Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Дифференциальные уравнения с производной по мере, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 2, 93–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:19:31

УДК 517.91+517.518.1

Н. Б. Енгибарян

Дифференциальные уравнения с производной по мере

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ), содержащие производную искомых функций по мере μ , непрерывной относительно меры Лебега. Установлена однозначная разрешимость задачи Коши для линейной нормальной системы ДУ с μ -производной. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения типа уравнения Риккати с μ -производной, связанной с краевой задачей для линейной системы ДУ. С его помощью получено необходимое и достаточное условие существования вольтерровой факторизации линейных операторов, отличающихся от единичного на интегральный оператор, вполне непрерывный в пространстве $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения с производной по мере, уравнение Риккати, факторизация.

§ 1. Введение

1.1. В настоящей работе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие производную искомых зарядов на вещественной оси по некоторой мере μ (ДУМ). Предполагается, что эта мера непрерывна относительно меры Лебега и может содержать нетривиальную сингулярную компоненту. Установлена однозначная разрешимость задачи Коши для линейной нормальной системы ДУМ. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости матричного уравнения типа уравнения Риккати с μ -производной, через решение которого факторизуется соответствующая краевая задача для линейной системы ДУМ.

С помощью этих результатов получено необходимое и достаточное условие существования вольтерровой факторизации оператора $I - K$, где I – единичный оператор, а K – вполне непрерывный интегральный оператор, действующий в пространстве $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

Кроме того, в работе вкратце рассматривается вопрос о применении ДУМ к задачам теории случайных процессов.

Статья содержит аналогии ряда известных результатов теории линейных дифференциальных уравнений и матричных уравнений Риккати (см. [1]–[6]); некоторые из них приведены без доказательств.

§ 2. Линейная система ДУ с производной по мере

2.1. Функциональные пространства и заряды. Пусть μ – неубывающая непрерывная функция на $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим конечную меру $\tilde{\mu}$

Лебега–Стилтьеса на $[a, b]$, порожденную функцией μ в соответствии с равенством $\tilde{\mu}(dx) = d\mu(x)$. Для $J = J_{rl} = [r, l] \subset [a, b]$ имеем

$$\tilde{\mu}(J) = \mu(l) - \mu(r) = \int_r^l d\mu(t).$$

Мера $\tilde{\mu}$ непрерывна относительно меры Лебега m .

Рассмотрим банаховы пространства $L_p(\mu, J)$, $1 \leq p < \infty$, и $L_\infty(\mu, J) = M(\mu, J)$ с обычными нормами, а также пространство $C_A(\mu, J) \subset C(J)$ функций, абсолютно непрерывных на J относительно меры $\tilde{\mu}$. Обозначим через $L_p(\mu)$ и $C_A(\mu)$ соответствующие пространства в случае $J = [a, b]$. Согласно теореме Радона–Никодима (см. [7]) заряд $\tilde{\nu}$, порожденный функцией $\nu \in C_A(\mu)$, обладает плотностью

$$\rho(x) = \frac{d\nu(x)}{d\mu(x)} = \frac{\tilde{\nu}(dx)}{\tilde{\mu}(dx)} \in L_1(\mu).$$

Имеем $\tilde{\nu}(dx) = \rho(x)\tilde{\mu}(dx)$. Функция $\rho \in L_1(\mu)$ является производной заряда $\tilde{\nu}$ по мере $\tilde{\mu}$. Ее мы назовем также μ -производной функции ν . Функция $\nu \in C_A(\mu)$ восстанавливается по ρ при помощи следующей формулы:

$$\nu(x) = \nu(\alpha) + \int_\alpha^x \rho(t) d\mu(t). \quad (2.1)$$

Пространство $C_A(\mu, J_{rl})$ замкнуто относительно умножения и является коммутативной банаховой алгеброй с нормой, определенной через вариацию заряда следующим образом:

$$\|f\|_{rl} = |f(r)| + \int_r^l \left| \frac{df(t)}{d\mu(t)} \right| d\mu(t). \quad (2.2)$$

Для функции $\nu \in C_A(\mu)$, представленной в виде (2.1), имеем

$$\|\nu\| = |\nu(r)| + \int_r^l |\rho(t)| d\mu(t). \quad (2.3)$$

Перечислим некоторые алгебраические и аналитические свойства рассматриваемых классов функций.

Если $f \in L_p(\mu, J)$, $g \in C_A(\mu, J)$, то $fg \in L_p(\mu, J)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Если $f \in C_A(\mu, J)$, $f(x) \neq 0$, то $[f(x)]^{-1} \in C_A(\mu, J)$. Имеют место аналогии правил дифференцирования произведения частного, сложной функции и др. Если $f, g \in C_A(\mu, J)$, то

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{d\mu(x)} = \frac{df(x)}{d\mu(x)}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{d\mu(x)} \quad (\in L_1(\mu)). \quad (2.4)$$

Если $\varphi(x) = f(\mu(x))$, где f – гладкая функция, то $\frac{d\varphi(x)}{d\mu(x)} = f'(\mu(x))$.

Пространство E^n вектор-столбцов $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^T$ (T – знак транспонирования) с компонентами из банахова пространства E снабдим нормой

$$\|z\| = \sum_{k=1}^n \|z_k\|_E. \quad (2.5)$$

Знаком O обозначается нулевой вектор (или матрица).

2.2. Линейная система дифференциальных уравнений. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с μ -производной:

$$\frac{dz(t)}{d\mu(t)} = G(t)z(t) + \eta(t). \quad (2.6)$$

Здесь $\eta \in L_1^N(\mu)$ – заданный вектор-столбец, $z \in C_A^N(\mu)$ – искомый вектор-столбец, $G \in L_1^{N \times N}(\mu)$ – матрица размера $N \times N$ (с элементами из $L_1(\mu)$).

Система (2.6) может быть рассмотрена как на всем интервале $[a, b]$, так и на его некоторой части $J = J_{rl}$. Правая и левая части (2.6) согласованы: если $z \in C_A^N(\mu, J)$, то обе части принадлежат $L_1^N(\mu, J)$.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся уравнения (2.6).

В случае гладкой строго монотонной функции μ система (2.6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем перехода к новому аргументу $\mu = \mu(t)$ или путем перехода к уравнению

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mu'(t)[G(t)z(t) + \eta(t)]. \quad (2.7)$$

В случае функции μ , абсолютно непрерывной по мере Лебега (со всевозможными расположениями промежутков постоянства), замена переменной технически сопряжена со значительными трудностями, а переход к уравнению (2.7) может усложнить изучение и решение уравнения из-за ухудшения функциональных свойств правой части уравнения. Образно говоря, может оказаться нецелесообразной замена “хорошей” функции под дифференциалом “плохой” функцией вне дифференциала.

Ситуация становится намного сложнее, если функция μ имеет нетривиальную сингулярную компоненту.

В настоящем и следующем параграфах будет показано, что изучение уравнения (2.6) можно провести непосредственно, не связывая этот вопрос с возможностью перехода к обыкновенному ДУ.

2.3. Задача Коши и ее разрешимость. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.6), присоединив к нему начальное условие

$$z(a) = z_0, \quad z_0 \in R^N. \quad (2.8)$$

Перейдем к интегральной форме задачи (2.6), (2.8). Согласно формуле (2.1) эта задача эквивалентна следующей системе интегральных уравнений типа уравнения Вольтерра:

$$z(t) = g(t) + \int_a^t G(s)z(s) d\mu(s), \quad (2.9)$$

где $g(t) = z_0 + \int_a^t \eta(s) d\mu(s) \in C_A(\mu)$.

В силу треугольной структуры уравнение (2.9) может быть рассмотрено на произвольном интервале $[a, r]$. Нетрудно убедиться в том, что если $r < l$, то решение в $C_A^N(\mu, [a, l])$ является продолжением решения из $C_A^N(\mu, [a, r])$.

Покажем, что (2.9) имеет единственное решение на $I = [a, b]$. Пусть H_{rl} – интегральный оператор, действующий в $C_A^N(\mu, [r, l])$ по формуле

$$\varphi(t) = H_{rl}f(t) = \int_r^t G(s)f(s) d\mu(s), \quad a \leq r \leq t \leq l \leq b. \quad (2.10)$$

Оценим норму оператора H_{rl} . Запишем (2.10) покомпонентно:

$$\frac{d\varphi_k(x)}{d\mu(x)} = \sum_{m=1}^N (G)_{km}(x)f_m(x), \quad \varphi_k(r) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

В соответствии с (2.2) для нормы φ_k в пространстве $C_A^N(\mu, [r, l])$ получаем следующую оценку:

$$\|\varphi_k\| \leq \int_s^l \left| \sum_{m=1}^N G_{km}(t)f_m(t) \right| d\mu(t) \leq \int_s^l \sum_{m=1}^N |G_{km}(t)| \|f_m\| d\mu(t).$$

Эта оценка в силу (2.5) приводит к неравенству

$$\|\varphi\| \leq \lambda_{sl} \|f\|, \quad (2.11)$$

где

$$\lambda_{sl} = \max_m \sum_{k=1}^N \int_s^l |G_{km}(t)| d\mu(t).$$

Из (2.11) следует оценка

$$\|H_{sl}\| \leq \lambda_{sl}. \quad (2.12)$$

Пусть $q \in (0, 1)$. Матрица-функция $\int_a^x G(t) d\mu(t) \in C_A^{N \times N}(\mu)$ равномерно непрерывна поэлементно на $[a, b]$. Поэтому существует такое конечное разбиение этого промежутка,

$$\Pi[a, b] = \{r_p\} : \quad a = r_0 < r_1 < \dots < r_T = b, \quad (2.13)$$

что

$$\lambda_{r_p, r_{p+1}} \leq q < 1, \quad p = 0, \dots, T-1. \quad (2.14)$$

Докажем конечной индукцией по p , что уравнение (2.9) имеет единственное решение $z^{(p)}$ на $[a, r_p]$ при произвольном $p \leq T-1$. Пусть существует решение $z^{(p)}$ при некотором p . Рассмотрим следующее уравнение на $[r_p, r_{p+1}]$:

$$\varphi^{(p)}(t) = \psi^{(p)}(t) + \int_{r_p}^t G(s)\varphi^{(p)}(s) d\mu(s), \quad t \in [r_p, r_{p+1}], \quad (2.15)$$

где

$$\psi^{(p)}(t) = g(t) + \int_a^{r_p} G(s)f(s) d\mu(s) \in C_A^N(\mu, [r_p, r_{p+1}]).$$

В силу (2.14) и оценки (2.12) уравнение (2.15) является уравнением со сжимающим оператором и имеет единственное решение. При помощи (2.15) легко

проверить, что $\psi^{(p)}(r_p) = z^{(p)}(r_p)$, поэтому вектор-функция $z^{(p+1)}$, представляющая собой непрерывное продолжение вектор-функции $z^{(p)}$ вектор-функцией $\varphi^{(p)}$, принадлежит $C_A^N(\mu, [a, r_{p+1}])$ и является решением уравнения на $[a, r_{p+1}]$. Итак, нами доказана следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Задача Коши (2.6), (2.8) имеет единственное решение $z \in C_A^N(\mu, [a, r_{p+1}])$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичным образом может быть рассмотрена задача Коши для уравнения (2.6) на произвольном интервале J , причем начальное условие может быть поставлено в любом из концов интервала.

2.4. Матрицант и его свойства. Матрицантом (фундаментальным решением) системы (2.6), нормированным в точке a , служит $(N \times N)$ -матрица-функция $Z \in C_A^{N \times N}(\mu)$, определяемая из следующей задачи Коши:

$$\frac{dZ(t)}{d\mu(t)} = G(t)Z(t), \quad (2.16)$$

$$Z(a) = I_N, \quad (2.17)$$

где I_N – единичная $(N \times N)$ -матрица. Уравнение (2.16) распадается на N векторных уравнений относительно столбцов матрицанта. Из леммы 1 следует, что задача (2.16), (2.17) имеет единственное решение в пространстве $C_A^{N \times N}(\mu)$. Используя лемму 1, можно доказать (аналогично случаю обыкновенных ДУ), что $\det Z(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$ (см. также доказательство леммы 2).

Имеет место следующей аналог формулы Коши для решения задачи (2.6), (2.8):

$$z(t) = Z(t)z_0 + Z(t) \int_a^t [Z(s)]^{-1} \eta(s) d\mu(s), \quad (2.18)$$

где через $[Z(s)]^{-1}$ обозначена матрица, обратная к $Z(s)$.

§ 3. Краевая задача и уравнение типа уравнения Риккати с μ -производной

3.1. Двухточечная краевая задача. Рассмотрим следующую линейную N -мерную систему ДУ с μ -производной ($N = 2n$), записанную в блочной форме:

$$\frac{dx(t)}{d\mu(t)} = A(t)x + B(t)y, \quad \frac{dy(t)}{d\mu(t)} = C(t)x + D(t)y \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$x(a) = O, \quad y(r) = \gamma. \quad (3.2)$$

Здесь $r \in [a, b]$, $A, B, C, D \in L_1^{n \times n}(\mu)$, $\gamma \in R^n$ – заданный вектор-столбец, а $x, y \in C_A^n(\mu)$ – искомые вектор-столбцы.

Рассмотрим следующую краевую задачу относительно матриц-функций $X, Y \in C_A^{n \times n}(\mu, [a, r])$ (фундаментального решения задачи (3.1), (3.2)):

$$\frac{dX(t)}{d\mu(t)} = A(t)X + B(t)Y, \quad \frac{dY(t)}{d\mu(t)} = C(t)X + D(t)Y, \quad (3.3)$$

$$X(a) = O, \quad Y(r) = I_n. \quad (3.4)$$

Разрешимость этой задачи эквивалентна разрешимости задачи (3.1), (3.2) при произвольном $\gamma \in R^n$. Имеют место формулы

$$x(t) = X(t)\gamma, \quad y(t) = Y(t)\gamma. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 2. Пусть задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение $X = X_r$, $Y = Y_r$ при произвольном $r \in [a, l]$ и $\gamma \in R^n$. Тогда матрица-функция Y_l невырожденная, т.е.

$$\det Y_l(t) \neq 0, \quad t \in [a, l]. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такое $r \in [a, b]$, что $\det Y_l(r) = 0$. Пусть

$$\gamma \in R^n, \quad \gamma \neq O, \quad Y_l(r)\gamma = O. \quad (3.7)$$

Рассмотрим задачу (3.1), (3.2), в которой $r = l$, а вектор γ обладает свойством (3.7). Согласно (3.5) имеем $y(r) = O$. Поэтому решение (x, y) этой задачи на интервале $[a, r]$ удовлетворяет системе (3.1) и граничным условиям $x(a) = y(r) = O$. В силу условия леммы имеем $x(t) = y(t) = O$, $t \in [a, r]$. Следовательно, пара (x, y) на интервале $[r, l]$ удовлетворяет уравнениям (3.1) и нулевым начальным условиям $x(r) = y(r) = O$. Согласно лемме 1 имеем $x(t) = y(t) = O$, $t \in [r, l]$, откуда следует, что $y(l) = O$, что противоречит второму из условий (3.2) (так как $\gamma \neq O$ согласно (3.7)). Лемма доказана.

3.2. Матричное уравнение Риккати с μ -производной. Роль уравнения Риккати в теории линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений хорошо известна (см. [1]–[6]). Аналогичную роль в теории уравнений (3.1) играют обобщенные уравнения Риккати с производной по мере, которые будут рассмотрены ниже.

Сопоставим уравнению (3.1) следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений типа уравнения Риккати:

$$\frac{dR(t)}{d\mu(t)} = AR + B - R(CR + D) \quad (3.8)$$

с начальным условием

$$R(a) = O. \quad (3.9)$$

Правая и левая части (3.8) согласованы: если $R \in C_A^{n \times n}(\mu, [a, l])$, $l \leq b$, то обе части (3.6) принадлежат $L_1^{n \times n}(\mu, [a, l])$.

Следующая теорема дает достаточное условие разрешимости задачи Коши (3.8), (3.9) через разрешимость краевой задачи (3.3), (3.4). Доказательство теоремы в случае, когда $d\mu(t) = dt$ и A, B, C, D – суть кусочно непрерывные матрицы-функции, содержится в [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть задача (3.1), (3.2) разрешима при произвольном $r \in [a, l]$ и $\gamma \in R^n$. Тогда существует единственное решение задачи (3.8), (3.9). Имеет место равенство

$$X(t) = R(t)Y(t). \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 матрица-функция $Y(t) = Y_l(t)$ невырождена. Обозначим $R(t) = X(t)Y^{-1}(t) \in C_A^{n \times n}(\mu, [a, l])$. Имеет место равенство (3.10). Из (3.4) следует, что R удовлетворяет условию (3.9). Из (3.3) и (3.10) имеем

$$\frac{dY(t)}{d\mu(t)} = (CR + D)Y. \quad (3.11)$$

Дифференцируя (3.10) по μ , получаем

$$\frac{dX(t)}{d\mu(t)} = R \frac{dY(t)}{d\mu(t)} + \frac{dR(t)}{d\mu(t)} Y. \quad (3.12)$$

Подставляя в первое из уравнений (3.3) выражения (3.10), (3.11) и (3.12) для $X(t)$, $\frac{dX(t)}{d\mu(t)}$ и $\frac{dY(t)}{d\mu(t)}$ соответственно, получаем

$$R(CR + D)Y + \frac{dR(t)}{d\mu(t)} Y = (AR + B)Y,$$

откуда в силу обратимости $Y(t)$ следует уравнение (3.8). Теорема доказана.

3.3. Неоднородная краевая задача. Рассмотрим вопрос о разрешимости следующей краевой задачи:

$$\frac{dx(t)}{d\mu(t)} = A(t)x + B(t)y + \varepsilon^+(t), \quad \frac{dy(t)}{d\mu(t)} = C(t)x + D(t)y + \varepsilon^-(t), \quad (3.13)$$

$$x(a) = h, \quad y(r) = \gamma, \quad (3.14)$$

где $\varepsilon^\pm \in L_1^n(\mu)$.

Опишем способ решения задачи (3.13), (3.14) с использованием решения $R \in C_A^{n \times n}(\mu)$ задачи (3.8), (3.9).

Введем новую искомую вектор-функцию $\varphi \in C_A^m(\mu)$ при помощи соотношения

$$x = Ry + \varphi. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.13) и используя равенство (3.8), получаем следующее дифференциальное уравнение относительно φ :

$$\frac{d\varphi(t)}{d\mu(t)} = (A + CR)\varphi + (\varepsilon^+ + R\varepsilon^-) \quad (3.16)$$

с начальным условием

$$\varphi(a) = h, \quad (3.17)$$

получаемым из (3.9) и (3.14). Вектор-функция y определяется из следующей задачи Коши:

$$\frac{dy(t)}{d\mu(t)} = (CR + D)y + \varepsilon^- + C\varphi, \quad y(r) = \gamma, \quad t \in [a, r]. \quad (3.18)$$

Согласно лемме 1 задачи (3.16), (3.17) и (3.18) однозначно разрешимы. Отсюда следует единственность решения задачи (3.13), (3.14). Легко проверить также, что вектор-функции x и y , определяемые путем решения задач Коши (3.16), (3.17) и (3.18), удовлетворяют задаче (3.13), (3.14). Поэтому имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует решение $R \in C_A^{m \times n}(\mu)$ задачи Коши (3.8), (3.9). Тогда для произвольного $r \in [a, l]$ краевая задача (3.13), (3.14) имеет единственное решение: вектор-функция y определяется из задачи Коши (3.18), а вектор-функция x – по формуле (3.15), где φ определяется из задачи Коши (3.16), (3.17).

СЛЕДСТВИЕ 1. Из разрешимости краевой задачи (3.1), (3.2) для произвольного $r \in [a, b]$ и $\gamma \in R^n$ следует существование и единственность решения более общей задачи (3.13), (3.14).

Теорема 2 означает, что решение матричного уравнения (типа) Риккати (3.8) с начальным условием (3.9) факторизует $2n$ -мерную краевую задачу (3.13), (3.14), сводя ее к двум задачам Коши порядка n .

В следующем параграфе матричное уравнение Риккати с μ -производной будет использовано в задаче факторизации интегральных операторов.

§ 4. Факторизация интегрального оператора

4.1. Задача факторизации; сведение к конечномерному случаю.

В работе автора [8] матричные уравнения Риккати были использованы при построении вольтерровой факторизации линейных интегральных операторов второго рода в пространствах суммируемых функций. Используя ДУМ, подход этой работы можно распространить на более широкие классы интегральных операторов.

В настоящем параграфе путем применения теоремы 1 будет решена одна задача вольтерровой факторизации. Под вольтерровым оператором в банаховом пространстве будем подразумевать линейный ограниченный оператор, спектр которого состоит только из точки нуль. Полная непрерывность оператора не предполагается.

Пусть K – вполне непрерывный интегральный оператор, действующий в $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$,

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s) d\mu(s), \quad t \in (a, b). \quad (4.1)$$

Рассмотрим факторизацию

$$I - K = (I - U^+)(I - U^-), \quad (4.2)$$

где $U^\pm$ – суть искомые нижний и верхний вольтерровы операторы следующего вида:

$$(U^+ f)(t) = \int_a^t u^+(t, s)f(s) d\mu(s), \quad (U^- f)(t) = \int_t^b u^-(t, s)f(s) d\mu(s), \quad (4.3)$$

$$t \in (a, b).$$

В монографии [9] получено необходимое и достаточное условие существования факторизации (4.2) в случае, когда K и $U^\pm$ вполне непрерывные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве. В работе автора [8] этот результат был распространен на некоторые классы интегральных операторов, действующих в гильбертовом или банаховом пространствах E функций, суммируемых по мере μ , непрерывной относительно меры Лебега. В настоящем параграфе будет получено необходимое и достаточное условие существования факторизации в случае, когда $E = L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

Следуя подходу, изложенному в [9], мы сведем задачу (4.1) к двум частным задачам: для случая оператора K с достаточно малой нормой и для случая конечномерного оператора K . Вполне непрерывный оператор K , действующий в пространстве $L_p(\mu)$, допускает аппроксимацию конечномерными операторами. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует представление вида

$$K = K_1 + K_2, \quad (4.4)$$

где $\|K_1\| < \varepsilon$, а K_2 – конечномерный оператор.

Пусть $\varepsilon = 1/4$. Займемся построением факторизации

$$I - K_1 = (I - U_1^+)(I - U_1^-), \quad (4.5)$$

где $U_1^\pm$ – вольтерровы операторы вида (4.3). Из леммы 5.2 работы автора [8] следует, что если $\|K_1\| < 1/4$, то существует факторизация (4.5), причем

$$\|U_1^\pm\| < 1, \quad (I - U_1^\pm)^{-1} = I + Q^\pm, \quad (4.6)$$

где $Q^\pm$ – нижний и верхний вольтерровы операторы.

Из (4.4)–(4.6) имеем

$$I - K = (I - U_1^+)(I - W)(I - U_1^-), \quad (4.7)$$

где $W = (I + Q^+)K_2(I + Q^-)$ – конечномерный оператор.

4.2. Факторизация (4.7) усеченного оператора. Пусть $r \in [a, b]$. Обозначим через P_r проектор, действующий в $L_p(\mu)$ путем умножения функции на характеристическую функцию интервала $[a, r]$. В силу идеальности пространства $L_p(\mu)$ проектор P_r является линейным ограниченным оператором в этом пространстве и его норма не превосходит единицы. Оператор P_r переводит $L_p(\mu)$ в его подпространство, изоморфное пространству $L_p(\mu, [a, r])$. Допуская некоторую вольность, для этого подпространства мы также используем обозначение $L_p(\mu, [a, r])$. Оператор P_r играет роль единичного оператора в $L_p(\mu, [a, r])$. Мы будем рассматривать усеченные интегральные операторы $K_r = P_r K P_r$, определенные по формуле

$$\varphi(t) = K_r f(t) = \int_a^r k(t, s) f(s) d\mu(s), \quad t \in [a, r], \quad \varphi(t) = 0, \quad t \in (r, b].$$

Из треугольной структуры вольтерровых операторов (4.3) следуют равенства

$$P_r U^+ = P_r U^+ P_r, \quad U^- P_r = P_r U^- P_r, \quad r \in [a, b]. \quad (4.8)$$

Легко проверить, что если $(I - U^\pm)^{-1} = I + Q^\pm$, где $Q^\pm$ – вольтерровы операторы, то

$$(I - U_r^\pm)^{-1} = I + Q_r^\pm, \quad r \in [a, b], \quad (4.9)$$

где $Q_r^\pm = P_r Q^\pm P_r$.

Отсюда следует, что все усеченные операторы $U_r^\pm$ также вольтерровы.

Пусть имеет место факторизация (4.2). Умножая равенство (4.2) слева и справа на проектор P_r , с учетом (4.8) получаем следующую факторизацию усеченного оператора $P_r - K_r$:

$$P_r - K_r = (P_r - U_r^+)(P_r - U_r^-). \quad (4.10)$$

Аналогичное свойство в случае треугольной (гауссовской) факторизации матриц хорошо известно. Из (4.10) следует, что если существует факторизация (4.2), то

$$P_r - K_r \text{ обратим в } L_p(\mu, [a, r]) \text{ для любого } r \in [a, b]. \quad (4.11)$$

Умножим теперь равенство (4.7) слева и справа на проектор P_r . Учитывая (4.8), получаем следующую факторизацию усеченного оператора $P_r - K_r$:

$$P_r - K_r = (P_r - P_r U_1^+ P_r)(P_r - W_r)(P_r - P_r U_1^- P_r). \quad (4.12)$$

Из (4.9) и (4.12) следует, что если

$$P_r - K_r \text{ обратим в } L_p(\mu, [a, r]), \quad (4.13)$$

при некотором $r \in [a, b]$, то

$$P_r - W_r \text{ обратим в } L_p(\mu, [a, r]). \quad (4.14)$$

4.3. Факторизация в случае конечномерного оператора. Займемся теперь построением вольтерровой факторизации

$$I - W = (I - V^+)(I - V^-), \quad (4.15)$$

где W – конечномерный оператор, фигурирующий в (4.7), а $V^\pm$ – верхний и нижний вольтерровы операторы.

Действующий в $L_p(\mu)$ конечномерный оператор W является интегральным оператором с вырожденным ядром,

$$Wf(t) = \int_a^b w(t, s)f(s) d\mu(s),$$

где

$$w(t, s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t)\beta_k(s), \quad \alpha_k \in L_p(\mu), \quad \beta_k \in L_q(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (4.16)$$

Введем векторы $\alpha = (\alpha_k)$ и $\beta = (\beta_k)^T$. Имеем

$$w(t, s) = \alpha(t)\beta(s). \quad (4.17)$$

Покажем, что факторизация (4.15) сводится к задаче Коши для матричного уравнения типа уравнения Риккати. Для этого мы воспользуемся нелинейными уравнениями факторизации. Факторизация (4.15) эквивалентна следующей нелинейной системе:

$$\begin{aligned} v^+(t, s) &= w(t, s) + \int_a^s v^+(t, \tau) v^-(\tau, s) d\mu(\tau), & t > s, \\ v^-(t, s) &= w(t, s) + \int_a^t v^+(t, \tau) v^-(\tau, s) d\mu(\tau), & t < s \end{aligned} \quad (4.18)$$

(см. [8], [10]). Ищем решение системы (4.18), (4.17) в виде

$$v^+(t, s) = \alpha(t)\varphi(s), \quad v^-(t, s) = \psi(t)\beta(s), \quad (4.19)$$

где $\varphi = (\varphi_m) \in L_q^n(\mu)$, $\psi = (\psi_m)^T \in L_p^n(\mu)$. Подставляя (4.17) и (4.19) в (4.18), получаем

$$\varphi(s) = \beta(s) + R(s)\beta(s), \quad \psi(t) = \alpha(t) + \alpha(t)R(t), \quad (4.20)$$

где

$$R(t) = \int_a^t \varphi(s)\psi(s) d\mu(s) \in C_A^{n \times n}(\mu). \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{dR(t)}{d\mu(t)} = (I + R)A(I + R), \quad R(a) = O, \quad (4.22)$$

где $A(t) = \beta(t)\alpha(t) \in L_1^{n \times n}(\mu)$.

Легко проверить, что если $R \in C_A^{n \times n}(\mu)$ удовлетворяет задаче (4.22), а φ и ψ определяются согласно (4.20), то $v^\pm$, определяемые по формулам (4.19), дают решение уравнений факторизации (4.18). Таким образом, имеет место факторизация (4.15). Используя лемму 1, можно показать, что $V^\pm$ суть вольтерровы операторы.

ЛЕММА 3. Пусть Задача Коши (4.22) обладает решением $R \in C_A^{n \times n}(\mu)$. Тогда существует вольтеррова факторизация (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно показанному выше из разрешимости задачи (4.22) следует существование вольтерровой факторизации (4.15). Из (4.7) и (4.15) следует (4.2), где

$$U^+ = U_1^+ + V^+ - U_1^+ V^+, \quad U^- = U_1^- + V^- - V^- U_1^-.$$

Лемма доказана.

4.4. Факторизационная теорема. Матричное уравнение Риккати (4.22) является простым частным случаем (3.8), когда

$$B = A, \quad C, D = -A. \quad (4.23)$$

Из теоремы 1 следует разрешимость задачи (4.22) в случае разрешимости следующего семейства краевых задач при произвольном $r \in [a, b]$:

$$\frac{dx(t)}{d\mu(t)} = A(t)x + A(t)y, \quad \frac{dy(t)}{d\mu(t)} = -A(t)x - A(t)y \quad (4.24)$$

с граничными условиями

$$x(a) = O, \quad y(r) = \gamma. \quad (4.25)$$

Предположим, что при произвольном $r \in [a, b]$ выполняется условие (4.13). Тогда имеет место (4.14). Покажем, что тогда задача (4.24), (4.25) однозначно разрешима. Рассмотрим усеченное интегральное уравнение

$$f(t) = \alpha(t)\gamma + \int_a^r w(t, s)f(s) d\mu(s), \quad (4.26)$$

где w задается посредством (4.16), а α – вектор, фигурирующий в (4.16). Согласно (4.14) уравнение (4.26) имеет единственное решение. Легко проверить, что это уравнение эквивалентно краевой задаче (4.24), (4.25) относительно вектор-функций

$$x(t) = \int_a^t \beta(s)f(s) d\mu(s), \quad y(t) = \gamma + \int_t^r \beta(s)f(s) d\mu(s),$$

поэтому эта задача имеет единственное решение. С учетом леммы 3 приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – вполне непрерывный интегральный оператор вида (4.1), действующий в пространстве $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$. Для того чтобы существовала факторизация (4.2), необходимо и достаточно, чтобы при произвольном $r \in [a, b]$ и $g \in L_p(\mu, [a, r])$ существовало решение $f \in L_p(\mu, [a, r])$ усеченного уравнения

$$f(t) = g(t) + \int_a^r k(t, s)f(s) d\mu(s).$$

4.5. Применение к марковским процессам. В этом пункте на одном простом примере мы продемонстрируем связь ДУМ с теорией случайных процессов.

Рассмотрим непрерывную марковскую цепь со стохастическим или субстохастическим оператором перехода K вида (4.1) (см. [11]). Оператор K является субстохастическим в широком смысле, если выполнены следующие условия:

- а) $k(t, s) \geq 0$;
- б) $\int_a^r k(t, s) d\mu(t)$ является бэровской функцией от s при $r \in [a, b]$;
- в) имеет место неравенство

$$\int_a^b k(t, s) d\mu(t) \leq q \leq 1. \quad (4.27)$$

Функция k является плотностью переходных вероятностей марковской цепи по отношению к мере μ . Если в (4.27) имеет место равенство (с $q = 1$), то K называется стохастическим (или консервативным). В противном случае цепь обладает несобственным (дефектным) состоянием. Если $q < 1$, то K назовем строго субстохастическим (или строго диссипативным). Для нормы оператора K в $L_1(\mu)$ имеет место следующая оценка:

$$\|K\| \leq q. \quad (4.28)$$

В консервативном случае неравенство (4.28) обращается в равенство.

Ряд задач теории марковских цепей сводится к изучению и решению интегрального уравнения

$$f(t) = g(t) + \int_a^b k(t, s) f(s) d\mu(s) \quad (4.29)$$

со стохастическим или субстохастическим оператором, где $g \in L_1^n(\mu)$. Положительными решениями однородного уравнения (4.29) описываются равновесные (инвариантные) распределения (или инвариантные меры) данной цепи. Неоднородное уравнение (4.29) со субстохастическим оператором возникает, в частности, в теории коллективных марковских процессов (см. [12]).

Рассмотрим уравнение (4.29) в случае так называемой многопарной ядерной функции k , когда

$$k(t, s) = \sum_{m=1}^n \alpha_m^+(t) \beta_m^+(s), \quad s < t, \quad k(t, s) = \sum_{m=1}^n \alpha_m^-(t) \beta_m^-(s), \quad s > t, \quad (4.30)$$

$$\alpha_m^\pm \in L_1(\mu), \quad \beta_m^\pm \in C[a, b].$$

Уравнение (4.29), (4.30) легко свести к системе ДУМ вида (3.13) относительно вспомогательных вектор функций $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, где

$$x_m(t) = \int_a^t \beta_m^+(s) f(s) d\mu(s), \quad y_m(t) = \int_t^b \beta_m^-(s) f(s) d\mu(s),$$

с краевыми условиями $x(a) = O$, $y(b) = O$.

В строго диссипативном случае K является оператором сжатия. Тогда уравнение (4.29) обладает единственным решением в $L_1^n(\mu)$. Из результатов настоящей работы следует, что тогда соответствующее уравнение Риккати обладает решением и задача сводится к двум задачам Коши вида (3.18) и (3.16), (3.17).

Представляется возможным обобщение метода Рунге–Кутты для численного решения ДУ с производной по мере.

Автор выражает благодарность М.Г. Мурадянцу за полезные обсуждения и рецензенту — за полезную рекомендацию.

Список литературы

- [1] W. T. Reid, *Riccati differential equations*, Academic Press, New York–London, 1972.
- [2] В. С. Владимиров, “Приближенное решение одной краевой задачи”, *Прикл. матем. и мех.*, **19** (1958), 315–324.

- [3] R. Bellman, G.M. Wing, *An introduction to invariant imbedding*, Wiley, New York–London–Sydney, 1975.
- [4] Н. Н. Кagiwada, R. E. Kalaba, A. Schumitzky, “An initial-value method for Fredholm integral equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **19**:1 (1967), 197–203.
- [5] Дж. Касти, Р. Калаба, *Методы погружения в прикладной математике*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: J. Casti, R. Kalaba, *Imbedding methods in applied mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [6] Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян, “Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Риккати”, *Докл. АН СССР*, **235**:2 (1977), 263–265; англ. пер.: N.B. Engibaryan, M.G. Muradyan, “Linear differential equations and Riccati equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **18**:4 (1977), 917–920.
- [7] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [8] Н. Б. Енгибарян, “О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 67–82; англ. пер.: N.B. Engibaryan, “On the factorization of integral operators on spaces of summable functions”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 921–937.
- [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967; англ. пер.: I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Transl. Math. Monogr., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.
- [10] Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 61–76; англ. пер.: N.B. Engibaryan, “Setting and solving several factorization problems for integral operators”, *Sb. Math.*, **191**:12 (2000), 1809–1825.
- [11] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, v. 2, Wiley, New York, 1971.
- [12] Н. Б. Енгибарян, “Коллективные марковские процессы с источниками”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **41**:5 (2006), 18–27; англ. пер.: N.B. Engibaryan, “Collective Markov processes with sources”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **41**:5 (2007), 69–79.

Н. Б. Енгибарян (N. B. Engibaryan)

Институт математики НАН Республики Армении,
г. Ереван

E-mail: yengib@instmath.sci.am

Поступила в редакцию

30.11.2009 и 28.06.2010