde{\beta}) \rightarrow \beta$ в группоиде $\mathcal{MC}(\mathcal{A}_2)$, то морфизм $G: E_1 \rightarrow ((Y_1, \dots, Y_n), \beta)$, задаваемый формулой

$$G = F + \sum_{k_0, k_1, k_2 \geq 0} (-1)^\varepsilon m_{2+k_0+k_1+k_2}^{\mathcal{D}}(\beta^{k_2}, h, \pi_2(\tilde{\beta})^{k_1}, F, \pi_1(\tilde{\beta})^{k_0}), \quad (4.10)$$

где

$$\varepsilon = \sum_{2 \geq i > j \geq 0} k_i k_j + \sum_{i=0}^2 \frac{k_i(k_i + 1)}{2} + k_1,$$

является квазиизоморфизмом в $\mathcal{D}^{\text{pre-tr}}$. Это доказывает лемму.

Доказанная лемма немедленно влечет свойство расширения для $\mathcal{D}^{\text{pre-tr}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. 1) Каждый A_∞ -функтор $F: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ индуцирует естественным способом A_∞ -функтор $F^*: \mathcal{D}_1^{\text{pre-tr}} \rightarrow \mathcal{D}_2^{\text{pre-tr}}$.

2) Если F является квазиэквивалентностью, то F^* также является квазиэквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) A_∞ -функтор F^* задается теми же формулами, что и в [7; раздел 7]. Нам следует доказать, что он сохраняет квазиизоморфизмы. Заметим, что это очевидно для следующего класса “хороших” квазиизоморфизмов.

Мы называем квазиизоморфизм $f: ((X_1, \dots, X_n), \alpha) \rightarrow ((Y_1, \dots, Y_m), \beta)$ *хорошим*, если $n = m$, компоненты $f_{ij}: X_i \rightarrow Y_j$ зануляются при $i > j$ и компоненты $f_{ii}: X_i \rightarrow Y_i$ являются квазиизоморфизмами.

Ясно, что F^* переводит хорошие квазиизоморфизмы в хорошие квазиизоморфизмы. Из леммы 4.5 следует, что для каждого квазиизоморфизма $f_1:$

$E_1 \rightarrow E_2$ в $\mathcal{D}_1^{\text{pre-tr}}$ существуют квазиизоморфизмы $f_0: E_0 \rightarrow E_1$, $f_2: E_2 \rightarrow E_3$ такие, что последовательность (E_0, E_1, E_2, E_3) трансверсальна и морфизмы $m_2(f_1, f_0)$, $m_2(f_2, f_1)$ гомотопны хорошим квазиизоморфизмам. Это доказывает п. 1) предложения 4.6.

2) Если F является квазиизоморфизмом, то все морфизмы

$$f_1: \text{Hom}_{\mathcal{D}_1^{\text{pre-tr}}}(E_1, E_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_2}(F(E_1), F(E_2))$$

индуцируют квазиизоморфизмы на подфакторах естественной фильтрации

$$F_r \text{Hom}(((X_1, \dots, X_n), \alpha), ((Y_1, \dots, Y_m), \alpha)) = \bigoplus_{j-i \geq r} \text{Hom}(X_i, Y_j). \quad (4.11)$$

Значит, они сами являются квазиизоморфизмами. Существенная сюръективность следует из леммы 4.5 и леммы 4.2.

Для обычных A_∞ -категорий наша конструкция дает обычные A_∞ -категории скрученных комплексов, введенные в [8] для DG-категорий и обобщенные в [3] на случай A_∞ -категорий.

Теперь предположим, что k – снова поле. Согласно предложению 4.6, 2) переход от существенно малой A_∞ -предкатегории к квазиэквивалентной A_∞ -категории коммутует (с точностью до квазиэквивалентности) со взятием скрученных комплексов.

Список литературы

- [1] K. Fukaya, “Morse homotopy, A^∞ -category, and Floer homologies”, *Proceedings of the GARC workshop on geometry and topology* (Seoul, Korea, 1993), Lecture Notes Ser., **18**, Seoul National Univ., Seoul, 1993, 1–102.
- [2] M. Kontsevich, Y. Soibelman, “Homological mirror symmetry and torus fibrations”, *Symplectic geometry and mirror symmetry* (Seoul, South Korea, 2000), World Scientific, Singapore–River Edge, NJ, 2001, 203–263.
- [3] M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry”, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, v. I (Zürich, Switzerland, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.
- [4] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard–Lefschetz theory*, Zur. Lect. Adv. Math., European Math. Soc., Zürich, 2008.
- [5] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ -catégories*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot – Paris 7, 2003.
- [6] A. Polishchuk, “Extensions of homogeneous coordinate rings to A_∞ -algebras”, *Homology Homotopy Appl.*, **5**:1 (2003), 407–421.
- [7] A. I. Efimov, V. A. Lunts, D. O. Orlov, “Deformation theory of objects in homotopy and derived categories II: Pro-representability of the deformation functor”, *Adv. Math.*, **224**:1 (2010), 45–102.
- [8] А. И. Бондал, М. М. Капранов, “Оснащенные триангулированные категории”, *Матем. сб.*, **181**:5 (1990), 669–683; англ. пер.: A. I. Bondal, M. M. Kapranov, “Enhanced triangulated categories”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:1 (1991), 93–107.

А. И. Ефимов (A. I. Efimov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: efimov@mccme.ru

Поступила в редакцию

10.06.2010 и 03.12.2010