Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Онищенко, Ф. Ю. Попеленский, Об эквивалентности некоторых спектральных последовательностей расслоения Серра, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 85–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:10:27

УДК 512.662+515.145

А. Ю. Онищенко, Ф. Ю. Попеленский

Об эквивалентности некоторых спектральных последовательностей расслоения Серра

В работе рассматривается несколько различных конструкций спектральной последовательности расслоения Серра $\pi: E \rightarrow B$, где B – компактное односвязное многообразие. Рассматривается спектральная последовательность минимальной модели расслоения $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$, а также спектральные последовательности, построенные по фильтрации Чеха комплексов $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}^*(\pi^{-1}(U)))$ и $\check{C}^*(\mathcal{U}, S^*(\pi^{-1}(U)))$, где $\mathcal{U} = \{U\}$ – некоторое покрытие базы B . Известно, что все эти последовательности обладают одинаковыми членами $E_2^{*,*} = H^*(X) \otimes H^*(F)$ и сходятся к когомологиям тотального пространства E . Построен явный естественный изоморфизм этих последовательностей во всех членах E_r , начиная со второго. Также доказано, что для гладкого локально тривиального расслоения эти спектральные последовательности изоморфны спектральным последовательностям комплекса гладких форм $\Omega^*(E)$ и комплекса Чеха–де Рама. Таким образом, установлено, что все эти конструкции задают одну и ту же спектральную последовательность, начиная с члена E_2 .

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: спектральные последовательности, расслоение Серра, комплекс Чеха–де Рама, минимальная модель.

§ 1. Введение

Рассмотрим расслоение $\pi: E \xrightarrow{F} B$ в смысле Серра. Будем предполагать, что B – компактное односвязное многообразие и (ко)гомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ (если не оговорено иное).

Хорошо известно несколько конструкций спектральных последовательностей, связанных с данным расслоением и сходящихся к когомологиям E . Первой в этой связи необходимо упомянуть работу Серра [1]. Хороший обзор работ по этой тематике можно найти в книге [2]. Во всех случаях вторые члены последовательностей изоморфны $H^*(B; H^*(F))$. Возникает естественный вопрос о существовании канонического изоморфизма таких спектральных последовательностей во всех членах, включая предельный. Здесь стоит отметить, что если у двух спектральных последовательностей совпадают E_2 и E_∞ , то, вообще говоря, они могут не совпадать в других членах; соответствующий пример будет приведен ниже. Ряд результатов о совпадении классических конструкций спектральных последовательностей можно найти в [2], [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00034, № 07-01-91555-ННИО) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-660.2008.1).

В настоящей работе рассматривается несколько спектральных последовательностей, обладающих вышеупомянутыми свойствами. Это – спектральные последовательности, построенные по минимальной модели расслоения и аналогу комплекса Чеха–де Рама для PL -форм. Доказано, что соответствующие спектральные последовательности естественно изоморфны, начиная с E_2 ; изоморфизмы строятся в явном виде.

Перейдем к определениям и краткому обзору полученных результатов.

Рассмотрим “хорошее” покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ базы B , т.е. такое, у которого всевозможные непустые пересечения $U_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ диффеоморфны шарам. Такое покрытие базы задает покрытие $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ пространства расслоения E множествами вида $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$.

PL -комплексом Чеха $\check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*)$ расслоения E называется двойной комплекс $\check{C}^p(\mathcal{V}, A_{PL}^q) = \bigoplus A_{PL}^q(V_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}})$, снабженный дифференциалами Чеха δ и де Рама d . Через $A_{PL}^q(X)$ здесь обозначено пространство PL -форм степени q на пространстве X ; соответствующее определение будет приведено в § 3. Когомологии его тотализации $(\text{Tot } \check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*))^n = \bigoplus_{p+q=n} \check{C}^p(\mathcal{V}, A_{PL}^q)$ относительно дифференциала $D = \delta + (-1)^p d$ изоморфны когомологиям пространства расслоения E . Аналогичным образом определяется комплекс $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*)$, с тем отличием, что вместо $A_{PL}^q(V_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}})$ используется пространство сингулярных коцепей $S^q(V_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}})$, а вместо внешнего дифференциала – стандартный дифференциал на коцепях. Рассмотрим в комплексах такого типа *фильтрацию Чеха*

$$F_{\check{\text{Cech}}}^k \check{C}^*(\mathcal{V}, -) = \bigoplus_{p \geq k} \check{C}^p(\mathcal{V}, -).$$

Она согласована с дифференциалом D и поэтому задает спектральную последовательность. Для $\check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*)$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*)$ соответствующие спектральные последовательности сходятся к когомологиям пространства E , а члены E_2 изоморфны $H^*(B; H^*(F))$.

Спектральная последовательность другого типа строится в так называемой минимальной модели Сулливана расслоения π (см. [4], [5]). Соответствующее определение будет приведено в § 3; в рамках введения укажем лишь, что это – дифференциально-градуированная алгебра вида $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$. Здесь V и W – подходящие градуированные векторные пространства, конечномерные в каждой градуировке, а ΛV и ΛW – свободно-градуированные коммутативные алгебры, порожденные V и W соответственно. Дифференциал минимальной модели Сулливана расслоения таков, что $d(\Lambda V \otimes 1) \subset \Lambda V \otimes 1$. Обозначим через $(\Lambda V)^k$ пространство элементов степени k в ΛV . Фильтрация

$$F_{\text{hor}}^n \Lambda V \otimes \Lambda W = \bigoplus_{k \geq n} (\Lambda V)^k \otimes \Lambda W$$

согласована с дифференциалом, поэтому определена соответствующая спектральная последовательность. Она сходится к $H^*(\Lambda V \otimes \Lambda W, d) = H^*(E)$, причем ее второй член изоморфен $H^p(B, H^q(F))$.

Как было сказано выше, из совпадения соответствующих членов E_2 и E_∞ двух спектральных последовательностей не всегда следует, что остальные члены E_r одинаковы. Приведем пример. Рассмотрим две последовательности, в которых $E_2^{0,4} = E_2^{2,3} = E_2^{4,1} = E_2^{6,0} = \mathbb{Q}$. Пусть в первой последовательности отличны от нуля дифференциалы $d_2: E_2^{0,4} \rightarrow E_2^{2,3}$, $d_2: E_2^{4,1} \rightarrow E_2^{6,0}$, во второй – $d_4: E_4^{0,4} \rightarrow E_4^{4,1}$, $d_4: E_4^{2,3} \rightarrow E_4^{6,0}$, все остальные дифференциалы нулевые. Ясно, что E_∞ в обеих последовательностях равны нулю. При этом в первой последовательности $E_3 = E_4 = 0$, в то время как во второй последовательности $E_3 \neq 0$.

Вопрос о том, когда различные конструкции задают естественно изоморфные спектральные последовательности, важен и нетривиален. Он возникает не только для расслоений, но и для других объектов в алгебре и топологии. Хороший обзор работ по этой тематике можно найти в книге [2]. Также упомянем в этой связи важную работу [3], где приведены достаточно общие условия совпадения спектральных последовательностей. В частности, в ней введено понятие *конструктора спектральной последовательности* как функтора из категории изучаемых объектов в категорию комплексов с фильтрацией, удовлетворяющего некоторому набору аксиом. Показано, что все спектральные последовательности расслоения, которые могут быть заданы при помощи конструкторов, естественно изоморфны между собой, начиная со второго члена. Например, спектральная последовательность Серра, построенная в классической работе [1], задается конструктором.

Примером спектральной последовательности, не задаваемой конструктором, служит последовательность, ассоциированная с фильтрацией комплекса сингулярных коцепей $S^*(E)$ прообразами клеточных остовов базы B . Однако в [3] показано, что, начиная со второго члена, она совпадает со спектральной последовательностью Серра.

Спектральные последовательности комплексов $\check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*)$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*)$ также не задаются конструкторами. Методы работы [3] не позволяют непосредственно установить изоморфность рассматриваемых нами спектральных последовательностей. Кроме того, отметим, что канонические изоморфизмы спектральных последовательностей, задаваемых конструкторами, строятся методом ациклических моделей, т.е. в неявном виде.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1 об изоморфизме указанных спектральных последовательностей. Изоморфизм строится в явном виде.

Для гладкого расслоения $\pi: E \rightarrow B$ со слоем F и покрытием $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ базы B определены две другие спектральные последовательности. Одна строится по фильтрации в комплексе де Рама $\Omega^*(E)$, а вторая – по фильтрации Чеха в комплексе Чеха–де Рама $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$. В работе [6] построен естественный изоморфизм этих спектральных последовательностей. Мы описываем основные шаги этой конструкции.

В последней части работы доказано, что для гладкого локально тривиального расслоения все рассмотренные нами спектральные последовательности естественно изоморфны.

§ 2. Некоторые замечания о спектральных последовательностях

В этом параграфе мы приведем два общих факта о спектральных последовательностях, которыми будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Спектральные последовательности, упомянутые во введении, строятся по фильтрациям в соответствующих комплексах и начинаются с члена E_0 .

Отображением спектральных последовательностей $'E_*$ и $''E_*$ называется семейство гомоморфизмов $f_r: 'E_r^{*,*} \rightarrow ''E_r^{*,*}$, заданных для всех $r \geq 0$ и таких, что f_r перестановочен с дифференциалом d_r , причем f_{r+1} совпадает с отображением, которое индуцирует f_r в члене E_{r+1} , рассматриваемом как когомология E_r относительно d_r . Ясно, что $\{f_r\}$ задает отображение $f_\infty: 'E_\infty^{*,*} \rightarrow ''E_\infty^{*,*}$.

ЛЕММА 1. Пусть A^* и B^* – два комплекса с фильтрациями. Рассмотрим морфизм комплексов $f: A^* \rightarrow B^*$, согласованный с фильтрациями. Он индуцирует морфизм $f_r: 'E_r^{*,*} \rightarrow ''E_r^{*,*}$ спектральных последовательностей $'E_*$ и $''E_*$, построенных по фильтрациям комплексов A и B соответственно. Тогда если f_r – изоморфизм при $r = r_0$, то f_r является изоморфизмом для всех $r > r_0$ и $r = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим по индукции, что f_r – изоморфизм. Покажем, что f_{r+1} инъективен. Пусть для $x \in 'E_{r+1}^{p,q}$ выполнено $f_{r+1}(x) = 0$ в $''E_{r+1}^{p,q}$. Пусть y – произвольный представитель x в $'E_r^{p,q}$. Тогда $f_r(y)$ является представителем $f_{r+1}(x)$, т.е. нулевого класса когомологий относительно d_r в $''E_r^{p,q}$. Следовательно, существует элемент $z \in 'E_r^{p-r,q-r+1}$ такой, что $d_r f_r(z) = f_r(y)$ (здесь мы воспользовались тем, что по предположению индукции для каждого элемента в $''E_r$ существует прообраз в $'E_r$). Так как f_r – изоморфизм, то $d_r z = y$, откуда следует, что $x = 0$.

Проверим сюръективность f_{r+1} . Рассмотрим произвольный класс $y \in ''E_{r+1}^{p,q}$. Выберем z – какой-либо представитель класса y в $''E_r^{p,q}$. Так как f_r – изоморфизм, то существует $x \in 'E_r^{p,q}$ такой, что $f_r(x) = z$. Нетрудно убедиться в том, что $d_r(x) = 0$ и $f_{r+1}[x] = y$.

Пример, приведенный во введении, не противоречит этой лемме, поскольку изоморфизм членов E_2 не был индуцирован никаким отображением спектральных последовательностей.

Пусть $K^{k,l}$ – бикомплекс с двумя коммутирующими дифференциалами

$$d_1: K^{k,l} \rightarrow K^{k+1,l}, \quad d_2: K^{k,l} \rightarrow K^{k,l+1},$$

расположенный в первом квадранте ($k \geq 0, l \geq 0$). Когомологии комплекса $(\text{Tot } K^{*,*})^n = \bigoplus_{k+l=n} K^{k,l}$ вычисляются относительно дифференциала $D = d_1 + (-1)^k d_2$. Пусть (X^k, d) – комплекс, причем $X^k = 0$ при $k < 0$.

Отображение $i: X^* \rightarrow K^{*,0}$ называется *окаймлением*, если $i: X \rightarrow \text{Tot } K$ является морфизмом комплексов. Это в точности означает, что

$$d_1 \circ i = i \circ d, \quad d_2 \circ i = 0.$$

ЛЕММА 2. Пусть задан бикомплекс K и его окаймление $i: X \rightarrow K$. Пусть для каждого k точна последовательность

$$0 \rightarrow X^k \xrightarrow{i} K^{k,0} \xrightarrow{d_2} K^{k,1} \xrightarrow{d_2} \dots$$

Тогда отображение $i^*: H^*(X, d) \rightarrow H^*(\text{Tot } K, D)$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартную спектральную последовательность комплекса $\text{Tot } K$ по фильтрации $F^n \text{Tot } K = \bigoplus_{p \geq n} K^{p,q}$. Ее первый член имеет вид $E_1^{p,q} = H^q(K^{p,*}, d_2)$. В нем отличен от нуля лишь первый столбец $E_1^{p,0}$, так как комплекс $K^{p,q}$ ацикличесен относительно d_2 по условию леммы. Следовательно, данная спектральная последовательность вырождается во втором члене и имеют место естественные изоморфизмы

$$H_{d_1}(Z_{d_2}(K^{*,0})) \cong H_{d_1}H_{d_2}(K) \cong H(\text{Tot } K, D).$$

Заметим, что поскольку дифференциалы бикомплекса коммутируют, пространство $Z_{d_2}(K^{*,0})$ можно рассматривать как комплекс с дифференциалом d_1 . Так как $d_2 \circ i = 0$, то окаймление i является морфизмом комплексов $i: (X^k, d) \rightarrow (Z_{d_2}(K^{k,0}), d_1)$. По условию леммы это отображение – изоморфизм. Следовательно, $i^*: H^k(X, d) \rightarrow H_{d_1}^k(Z_{d_2}(K^{*,0}))$ – также изоморфизм.

§ 3. Спектральная последовательность для минимальной модели

Напомним некоторые определения. Полиномиальной формой на симплексе Δ^n называется дифференциальная форма, у которой в барицентрических координатах симплекса компоненты являются многочленами с рациональными коэффициентами. Вложение симплекса $\Delta^p \subset \Delta^n$ на грань задает отображение ограничения полиномиальной формы.

Говорят, что на пространстве B задана PL -форма (кусочно линейная форма) степени k , если для каждого сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^p \rightarrow B$ выбрана полиномиальная форма ω_σ степени k , причем если сингулярный симплекс $\tau: \Delta^q \rightarrow B$ является гранью симплекса σ , то ограничение ω_σ на τ совпадает с ω_τ ; более точно, если $i: \sigma \subset \tau$ – вложение грани, то $i^*(\omega_\sigma) = \omega_\tau$.

Пространство всех PL -форм степени k на B обозначается через $A_{PL}^k(B)$. Относительно внешнего умножения форм и взятия внешнего дифференциала $A_{PL}^*(B) = \bigoplus_k A_{PL}^k(B)$ является дифференциальной градуированной коммутативной алгеброй. Ее когомологии естественно изоморфны когомологиям B с рациональными коэффициентами.

Напомним, что минимальной моделью Суливана пространства B называется алгебра вида ΛV , снабженная дифференциалом d , для которой задан квазиизоморфизм $m: (\Lambda V, d) \rightarrow (A_{PL}(B), d)$. Кроме того, требуется выполнение следующих условий:

а) в пространстве V задана возрастающая фильтрация $V(0) \subset V(1) \subset \dots \subset V(j) \subset \dots$ такая, что $\bigcup_j V(j) = V$;

б) d на элементах из $V(0)$ нулевой, $d(V(j)) \subset \Lambda V(j-1)$ при $j \geq 1$ и $\text{Im } d \subset \Lambda^+ V \cdot \Lambda^+ V$ (так называемое условие разложимости дифференциала). Здесь $\Lambda^+ V = \bigoplus_{k \geq 0} (\Lambda V)^k$.

Для односвязного компактного многообразия B минимальная модель Сулливана существует и единственна с точностью до изоморфизма. Кроме того, в этом случае пространство V не содержит элементов градуировки 1, т.е. $V^1 = 0$. Наконец, напомним, что в нашем случае минимальная модель определяет рациональный гомотопический тип пространства B (см. [4], [7]).

Итак, зафиксируем B , его минимальную модель Сулливана $(\Lambda V, d)$ и квази-изоморфизм $m: (\Lambda V, d) \rightarrow (A_{PL}(B), d)$.

Для расслоений Серра имеется относительный аналог понятия минимальной модели. Напомним соответствующие определения (подробности см. в [4]).

Пусть $\pi: E \xrightarrow{F} B$ – расслоение Серра. Проекция $\pi: E \rightarrow B$ индуцирует отображение $\pi^*: A_{PL}(B) \rightarrow A_{PL}(E)$. Рассмотрим композицию $\pi^* \circ m_B: (\Lambda V, d) \rightarrow A_{PL}(E)$. Относительной моделью Сулливана расслоения π называются дифференциальная градуированная алгебра $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ и ее квазиизоморфизм m_E в $A_{PL}(E)$, для которых выполнены следующие условия:

а) в пространстве W задана фильтрация $W(0) \subset W(1) \subset \dots \subset W$ такая, что $\bigcup_j W(j) = W$ и $d: W(j+1) \rightarrow \Lambda V \otimes \Lambda W(j)$ при $j \geq 0$;

б) алгебра $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ является расширением $(\Lambda V, d)$ в следующем смысле: $m_E(a \otimes 1) = (\pi^* \circ m_B)(a)$ и $d(a \otimes 1) = (da) \otimes 1$.

Отметим, что условие б) позволяет рассматривать $(\Lambda V, d)$ как дифференциальную подалгебру в $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$. С другой стороны, дифференциал элемента $1 \otimes w$ не принадлежит, вообще говоря, $1 \otimes \Lambda W$, т.е. содержит слагаемые с отличным от 1 первым сомножителем в тензорном произведении.

Рассмотрим на комплексе $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ фильтрацию

$$F_{\text{hor}}^n(\Lambda V \otimes \Lambda W) = \bigoplus_{k \geq n} \Lambda V^k \otimes \Lambda W.$$

Из определения минимальной модели нетрудно вывести, что эта фильтрация согласована с дифференциалом d и поэтому задает некоторую спектральную последовательность. Можно показать, что для нее $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$ и что она сходится к когомологиям E .

§ 4. PL -комплекс Чеха и его аналоги

Спектральные последовательности другого типа определяются для PL -комплекса Чеха и его модификаций. PL -комплекс Чеха $\check{S}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*)$ был описан во введении. Сейчас мы определим модификацию этого комплекса, с которой будет связана наиболее сложная часть наших рассуждений.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ – хорошее покрытие базы B . Вложение $j_\alpha: U_\alpha \rightarrow B$ определяет отображение ограничения $j_\alpha^*: A_{PL}(B) \rightarrow A_{PL}(U_\alpha)$. Композиция $j_\alpha^* \circ m_B$ является гомоморфизмом дифференциальных алгебр $\Lambda V \rightarrow A_{PL}(U_\alpha)$, откуда получаем изоморфизм алгебр

$$A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W = A_{PL}(U_\alpha) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W).$$

С его помощью дифференциал алгебры $A_{PL}(U_\alpha) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$ перенесем на $A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W$. Аналогичным образом определим дифференциал на алгебре

$A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W$ для мультииндекса I . Особо подчеркнем, что всюду в дальнейшем, говоря об алгебре такого вида, мы будем иметь в виду этот дифференциал; обозначим его через d . Положим

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) = \bigoplus_{\#I=p+1} (A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W)^q.$$

Определенные нами дифференциалы d на алгебрах вида $A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W$ задают дифференциал

$$d: \check{C}^p(\mathcal{U}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^{q+1}).$$

Далее, вложения $j_{I,\beta}: U_{I \cup \{\beta\}} \rightarrow U_I$ индуцируют отображения ограничения $j_{I,\beta}^*: A_{PL}(U_I) \rightarrow A_{PL}(U_{I \cup \{\beta\}})$. Применив функтор $-\otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$, получим гомоморфизм дифференциальных алгебр

$$\begin{aligned} j_{I,\beta}^*: A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W &= A_{PL}(U_I) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W) \\ &\rightarrow A_{PL}(U_{I \cup \{\beta\}}) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W) = A_{PL}(U_{I \cup \{\beta\}}) \otimes \Lambda W. \end{aligned}$$

Эти гомоморфизмы по стандартной формуле определяют дифференциал Чеха

$$\delta: \check{C}^p(\mathcal{U}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) = \bigoplus_{\#I=p+1} (A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W)^q.$$

Нетрудно показать, что δ коммутирует с d .

Таким образом, мы определили аналог PL -комплекса Чеха $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ с дифференциалами δ , d и $D = \delta \pm d$. Этот комплекс нам наиболее удобен и именно к нему относится самая трудная часть доказательства (теоремы 5–7).

Рассмотрим на этом комплексе две фильтрации:

$$\begin{aligned} F_{\text{hor}}^n \check{C}(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) &= \bigoplus_{k \geq n} \check{C}(\mathcal{U}, A_{PL}(U)^k \otimes \Lambda W), \\ F_{\text{Cech}}^n \check{C}(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) &= \bigoplus_{p \geq n} \check{C}^p(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W). \end{aligned}$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией F_{hor} комплекса $\Lambda V \otimes \Lambda W$, изоморфна, начиная с члена E_2 , спектральным последовательностям комплекса $\check{C}^*(\mathcal{U}, S^*(\pi^{-1}U))$, ассоциированным с фильтрацией Чеха.*

Теорема 1 доказывается за несколько шагов.

Определим алгебру $A_{PL}(B) \otimes \Lambda W = A_{PL}(B) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$. Будем рассматривать ее вместе с дифференциалом d , перенесенным с помощью этого изоморфизма с $A_{PL}(B)$ и $\Lambda V \otimes \Lambda W$. На ней определена фильтрация $F_{\text{hor}}^k A_{PL}(B) \otimes \Lambda W = A_{PL}(B)^{\geq k} \otimes \Lambda W$.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $m_B \otimes \text{id}: \Lambda V \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}(B) \otimes \Lambda W$ индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей этих комплексов, ассоциированных с фильтрацией F_{hor} , начиная с члена E_2 .*

Определим алгебру $A_{PL}^U(B)$ как алгебру полиномиальных форм, определенных только на тех симплексах базы, которые целиком содержатся в каком-то из множеств покрытия $\mathcal{W}$. Естественно определяется отображение ограничения $\chi^U: A_{PL}(B) \rightarrow A_{PL}^U(B)$. Аналогично алгебре $A_{PL}(B) \otimes \Lambda W$ определим алгебру $A_{PL}^U(B) \otimes \Lambda W = A_{PL}^U(B) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$ с фильтрацией F_{hor} .

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $\chi^U \otimes \text{id}: A_{PL}(B) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}^U(B) \otimes \Lambda W$ индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей этих комплексов, ассоциированных с фильтрацией F_{hor} , начиная с члена E_2 .*

Пусть отображение $i_{A_{PL}}^*: A_{PL}^U(B) \otimes \Lambda W \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{W}; A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ элементу ω ставит в соответствие 0-коцепь $\{(j_\alpha^* \otimes \text{id})(\omega)\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Отображение $i_{A_{PL}}^*$ индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей комплексов $F_{\text{hor}} A_{PL}^U(B) \otimes \Lambda W$ и $F_{\text{hor}} \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$, начиная с члена E_1 .*

Теперь рассмотрим в комплексе $\check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ еще одну фильтрацию. Положим

$$\begin{aligned} F^k \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \\ = \sum_{p+q=k} F_{\check{\text{Cech}}}^p \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \cap F_{\text{hor}}^q \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W). \end{aligned}$$

Иными словами,

$$\begin{aligned} F^k \check{C}^p(\mathcal{W}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) &= \check{C}^p(\mathcal{W}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) & \text{при } p \geq k, \\ F^k \check{C}^p(\mathcal{W}, (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) &= \check{C}^p(\mathcal{W}, F_{\text{hor}}^{k-p} (A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)^q) & \text{при } p < k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что тождественное отображение комплекса $\check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ является отображением фильтрованных комплексов

$$\begin{aligned} F_{\check{\text{Cech}}}^* \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) &\xrightarrow{I} F^* \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W), \\ F_{\text{hor}}^* \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) &\xrightarrow{J} F^* \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \end{aligned}$$

и поэтому индуцирует отображения соответствующих спектральных последовательностей.

ТЕОРЕМА 5. *Отображение I^* является изоморфизмом, начиная с E_2 .*

ТЕОРЕМА 6. *Отображение J^* является изоморфизмом, начиная с E_2 .*

Вместо теоремы 6 мы докажем эквивалентную ей (с учетом теоремы 4) следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Отображение*

$$J \circ i_{A_{PL}}^*: F_{\text{hor}}^* A_{PL}^U(B) \otimes \Lambda W \rightarrow F^* \check{C}^*(\mathcal{W}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$$

индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей, начиная с члена E_2 .

Ниже мы определим отображение $m_{V_I} : A_{PL}(U_I) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}(V_I)$, перестановочное с дифференциалом и отображениями ограничения вида $j_{I,\beta}$. Всевозможные отображения m_{V_I} задают отображение $m_V : \check{C}^*(\mathcal{U}; A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{V}; A_{PL}(V))$, очевидным образом согласованное с фильтрацией Чеха.

ТЕОРЕМА 8. *Отображение*

$$m_V : F_{\check{C}ech} \check{C}^*(\mathcal{U}; A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \rightarrow F_{\check{C}ech} \check{C}^*(\mathcal{V}; A_{PL}(V))$$

индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей, начиная с члена E_1 .

Перейдем к доказательствам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассматриваемые спектральные последовательности и отображения между ними можно вычислить явно. Дифференциал d_1 в обеих последовательностях действует вдоль первого сомножителя тензорного произведения, а отображение $m_B^* : H^*(\Lambda V) \rightarrow H^*(A_{PL}(B))$ является изоморфизмом когомологий первых сомножителей относительно дифференциала d_1 (по определению минимальной модели). Следовательно, оно задает изоморфизм в E_2 .

ЛЕММА 3. *Отображение ограничения $\chi^U : A_{PL}(B) \rightarrow A_{PL}^U(B)$ является квазиизоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [4] (см. теорему 10.15) показано, что для симплициального комплекса K отображение интегрирования формы по симплексу задает естественный квазиизоморфизм

$$\oint_K : A_{PL}(K) \rightarrow S^*(K).$$

Подставляя в качестве K симплициальные комплексы $S_*(B)$ и $S_*^U(B)$, получим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(B) & \longrightarrow & S^*(B) \\ \chi^U \downarrow & & \chi^U \downarrow \\ A_{PL}^U(B) & \longrightarrow & S^{*,U}(B) \end{array}$$

Отображение $S^*(B) \rightarrow S^{*,U}(B)$ является квазиизоморфизмом, поскольку симплициальные комплексы S_* и S_*^U гомотопически эквивалентны для многообразий (см. [8; приложение II], [9]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Обе спектральные последовательности можно вычислить явно. Дифференциал d_1 в обеих последовательностях действует вдоль первого сомножителя тензорного произведения, а отображение

$$\chi^U : H^*(A_{PL}^U(B)) \rightarrow H^*(A_{PL}(B))$$

является изоморфизмом когомологий первых сомножителей относительно дифференциала d_1 (по лемме 3). Следовательно, оно задает изоморфизм в E_2 .

На факторкомплексе $F_{\text{hor}}^p A_{PL}(U) \otimes \Lambda W / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$ дифференциал d индуцирует дифференциал, который мы будем обозначать через d_F . Обратим внимание на то, что d_F действует только по второму сомножителю, т.е. $d_F(a \otimes w) = a \otimes \bar{d}(w)$, где $\bar{d}$ – некоторый дифференциал алгебры ΛW .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Воспользуемся леммой 2. Для произвольного фиксированного p рассмотрим бикомплекс $K^{k,l} = \check{C}^l(\mathcal{U}, A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W^k)$ с дифференциалами $d_1 = d_F$, $d_2 = \delta$ и $D = d_1 \pm d_2$. Легко видеть, что $E_{0,(\text{hor})}^{p,q} = \bigoplus_{l \geq 0} K^{q-l,l}$, поэтому $E_{1,(\text{hor})}^{p,q} = H^q(\text{Tot } K, D)$. Рассмотрим комплекс

$$X^k = E_{0,(A_{PL})}^{p,k} = A_{PL}^U(B)^p \otimes \Lambda W^k.$$

Нетрудно убедиться в том, что отображение $i_{A_{PL}}^* : E_{0,(A_{PL})}^{p,q} \rightarrow E_{0,(\text{hor})}^{p,q}$ задает окаймление $i_{A_{PL}}^* : X^k \rightarrow K^{k,l}$.

По лемме 4 точна последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A_{PL}^U(B)^p \otimes \Lambda W &\xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W) \\ &\xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W) \xrightarrow{\delta} \dots \end{aligned}$$

Следовательно, для окаймления $i_{A_{PL}}^* : X^k \rightarrow K^{k,l}$ выполнены условия леммы 2, а значит, отображение

$$i_{A_{PL}}^* : H(E_{0,(A_{PL})}^{p,q}, d_F) \rightarrow H(E_{0,(\text{hor})}^{p,q}, d_F \pm \delta)$$

– изоморфизм, т.е. спектральные последовательности $E_{(A_{PL})}$ и $E_{(\text{hor})}$ изоморфны, начиная с первого члена.

ЛЕММА 4. *Точны следующие последовательности:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A_{PL}^U(B)^p \otimes \Lambda W &\xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W) \\ &\xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W) \xrightarrow{\delta} \dots, \quad (\delta_1^A) \\ 0 \rightarrow H^{q+k}(A_{PL}^U(B)^p \otimes \Lambda W, d_F) & \\ &\xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, H^{q+k}(A_{PL}^p(U) \otimes \Lambda W, d_F)) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\cdot) \dots \quad (\delta_2^A) \end{aligned}$$

В доказательстве используется точность более простой последовательности.

ЛЕММА 5. *Точна последовательность*

$$0 \rightarrow A_{PL}^U(B) \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, A_{PL}(U)) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, A_{PL}(U)) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Мы будем использовать также следующую известную лемму.

ЛЕММА 6 (лемма о продолжении; см. [4; лемма 10.7], [5; лемма 8.3]). Пусть на границе симплекса Δ^n задана PL -форма ω . Тогда существует PL -форма $\bar{\omega}$ на всем Δ^n такая, что $\bar{\omega}|_{\partial \Delta^n} = \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Доказательство проведем по индукции по числу элементов покрытия $\mathcal{U}$. В качестве базы индукции рассмотрим покрытие $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ из двух множеств. Для простоты обозначим функтор $U \rightarrow A_{PL}(U)$ через A , а функтор $U \rightarrow A_{PL}^U(U)$ через A^U . Исходная последовательность для комплекса из двух множеств примет следующий вид:

$$0 \rightarrow A^U(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} A(U_1) \oplus A(U_2) \xrightarrow{\delta} A(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} 0. \quad (4.1)$$

Точность в первых двух членах данной последовательности легко проверяется. Для того чтобы показать точность в последнем члене, покажем, что элемент $a \in A(U_1 \cap U_2)$ может быть продолжен до элемента $\bar{a} \in A(U_1)$. Действительно, зададим $\bar{a}(*) = 0$ на всех 0-симплексах $*$, лежащих вне U_1 , затем индукцией по размерности продолжим $\bar{a}$ на остальные симплексы, пользуясь леммой о продолжении. Построенный элемент $\bar{a}$ таков, что $\delta(\bar{a}) = a$. Следовательно, короткая последовательность (4.1) точна.

Идею доказательства индукционного перехода продемонстрируем на примере покрытия из трех элементов. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{A}^U(U_3) & \longrightarrow & A(U_3) & \xrightarrow{\delta} & A(U_{13}) \oplus A(U_{23}) & \xrightarrow{\delta} & A(U_{123}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^U(U_1 \cup U_2 \cup U_3) & \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} & A(U_1) \oplus A(U_2) \oplus A(U_3) & \xrightarrow{\delta} & A(U_{12}) \oplus A(U_{13}) \oplus A(U_{23}) & \xrightarrow{\delta} & A(U_{123}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^U(U_1 \cup U_2) & \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} & A(U_1) \oplus A(U_2) & \xrightarrow{\delta} & A(U_{12}) & \xrightarrow{\delta} & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Здесь $\tilde{A}^U(U_3)$ – ядро отображения ограничения $A^U(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \rightarrow A^U(U_1 \cup U_2)$. Мы уже показали, что нижняя строка этой диаграммы является точной. Покажем, что и верхняя строка тоже является точной. Для этого заметим, что она разлагается в сумму двух последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^U(U_{13} \cup U_{23}) & \longrightarrow & A(U_{13}) \oplus A(U_{23}) & \longrightarrow & A(U_{123}) \longrightarrow 0 \\
 \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{A}^U(U_3) & \longrightarrow & \ker[A(U_3) \rightarrow A^U(U_{13} \cup U_{23})] & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Здесь верхняя строка точна по предположению индукции. Точность нижней строки – это в точности утверждение об изморфизме

$$\ker[A^U(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \rightarrow A^U(U_1 \cup U_2)] \rightarrow \ker[A(U_3) \rightarrow A^U(U_{13} \cup U_{23})]. \quad (4.2)$$

По определению $\tilde{A}^U(U_3)$ состоит из форм, которые определены на симплексах, содержащихся в U_1 , U_2 или U_3 , но при этом равных нулю на симплексах, лежащих в U_1 или U_2 . Такие формы могут быть отличны от нуля лишь на

симплексах, которые лежат в U_3 и при этом не лежат целиком в одном из множеств U_1 или U_2 , или, что то же самое, равны нулю на симплексах из U_{13} и U_{23} . Легко видеть, что эта алгебра совпадает с $\ker[A(U_3) \rightarrow A^U(U_{13} \cup U_{23})]$. Следовательно, верхняя строка диаграммы расщепляется в сумму двух коротких точных последовательностей и поэтому точна сама.

Таким образом, исходная диаграмма может быть записана в виде точной последовательности комплексов

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

где A , B и C представляют собой строки диаграммы. Как мы показали, $H(A) = H(C) = 0$. Следовательно, $H(B) = 0$.

Доказательство шага индукции в общем случае проводится аналогично. При этом вместо изоморфизма (4.2) нужно проверить, что изоморфизмом является отображение ограничения

$$\begin{aligned} \ker[A^U(U_1 \cup \dots \cup U_k) \rightarrow A^U(U_1 \cup \dots \cup U_{k-1})] \\ \rightarrow \ker[A(U_k) \rightarrow A^U(U_{1,k} \cup \dots \cup U_{k-1,k})], \end{aligned}$$

что устанавливается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Последовательность

$$0 \rightarrow F_{\text{hor}}^p A_{PL}^U(B) \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, F_{\text{hor}}^p A_{PL}(U)) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, F_{\text{hor}}^p A_{PL}(U)) \xrightarrow{\delta} \dots$$

точна, поскольку в точной последовательности леммы 5 отображения $i_{A_{PL}}^*$ и δ сохраняют степень формы. Поэтому точна последовательность факторов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}^U(B) \xrightarrow{i_{A_{PL}}^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U)) \\ \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U)) \xrightarrow{\delta} \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь заметим, что имеет место естественный изоморфизм комплексов,

$$(F_{\text{hor}}^p A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) / (F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) = F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W,$$

который следует из изоморфизма $A_{PL}(U) \otimes \Lambda W = A_{PL}(U) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$. Таким образом, последовательность (δ_1^A) получается из последовательности (4.3) почленным тензорным умножением на векторное пространство ΛW . Так как эта операция согласована с отображениями δ и $i_{A_{PL}}^*$, то получившаяся последовательность (δ_1^A) точна.

Для проверки точности последовательности (δ_2^A) заметим, что дифференциал в комплексе $F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$ действует только по второму сомножителю, поэтому имеет место естественный изоморфизм

$$\begin{aligned} H((F_{\text{hor}}^p A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) / (F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W), d_F) \\ = H(F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W, d_F) = F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes H(\Lambda W, d_F). \end{aligned}$$

Последовательность (δ_2^A) получается почленным тензорным умножением последовательности (4.3) на векторное пространство $H(\Lambda W, d_F)$, и эта операция также согласована с отображениями δ и $i_{A_{PL}}^*$. Таким образом, последовательность (δ_2^A) точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Нам нужно показать, что отображение

$$I: F_{\check{\text{Cech}}}^* \check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \hookrightarrow F^* \check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$$

индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей, начиная с члена E_2 .

Опишем пространства $E_{1,(\check{\text{Cech}})}$ и E_1 . Дифференциал d_0 спектральной последовательности, построенной по фильтрации Чеха, равен дифференциалу минимальной модели d . Следовательно, $E_{1,(\check{\text{Cech}})}^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, H^q(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W, d))$.

Дифференциал d_0 спектральной последовательности, построенной по фильтрации F^p , совпадает с дифференциалом d_F , индуцированным дифференциалом де Рама d на факторпространствах

$$A_{PL}(U)^p \otimes \Lambda W = A_{PL}(U)^{\geq p} \otimes \Lambda W / A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W.$$

Такой дифференциал сохраняет пространства $\check{C}^{p-k}(\mathcal{U}, A_{PL}(U)^k \otimes \Lambda W)$. Следовательно, имеет место изоморфизм

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{k=0}^p \check{C}^{p-k}(\mathcal{U}, H^{q+k}(A_{PL}(U)^k \otimes \Lambda W, d_F)).$$

Дифференциал d_1 в последней спектральной последовательности является суммой дифференциалов d_X и δ , где дифференциал d_X – связывающий гомоморфизм, индуцированный дифференциалом d ,

$$d_X: H^*(A_{PL}(U)^p \otimes \Lambda W, d_F) \rightarrow H^*(A_{PL}(U)^{p+1} \otimes \Lambda W, d_F).$$

Нам нужно показать, что отображение $I_1: E_{1,(\check{\text{Cech}})}^{p,q} \rightarrow E_1^{p,q}$ при переходе к когомологиям относительно дифференциалов d_1 индуцирует изоморфизм $I_2: E_{2,(\check{\text{Cech}})}^{p,q} \cong E_2^{p,q}$.

Воспользуемся леммой 2. Зафиксируем целое неотрицательное число q . Рассмотрим комплексы $(K^{k,l}, \delta \pm d_X) = \check{C}^k(\mathcal{U}, H^{q+l}(A_{PL}(U)^l \otimes \Lambda W))$ и $(X^k, \delta) = E_{1,(\check{\text{Cech}})}^{k,q}$. Легко видеть, что $E_1^{p,q} = (\text{Tot } K)^p$ и $E_2^{p,q} = H^p(\text{Tot } K, D)$. Кроме того, I_1 является окаймлением $I_1: X^k \rightarrow K^{k,0}$. Для того чтобы воспользоваться леммой 2, остается доказать лемму 7.

ЛЕММА 7. *Последовательность*

$$0 \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}, H^q(A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)) \xrightarrow{I^*} \check{C}^k(\mathcal{U}, H^q(A_{PL}(U)^0 \otimes \Lambda W, d_F)) \xrightarrow{d_X} \check{C}^k(\mathcal{U}, H^{q+1}(A_{PL}(U)^1 \otimes \Lambda W, d_F)) \xrightarrow{d_X} \dots$$

точна, где дифференциал d_X – связывающий гомоморфизм,

$$d_X: H^*(A_{PL}(U)^p \otimes \Lambda W, d_F) \rightarrow H^*(A_{PL}(U)^{p+1} \otimes \Lambda W, d_F),$$

индуцированный дифференциалом d .

Лемма 7 будет доказана при помощи следующего утверждения, являющегося аналогом леммы Пуанкаре для кусочно полиномиального случая.

ЛЕММА 8. Пусть $a \in A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W$ – такая форма, что $p \geq 0$, $da = 0$. Тогда найдется форма $\varphi \in A_{PL}(U)^{\geq p} \otimes \Lambda W$ такая, что $d\varphi = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что алгебра $A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$ является относительной алгеброй Сулливана. В частности, на W существует фильтрация $W(0) \subset W(1) \subset \dots \subset W$ такая, что $d(1 \otimes w) \in A_{PL}(U) \otimes \Lambda W(n-1)$, если $w \in W(n)$. Пространства $W(n)$ градуированы степенью. Через ΛW^k обозначим пространство элементов из ΛW , имеющих степень k .

Определим отношение порядка на пространстве $A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$. Рассмотрим моном $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, где $w_i \in W$ – неразложимые элементы. Сопоставим ему набор чисел $\{a_0, \dots, a_n, \dots\}$, где каждое число a_k обозначает количество сомножителей w_i , удовлетворяющих условию $w_i \in W(k)$, но $w_i \notin W(k-1)$. На конечных наборах можно ввести следующее соотношение порядка:

$$\{a_0, \dots, a_n\} < \{b_0, \dots, b_n\}, \quad \text{если } a_n < b_n \text{ или } a_n = b_n, \\ \text{но при этом } \{a_0, \dots, a_{n-1}\} < \{b_0, \dots, b_{n-1}\}.$$

Для любого монома w количество ненулевых чисел в таком наборе конечно. Поэтому будем говорить, что $w_1 < w_2$, если для соответствующих им наборов выполнено $\{a_0, \dots, a_n\} < \{b_0, \dots, b_n\}$. Для произвольного элемента $a \in A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$ определим его порядок как максимальный из порядков его слагаемых.

Основное свойство этого порядка таково: дифференциал d его не увеличивает. Более того, если представить дифференциал элемента $a \otimes w$ в виде $d(a \otimes w) = d(a) \otimes w \pm a \otimes d(w)$, то первое слагаемое будет иметь такой же порядок, как и у $a \otimes w$, а второе – меньший.

Для формы a из условия леммы подберем такую форму $\theta \in A_{PL}(U)^{\geq p} \otimes \Lambda W$, что $a - d\theta \in A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W$ и $a - d\theta$ имеет меньший порядок, чем a . Для этого рассмотрим все слагаемые в a , имеющие максимальный порядок. Запишем сумму всех таких слагаемых в виде $\sum a_i \otimes w_i$, где w_i – линейно независимые элементы порядка a . Эту сумму можно разбить на две части:

$$\sum_{\deg a_i = p+1} a_i \otimes w_i + \sum_{\deg a_i > p+1} a_i \otimes w_i.$$

Тогда $d(a_i) = 0$, так как в $d(a)$ слагаемые вида $\sum d(a_i) \otimes w_i$ имеют порядок больший, чем остальные слагаемые.

Для первой части суммы $\sum_{\deg a_i = p+1} a_i \otimes w_i$ имеет место следующее соотношение:

$$d(a_i \otimes w_i) = d(a_i) \otimes w_i \pm a_i \otimes d_0(w_i) \pm a_i \cdot d_1(w_i),$$

где

$$d_0: A_{PL}^0(U) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}^0(U) \otimes \Lambda W, \quad d_1: A_{PL}^0(U) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}^{>0}(U) \otimes \Lambda W$$

– разложение дифференциала d на ΛW на компоненту, действующую вдоль слоя, и скручивающую компоненту. В этой сумме второе слагаемое принадлежит $F_{\text{hor}}^{p+1} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$, но при этом не принадлежит $F_{\text{hor}}^{p+2} A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$. Таким свойством среди всех слагаемых $d(a)$ обладают только слагаемые вида $a_i \otimes d_0(w)$. Следовательно, такие слагаемые должны полностью сокращаться между собой и другими слагаемыми вида $a_i \otimes d_0(w')$, $\deg a_i = p+1$. Это означает, что в a возможно выделить слагаемые вида $a_i \otimes (w'_i + w_i)$, где $a_i \otimes w_i$ описаны выше, а $a_i \otimes w'_i$ имеют, возможно, порядок меньший, чем a , и выполнено $a_i \otimes d_0(w'_i + w_i) = 0$.

Для каждого элемента a_i найдется элемент $\theta_i \in A_{PL}(U)$ такой, что $d\theta_i = a_i$, так как алгебра $A_{PL}(U)$ имеет нулевые когомологии. Заметим, что форма

$$\begin{aligned} a - d\left(\sum_{\deg a_i = p+1} \theta_i \otimes (w_i + w'_i)\right) - d\left(\sum_{\deg a_i > p+1} \theta_i \otimes w_i\right) \\ = a - \sum_{\deg a_i > p+1} d(\theta_i) \otimes w_i - \sum_{\deg a_i = p+1} d(\theta_i) \otimes (w_i + w'_i) \\ \pm \sum_{\deg a_i > p+1} \theta_i \cdot d(w_i) \pm \sum_{\deg a_i = p+1} \theta_i \cdot d(w_i + w'_i) \end{aligned}$$

имеет меньший порядок, чем a .

Этот элемент лежит в $A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W$. В самом деле, достаточно проверить, что элементы $\theta_i \cdot d(w_i)$ и $\theta_i \cdot d(w_i + w'_i)$ лежат в $A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W$. Это верно, поскольку в первом случае $\deg a_i > p+1$, а значит, $\deg \theta_i > p$, а во втором – поскольку $\deg \theta_i = p$ и $d(w_i + w'_i) \in A_{PL}(U)^{>0} \otimes \Lambda W$.

Мы построили элемент меньшего порядка, лежащий в $A_{PL}(U)^{\geq p+1} \otimes \Lambda W$ и отличающийся от a на дифференциал от формы, лежащей в $A_{PL}(U)^{\geq p} \otimes \Lambda W$. Так как для любого элемента конечной степени из $A_{PL}(U) \otimes \Lambda W$ число элементов, имеющих меньший порядок, конечно, то за конечное число шагов мы получим элемент нулевого порядка, т.е. лежащий в $A_{PL}(U) \otimes 1$, для которого утверждение леммы выполнено очевидным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Нужно показать, что если класс $[\omega]$, принадлежащий $H^{q+l+1}(A_{PL}(U)^{l+1} \otimes \Lambda W, d_F)$, является циклом относительно d_X , то существует класс $[\psi]$ такой, что $d_X[\psi] = [\omega]$.

Пусть $\omega \in A_{PL}(U)^{l+1} \otimes \Lambda W$ – произвольный представитель класса $[\omega]$. Нетрудно видеть, что $d\omega \in A_{PL}(U)^{\geq l+2} \otimes \Lambda W$. При этом по определению $d_X[\omega] = [d\omega]$. Так как $[d\omega] = d_X[\omega] = 0$, то существуют такие $\theta \in A_{PL}(U)^{\geq l+2} \otimes \Lambda W$, $\xi \in A_{PL}(U)^{\geq l+3} \otimes \Lambda W$, что $d\theta = d\omega + \xi$. Отсюда, в частности, следует, что $d\xi = 0$. Следовательно, по лемме 8 существует $\zeta \in A_{PL}(U)^{\geq l+2} \otimes \Lambda W$, для которого выполнено условие $d\zeta = \xi$. Следовательно, форма $\theta - \zeta$ удовлетворяет равенству $d(\theta - \zeta) = d\omega$ и при этом $\theta, \zeta \in A_{PL}(U)^{\geq l+2} \otimes \Lambda W$.

Так как $d(\omega - \theta + \zeta) = 0$, то по лемме 8 существует такая форма $\psi \in A_{PL}(U)^{\geq l} \otimes \Lambda W$, что $d\psi = \omega - \theta + \zeta$. Так как $\theta, \zeta \in A_{PL}(U)^{\geq l+2} \otimes \Lambda W$, то $d_X[\psi] = [\omega]$. Это доказывает точность последовательности в членах вида $\tilde{C}^k(\mathcal{U}, H^{q+l}(A_{PL}(U)^l \otimes \Lambda W, d_F))$, $l > 0$.

Покажем, что в члене $\check{C}^k(\mathcal{U}, H^q(A_{PL}(U)^0 \otimes \Lambda W, d_F))$ данная последовательность также точна. Пусть $\omega \in A_{PL}(U)^0 \otimes \Lambda W$ – произвольный представитель цикла $[\omega] \in H^q(A_{PL}(U)^0 \otimes \Lambda W, d_F)$ такого, что $d_X[\omega] = 0$. Это означает, что существуют такие $\theta \in A_{PL}(U)^{\geq 1} \otimes \Lambda W$ и $\xi \in A_{PL}(U)^{\geq 2} \otimes \Lambda W$, что $d\omega = d\theta + \xi$. Ясно, что $d\xi = 0$. По лемме 8 существует $\zeta \in A_{PL}(U)^{\geq 1} \otimes \Lambda W$, для которого выполнено условие $d\zeta = \xi$. Следовательно, форма $\theta - \zeta$ удовлетворяет равенству $d(\theta - \zeta) = d\omega$ и при этом $\theta, \zeta \in A_{PL}(U)^{\geq 1} \otimes \Lambda W$. Таким образом, для формы $\psi = \omega - \theta + \zeta$ имеем $d\psi = 0$ и $I^*([\psi]) = [\omega] \in H^q(A_{PL}(U)^0 \otimes \Lambda W, d_F)$.

Осталось показать, что последовательность точна в самом первом члене. Действительно, если для некоторого класса $[\omega] \in H^q(A_{PL}(B) \otimes \Lambda W)$ выполнено равенство $I^*([\omega]) = 0$, то у этого класса существует представитель вида $\omega = \xi + d(\theta)$, где $\xi \in A_{PL}(U)^{\geq 1} \otimes \Lambda W$. Но так как ω – цикл, то $d\xi = d\omega = 0$. Следовательно, по лемме 8 существует $\zeta \in A_{PL}(U)^{\geq 0} \otimes \Lambda W$, для которого $d\zeta = \xi$. Следовательно, $\omega = d(\theta + \zeta)$, т.е. $[\omega] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В силу леммы 1 достаточно показать, что композиция $(J \circ i_{A_{PL}})^*$ индуцирует изоморфизм в члене E_2 . Вычислим члены E_1 обеих спектральных последовательностей.

Член

$$E_{1,(A_{PL})}^{p,q} = H^{p+q}(A_{PL}^U(B)^p \otimes \Lambda W, d_F)$$

был уже вычислен ранее при доказательстве теоремы 4. Дифференциал d_1 этой последовательности равен дифференциалу d_X , определенному выше в лемме 7.

Кроме того, в доказательстве теоремы 5 был получен изоморфизм

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{k=0}^p \check{C}^{p-k}(\mathcal{U}, H^{q+k}(A_{PL}(U)^k \otimes \Lambda W, d_F)).$$

Дифференциал d_1 этой спектральной последовательности равен $d_X \pm \delta$.

Теперь применим лемму 2. Для фиксированного q положим

$$X^k = H^{q+k}(A_{PL}^U(B)^k \otimes \Lambda W, d_F).$$

Рассмотрим бикомплекс

$$K^{k,l} = \check{C}^l(\mathcal{U}, H^{k+q}(A_{PL}(U)^k \otimes \Lambda W, d_F))$$

с дифференциалами $d_1 = d_X$ и $d_2 = \delta$. Ясно, что

$$((\text{Tot } K)^p, d_X \pm \delta) = (E_1^{p,q}, d_X \pm \delta).$$

При этом $(J \circ i_{A_{PL}})^*: (X^k, d_X) \rightarrow (K^{k,0}, d_X \pm \delta)$ является okayмлением.

Чтобы применить лемму 2 и получить изоморфизм $(J \circ i_{A_{PL}})^*: E_{2,(A_{PL})} = H(X, d_X) \rightarrow H(\text{Tot } K, D) = E_2$, остается воспользоваться точностью последовательности

$$0 \rightarrow H^{q+k}(A_{PL}^U(U)^p \otimes \Lambda W) \xrightarrow{j^*} \check{C}^0(\mathcal{U}, H^{q+k}(A_{PL}(U)^p \otimes \Lambda W)) \xrightarrow{\delta} \dots,$$

которая была установлена в лемме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Рассмотрим комплексы $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(V))$ и $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} V_{\alpha I} & \xrightarrow{j_\alpha} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U_{\alpha I} & \xrightarrow{j_\alpha} & B \end{array}$$

порождает двойственный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(V_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(E) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ A_{PL}(U_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(B) \end{array}$$

Отображение $m_{A_{PL}(B)} = (\pi^* \cdot m_E): A_{PL}(B) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}(E)$ определяет для всех α отображения m_{V_α} с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(V_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(E) \\ \uparrow m_{V_\alpha} & & \uparrow m_{A_{PL}(B)} \\ A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W & \xleftarrow{j_\alpha^* \cdot \text{id}} & A_{PL}(B) \otimes \Lambda W \end{array} \quad (4.4)$$

Всевозможные отображения m_{V_α} задают отображение фильтрованных комплексов $m_V: F_{\check{C}\text{ech}} \check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W) \rightarrow F_{\check{C}\text{ech}} \check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}(V))$. Остается заметить, что по теореме 9 отображение m_V индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей этих комплексов, начиная с члена E_1 .

ТЕОРЕМА 9. *Отображение*

$$m_{V_\alpha}: A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W \rightarrow A_{PL}(V_\alpha)$$

является квазиизоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_\alpha: \{pt\} \rightarrow U_\alpha$ – вложение выделенной точки в множество U_α . Коммутативной диаграмме отображений пространств

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{g_\alpha} & V_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \{pt\} & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & B \end{array}$$

соответствует двойственная коммутативная диаграмма алгебр

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(F) & \xleftarrow{g_\alpha^*} & A_{PL}(V_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(E) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ \mathbb{Q} & \xleftarrow{f_\alpha^*} & A_{PL}(U_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(B) \end{array}$$

Аугментация $f_\alpha^* \circ j_\alpha^*$ определяет действие алгебры $A_{PL}(B)$ на $\mathbb{Q}$. Положим

$$(\Lambda W, \bar{d}) = \mathbb{Q} \otimes_{A_{PL}(B)} (A_{PL}(B) \otimes \Lambda W, d) = \mathbb{Q} \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W).$$

Гомоморфизм минимальной модели m_E определит тогда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A_{PL}(F) & \xleftarrow{g_\alpha^*} & A_{PL}(V_\alpha) & \xleftarrow{j_\alpha^*} & A_{PL}(E) & \xleftarrow{\text{id}} & A_{PL}(E) \\ \uparrow m_F & & \uparrow m_{V_\alpha} & & \uparrow m_{A_{PL}(B)} & & \uparrow m_E \\ (\Lambda W, \bar{d}) & \xleftarrow{f_\alpha^* \cdot \text{id}} & A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W & \xleftarrow{j_\alpha^* \otimes \text{id}} & A_{PL}(B) \otimes \Lambda W & \xleftarrow{m_B \otimes \text{id}} & \Lambda V \otimes \Lambda W \end{array} \quad (4.5)$$

Рассмотрим крайний левый квадрат этой диаграммы. Чтобы показать, что m_{V_α} – квазиизоморфизм, нам достаточно показать, что m_F , g_α^* и $f_\alpha^* \cdot \text{id}$ – квазиизоморфизмы.

Отображение g_α^* – квазиизоморфизм, так как вложение g_α является гомотопической эквивалентностью. По лемме 6.7 из [4] отображение $f_\alpha^* \cdot \text{id}$ является квазиизоморфизмом, если f_α^* – квазиизоморфизм, а в тензорном произведении $A_{PL}(U_\alpha) \otimes \Lambda W = A_{PL}(U_\alpha) \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W)$ модуль $\Lambda V \otimes \Lambda W$ полусвободен над ΛV . Первое условие выполнено, так как f_α – гомотопическая эквивалентность, а второе следует из теоремы 14.1 из [4].

Покажем, что m_F – квазиизоморфизм. Из диаграммы (4.5) можно выделить коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(F) & \xleftarrow{g_\alpha^* \circ j_\alpha^*} & A_{PL}(E) \\ \uparrow m_F & & \uparrow m_E \\ (\Lambda W, \bar{d}) & \xleftarrow{\quad} & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Применив к этому квадрату теорему 15.5 из [4], получим, что m_F – квазиизоморфизм. Таким образом, m_{V_α} – также квазиизоморфизм.

Завершим теперь доказательство основной теоремы этого параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Цепочка изоморфизмов спектральных последовательностей, соответствующих комплексам $\Lambda V \otimes \Lambda W$ и $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ уже построена в теоремах 2–8. Установим изоморфизм спектральных последовательностей комплексов $\check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*(V))$. Напомним, что существует квазиизоморфизм $\mathfrak{f}: A_{PL}(V_\alpha) \rightarrow S^*(V_\alpha)$ (см. лемму 3). Он индуцирует морфизм комплексов с фильтрациями

$$F_{\check{C}ech} \check{C}^*(\mathcal{U}, A_{PL}(V)) \rightarrow F_{\check{C}ech} \check{C}^*(\mathcal{U}, S^*(V)),$$

который, в свою очередь, индуцирует изоморфизм их спектральных последовательностей, начиная с члена E_1 .

§ 5. Случай гладкого расслоения

В этом параграфе мы кратко напомним основные результаты работы [6], которые являются аналогами результатов, полученных в § 4 для гладких локально тривиальных расслоений. Рассматриваются спектральные последовательности, построенные по фильтрациям комплекса гладких форм $\Omega^*(E)$ и комплекса Чеха–де Рама $\check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^q)$, и устанавливается их изоморфизм, начиная с члена E_2 . Структура доказательства похожа, но имеются принципиально важные отличия в нескольких местах, наиболее важными из которых являются доказательства аналогов лемм 4, 7 и 8.

Кроме того, конструкции §§ 1–4, разумеется, применимы и к локально тривиальным расслоениям. В следующем параграфе мы покажем для таких расслоений, что спектральные последовательности этого параграфа и последовательности, рассмотренные выше (с заменой коэффициентов на $\mathbb{R}$), также совпадают, начиная с члена E_2 .

В этом параграфе все (ко)гомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим гладкое локально тривиальное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ со слоем F . Зададим фильтрацию F_{hor}^* комплекса де Рама $\Omega^*(E)$ следующим образом. Выберем над тривиализующей окрестностью $U \subset B$ координаты прямого произведения

$$\pi^{-1}(U) = U \times F, \quad \pi^{-1}: P \mapsto (x(P), y(P)),$$

где (x) – координаты в U , а (y) – локальные координаты в F . Тогда произвольная дифференциальная форма степени m на $\pi^{-1}(U)$ в координатах (x, y) имеет вид

$$\sum_{|I|+|J|=m} \omega_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J,$$

где I и J – мультииндексы. Форма $\omega \in \Omega^m(E)$ называется *k-горизонтальной*, если она записывается в виде

$$\sum_{|I|+|J|=m, |I| \geq k} \omega_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J.$$

Свойство формы быть *k-горизонтальной* не зависит от выбора тривиализации расслоения E над U . Форму $\omega \in \Omega^*(E)$ будем называть *k-горизонтальной*, если она *k-горизонтальна* во всех тривиализующих окрестностях.

Свойство формы быть *k-горизонтальной* может быть описано инвариантным образом: $\omega \in F_{\text{hor}}^k \Omega^n(E)$ тогда и только тогда, когда в любой точке $P \in E$ для любых вертикальных векторов $v_1, \dots, v_{n-k+1} \in T_P F \subset T_P E$ и любых векторов $w_1, \dots, w_{k-1} \in T_P E$ выполняется равенство

$$\omega(v_1, \dots, v_{n-k+1}, w_1, \dots, w_{k-1}) = 0.$$

Подпространства $F_{\text{hor}}^k \Omega^*(E)$ задают на комплексе $\Omega^*(E)$ убывающую фильтрацию. Соответствующая спектральная последовательность хорошо известна

в литературе (например, см. [5], [7]) и является одной из версий спектральной последовательности расслоения.

Рассмотрим “хорошее” покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ базы B . Двойной комплекс $\check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^q) = \bigoplus \Omega^q(V_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}})$, снабженный дифференциалами Чеха δ и де Рама d , называется *комплексом Чеха–де Рама $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$ расслоения E* . Его когомологии относительно дифференциала $D = \delta + (-1)^p d$ изоморфны когомологиям E . Фильтрация Чеха

$$F_{\text{Cech}}^k \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) = \bigoplus_{p \geq k} \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^*)$$

задает спектральную последовательность, сходящуюся к когомологиям $H^*(E)$, причем ее второй член изоморфен $H^p(B, H^q(F))$.

Для открытых множеств $U_1 \subseteq U_2$ отображение ограничения $\Omega^*(\pi^{-1}(U_2)) \rightarrow \Omega^*(\pi^{-1}(U_1))$ сохраняет фильтрацию F_{hor} . Поэтому на комплексе Чеха–де Рама корректно определена фильтрация k -горизонтальными формами

$$F_{\text{hor}}^k \check{C}(\mathcal{V}, \Omega^*) = \check{C}(\mathcal{V}, F_{\text{hor}}^k \Omega^*),$$

согласованная с дифференциалами d , δ и D .

ТЕОРЕМА 10. *Спектральные последовательности, построенные по фильтрованным комплексам $F_{\text{Cech}}^* \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$, $F_{\text{hor}} \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$ и $F_{\text{hor}} \Omega^*(E)$, естественно изоморфны как алгебры, начиная с члена E_2 .*

Заметим, что при $F = pt$ эта теорема дает хорошо известный изоморфизм когомологий де Рама и когомологий Чеха.

Доказательство теоремы 10 аналогично доказательству теоремы 1, но несколько проще. Оно разбивается на две части. Первая часть – это теорема 11, которая для случая расслоения Серра соответствует теоремам 2–4.

Отображение $j: \Omega^*(E) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$, которое глобальной форме ω ставит в соответствие 0-коцепь Чеха–де Рама $\{\omega|_{V_\alpha}\}$, согласовано с дифференциалами и фильтрацией F_{hor} . Следовательно, оно индуцирует отображение $j_r: E_{r,(\Omega^*)}^{*,*} \rightarrow E_{r,(\text{hor})}^{*,*}$ соответствующих спектральных последовательностей.

ТЕОРЕМА 11. *Отображение $j_r: E_{r,(\Omega^*)}^{*,*} \rightarrow E_{r,(\text{hor})}^{*,*}$ – изоморфизм, начиная с $r = 1$.*

Вторая часть доказательства теоремы 10 состоит в проверке совпадения спектральных последовательностей комплекса Чеха–де Рама $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$, построенных по двум фильтрациям F_{Cech} и F_{hor} .

ТЕОРЕМА 12. *Спектральные последовательности комплекса $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$, ассоциированные с фильтрациями F_{Cech} и F_{hor} , естественно изоморфны, начиная с члена E_2 .*

Введем на комплексе Чеха–де Рама новую фильтрацию. Положим

$$F^k \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) = \sum_{p+q=k} F_{\text{Cech}}^p \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \cap F_{\text{hor}}^q \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*).$$

Иными словами,

$$F^k \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^q) = \begin{cases} \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^q) & \text{при } p \geq k, \\ \check{C}^p(\mathcal{V}, F_{\text{hor}}^{k-p} \Omega^q) & \text{при } p < k. \end{cases}$$

Легко видеть, что тождественное отображение комплекса Чеха–де Рама в себя задает естественные отображения фильтрованных комплексов

$$F_{\text{Cech}}^* \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \xrightarrow{I} F^* \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*), \quad F_{\text{hor}}^* \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \xrightarrow{J} F^* \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*),$$

и поэтому оно индуцирует отображения соответствующих спектральных последовательностей.

Теорема 12 очевидным образом вытекает из следующих двух теорем 13 и 14.

ТЕОРЕМА 13. *Отображение I^* является изоморфизмом, начиная с E_2 .*

ТЕОРЕМА 14. *Отображение J^* является изоморфизмом, начиная с E_2 .*

ТЕОРЕМА 15. *Отображение*

$$J \circ j: \Omega^*(E) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$$

согласовано с фильтрацией F_{hor} первого комплекса и фильтрацией F второго комплекса. Эта композиция индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей соответствующих комплексов, начиная с члена E_2 .

Тогда теорема 10 вытекает из теорем 11, 13 и 15. При этом теорема 14 в доказательстве теоремы 10 не используется, но, разумеется, остается справедливой и вытекает из теорем 11 и 15.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Проводится аналогично доказательству теоремы 4. Отличие состоит в том, что в гладком случае разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{U}$, позволяет значительно проще доказать лемму 10, соответствующую лемме 4 для случая расслоений Серра.

Нам понадобится вспомогательная конструкция. Рассмотрим отображения $S^p: \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^*(V)) \rightarrow \check{C}^{p-1}(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$ и $S^0: \check{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^*(V)) \rightarrow \Omega^*(E)$, задаваемые следующим образом. Выберем на пространстве X произвольное разбиение единицы ρ_β , подчиненное покрытию U_β . Его можно рассматривать так же, как разбиение единицы на E , подчиненное покрытию V_β и не зависящее от координат слоя. Для $p \geq 1$ и $f = \{f_J \in \Omega^*(V_J) : |J| = p + 1\} \in \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$ положим

$$(S^p f)_J = \sum_{\alpha \notin J} (-1)^\alpha \rho_\alpha f_{J \cup \{\alpha\}}.$$

Для $f = \{f_\alpha \in \Omega^*(V_\alpha)\} \in \check{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$ положим $S^0 f = \sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha \in \Omega^*(E)$. В тех случаях, когда это не вызывает затруднений, мы будем опускать верхний индекс у S .

ЛЕММА 9 (о цепной гомотопии). *Отображения S^p обладают следующими свойствами:*

- а) выполнены равенства $S^{p+1}\delta + \delta S^p = \text{id}$ при $p \geq 1$ и $jS^0 - S^1\delta = \text{id}$;
- б) S^p согласовано с фильтрацией F_{hor} ;
- в) если $\omega \in F_{\text{hor}}^k \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega^q(V))$, то $(dS^p - S^p d)\omega \in F_{\text{hor}}^{k+1} \check{C}^{p-1}(\mathcal{V}, \Omega^{q+1}(V))$, иными словами, S^p коммутирует с d_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства а) и б) – стандартные свойства цепной гомотопии S , построенной по разбиению единицы. Проверим в). Имеет место равенство

$$(dSf)_I = d\left(\sum (-1)^\alpha \rho_\alpha f_{I \cup \{\alpha\}}\right) = \sum (-1)^\alpha (d(\rho_\alpha) f_{I \cup \{\alpha\}} + \rho_\alpha d(f_{I \cup \{\alpha\}})).$$

Следовательно,

$$(dSf)_I - (Sdf)_I = \sum (-1)^\alpha d(\rho_\alpha) f_{I \cup \{\alpha\}}.$$

Заметим, что функции ρ_α зависят только от координат базы. Поэтому 1-формы $d\rho_\beta$ являются 1-горизонтальными, т.е. $d\rho_\beta \in F_{\text{hor}}^1 \Omega^1(V_\beta)$. Таким образом, если $f_{I \cup \{\alpha\}} \in F_{\text{hor}}^k \Omega^*(V_{I \cup \{\alpha\}})$, то

$$\sum (-1)^\alpha d(\rho_\alpha) f_{I \cup \{\alpha\}} \in F_{\text{hor}}^{k+1} \Omega^*(E).$$

ЛЕММА 10. Следующие последовательности отображений точны:

$$0 \rightarrow F_{\text{hor}}^p \Omega^q(E) / F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^q(E) \xrightarrow{j} \check{C}^0(\mathcal{V}, F_{\text{hor}}^p \Omega^q(V) / F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^q(V)) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\cdot) \xrightarrow{\delta} \dots, \quad (\delta 1)$$

$$0 \rightarrow H^{q+k}(F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^*(E)) \xrightarrow{j^*} \check{C}^0(\mathcal{V}, H^{q+k}(F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^*(V), d_F)) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\cdot) \dots. \quad (\delta 2)$$

Ее доказательство состоит в переносе отображения S на последовательности $(\delta 1)$ и $(\delta 2)$ и проверке того, что такие S оказываются стягивающими гомотопиями в $(\delta 1)$ и $(\delta 2)$ соответственно.

Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы 5, но имеется следующее отличие: вместо леммы 7 используется лемма 11.

ЛЕММА 11. Последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{V}, H^q(V)) &\xrightarrow{I^*} \check{C}^k(\mathcal{V}, H^q(F_{\text{hor}}^0 / F_{\text{hor}}^1 \Omega^*(V), d_F)) \\ &\xrightarrow{d_X} \check{C}^k(\mathcal{V}, H^{q+1}(F_{\text{hor}}^1 / F_{\text{hor}}^2 \Omega^*(V), d_F)) \xrightarrow{d_X} \dots \end{aligned}$$

точна.

Для доказательства нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое является обобщением леммы Пуанкаре. В частности, если $F = pt$, то оно в точности совпадает с леммой Пуанкаре.

ЛЕММА 12. Пусть $\pi: V \rightarrow U$ – расслоение над диском и $\omega \in F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^*(V)$, где $p \geq 0$. Если $d\omega = 0$, то существует форма $\psi \in F_{\text{hor}}^p \Omega^*(V)$ такая, что $d\psi = \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую тривиализацию $V \approx U \times F$ с координатами (x, y) . Форму $\omega \in F_{\text{hor}}^{p+1}\Omega^*(V)$ в этих координатах можно представить в виде $\omega = \omega_{p+1} + \dots + \omega_n$, где каждое слагаемое имеет вид

$$\omega_k = \sum_{\#I=k} \omega_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J.$$

Покажем, что из формы ω можно вычесть точную форму $d\theta$, где $\theta \in F_{\text{hor}}^p$, так что разность $\omega - d\theta$ можно представить в виде $\sum_{\#I=p+1} \tilde{\omega}_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J$.

Для любой формы $\theta = \sum \theta_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J$ положим

$$d_x \theta = \sum \frac{\partial \theta_{I,J}(x, y)}{\partial x_k} dx_k \wedge dx^I \wedge dy^J, \quad d_y \theta = \sum \frac{\partial \theta_{I,J}(x, y)}{\partial y_k} dy_k \wedge dx^I \wedge dy^J.$$

Ясно, что $d\theta = d_x \theta + d_y \theta$.

Легко видеть, что условие $d\omega = 0$ влечет за собой равенство $d_x \omega_n = 0$. Из него следует, что при любом J формы $\omega_{n,J}(y) = \sum_{\#I=n} \omega_{I,J}(x, y) dx^I$ являются замкнутыми по x формами для каждого фиксированного y . Поскольку U — диск, найдутся такие гладкие формы $\theta_{n,J}(y)$ (степени $n-1$ по x), что $d_x \theta_{n,J}(y) = \omega_{n,J}(y)$. Из классического доказательства леммы Пуанкаре следует, что коэффициенты формы $\theta_{n,J}$ гладко зависят от x при каждом фиксированном y . Покажем, что форму $\theta_{n,J}$ можно выбрать так, чтобы ее коэффициенты гладко зависели от x и от y .

Пусть $\omega(y) = \sum_{\#I=p} \omega_I(x, y) dx^I$ — замкнутая форма относительно d_x . Представим ω в виде суммы $\omega = \omega_1 \wedge dx^1 + \omega_2 \wedge dx^2 + \dots + \omega_n \wedge dx^n$, где формы ω_k не содержат dx^i для $i < k$. Тогда в качестве формы θ такой, что $d_x \theta = \omega$, можно взять форму

$$\begin{aligned} \theta(x, y) = & \int_0^{x^1} \omega_1(\tau, x_2, \dots, y) d\tau + \int_0^{x^2} \omega_2(0, \tau, x_3, \dots, y) d\tau \\ & + \dots + \int_0^{x^n} \omega_n(0, \dots, \tau, y) dx^n. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Доказательство того, что $d_x \theta = \omega$ — это классическое доказательство леммы Пуанкаре. Легко видеть, что коэффициенты формы θ гладко зависят от x и y .

Вернемся к форме $\omega = \omega_{p+1} + \dots + \omega_n$. В силу построения форм $\theta_{n,J}$ выполнено равенство

$$\omega - d\left(\sum_J \theta_{n,J}(x, y) \wedge dy^J\right) = \omega_{p+1} + \dots + \omega_{n-1} - d_y\left(\sum_J \theta_{n,J}(x, y) \wedge dy^J\right).$$

При этом степень по x последнего слагаемого $d_y(\sum_J \theta_{n,J}(x, y) \wedge dy^J)$ не превосходит $n-1$. Кроме того, $\theta_{n,J} \wedge dy^J \in F_{\text{hor}}^p \Omega^*(V)$. Иными словами, форма $\omega - d(\theta_{n,J} \wedge dy^J)$ представляется в виде $\omega_{p+1} + \dots + \omega_{n-2} + \tilde{\omega}_{n-1}$. Прделав такую операцию несколько раз, получим, что форму ω можно заменить на когомологичную ей форму $\tilde{\omega}_{p+1} = \sum_{\#I=p+1} \omega_{I,J}(x, y) dx^I \wedge dy^J$, причем из построения следует, что $\omega - \tilde{\omega}_{p+1} = d\hat{\theta}$, где $\hat{\theta} \in F_{\text{hor}}^p$.

Далее, представим форму $\tilde{\omega}_{p+1}$ в виде суммы:

$$\tilde{\omega}_{p+1} = \omega_{p+1,1} \wedge dx^1 + \omega_{p+1,2} \wedge dx^2 + \cdots + \omega_{p+1,n} \wedge dx^n,$$

где формы $\omega_{p+1,k}$ не содержат сомножителей вида dx^i для $i < k$. Искомая форма θ , для которой $d\theta = \tilde{\omega}_{p+1}$, может быть выбрана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta = & \int_0^{x^1} \omega_{p+1,1}(\tau, x_2, \dots, y) d\tau + \int_0^{x^2} \omega_{p+1,2}(0, \tau, x_3, \dots, y) d\tau \\ & + \cdots + \int_0^{x^n} \omega_{p+1,n}(0, \dots, \tau, y) dx^n. \end{aligned}$$

Для того чтобы проверить равенство $d\theta = \tilde{\omega}_{p+1}$, нам нужно установить, что

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial y^k} dy^k = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^k} = \omega_{p+1,k}.$$

Проверим первое условие. В самом деле, так как $\omega_{p+1,k}$ не содержит множителей dx^i для $i < k$, то и $\frac{\partial \omega_{p+1,k}}{\partial y^i}$ их также не содержит. Следовательно, если обозначить соответствующие слагаемые суммы через θ_k , то выполнено равенство

$$\sum \frac{\partial \theta_k}{\partial y^i} dy^k = \sum \frac{\partial \omega_{p+1,k}}{\partial y^i} dy^k = 0.$$

Значит, $\sum \frac{\partial \theta}{\partial y^i} dy^k = 0$. Проверка второго условия, т.е. равенства $\frac{\partial \theta}{\partial x^k} = \omega_{p+1,k}$, фактически повторяет доказательство леммы Пуанкаре.

Доказательство леммы 11 полностью аналогично доказательству леммы 7, оно опирается на лемму 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Член $E_{1,(\Omega^*)}^{p,q} = H^{p+q}(F_{\text{hor}}^p / F_{\text{hor}}^{p+1} \Omega^*(E))$ вычислен в доказательстве теоремы 11. Дифференциал d_1 этой последовательности равен дифференциалу d_X .

Выше было показано, что

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{k=0}^p \check{C}^{p-k}(\mathcal{V}, H^{q+k}(F_{\text{hor}}^k / F_{\text{hor}}^{k+1} \Omega^*(V), d_F)),$$

причем дифференциал d_1 этой спектральной последовательности равен $d_X \pm \delta$.

Для фиксированного q положим $X^k = H^{q+k}(F_{\text{hor}}^k / F_{\text{hor}}^{k+1} \Omega^{k+q}(E), d_F)$. Рассмотрим бикомплекс

$$K^{k,l} = \check{C}^l(\mathcal{V}, H^{k+q}(F_{\text{hor}}^k / F_{\text{hor}}^{k+1} \Omega^*(V), d_F))$$

с дифференциалами $d_1 = d_X$ и $d_2 = \delta$. Ясно, что

$$((\text{Tot } K)^p, d_X \pm \delta) = (E_1^{p,q}, d_X \pm \delta).$$

Легко видеть, что $(J^* \circ j^*) : (X^k, d_X) \rightarrow (K^{k,0}, d_X \pm \delta)$ является окаймлением.

Из леммы 2 следует, что отображение

$$(J \circ j)^*: E_{2,(\Omega^*)} = H(X, d_X) \rightarrow H(\text{Tot } K, D) = E_2$$

является изоморфизмом при условии, что точна последовательность

$$0 \rightarrow H^{q+k}(F_{\text{hor}}^p/F_{\text{hor}}^{p+1}\Omega^*(E)) \xrightarrow{j^*} \check{C}^0(\mathcal{V}, H^{q+k}(F_{\text{hor}}^p/F_{\text{hor}}^{p+1}\Omega^*(V), d_F)) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Это было доказано в лемме 10.

§ 6. Изоморфизмы спектральных последовательностей для гладкого расслоения

Пусть для гладкого расслоения $\pi: E \rightarrow B$ со слоем F зафиксировано “хорошее” покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ базы B . Тогда определены спектральные последовательности, рассмотренные в §§ 1–4, так же, как и последовательности работы [6] (см. § 5).

Пусть X – гладкое многообразие. Через $S_{\text{smooth}}^*(X)$ обозначим комплекс цепей, заданных только на гладких симплексах в X . Естественное отображение $\zeta_X: S^*(X) \rightarrow S_{\text{smooth}}^*(X)$ является квазиизоморфизмом. Кроме того, отображение интегрирования гладкой k -формы $\omega \in \Omega^k(X)$ по гладкому k -мерному симплексу задает квазиизоморфизм комплексов $\oint_X: \Omega^*(X) \rightarrow S_{\text{smooth}}^*(X)$.

Семейства отображений ζ_{V_I} и $\oint_{V_I}$ задают следующие отображения комплексов Чеха:

$$\zeta: \check{C}^*(\mathcal{V}, S^*) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{V}, S_{\text{smooth}}^*), \quad \oint: \check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{V}, S_{\text{smooth}}^*),$$

которые согласованы с дифференциалами d и δ , а также сохраняют фильтрацию Чеха.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 16. *Отображения ζ и $\oint$ индуцируют изоморфизмы спектральных последовательностей, ассоциированных с фильтрацией Чеха в комплексах $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*)$, $\check{C}^*(\mathcal{V}, S_{\text{smooth}}^*)$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$, начиная с члена E_1 .*

Это утверждение непосредственно вытекает из того, что $\oint_X$ и ζ_X – квазиизоморфизмы для произвольного X .

Таким образом, для гладкого расслоения все рассмотренные в работе спектральные последовательности естественно изоморфны как алгебры, начиная с E_2 .

Список литературы

- [1] Ж.-П. Серр, “Сингулярные гомологии расслоенных пространств”, *Расслоенные пространства и их приложения*, ИЛ, М., 1958, 9–97; пер. с фр.: J.-P. Serre, “Homologie singulière des espaces fibrés. Applications”, *Ann. of Math.* (2), **54**:3 (1951), 425–505.

- [2] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge Stud. Adv. Math., **58**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [3] D. W. Barnes, *Spectral sequence constructors in algebra and topology*, Mem. Amer. Math. Soc., **53**, no. 317, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [4] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Grad. Texts in Math., **205**, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] Ф. А. Гриффитс, Д. В. Морган, *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: Ph. A. Griffiths, J. W. Morgan, *Rational homotopy theory and differential forms*, Progr. Math., **16**, Birkhäuser, Boston, MA, 1981.
- [6] А. Ю. Онищенко, Ф. Ю. Попеленский, “Об эквивалентности некоторых спектральных последовательностей гладкого расслоения”, *Соврем. пробл. мат. и мех., матем.*, **3**:2 (2009), 104–114.
- [7] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [8] J. W. Vick, *Homology theory. An introduction to algebraic topology*, Academic Press, New York–London, 1973.
- [9] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Grad. Texts in Math., **82**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.

А. Ю. Онищенко (A. Yu. Onishchenko)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: onischenko_ay@inbox.ru

Поступила в редакцию

08.06.2010

Ф. Ю. Попеленский (Th. Yu. Popelensky)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: popelens@mech.math.msu.su